Werk

Titel: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ort: Berlin

Jahr: 1955

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0052|log75

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

● **Freudenthal, H.: Machines pensantes. — Conférence faite au Palais de la Découverte, le 9 mai 1953, Série D, Nr. 24.** Paris: Université de Paris 1953. 16 p.

McDonald, D. C.: Intentional nonlinearization of servomechanics. Proc. Symposium nonlinear circuit analysis, New York, April 23—24, 1953, 402—411 (1953).

Allgemeine Betrachtungen über die Möglichkeit, die Wirkungsweise eines Zweipunktreglers dadurch zu verbessern, daß man z. B. das Gleichungssystem $J\ddot{E} = -\mathrm{sgn}(KE + L\dot{E})T$ durch $J\ddot{E} = -\mathrm{sgn}(|\dot{E}|\,\dot{E} + 2TE/J)$ ersetzt, was an der Phasenebene veranschaulicht wird. Zur Beseitigung des toten Ganges müßte dann außerdem in einem gewissen Bereich stetige Regelung einsetzen, was zum „Dual Mode Servomechanism" führt. *W. Hahn.*

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

● **Unkovskij, V. A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Leningrad: Seekriegsverlag 1953. 320 S. R. 10,90 [Russisch].

Gillis, Paul P.: Sur la notion de probabilité. Collection de Logique mathématique, Sér. B, I: Théorie des probabilités, 1—13 (1952).

Misès, Richard de: Sur les fondements du calcul des probabilités. Collection de Logique mathématique, Sér. B, I: Théorie des probabilités, 15—29 (1952).

Ballieu, Robert: L'analyse statistique. Collection de Logique mathématique, Sér. B, I: Théorie des probabilités, 31—52 (1952).

Dantzig, D. van: Les problèmes que pose l'application du calcul des probabilités. Collection de Logique mathématique, Sér. B I: Théorie des probabilités, 53—65 (1952).

Fauville, A.: Problèmes que pose la psychologie au calcul des probabilités. Collection de Logique mathématique, Sér. B I: Théorie des probabilités, 133—146 (1952).

Fréchet, Maurice: Le calcul des probabilités dans les sciences sociales. Collection de Logique mathématique, Sér. B I: Théorie des probabilités, 147—168 (1952).

Hirsch, Guy: Conclusions. Sur l'application de la théorie des probabilités à la statistique. Collection de Logique mathématique, Sér. B I: Théorie des probabilités, 169—194 (1952).

Berger, Agnes: On orthogonal probability measures. Proc. Amer. math. Soc. 4, 800—806 (1953).

Verf. führt ihre früheren Untersuchungen (dies. Zbl. **42**, 358) weiter. Es sei L ein Borelscher Mengenkörper von Untermengen der Menge X; es sei $M(L)$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf L; für jedes $m \in M(L)$ sei mit m^* das Maß bezeichnet, welches entsteht, wenn man das direkte Produkt bildet aus abzählbar unendlich vielen Faktoren, die alle gleich m sind (s. P. Halmos, dies. Zbl. **40**, 168). Zwei Wahrscheinlichkeitsmaße μ_1 und μ_2, definiert auf demselben Mengenkörper K, nennt man orthogonal, in Zeichen $\mu_1 \perp \mu_2$, wenn es eine Menge $A \in K$ gibt, für welche $\mu_1(A) = 1$ und $\mu_2(A) = 0$ gilt. Zwei Mengen von Wahrscheinlichkeitsmaßen M_1 und M_2, definiert auf dem Borelschen Mengenkörper K, nennt man orthogonal (in Zeichen $M_1 \perp M_2$), wenn es eine Menge $A \in K$ gibt, für welche $\mu_1(A) = 1$ und $\mu_2(A) = 0$ für jedes $\mu_1 \in M_1$ und $\mu_2 \in M_2$ gilt; d. h., $M_1 \perp M_2$ bedeutet mehr als $\mu_1 \perp \mu_2$ für alle $\mu_1 \in M_1$ und $\mu_2 \in M_2$; man kann jedoch zeigen, daß, falls $M_1 = \{\mu_{1,n}\}$ und $M_2 = \{\mu_{2,n}\}$ beide nur aus abzählbar vielen Elementen bestehen, $M_1 \perp M_2$ mit $\mu_{1,n} \perp \mu_{2,m}$ für jede $\mu_{1,n} \in M_1$ und $\mu_{2,m} \in M_2$ äquivalent ist, da, falls $\mu_{1,n}(A_{nm}) = 1$, $\mu_{2,m}(A_{nm}) = 0$ ist $(n, m = 1, 2, \ldots)$ für $A = \prod_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} A_{nm})$ $\mu_{1,n}(A) = 1$ und $\mu_{2,m}(A) = 0$ gilt $(n, m = 1, 2, \ldots)$. Es folgt leicht aus dem starken Gesetz der großen Zahlen, daß, falls $m_1 \in M(L)$ und $m_2 \in M(L)$ nicht iden-

