Werk

Titel: Geometrie

Ort: Berlin

Jahr: 1954

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0051|log30

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Für die Berechnung von $\bar{P}_{x_1,x_2}$ reicht jedoch, wie Zahlenbeispiele zeigen, die der exakten Prämienformel für die gemischte Versicherung für ein Leben entsprechende Näherungsformel $\bar{P}_{x_1,x_2} = ({}_nE_{x_1x_2} + \bar{s}_{\overline{1}|} \cdot {}_{|n}A_{x_1x_2})/(\bar{a}_{\overline{1}} \, a_{x_1x_2:\overline{n}|} - k_1 \cdot {}_{|n}A_{x_1x_2})$ vollkommen aus. *G. Friede.*

Zwinggi, E.: Zur Bestimmung des Effektivzinsfußes. Experientia **9**, 413 (1953).

Verf. zeigt, daß sich mit dem von ihm zur Ableitung einer Näherungsformel für den Berechnungszinsfuß einer Leib-(Zeit-)rente entwickelten Verfahren (dies. Zbl. **46**, 374) auch eine Formel zur näherungsweisen Berechnung des Effektivzinsfußes einer fest verzinslichen, an einem bestimmten Termin rückzahlbaren Anleihe aus dem Anfangskurs gewinnen läßt. Zahlenbeispiele lassen erkennen, daß die mit dieser Formel für die praktisch vorkommenden Dauern erzielte Genauigkeit völlig ausreicht. Eine allgemeine Fassung dieser verschiedener Verallgemeinerungen fähigen Methode stellt Verf. an anderer Stelle in Aussicht. *G. Friede.*

Rufener, E.: Renten und Todesfallversicherungen höherer Ordnung. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. **53**, 166—188 (1953).

Verf. untersucht die diskontierten Zahlen höherer Ordnung von der Form $\bar{S}_x^r = \int_x^\infty \bar{S}_\xi^{r-1} \, d\xi$ und $S_x^r = \sum_{\xi=x}^\infty S_\xi^{r-1}$ mit der vom gewohnten Schema abweichenden Bezeichnung $\bar{S}_x^0 = D_x$, $\bar{S}_x^1 = \bar{N}_x$, $\bar{S}_x^2 = S_x$, welche im Zusammenhang mit Todesfall- und Rentenversicherungen höherer Ordnung auftreten. *E. Zwinggi.*

Tedeschi, Bruno: Concezioni teoriche del rischio e loro aderenza alla realtà delle assicurazioni. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **2**, 619—626 (1953).

Vergleich zwischen der klassischen und der kollektiven Risikotheorie, mit besonderer Berücksichtigung der Arbeiten von Cantelli, de Finetti, Ottaviani, Segerdahl. Zusammenfassung von zwei Arbeiten des Verf. [„Giorn. Ist. Ital. Attuari" **14**, 16—35 (1951) und Perrella ed., 1951], und weitere Betrachtungen zugunsten der klassischen Formulierung im Cantellischen Sinne. *B. de Finetti.*

● **Snyder, L. R.: Essential business mathematics.** New York: McGraw-Hill Book Company 1953. X, 421 p. $ 4.50.

Couffignal, Louis: Méthodes et limites de la cybernétique. Revista Acad. Ci. Madrid **47**, 63—82 (1953).

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

Sasaki, Usa: Lattice theoretic characterization of an affine geometry of arbitrary dimensions. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A **16**, 223—238 (1952).

Sasaki, Usa: Semi-modularity in relatively atomic, upper continuous lattices. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A **16**, 409—416 (1953).

Sasaki, Usa: Lattice theoretic characterization of geometries satisfying „Axiome der Verknüpfung". J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A **16**, 417—423 (1953).

