Werk

Titel: Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie

Ort: Berlin

Jahr: 1954

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0051|log38

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

weiterer Fernparallelismus erzeugt werden kann. Schließlich wird in gewissen 3-dimensionalen Räumen mit diesen Bedingungen ein Paar von Fernparallelismen konstruiert. Während der erste Typ von Räumen auf ein neues Paar von Fernparallelismen führt, ergeben die beiden anderen Typen den Cliffordschen Rechts- und Linksparallelismus bzw. den euklidischen Parallelismus. *W. Barthel.*

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Zin, Giovanni: Contributo alla geometria infinitesimale diretta delle curve piane. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **34**, 41—53 (1953).

C: arc (image biunivoque et bicontinue d'un intervalle fermé) dans le plan orienté. P_1, P_2: points variables de C tels que P_1 précède P_2. $\alpha(P_1, P_2)$: détermination de l'angle polaire mesuré en radians de la direction $P_1 P_2$, suivie par continuité sur C. Amplitude angulaire („ampiezza") de C: oscillation de la fonction $\alpha(P_1, P_2)$ sur C. Oscillation angulaire („angolosità") $\omega(P)$ de C en un de ses points P: oscillation de $\alpha(P_1, P_2)$ en (P, P). Proposition: Les conditions suivantes sont équivalentes: (1) $\omega(P) < \pi$, (2) C est lipschitzien en P, (3) Le paratingent de C en P laisse échapper au moins une direction. Un exemple montre qu'un arc rectifiable peut n'être nulle part lipschitzien. [Rem. du rapp. Il s'agit en d'autres termes d'un arc plan rectifiable dont la tangente prend sur tout arc partiel toutes les directions. Un exemple spatial se trouve chez Z. Zahorski (ce Zbl. 48, 164). En vertu du théorème de G. Choquet (Thèse, Paris 1946 (1948); ce Zbl. **35**, 242) relatif à la coïncidence du paratingent et du contingent sur un résiduel, le phénomène ne peut plus se produire si l'arc possède partout une tangente.] *Chr. Pauc.*

Lane, N. D. and Peter Scherk: Differential points in the conformal plane. Canadian J. Math. **5**, 512—518 (1953).

In der euklidischen Ebene E_2 sei B ein Bogen, d. h. eindeutiges stetiges Bild der Strecke $S = (0 \leq s \leq 1)$. Ist $P(s)$ das Bild von s, so soll zu jedem s eine Umgebung U auf S gehören derart, daß $P(s) \neq P(s')$ für jedes $s' \in U - (s)$. Als Tangentialkreis $C(P(s), Q) = C(s, Q)$ an B in $P(s)$ werde bezeichnet jeder Limes von Kreisen durch $P(s)$, $P(s')$ und Q für $s' \to s$, unter Q einen beliebigen, von $P(s)$ verschiedenen, aber festgehaltenen Punkt verstanden. $P(s)$ selbst werde als Nullkreis zu den $C(s, Q)$ hinzugerechnet. — 1. Forderung: Es ist $C(s, Q)$ eindeutig durch s und Q bestimmt. I. Satz: Bei festem s bilden die $C(s, Q)$ ein (Kreis-)Büschel $t(s)$ von 2. Art mit $P(s)$ als Grundpunkt, d. h. die $C(s, Q)$ berühren einander alle in $P(s)$. Jeder nicht zu $t(s)$ gehörige Kreis K' durch $P(s)$ hat mit B in der Umgebung von s nur endlich viele Punkte gemeinsam, stützt oder schneidet also den Bogen B in $P(s)$; wird B in $P(s)$ von einem einzigen derartigen Kreis K' gestützt (bzw. geschnitten), so wird B von allen K' gestützt (bzw. von allen geschnitten). — 2. Forderung: Es sei B in $P(s)$ differenzierbar, d. h. außer Forderung 1 soll noch gelten: $C(P(s), P(s'))$ hat für $s' \to s$ einen Limes, den (eindeutig) bestimmten Schmiegkreis $C(s)$ an B in $P(s)$; es ist $C(s) \in t(s)$. II. Satz: Jeder von $C(s)$ verschiedene Kreis K'' durch $P(s)$ hat mit B in einer Umgebung von s nur endlich viele Punkte gemeinsam, schneidet oder stützt also. Ist $C(s)$ der Nullkreis $P(s)$, so wird B in $P(s)$, wenn von einem $K \in t(s)$ mit $K \neq C(s)$, dann von allen K gestützt (bzw. von allen geschnitten). Ist $C(s) \neq P(s)$, dann wird B in $P(s)$ von jedem K gestützt $[K \in t(s), K \neq C(s)]$. — Die Kombination der im I. und II. Satz aufgezeigten Fälle des Stützens oder Schneidens kombiniert ferner mit den Fällen $C(s) \neq P(s)$ oder $C(s) = P(s)$ sowie mit den Fällen, daß $C(s)$ B in $P(s)$ einen Häufungspunkt besitzt oder daß $C(s)$ den Bogen B in $P(s)$ stützt bzw. schneidet, führt zu einer Klassifikation der differenzierbaren Punkte, die in einer Tabelle zusammengestellt ist. *Otto Haupt.*