tisch sind, $m_1^* \perp m_2^*$ gilt; es sei nämlich $A \in L$ eine Menge, für welche $m_1(A) \neq m_2(A)$ ist, ferner $(x_1, x_2, \ldots)$ ein Element des Raumes X^*, d. h. des direkten Produktes von abzählbar unendlich vielen Faktoren X, und es bedeute A^* die Untermenge von X^*, welche aus den Punkten $(x_1, x_2, \ldots)$ von X^* besteht, für welche $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{x_k \in A, 1 \leqq k \leqq n} 1 = m_1(A)$ gilt, dann ist $m_1^*(A^*) = 1$ und $m_2^*(A^*) = 0$. Daraus folgt, daß, falls M_1 und M_2 zwei elementfremde abzählbare Untermengen von $M(L)$, M_1^* bzw. M_2^* die Mengen aller m_1^* bzw. m_2^* mit $m_1 \in M_1$ und $m_2 \in M_2$ sind, $M_1^* \perp M_2^*$ gilt; für nichtabzählbare M_1 und M_2 ist die Gültigkeit von $M_1^* \perp M_2^*$ nicht mehr evident. Das Ziel vorliegender Arbeit ist, eben hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit von $M_1^* \perp M_2^*$ zu finden. Für diesen Zweck muß man eine schwache Topologie in $M(L)$ einführen; Verf. beweist u. a., daß, falls M_1 die Summe von höchstens abzählbar vielen kompakten Mengen ist und M_2 die Lindelöfsche Eigenschaft besitzt, $M_1^* \perp M_2^*$ gültig ist. *A. Rényi.*

Gulotta, Beniamino: Sulla estensione della legge di probabilità di Cauchy. Giorn. Ist. Ital. Attuari **16**, 38—50 (1953).

Observant que la loi de probabilité de Cauchy: $f(x) = k/\pi(k^2 + x^2)$ peut s'interpréter au moyen de la transformation d'une distribution uniforme sur un cercle, ou un demi-cercle, par projection centrale sur une droite convenable, l'A. donne deux généralisations de cette loi, dans le cas de variables casuelles à plusieurs dimensions, en répartissant la masse unitaire uniformément sur une hypersphère ou une demi-hypersphère et en faisant une perspective sur un hyperplan déterminé. De ces deux lois généralisées, la seconde seule est stable et avait déjà été rencontrée par E. Feldheim en suivant une autre méthode (ce Zbl. **17**, 26). *A. Sade.*

Alda, Václav: A note on Poisson's distribution. Czechosl. math. J. **2**, 243—246 und engl. Zusammenfassg. 246 (1952) [Russisch].

Bilden die Zufallsvariablen ξ_{nj} $(j = 1, 2, \ldots, k_n;\ n = 1, 2, \ldots)$ ein „elementares System", für das $\int x\, dF_{nj}(x) = 0$, $\int x^2\, dF_{nj} = b_{nj} < \infty$, $\sum_j b_{nj} = 1$, $\mathrm{Max} b_{nj} \to 0$ für $n \to \infty$, wobei F_{nj} die kumulative Verteilungsfunktion von ξ_{nj} und für jedes n alle k_n Variablen ξ_{nj} $(j = 1, \ldots, n_k)$ gegenseitig stochastisch unabhängig sind, so ist dafür, daß die Verteilung von $x = \sum_{j=1}^{k_n} \xi_{nj}$ für $n \to \infty$ gegen die Poisson-Verteilung $P(x) = e^{-1} \sum_{0 \leqq j < [x+1]} (j!)^{-1}$ konvergiere, notwendig und hinreichend, daß $S_n = \sum_j (\xi_{nj}^2 - \xi_{nj})$ im Wahrscheinlichkeitssinn gegen 1 strebe. Dieser Satz, der ein Analogon zu Ergebnissen von D. A. Raikoff (dies. Zbl. **19**, 224) darstellt, wird vom Verf. mit Hilfe charakteristischer Funktionen bewiesen. *M. P. Geppert.*

Breny, H.: Sur une classe de fonctions aléatoires liées à la loi de Poisson. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **22**, 405—416 (1953).

Angeregt durch ein Problem der Textilindustrie, untersucht Verf. eine spezielle Klasse auf Grund von Poisson-Verteilungen definierter stochastischer Funktionen $U(t, E_1)$, die ganzzahlig, nicht abnehmend, fast sicher nicht konstant, in jedem endlichen Intervall endlich und deren Zuwächse gegenseitig unabhängig sind. Mit Hilfe erzeugender Funktionen beweist er Eigenschaften der Verteilungen gewisser aus ihnen abgeleiteter stochastischer Variablen $n(t, E)$ (vgl. H. Breny, dies. Zbl. **51**, 106), die sich im Textil-Beispiel als Anzahl der die Stelle t kreuzenden Fasern deuten lassen. Schließlich gewinnt Verf. eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $n(t, E)$ vom Markoff-Typ sei. *M. P. Geppert.*

Ríos, S.: Einige Wahrscheinlichkeitsgesetze und stochastische Prozesse, die sich auf einen allgemeinen Typus von Laplace-Stieltjes reduzieren. Trabajos Estadíst. 4, 3—10 (1953) [Spanisch].

Le questioni esposte sono già trattate dal proprio A. — con lievi addizioni e chiarimenti che non affettano alla essenza dal argomento — in un altro lavoro. (Vedi questo Zbl. 48, 361.) *J. Ma. Orts.*

Nisnevič, L. B.: Über ein Urnenschema von Markov. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 2 (54), 131—134 (1953) [Russisch].