Es handelt sich um Eigenschaften, die geeignet sind, den Verband der Unterräume einer Geometrie zu charakterisieren, und zwar: G_1 = Geometrie, in der die Verknüpfungsaxiome von Hilbert, soweit sie nicht die Dimension beschränken, erfüllt sind; G_2 = eine G_1, in der auch das Parallelenaxiom gilt. Bezeichnung: $(b, c)\,M$ bedeutet: für $a \leqq c$ gilt $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c$ (d. h. c, b bilden ein modulares Paar). Bedingungen: I. Ist $a < b$, so gibt es einen Punkt p mit $a < a \cup p \leqq b$ (relative Atomizität). II. Ist $b \cap c \neq 0$, so gilt $(b, c)M$; ist $b \cap c = 0$, so folgt $(c, b)M$ aus $(b, c)\,M$. III_1. Ist $x \neq y$ und wird a von x und y bedeckt, so werden x und y von $x \cup y$ bedeckt. III_2. Aus $(b, c)\,M$ folgt $(c, b)\,M$. IV. Sind p, q, r Punkte, $r \leqq a$, $p < q \cup a$, dann existiert ein Punkt $s \leqq a$, so daß $p \leqq q \cup r \cup s$ („strongly plane"). V. Ist p ein Punkt, dann ist entweder $p \leqq a$ oder $a \cup p$ bedeckt a; ist h von 1 bedeckt, $a \cap h \neq 0$, so ist entweder $h \geqq a$, oder a bedeckt $a \cap h$. VI. Sind p, q, r unabhängige Punkte, so gibt es genau ein Element u, so daß $p < u < p \cup q \cup r$, $u \cap (q \cup r) = 0$ ist. — In der zweiten Note wird gezeigt, daß in nach oben stetigen Verbänden mit 0-Element, in denen

I gilt, III_1 und III_2 äquivalent sind, sowie II mit V und mit dem Bedingungspaar III_1, IV (also auch III_2, IV) äquivalent ist. Die Resultate der 3. bzw. 1 Note lassen sich dann zusammenfassen: L ist dann und nur dann isomorph zum Verbande der Unterräume einer G_1, wenn L nach oben stetig ist, 0 enthält, sowie I und II gelten. Damit die Geometrie eine G_2 sei, ist zusätzlich notwendig und hinreichend, daß VI gilt. *F. W. Levi.*

Lenz, Hanfried: Beispiel einer endlichen projektiven Ebene, in der einige, aber nicht alle Vierecke kollineare Diagonalpunkte haben. Arch. der Math. **4**, 327—330 (1953).

Verf. gibt ein Beispiel einer endlichen affinen nicht-desarguesschen Ebene, in der der kleine Satz von Desargues allgemein gilt, jedoch gleichzeitig Vierecke mit kollinearen und nichtkollinearen Diagonalpunkten existieren. Der Koordinatenbereich, nach M. Hall ein sog. Veblen-Wedderburnsystem, besteht aus der additiven Gruppe des $GF(16)$, für das eine besondere Multiplikation erklärt ist. Zum Problem der Abhängigkeit von Schnittpunktsätzen lehrt dies Beispiel: Die Gültigkeit des projektiven kleinen Desargues D_9 mit fester Achse reicht nicht aus, um auf die allgemeine Gültigkeit oder Ungültigkeit des Fano-Axioms zu schließen. Nach G. Pickert, dies. Zbl. **46**, 144, ist dies anders, wenn D_9 allgemein gilt.
W. Klingenberg.

Berman, Gerald: Finite projective plane geometries and difference sets. Trans. Amer. math. Soc. **74**, 492—499 (1953).

Die sog. Differenzenmengen [d. s. Mengen von $m+1$ ganzen Zahlen d_j, für welche die Differenzen $d_i - d_j$ $(i, j = 0, 1, \ldots, m;\ i \neq j)$ alle Restklassen mod $q = m^2 + m + 1$ mit Ausnahme von q selbst durchlaufen] sind schon wiederholt zu Untersuchungen endlicher affiner und projektiver Ebenen benutzt worden. Den Punkten einer projekten Desargueschen Ebene sind in bekannter Weise (vgl. G. Berman, dies. Zbl. **48**, 371) die Elemente eines Erweiterungskörpers dritten Grades des Koordinatenkörpers der Geometrie zugeordnet. Gewisse Elemente dieses Erweiterungskörpers führen nach Singer zu den Differenzenmengen, die ihnen entsprechen. Diese Zuordnung wird eingehend untersucht, und mit den dabei gewonnenen Ergebnissen werden zwei Vermutungen von Singer bewiesen. Bemerkenswert ist noch das Resultat des Verf., daß aus einer bestimmten Differenzenmenge d_j mod q jede andere d'_j mod q in der Form $d'_j = s + t\,d_j$ mit $(t, q) = 1$ erhalten werden kann. *E. Sperner.*

Sholander, Marlow: Plane geometries from convex plates. Pacific J. Math. **3**, 667—671 (1953).