Gale, David: On inscribing n-dimensional sets in a regular n-simplex. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 222—225 (1953).

Nach dem bekannten Satz von H. W. E. Jung läßt sich im n-dimensionalen euklidischen Raum jede Punktmenge vom Durchmesser 1 durch eine Kugel überdecken, die sich einem regulären Simplex vom Durchmesser 1 umschreiben läßt; ihr Radius ist $R_n = (n/2\,(n+1))^{1/2}$. Verf. stellt diesem klassischen Ergebnis ein duales gegenüber: Jede Punktmenge vom Durchmesser 1 läßt sich durch ein reguläres Simplex überdecken, das sich einer Kugel vom Durchmesser 1 umschreiben läßt; sein Durchmesser ist $D_n = (n\,(n+1)/2)^{1/2}$ (Ref. bemerkt hierzu, daß dies auch leicht auf Grund der Bemerkung folgt, daß jede Punktmenge vom Durchmesser 1

in einem Körper konstanter Breite 1 enthalten ist, und daß D_n der mittlere Durchmesser der einem solchen Körper umbeschriebenen regulären Simplexe ist). — Es bezeichne d_n bzw. d_n^0 den kleinsten Wert mit der Eigenschaft, daß sich jede Punktmenge bzw. die Kugel vom Durchmesser 1 durch $n+1$ Mengen überdecken läßt, deren Durchmesser alle $\leq d_n$ bzw. $\leq d_n^0$ sind. Nach einer noch unbewiesenen Vermutung von K. Borsuk gilt $d_n < 1$. Trivialerweise ist $d_n^0 < 1$ und $d_n^0 \leq d_n$. Verf. verstärkt die Borsuksche Vermutung, indem er erwägt, daß $d_n^0 = d_n$ sein könnte. Aus seinem Ergebnis kann er jedenfalls im Falle $n = 2$ auf $d_2^0 = d_2 = \sqrt{3}/2$ schließen. *H. Hadwiger.*

Bouligand, Georges: Sur un type d'énoncé stable en théorie des transformations de contact. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 2136—2138 (1953).

L'A. reprend un théorème d'aplatissement donné dans une note antérieure (ce Zbl. **50**, 164). Il signale que l'indépendance des vecteurs $\partial M/\partial x + p\,\partial M/\partial z$, $\partial M/\partial y + q\,\partial M/\partial z$, en assurant la biunivocité locale entre S et son image, est une hypothèse essentielle à la stabilité de l'aplatissement. *Ch. Pauc.*

Hammer, P. C. and Andrew Sobczyk: Planar line families. I. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 226—233 (1953).

The authors call a family of straight lines in the plane „outwardly simple" if it covers the exterior of some circle simply. [They exclude families consisting of parallel lines only.] Such families can be associated with a continuous involutary transformation T without fixed points of the circle into itself; or, alternatively, with a continuous increasing function f which maps a closed real interval onto itself. To each transformation T (or function f) an outwardly simple line family can be defined, uniquely apart from similarity transformations of the plane. On the other hand T (or f) is not uniquely determined by the family but also depends on the choice of a circle: the connection between different transformations T arising from the same outwardly simple line family is an interesting but presumably difficult problem. The main result of the paper is the remarkable fact that all orthogonal trajectories of an outwardly simple line family which have a point outside a sufficiently large circle are smooth convex curves of constant breadth; moreover all convex curves of constant breadth are obtained as orthogonal trajectories of outwardly simple line families; to each family F there belongs a minimal such convex curve C of constant breadth, which need not be smooth (and may degenerate to a single point). The others belonging to F are the „exterior associated convex bodies" of C in the sense of P. C. Hammer, this Zbl. **43**, 163. The minimal C is „irreducible" (cf. op. cit.). The family F consists of the (extended) diameters of C and its associated curves; thus it follows incidentally that the plane outwardly simple line families are exactly the families of essential diameters (cf. op. cit.) of convex curves. It is stated that this is no longer true in three dimensions.
B. H. Neumann.