Das vom Verf. betrachtete Urnenmodell ist eine Verallgemeinerung des bekannten Urnenproblems von Markoff-Pólya-Eggenberger. [Vgl. A. A. Markoff, Bull. Acad. Sci., Petrograd, VI. Ser. **11**, 177—186 (1917); F. Eggenberger-G. Polya, Z. angew. Math. Mech. **3**, 279—289 (1923).] Es seien in einer Urne Kugeln von der Anzahl A, die nach ihrer Farbe in m Klassen eingeteilt werden. In der i-ten Klasse seien a_i Kugeln ($i = 1, 2, \ldots, m$; $\sum_{i=1}^{m} a_i = A$). Wir ziehen aus der Urne Kugeln, die wir nachher wieder in die Urne legen; wir legen mit jeder Kugel c weitere Kugeln derselben Farbe zurück. Es bezeichne $\mu_i^{(n)}$ die Anzahl der während n Ziehungen gezogenen Kugeln von der Farbe i, $\nu_i^{(n)}$ die Anzahl der in der Urne befindlichen Kugeln von der Farbe i nach der n-ten Ziehung. Es wird die Grenzverteilung der Vektorvariablen $\vec{\mathfrak{x}}_n = (\mu_1^{(n)}/n,\ \mu_2^{(n)}/n, \ldots, \mu_m^{(n)}/n)$ bestimmt. Es wird folgendes gezeigt:

$$(1)\qquad \lim_{n\to\infty} n^{m-1} P\{\mu_1^{(n)} = k_1, \ldots, \mu_m^{(n)} = k_m\} = \Gamma\left(\frac{A}{c}\right)\left[\prod_{i=1}^{m}\Gamma\left(\frac{a_i}{c}\right)\right]^{-1}\prod_{i=1}^{m} x_i^{a_i/c-1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n_i} = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

wobei $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) \in S$, wo S das durch die Bedingungen $0 \leqq x_i \leqq 1$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) und $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ definierte $(m-1)$-dimensionale Simplex im m-dimensionalen Raume bedeutet. Ferner wird gezeigt, daß der Zufallsvektor $\vec{\mathfrak{E}}_n = (\nu_1^{(n)}/N^{(n)}, \ldots, \nu_m^{(n)}/N^{(n)})$ dieselbe Grenzverteilung wie $\vec{\mathfrak{x}}_n$ besitzt, wobei $N^{(n)}$ die Anzahl der Kugeln in der Urne nach der n-ten Ziehung bedeutet. Es sei $\zeta_{hi} = 1$, wenn bei der h-ten Ziehung eine Kugel von der Farbe i erscheint ($h = 1, 2, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots, m$), $\zeta_{hi} = 0$ sonst, dann sind die Vektorveränderlichen $\vec{\mathfrak{z}}_h = (\zeta_{h1}, \zeta_{h2}, \ldots, \zeta_{hm})$ ($h = 1, 2, \ldots, n$) äquivalent. Aus dem Resultat von Dynkin [Uspechi mat. Nauk **8**, Nr. 2, 125—130 (1953)] folgt, daß obige Folge $\vec{\mathfrak{z}}_h$ von Vektorveränderlichen durch Randomisierung einer Folge von unabhängigen Zufallsvektoren erhalten werden kann. Die Folge $\vec{\mathfrak{x}}_n$ kann nämlich dargestellt werden als die Folge von Zufallsvektoren $\vec{\mathfrak{z}}_n(P)$, deren jeder die Werte $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 0, 1)$ mit der Wahrscheinlichkeit $p_1, p_2, \ldots, p_m$ annimmt, falls $P = (p_1, \ldots, p_m)$ dabei einen zufälligen Punkt im S bedeutet, dessen Verteilungsgesetz durch (1) gegeben ist. Es wird darauf hingewiesen, daß obiges Schema auch zur Beschreibung gewissen Kettenreaktionen angewendet werden kann. Wir betrachten m verschiedene Arten von Elementarteilchen. Jedes Elementarteilchen soll während einer Zeit Δt mit der Wahrscheinlichkeit $\lambda\Delta(t) + O(\Delta t)$ weitere $c+1$ Elementarteilchen gleicher Art erzeugen. (Vgl. B. A. Sevast'janov, dies. Zbl. **44**, 338). Waren bei dem Anfang der Reaktion a_k Elementarteilchen der Art k, so ist die Grenzverteilung der Zufallsvektoren $(\nu_1^{(t)}/N^{(t)}, \ldots, \nu_m^{(t)}/N^{(t)})$ die in (1) angegebene Verteilung, wobei $\nu_k^{(t)}$ die Anzahl der im Zeitpunkt t vorhandenen Elementarteilchen von der Art k bedeutet, während $N^{(t)}$ die Gesamtanzahl der Elementarteilchen im Zeitpunkt t bedeutet. *E. Arnóth.*

Finetti, Bruno de: Trasformazioni di numeri aleatori atte a far coincidere distribuzioni diverse. Giorn. Ist. Ital. Attuari **16**, 51—57 (1953).

Soient X et Y deux grandeurs aléatoires ayant des fonctions de répartition distinctes, propres et continues: $F(x) = \text{Prob.}\,(X < x)$, $G(x) = \text{Prob.}\,(Y < x)$. Il est toujours possible de construire une fonction, f, telle que $U = f(X)$ et $V = f(Y)$ aient la même distribution. Application au cas où Y représente la même grandeur que X, mais soumise à deux fonctions de répartition différentes soit à cause de deux hypothèses acceptables à l'égard de X, soit parceque les éléments de détermination des X proviennent de deux sources d'information

différents. Généralisation au cas de plus de deux variables. L'existence théorique d'un domaine de coïncidence pour des probabilités diverses, mais continues, est ainsi établie. *A. Sade.*

Winkelbauer, Karel: Moments for cumulative sums of random variables. Czechosl. math. J. **3**, 93—104 und engl. Zusammenfassg. 105—108 (1953) [Russisch].