K sei ein ebener konvexer Bereich, $s_j(\varphi)$ diejenige Kurve (genannt „strut"), welche die parallelen Sehnen der Richtung φ im Verhältnis $j:(1-j)$ teilt. Zwei struts können sich nur dann in mehr als einem Punkte schneiden, wenn der Rand von K mindestens zwei Strecken enthält. Andernfalls bilden die Punkte und struts von K ein Modell einer affinen Geometrie (im Sinne von Artin, Coordinates in affine geometry, Indiana, 1940, Axiom I—III; auch Birkhoff, Lattice theory, rev. ed., New York 1948, S. 110, APG 1—3, dies. Zbl. **33**, 101). Ist K eine Ellipse, so ist auch Artins Axiom IV (anhangsweise auch hier wiedergegeben) erfüllt, und man hat ein endliches Modell der euklidischen Geometrie. Erweiterung zu einer projektiven Geometrie ist durch Hinzunahme der Randkurve von K als uneigentlicher Linie möglich, auch Abbildung auf einen Busemannschen S. L.-Raum. *H. Gericke.*

Chisini, O.: La non dimostrabilità del Postulato di Euclide. (Trattazione elementare.) Periodico Math., IV. Ser. **31**, 7—33 (1953).

Eine elementare und didaktisch geglückte Herleitung des Kleinschen Modells der hyperbolischen Ebene. *W. Klingenberg.*

Fejes Tóth, L.: Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **4**, 103—110 (1953).

Verf. betrachtet Lagerungen von mindestens 3 nicht übereinandergreifenden kongruenten Kreisen auf der Kugel, der euklidischen Ebene und der hyperbolischen

Ebene. Für die Lagerungsdichte d gilt allgemein die Ungleichung

$$d \leqq [3 \operatorname{cosec}(x/a) - 6]/(a - 6),$$

wenn $2\pi/a$ der Winkel eines aus Durchmessern der Kreise gebildeten gleichseitigen Dreiecks ist. Diese Ungleichung hatte Verf. schon früher für die Kugel abgeleitet. Verf. beweist die Ungleichung für jedes Dreieck eines Netzes, das sich durch Verbinden der Kreismittelpunkte so bilden läßt, daß die Dreiecksumkreise keine Ecken des Netzes im Innern enthalten. Das Gleichheitszeichen wird nur bei ganzzahligen Werten von a angenommen. In der hyperbolischen Ebene ergibt sich mit $a \to \infty$ die maximale Lagerungsdichte $3/\pi$, die bei einer Lagerung von Grenzkreisen angenommen wird, wobei im Poincaréschen Modell die Kreismittelpunkte ein aus der Theorie der Modulfunktionen bekanntes Netz bilden. *K. Schütte.*

Fejes Tóth, L.: Kreisüberdeckungen der hyperbolischen Ebene. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **4**, 111—114 (1953).

Zu dem in der vorigen Arbeit behandelten Problem der dichtesten Kreislagerung ist das Problem der dünnsten Überdeckung mit mindestens 3 kongruenten Kreisen dual. Verf. beweist für die Überdeckungsdichte D in jedem Dreieck eines wie vorher gebildeten Netzes die Ungleichung $D \geqq [\sqrt{12} \operatorname{ctg}(\pi/A) - 6]/(A - 6)$, wobei $2\pi/A$ der Winkel eines gleichseitigen Dreiecks ist, das sich einem der gegebenen Kreise einbeschreiben läßt. In der hyperbolischen Ebene ergibt sich entsprechend wie vorher mit $A \to \infty$ die minimale Überdeckungsdichte $\sqrt{12}/\pi$ bei einer Überdeckung aus Grenzkreisen. *K. Schütte.*

Reenpää, Yrjö: Über anschauliche Unabhängigkeit und begriffliche Orthogonalität. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I **1953**, Nr. 158, 10 S. (1953).