Ohmann, D.: Einige dem Vierscheitelsatz verwandte Sätze über Eilinien. J. reine angew. Math. **192**, 74—76 (1953).

$h^{(\mu)}(\varphi)$ sei die μ-te Ableitung der Stützfunktion einer Eilinie. Für ein „Linearaggregat" $y(\varphi) = \sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu}\, h^{(\mu)}(\varphi + \alpha_\nu)$ gilt: Ein translationsinvariantes stetiges Linearaggregat der Stützfunktion einer Eilinie [mit $y(\varphi) + y(\varphi + \pi) = \text{const}$] nimmt seinen Mittelwert wenigstens vier- (sechs-)mal an. Anwendung auf verschiedene Linearaggregate ergibt einheitliche einfache Beweise für folgende z. T. bekannte Sätze: 1. Unter allen einer Eilinie (konstanter Breite) umbeschriebenen Vierecken mit vorgegebenen Eckenwinkeln gibt es wenigstens vier (sechs) Kreistangentenvierecke. — 2. Unter allen einer Eilinie (konstanter Breite) des Umfangs L umbeschriebenen Polygonen mit den fest vorgegebenen Außenwinkeln α_ν gibt es wenigstens vier (sechs), deren Umfang den Wert $L \cdot \Sigma \operatorname{tg} \alpha_\nu/2$ annimmt. — 3. Unter allen Teilbogen einer Eilinie (konstanter Breite) der festen Gesamtkrümmung α existieren wenigstens vier (sechs) der Länge $\alpha\, L/2\pi$. — 4. Auf einer Eilinie lassen sich wenigstens drei Paare von Gegenpunkten angeben, die den Umfang hälften. — Die Sätze 2, 3, 4 gestatten Verallgemeinerungen auf Paare von Eilinien. *H. Gericke.*

Ohmann, D.: Isoperimetrische und verwandte Extremalprobleme für beschränkte ebenen Punktmengen. J. reine angew. Math. **192**, 65—73 (1953).

Verf. untersucht, ob sich die Aussagen (I) über Extremwerte des Umfangs U eines ebenen

konvexen Bereiches bei gegebenem Durchmesser D und Dicke Δ und (II) über Bereiche maximalen oder minimalen Inhalts F bei Vorgabe einer oder mehrerer der Größen U, D, Δ, auf beliebige beschränkte ebene Punktmengen übertragen lassen. U, F, D, Δ werden als Lebesguesche Maße definiert. Dann findet Verf. „für die erste Gruppe von Extremalproblemen, daß zwischen dem Quermaßintegral und den Quermaßextremalen nur die der Definition unmittelbar zu entnehmenden Ungleichungen bestehen können. Weiter fällt die Gruppe von Extremalproblemen, die sich mit dem minimalen Maß beschäftigt, naturgemäß aus. Hingegen erweisen sich die Extremalprobleme für maximales Maß als weitgehend übertragungsfähig." Haupthilfsmittel der Beweise sind: 1: Vergleich der Maße mit denen eines konvexen Mittelpunktsbereichs, des folgendermaßen definierten „Rumpfbereiches": Ist $q(\varphi)$ das Quermaß in Richtung φ, so deute man $q(\varphi)/2$ als Abstand von Geraden $G(\varphi)$ der Richtung φ vom Nullpunkt. Der Durchschnitt der O enthaltenden Halbebenen ist der Rumpfbereich. 2. Konstruktion von Mengen, deren inneres und äußeres Quermaß in jeder Richtung zusammenfällt und in einer ausgezeichneten Richtung verschwindet, während es in allen übrigen Richtungen gleichen positiven Wert annimmt, und von Mengen, deren Quermaß in allen Richtungen verschwindet, mit Ausnahme einer Richtung, in der es einen gegebenen Wert annimmt. Die Existenz von Mengen der zweiten Art zeigt z. B. unmittelbar, daß ein Analogon der Ungleichung $U \geq 2D$ nicht bestehen kann. *H. Gericke.*

Rogers, C. A.: Certain integrals over convex sets. J. London math. Soc. **28**, 293—297 (1953).