Verf. beweist 2 Lemmata und 7 Sätze, die Bedingungen für Existenz und Bestimmung der Momente von Summen $z_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ betreffen, welche aus einer zufälligen Anzahl n von Summanden aus einer Folge von Zufallsvariablen $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ gebildet sind; dabei sei die Verteilung der ganzzahligen Variablen $n \geqq 0$ $p_i = P\{n = i\}$, $P_i = P\{n \geqq i\} = \sum_{j=i}^{\infty} p_j$. Der aus dem umfassenderen Lemma 1 folgende Satz 1 lautet: Existieren En, $a_i = E(x_i)$ für $i = 1, 2, \ldots$ und ist die Folge $\{E|x_i|\}$ beschränkt, so existiert die mathematische Erwartung von z_n und ist gleich $E z_n = \sum_{i=1}^{\infty} p_i A_i$ mit $A_i = \sum_{j=1}^{i} a_j$. Satz 1 enthält für $a_i \equiv a$ den die bekannte Waldsche Gleichung $E z_n = a \cdot E n$ betreffenden Satz 2 bei Unabhängigkeit der Variablen x_j und des Ereignisses $n = i$ für $j > i$. Ähnliche Sätze werden für die Erwartungswerte von Produkten $\prod_{k=1}^{r} z_{nk}$ bewiesen, wo $z_{ik} = \sum_{j=1}^{i} u_{jk}$ aus den k-ten Komponenten einer Folge r-dimensionaler stochastischer Vektoren $u_i = (u_{i1}, \ldots, u_{ir})$ gebildete Summen sind, und hieraus ferner für die höheren Momente $E z_n^r$ von z_n. Weitere Resultate gewinnt Verf. aus Lemma 2, das an eine Momentenmatrix anknüpft von der Form

$$A(u) = (a_{ij})\ (i, j = 1, \ldots, r) \text{ mit } a_{ii} = 1,\ a_{ij} = 0 \text{ für } i > j,\ a_{ij} = \binom{j}{j-i} E\, u^{j-i} \text{ für } i < j.$$

M. P. Geppert.

Andersen, Erik Sparre: On sums of symmetrically dependent random variables. Skand. Aktuarietidskr. **53**, 123—138 (1953).

Verf. betrachtet eine endliche oder unendliche Folge $X_1, X_2, \ldots$ von reellen zufälligen Veränderlichen. Die Verteilungsfunktion der endlichen Folge $X_1, \ldots, X_n$ bezeichnet er mit $F_n(x_1, \ldots, x_n)$. Wenn dies eine symmetrische Funktion der $x_1, \ldots, x_n$ ist, nennt er die Veränderlichen $X_1, \ldots, X_n$ symmetrisch abhängig. Wenn die Folge $X_1, X_2, \ldots$ unendlich ist und die Veränderlichen $X_1, \ldots, X_n$ fur $n = 2, 3, \ldots$ symmetrisch abhängig sind, nennt er die Veränderlichen der unendlichen Folge symmetrisch abhängig. Nach Einführung der Symbole $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ mit $n = 1, 2, \ldots$ und $S_0 = 0$ bezeichnet er es als seine Hauptaufgabe, die endlichen Folgen $S_0, S_1, \ldots, S_n$ zu untersuchen. Der wesentliche Inhalt der Abhandlung ist das Erbringen von Beweisen für Thesen, welche der Verf. in drei früheren Veröffentlichungen aufgestellt hat, sowie eine Erweiterung eines Theorems von D. A. Darling. Die Art der Thesen wird durch das folgende Zitat gekennzeichnet: „Die Wahrscheinlichkeit, unter den Summen $S_1, \ldots, S_n$ m positive zu erhalten, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, daß bei einem neuen Experiment (bei unveränderter Verteilung) die m ersten Summen positiv werden, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, daß bei einem dritten Experiment die ersten $n - m$ Summen nicht positiv werden." *P. Lorenz.*

Pugačev, V. S.: Eine allgemeine Korrelationstheorie der Zufallsfunktionen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **17**, 401—420 (1953) [Russisch].

Verf. betrachtet willkürliche komplexe skalare zufällige Funktionen mit skalarem oder vektoriellem Argument. Da sein Ziel die Schaffung einer für Anwendungen hinreichend einfachen und bequemen Theorie ist, beschränkt er sich im wesentlichen auf die Erforschung solcher Eigenschaften zufälliger Funktionen, die durch die Momente ersten und zweiten Grades („mathematische Erwartungen" und Korrelationsfunktionen) charakterisiert werden. Sei $X(t)$ eine zufällige Funktion, so werde vorausgesetzt, daß ihre „mathematische Erwartung" $\xi(t) = E\{X(t)\}$ und die Korrelationsfunktion $K(t, s) = E\{[X(t) - \xi(t)] \cdot [\overline{X(s)} - \overline{\xi(s)}]\}$ definiert seien, wobei $s \neq t$ und $\overline{X(s)}$ konjugiert komplex zu $X(s)$ ist. Nach Formulierung einer Reihe von Stetigkeitstheoremen behandelt Verf. die Zerlegung der zufälligen Funktion und ihrer Korrelationsfunktion nach Eigenfunktionen, die Theorie der „kanonischen Zerlegungen" (auch für vektorielle zufällige Funktionen) und die Theorie der linearen oder nahezu linearen und der nichtlinearen Umformungen zufälliger Funktionen. Er meint, daß die

Theorie der Umformungen Grundlage sein kann für die Erforschung der Genauigkeit mathematischer Maschinen stetiger Wirksamkeit. *P. Lorenz.*

Seitz, J. and K. Winkelbauer: Remark concerning a paper of Kolmogorov and Prochorov. Czechosl. math. J. 3, 89—91 und engl. Zusammenfassg. 91 (1953) [Russisch].