Elementargeometrie:

● **Lietzmann, W.: Der Pythagoreische Lehrsatz. Mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem.** 7. Aufl. (Math.-phys. Bibliothek, Reihe I, Nr. 2/3). Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1953. 96 S. DM 3,60.

Guggenbuhl, Laura: Henri Brocard and the geometry of the triangle. Math. Gaz. **37**, 241—243 (1953).

Cobb, R. H.: A symbolism for the geometry of the triangle. Math. Gaz. **37**, 174—187 (1953).

Verf. entwickelt einen ziemlich komplizierten Symbolismus für die Elemente der Dreiecksgeometrie, dessen Einzelheiten hier nicht angegeben werden können, und zeigt an einigen Beispielen die Möglichkeit, mit seiner Hilfe Ergebnisse zu finden, z. B. die Eigenschaft des Nagelschen Punktes, Inkreismittelpunkt des antimedialen Dreiecks zu sein (der Nagelsche Punkt ist der Schnittpunkt der Eckenlinien nach den Ankreisberührungspunkten und das antimediale Dreieck hat die Ecken des Grunddreiecks zu Seitenmitten). *M. Zacharias.*

Manara, C. F.: Un teorema sui triangoli equilateri. Periodico Mat., IV. Ser. **31**, 186—188 (1953).

Ein Beweis des Satzes von D. Pompeiu: Ist ABC ein gleichseitiges Dreieck und P ein Punkt seiner Ebene, so kann man aus den Strecken PA, PB, PC ein Dreieck konstruieren. *M. Zacharias.*

Paolantonio, Raffaele: Alcune proprietà delle trisettrici degli angoli interni di un triangolo. Periodico Mat., IV. Ser. **31**, 246—253 (1953).

Nach einem elementaren, etwas umständlichen Beweis des Morleyschen Satzes von den winkeldrittelnden Eckenlinien des Dreiecks beweist Verf. den, wie er glaubt, neuen Satz, daß die sechs Trisezierenden einen Kegelschnitt berühren, und zieht daraus einige Folgerungen. Der Satz nebst den Folgerungen findet sich für eine die Trisezierenden einschließende allgemeinere Art von Eckenlinienpaaren bereits 1938 in einer Arbeit des Ref. (dies. Zbl. **18**, 163). *M. Zacharias.*

Thébault, Victor: On cevians of a triangle. Amer. math. Monthly **60**, 167—173 (1953).

In einem Dreieck ABC mit den Seitenlängen $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ schneiden sich nach Ceva die Eckenlinien AA_1, BB_1, CC_1, die die Gegenseiten in den Verhältnissen

$$BA_1 : A_1C = c^n : b^n,\ CB_1 : B_1A = a^n : c^n,\ AC_1 : C_1B = b^n : a^n$$

schneiden, in einem Punkt P_n. Nach vielen hieran anknüpfenden metrischen Berechnungen folgen Anwendungen auf ein Tetraeder $ABCD$. In jedem der vier Dreiecke $BCD, \ldots$ werden die Eckenlinien gezogen, die die Gegenseiten in den Verhältnissen der n-ten Potenzen der anliegenden Seiten teilen. Sind A_n, B_n, C_n, D_n die Schnittpunkte der Eckenlinien in den vier Dreiecken und A'_n, B'_n, C'_n, D'_n ihre harmonisch Assoziierten, so sind AA_n, BB_n, CC_n, DD_n vier Geraden der einen Schar und $AA'_n, \ldots$ vier Geraden der anderen Schar eines Hyperboloids. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda'_1 \lambda'_2, \lambda'_3$ irgend sechs den Tetraederkanten BC, CA, AB, DA, DB, DC zugeordnete Zahlen und A_0, B_0, C_0, D_0 die Punkte der Dreiecksebenen, deren baryzentrische Koordinaten den den Dreiecksseiten zugeordneten Zahlen λ proportional sind, so sind AA_0, BB_0, CC_0, DD_0 vier Geraden der einen Schar eines Hyperboloids. Es folgen noch zwei weitere Sätze über hyperboloidische Geraden im Tetraeder. *M. Zacharias.*

Thébault, Victor: Sur des cercles et des sphères particuliers de Tucker. Mathesis **62**, 111—119 (1953).