Mit Hilfe eines Lemmas von Erhard Schmidt aus seinen Untersuchungen zum isoperimetrischen Problem beweist Verf. folgenden Satz, den er a. a. O. (s. folgend. Ref.) verwenden will: Die Funktion $\varrho(r) > 0$ sei für $0 < r < 1$ nichtabnehmend, für $r > 1$ sei $\varrho(r) = 0$. μ sei das Lebesguesche Maß im euklidischen R_n, S die Einheitskugel um den Ursprung O, K eine abgeschlossene konvexe Menge des R_n, für die $\mu(K) < \mu(S)$ ist, und $S(K)$ sei ein Kugelsegment, das von S durch eine $(n-1)$-dimensionale Hyperebene so abgeschnitten ist, daß $\mu(S(K)) = \mu(K)$ ist. Ist $|X|$ die Entfernung des Punktes $X \in R_n$ von O, so ist stets

$$\int_K \varrho(|X|)\, d\mu \leq \int_{S(K)} \varrho(|X|)\, d\mu. \qquad \textit{W. Süss.}$$

Rogers, C. A.: The volume of a polyhedron inscribed in a sphere. J. London math. Soc. **28**, 410—416 (1953).

R. P. Bambah und H. Davenport haben bei Untersuchungen über Kugellagerungen im R_n (dies. Zbl. **47**, 51) die folgende Abschätzung benutzt (Bezeichnungen wie im vorigen Ref.): Ist $\Pi \subset S$ ein konvexes Polyeder mit N Seitenflächen, ist $\delta = 2/(n-1)$ und $\bar{c} = n\,\Gamma[(n+1)/2]\,\mu(\Pi)/N\,\pi^{(n-1)/2}$, so gilt stets $\frac{\mu(S)}{\mu(\Pi)} \geqq \int_0^1 \frac{dt}{[1-\bar{c}^{\delta}(1-t^{\delta})]^{n/2}}$. Der Beweis beschränkte sich auf den allein benötigten Fall, daß die Fußpunkte der Lote von O auf die Seitenflächen in deren Inneres fallen. Verf. beweist dasselbe Ergebnis ohne diese Einschränkung. Als Folgerung zeigt sich: Wachsen n und N derart über alle Grenzen, daß $N^{1/n} \to \lambda$, dann ist die obere Grenze von $\mu(\Pi)/\mu(S) \leqq 1 - \lambda^{-2}$. *W. Süss.*

Ohmann, D.: Über die Summe der Inkreisradien bei Überdeckung. Math. Ann. **125**, 350—354 (1953).

Es bezeichne $\varrho(B)$ den Inkreisradius eines ebenen konvexen Bereiches B. Verf. beweist: Ist $B \subset \bigcup B_\nu$, d. h. wird B durch endlich viele B_ν überdeckt, so gilt $\varrho(B) \leq \Sigma\,\varrho(B_\nu)$. Der originelle Beweisansatz geht von einer Massenbelegung der Ebene aus, deren Dichte durch $\mu = 1/\sqrt{1-r^2}$ $(0 \leq r < 1)$ bzw. $\mu = 0$ $(1 \leq r < \infty)$ gegeben ist; hierbei ist r der Abstand des Punktes vom Mittelpunkt eines Einheitskreises K. Bedeutet D ein Dreieck, so folgt aus $K \subset \bigcup D_\nu$ offenbar $2\pi = M(K) \leq \Sigma\, M(D_\nu)$, wobei $M(B)$ die Masse von B darstellt. Mit der Hilfsaussage $M(D) \leq 2\pi\,\varrho(D)$ ist der Satz bereits bewiesen; als D_ν wähle man Umdreiecke von B_ν mit gleichem Inkreisradius, und K sei ein Inkreis von B. Der vom Verf. erbrachte Nachweis der Hilfsaussage ist verhältnismäßig verwickelt.

H. Hadwiger.