In this note, we first show, by means of examples, that the statements of some theorems given in a former paper (this Zbl. 35, 209) are inexact. Further, we give modified statements applicable to the theory of sequential analysis. Autoreferat.

Kolmogorov, A. N.: Einige Arbeiten der letzten Jahre auf dem Gebiet der Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Vestnik Moskovsk. Univ. 8, Nr. 10 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 7), 29—38 (1953) [Russisch].

Anschließend an eine von ihm und Gnedenko 1949 veröffentlichte Monographie (Grenzverteilungen für Summen von unabhängigen Zufallsveränderlichen (1949) [Russisch]) gibt Verf. eine zusammenfassende Darstellung der Tendenzen und Ergebnisse einiger neuerer Arbeiten. Im Mittelpunkt der Erörterungen stehen der Begriff der Nähe von Verteilungen und die verschiedenen Arten der Konvergenz (Annäherung). Verf. unterscheidet schwache, starke und Konvergenz bei Variation. Er diskutiert weiterhin die Ausdehnung der Untersuchungen auf Markoffsche Ketten, Lokalisierungstheoreme, Bewertung von Restgliedern und Verbesserung der Konvergenz. Außer Arbeiten von ihm selbst und Gnedenko zieht Verf. Aufsätze von Dobrušin, Prochorov, Mejzler, Parasjuk, Rvačeva, Linnik, Siraždinov, Koopman, Berry und Esseen in seine Betrachtungen. *P. Lorenz.*

Juškevič, A. A.: Über Grenzwertsätze, die mit dem Begriff der Entropie Markovscher Ketten zusammenhängen. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 5 (57), 177—180 (1953) [Russisch].

Ergänzung und teilweise Verschärfung einiger Ergebnisse von Chinčin, dies. Zbl. 50, 354. *L. Schmetterer.*

Sarymsakov, T. A.: Über das Ergodenprinzip für inhomogene Markovsche Ketten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 25—28 (1953) [Russisch].

Es wird ohne ausführlichen Beweis folgender Satz mitgeteilt. Gehört jedes Glied der Matrizenfolge (1) $A_k = ||p_{ij}(k)||_1^s$ $(k = 1, 2, \ldots;\ i, j = 1, 2, \ldots, s)$ in die Klasse $\mathfrak{G}_2^{(s)}$ und gilt in k gleichmäßig $\min\limits_{1 \leqq i,j \leqq s} p_{ij}^{+}(k) \geqq \lambda > 0$ [wobei $p_{ij}(k) = p_{ij}^{+}(k)$, wenn $p_{ij}(k) > 0$], so ist die durch (1) bestimmte Markovsche Kette ergodisch. Hier bedeutet $\mathfrak{G}_2^{(s)}$ die Klasse derjenigen primitiven stochastischen Matrizen von der Ordnung s, die, mit einer beliebigen primitiven Matrix multipliziert, wieder eine primitive Matrix ergeben. *M. Arató.*

Diananda, P. H.: Some probability limit theorems with statistical applications. Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 239—246 (1953).

Eine Folge von Zufallsveränderlichen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ wird m-abhängig genannt, falls die Vektoren $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$ und $(\xi_s, \xi_{s+1}, \ldots, \xi_{s+n})$ für alle $n = 0, 1, \ldots$ unabhängig sind, vorausgesetzt, daß $s - r > m$ ist. Verf. beweist u. a. folgenden Satz: Es sei $\{\xi_n\}$ eine m-abhängige stationäre Folge von Zufallsveränderlichen, für welche $E(\xi_i) = 0$ und $E(\xi_i \xi_j) = C_{j-i}$ endlich ist [$E(\eta)$ bezeichnet den Erwartungswert von η], dann ist der zentrale Grenzwertsatz für die Folge $\{\xi_n\}$ gültig, es gilt nämlich

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{D\sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du, \quad \text{wo} \quad D = C_0 + 2\sum_{p=1}^{m} C_p$$

ist. Dieses Resultat wird verallgemeinert auf stationäre m-abhängige Vektor-

prozesse, ferner auf stationäre Prozesse, die durch lineare Transformation $\eta_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \xi_{n-k}$ aus m-abhängigen stationären Prozessen $\{\xi_n\}$ entstehen.

A. Rényi.

Fortet, Robert et Édith Mourier: Lois des grands nombres pour des éléments aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace de Banach. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 18—20 (1953).

Verff. setzen ihre Untersuchungen über Zufallsveränderliche fort, deren Werte Elemente eines separablen Banachschen Raumes sind. Es sei X ein separabler, gleichmäßig konvexer und eine gleichmäßig reguläre Norm besitzender Banachscher Raum (s. R. Fortet, dies. Zbl. **26**, 324). In diesem Falle gibt es eine positive Funktion $\omega(h)$ $(h>0)$, für welche $\lim_{h\to 0}\omega(h)=0$ ist, und es gilt $||x+y|| \leqq 1 + ||y|| \cdot \omega(||y||)$, falls $||x||=1$, $x, y \in X$ und x zu y normal ist (d. h. $||x-\lambda y||$ sein Minimum für $\lambda = 0$ annimmt). Der Raum X wird ein P-Raum genannt, falls $\omega(h) \leqq \Omega h$, wo Ω eine positive Konstante ist. Verf. beweisen u. a. folgenden Satz: Wenn X ein P-Raum ist, θ das Nullelement von X bedeutet, und $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ unabhängige Zufallsveränderliche mit Werten in X sind, ferner die Voraussetzungen $E(\xi_n)=\theta$ [der Erwartungswert einer Zufallsveränderlichen η mit Werten in X ist definiert als das Element $E(\eta)$ von X, für welches $E(x^*(\eta)) = x^*(E(\eta))$ gilt für alle linearen Operationen x^* des zu X konjugierten Banachschen Raumes X^*; s. E. Mourier, dies. Zbl. **34**, 223] und $E(||\xi_n||^2) \leqq M < +\infty$ $(n=1,2,\ldots)$ gültig sind, so konvergiert $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ für $n\to\infty$ mit der Wahrscheinlichkeit 1 stark gegen θ. Verff. haben die Behauptung dieses Satzes unter anderen Voraussetzungen bereits in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **47**, 124) ausgesprochen; es wird darauf hingewiesen, daß der Satz nur in der jetzigen Gestalt richtig ist. *A. Rényi.*

Matschinski, Matthias: Équations générales des processus stochastiques. Population „holostochastique" et population „semi-stochastique". C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 580—583 (1953).

Fortet, R.: Les processus stochastiques en cascades. Trabajos Estadíst. **4**, 11—34 (1953).

In difetto di una teoria generale che comprenda tutta la varietà di schemi ideati per la descrizione della evoluzione aleatoria di un sistema fisico o popolazione Σ, l'A. si propone di fare una sistematizzazione e classificazione degli processi detti „in cascate" o ramificate (branchig processes) che sono adatti per esseguire le trasformazioni di Σ attraverso il tempo. Base di questa sintesi è una definizione amplissima dei sudetti processi introdotta dal A. che conduce alla considerazione di una certa funzione di distribuzione $R(t)$ nel insieme o spazio χ di tutte le classi o tipi possibili appartenente a Σ, e che permette riconoscere se la evoluzione dal sistema è dal tipo delle catene di Markoff. Sotto la ipotesi che detta evoluzione sia permanente e senza interazione fra gli individui di Σ, lo studio dal comportamento assintotico di $R(t)$ per $t\to\infty$, si puo ricondurre al di una catena come fa vedere l'A. nel caso più semplice in cui χ e costituito da un solo tipo o classe, cioè possede soltanto un elemento. A questo caso corrispondono diversi modelli o schemi per l'analisi delle evoluzioni di una popolazione (Galton) e per la propagazione delle radiazioni cosmici (Bhabha Heitler, Furry, Arley ecc.) sopra i quali sono fatte qualche obbezioni critiche. Si studiano cosi i casi in cui χ contiene un numero finito o infinito di classi e che trovano adeguate applicazione nel esame degli sistemi costituiti da elletroni e fotoni e delle popolazioni bacteriane.

J. Ma. Orts.

Dobrušin, R. L.: Eine Verallgemeinerung der Gleichungen von Kolmogorov für Markovsche Prozesse mit endlich vielen möglichen Zuständen. Mat. Sbornik, n. Ser. **33** (75), 567—596 (1953) [Russisch].

$p_{ij}(s,t)$ $(i,j=1,\ldots,r)$ bezeichne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zur Zeit t der Zustand E_j auftritt, wenn zur Zeit s der Zustand E_i geherrscht hat. $p_{ij}(s,t)$ wird nicht als stetig angenommen. Δ sei ein beliebiges Intervall. Die Definition der Intervallfunktion $p_{ij}(\Delta)$ erlautern wir am Beispiel des abgeschlossenen Intervalles $\Delta=[s,t]$: $p_{ij}(\Delta)=p_{ij}$ $(s-0, t+0)$. Mit I bezeichnen wir stets die $r\times r$ Einheitsmatrix, $P(s,t)$ bezeichne die Matrix der angegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten, $P(\Delta)$ die zugehörige Intervallfunktion. Mit Λ wird die leere Menge bezeichnet. Verf. studiert zunächst allgemeinere Intervallfunktionen, deren Wertevorrat $r\times r$ Matrizen sind, und spezialisiert erst dann auf $P(\Delta)$ bzw. $P(s,t)$. Eine Intervallfunktion $Q(\Delta)$ heißt multiplikativ, wenn für zwei aneinandergrenzende Intervalle Δ_1, Δ_2, $Q(\Delta_1)Q(\Delta_2)=Q(\Delta_1+\Delta_2)$ gilt. Es sei für eine multiplikative Intervallfunktion stets $Q(\Lambda)=I$. Die Erklärung einer additiven Intervallfunktion versteht sich nun von selbst. Zu jedem Satz über multiplikative Intervallfunktionen erhält man einen „dualen" über

additive Intervallfunktionen. $Q(\Delta)$ heißt auf Δ von beschränkter Variation, wenn für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von Δ in zueinander fremde Intervalle Δ_i $\sup_{\mathfrak{Z}} \|Q(\Delta_i) - Q(\Delta)\| < \text{Const.}$ gilt. Hierbei ist die Norm $\|A\|$ einer $r \times r$ Matrix $A = (a_{ij})$ durch $\|A\| = r \max_{i,j} |a_{ij}|$ definiert. Mittels dieses Normbegriffes werden auch absolut stetige Intervallfunktionen definiert. Im folgenden werden nur solche Intervallfunktionen betrachtet, welche oberhalb stetig sind, d. h. aus $\Delta_i \supset \Delta_{i+1}$ und $\bigcap_{i=1}^{\infty} \Delta_i = \Delta$ folgt $\lim_{i \to \infty} Q(\Delta_i) = Q(\Delta)$. — Sei $\sigma(\mathfrak{Z}) = \|Q(\Delta_i) - I\|$ für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von Δ, wie wir sie oben betrachtet haben. Falls der (notwendig eindeutige) Limes von $\sigma(\mathfrak{Z}_n)$ für jede Zerlegungsfolge $\mathfrak{Z}_n$, für welche die Länge des Maximalintervalles gegen 0 strebt, vorhanden ist, heiße er das additive Integral $\int_{\Delta} Q(d\Delta)$. Es gilt: Wenn $Q(\Delta)$ multiplikativ, von beschränkter Variation und oberhalb stetig ist, dann existiert für jedes Δ das additive Integral $\int_{\Delta} Q(d\Delta)$. Ausgehend von $\prod_{i=1}^{n} (I + B(\Delta_i))$ erhält man einen dualen Satz, für additive Intervallfunktionen $B(\Delta)$. Es gilt ein Reziprozitätssatz: Wenn $Q(\Delta)$ den angegebenen Bedingungen genügt, so daß das additive Integral $B(\Delta)$ existiert, dann existiert das multiplikative Integral von $B(\Delta)$ und stimmt mit $Q(\Delta)$ überein. Schließlich erhält man: $Q(s, t)$ sei multiplikativ und absolut stetig, $B(s, t)$ das zugehörige additive Integral. $A(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t, t+\Delta t) - I}{\Delta t}$ und $\tilde{A}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B(t, t+\Delta t) - I}{\Delta t}$ existieren f. ü., und es gilt $\tilde{A}(t) = A(t)$. Dies gestattet es, übergehend zu Matrizen $P(s, t)$, die Gültigkeit der Gleichung von Kolmogoroff zu behaupten, wenn die Elemente $p_{ij}(s, t)$ für jedes feste s hinsichtlich t nur absolut stetig sind. *L. Schmetterer.*

Bochner, S.: Length of random paths on general homogeneous spaces. Ann. of Math., II. Ser. **57**, 309—313 (1953).

Es sei M ein metrischer Raum mit der Distanzfunktion $\varrho(x, y)$ und Lebesgueschem Raumelement dv_x, bezüglich welcher die offenen Mengen meßbar sind. Es sei weiter in diesem Raume ein Markovscher Prozeß mit Übergangswahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $f(r, x; s, y) \geqq 0$ $(t' < r < s < \infty;\ t' < 0)$ gegeben. Verf. nimmt an, daß der Prozeß räumlich homogen ist derart, daß für $0 < u < \infty$: $A(r, s; u) = \int_M e^{-u\varrho(x,y)} f(r, x; s, y)\, dv_y$ von x unabhängig ist. Bezeichne Λ den Raum der zu M gehörenden Wege $\lambda = x(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, die durch den fixierten Anfangspunkt $x(0) = x_0$ gehen. Mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeitsdichtefunktion kann auf dem Raum Λ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $d\lambda$ definiert werden. Es sei $F_\delta(\lambda) = \varrho(x_0, x_1) + \cdots + \varrho(x_{n-1}, x_n)$ ein Approximationsweg, wo $(x_0, \ldots, x_n)$ die zu den Zeitpunkten $\delta = 0\ \{t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$ gehörenden Lagekoordinaten bezeichnet; es sei weiter $\Phi_\delta(u) = \int_{\Lambda} e^{-uF_\delta(\lambda)}\, d\lambda$. Es werden die Moore-Smithschen Grenzwerte $F(\lambda) = \lim_{\delta} F_\delta(\lambda)$ und $\Phi(u) = \lim_{\delta} \Phi_\delta(u)$ eingeführt. Dann ist $\Phi(u) = \int_{\Lambda} e^{-uF(\lambda)} d\lambda$, und heuristisch können wir schreiben, daß $\Phi(u) = \exp\left(-\int_0^1 D(r, u)\, du\right)$, wenn $D(r, u) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \log A(r, r+\varepsilon; u)$ existiert.

Es werden folgende Sätze aufgestellt: 1. Das Wahrscheinlichkeitsmaß der Menge der Wege endlicher Länge ist $m\Lambda_0 = \Phi(+0)$. 2. Wenn der betrachtete Prozeß nicht nur räumlich, sondern auch zeitlich homogen ist, d. h. $f(r, x; s, y) = f(s - r; x, y)$, und wir $A(r, r+\varepsilon; u) = A(\varepsilon; u)$ setzen können, dann ist $\Phi(u) = \lim_{\varepsilon \to 0} A(\varepsilon; u)^{1/\varepsilon}$, wenn dieser Grenzwert existiert. — Die darauffolgenden zwei Sätze liefern dazu Illustrationen im Falle eines Prozesses, der im Euklidischen Raume E_k betrachtet wird und unbegrenzt teilbar und zeitlich homogen (Satz 3) bzw. zeitlich inhomogen (Satz 4) ist. Schließlich betrachtet Verf. ein Beispiel mit interessanten Eigentümlichkeiten betreffs eines nicht-euklidischen Raumes M. *L. Takács.*

Chen Moy, Shu-Teh: Measure extensions and the martingale convergence theorem. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 902—907 (1953).

Bildet $\{x_t, J_t;\ t \in T\}$ ein Martingal in einem Raum Ω mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß P (insbesondere T eine Menge reeller Zahlen und jedes x_t eine reelle Funktion) und definiert man in der Booleschen Mengenalgebra $\bigcup_{t \in T} J_t$ eine additive Funktion φ durch $\varphi(\Lambda) = \int_{\Lambda} x_t\, dP$, wenn $\Lambda \in J_t$, so ist die Bedingung $\sup\{\int_{\Omega} |x_t|\, dP;\ t \in T\} < +\infty$ wegen der Endlichkeit von $\varphi(\Omega)$ offenbar

notwendig für die abzählbare Additivität von φ, jedoch auf Grund eines Beispiels von J. L. Doob nicht hinreichend. Der Verf. zeigt nun, daß sie im folgenden, auf Grund einer Darstellungstheorie für Martingale besonders wichtigen Spezialfall auch hinreicht: Ω besteht aus allen in T definierten reellen Funktionen ξ, und J_t ist die kleinste Boolesche Mengenalgebra, die alle Mengen der Gestalt $\{\xi: \xi(s) \leqq \alpha$ für $s \in T$ und $s \leqq t\}$ mit beliebigem reellem α enthält. Dieses Ergebnis gestattet, den Konvergenzsatz über Martingale von Doob aus einem Grenzwertsatz über Radon-Nikodymsche Integranden von Andersen und Jessen abzuleiten. *K. Krickeberg.*

Booton jr., R. C.: The analysis of nonlinear control systems with random inputs. Proc. Symposium nonlinear circuit analysis, New York, April 23—24, 1953, 369—391 (1953).

Verf. skizziert ein Verfahren zur mathematischen Behandlung nichtlinearer Kontroll- und Regelsysteme unter der Annahme, daß die zu kompensierenden Störungen den Charakter von statistisch gegebenen Zufallsfunktionen haben. Die zwischen Eingangsgröße x_{AI} und Ausgangsgröße x_{AR} bestehende i. a. nichtlineare Beziehung $x_{AR} = f(x_{AI})$ wird einer „Quasilinearisierung" unterworfen. Man führt dazu eine von der Verteilungsdichte von x_{AI} abhängende Größe K_{eq} ein und zwar so, daß das mittlere Fehlerquadrat von $f(x_{AI}) - K_{eq}\, x_{AI}$ ein Minimum ist. Es ist dann näherungsweise $x_{AR} = K_{eq}\, x_{AI}$, so daß K_{eq} gewissermaßen der Verstärkungsfaktor ist. Unter der Annahme, daß für x_{AI} eine Gaußsche Verteilung vorliegt, kann man K_{eq} formelmäßig darstellen. Das Verfahren wird an einem Beispiel durchgerechnet, bei dem die Nichtlinearität dadurch gegeben ist, daß ein linear reagierendes System nur begrenzter Ausschläge fähig ist. *W. Hahn.*

Burkhardt, Felix: Über Systeme von Differentialgleichungen und linearen Gleichungen, die bei der Zerlegung von Gesamtheiten entstehen. Ber. Math.-Tagung, Berlin 14. 1.—18. 1. 1953, 219—225 (1953).

Bezeichnet $X_j(t)$ die Anzahl der zur Zeit t $(0 \leqq t \leqq 1)$ der Gesamtheit X_j angehörenden Elemente, so betrachtet Verf. das Zerlegungssystem $X_1(0) - X_1(t) = X_2(t) + \cdots + X_n(t)$ mit Anfangsbedingung $X_1(0) > 0$, $X_2(0) = \cdots = X_n(0) = 0$ und löst das durch Einführung der Zerlegungsintensitäten $\mu_i(t) = (dX_i(t)/dt)/X_1(t)$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ daraus resultierende einfache Differentialgleichungssystem. Sodann werden die Beziehungen zwischen den „abhängigen" Wahrscheinlichkeiten $p_i = X_i(1)/X_1(0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und entsprechenden „unabhängigen" Wahrscheinlichkeiten $\pi_i = 1 - \exp\left(-\int_0^1 \mu_i(t)\, dt\right)$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ untersucht und für $n = 3$ die approximativ gültigen Relationen $\pi_i \sim p_i/(1 - \pi_k/2)$ $(i \neq k)$ angegeben, auf Grund deren sich π_i durch Kettenbrüche approximieren läßt. — Ferner untersucht Verf. Zerlegungssysteme der Form

$$(1 - m_{11})\, X_1 - m_{12}\, X_2 - \cdots - m_{1n}\, X_n = Y_1, \ldots,$$
$$-m_{n1}\, X_1 - m_{n2}\, X_2 - \cdots + (1 - m_{nn})\, X_n = Y_n,$$

und beschreibt deren Lösung nach dem Dreyerschen Lochkartenverfahren. *M. P. Geppert.*

● **Woodward, P. M.: Probability and information theory, with applications to radar.** (Pergamon Science Series.) London: Pergamon Press Ltd.; New York: McGraw-Hill Book Co. Inc. 1953. X, 128 p. 21 s.

This short monography, written for engineers, may prove useful also for statisticians and others who want to get the essence of communication theory. The emphasis is on ideas rather than proofs. After the introductory Chs. I—II on probability and waveform analysis, Ch. III gives an outline of Shannon's