Der Kreis, der die drei Ankreise eines Dreiecks innen berührt und die Kreise, die den Inkreis innen und zwei Ankreise außen berühren und vom Feuerbachkreis verschieden sind, sind, wie Verf. beweist, vier Tuckersche Kreise (d. h. Umkreise von Dreiecken, die dem Grunddreieck unter konstanten Winkeln einbeschrieben sind). — Im isodynamischen Tetraeder (d. h. einem Tetraeder mit gleichen Produkten der Gegenkanten), und nur in einem solchen, gibt es vier besondere Tuckersche Kugeln, deren jede durch eine der vier Ecken des Tetraeders geht; die Mittelpunkte dieser Kugeln sind die Schnittpunkte des Brocardschen Durchmessers mit den Höhen des Tetraeders. *M. Zacharias.*

Marmion, A.: Sur les six points de Servais d'un tétraèdre. Mathesis **62**, 215—233 (1953).

Die vier Drehzylinder über den Umkreisen der Flächen eines Tetraeders T als Grundflächen haben sechs Punkte, die „Servaisschen Punkte", gemein, die paarweise bezüglich des Umkugelmittelpunktes von T symmetrisch liegen. Jeder der sechs Punkte liegt in einer Ebene π, die die Fußpunkte der Lote von dem Punkt auf die sechs Kanten von T enthält. Die sechs Ebenen π gehen durch den Mongeschen Punkt (den Mittelpunkt des Höhenhyperboloids) von T und berühren die Steinerschen Dreispitze der Flächen von T. Die Servaisschen Punkte sind die Kantenmitten zweier Tetraeder T', T'', deren Kanten auf den entsprechenden Ebenen π senkrecht stehen. Die Kanten von T sind die Achsen von sechs Drehzylindern, die dem einen jener beiden Tetraeder umbeschrieben sind. Das Entsprechende gilt von dem zu T bezüglich O symmetrischen Tetraeder T_1 und dem andern der beiden Tetraeder. Die Ecken und die Höhenschnittpunkte der Flächen von T liegen auf einer einzigen Biquadratik B. Die Höhen von T' und T'' sind den Asymptoten von B parallel. Die sechs Servaisschen Punkte und die vier Ecken von T bilden eine Gruppe von zehn Punkten, von denen irgend neun immer auf einem Drehzylinder liegen. Das Fußpunkttetraeder jedes Servaisschen Punktes bezüglich T bildet mit T ein Möbiussches Tetraederpaar. — Das sind einige der zahlreichen Ergebnisse für das allgemeine Tetraeder. Es folgen Anwendungen auf das Tetraeder mit Höhenschnittpunkt, das gleichflächige Tetraeder und das Tetraeder von N.-A. Court, in dem der Fußpunkt des Lotes von D auf die Fläche ABC auf dem Umkreis von ABC liegt. *M. Zacharias.*

Bini, Umberto: Discendenza napoleonica. Archimede **5**, 103—108 (1953).

Der Satz von Napoleon besagt: Die Mitten der über den Seiten eines beliebigen Dreiecks (nach außen oder nach innen) konstruierten gleichseitigen Dreiecke sind die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks. Verf. beweist gewisse Eigenschaften von Polygonen, die er nach dem Vorgang von E. Hess (S.-Ber. Ges. Naturw. Marburg 1874, 611—743) halbregulär nennt, die als Verallgemeinerungen des Satzes von Napoleon betrachtet werden können. Ein halbreguläres Polygon (h. P.) hat eine gerade Anzahl von Ecken und entweder gleiche Winkel oder gleiche Seiten. Im gleichseitigen h. P. sind die geradzahligen und die ungeradzahligen Winkel je untereinander gleich. Entsprechendes gilt von den Seiten im gleichwinkligen h. P. Über den Seiten des h. P. werden (nach außen oder innen) regelmäßige Vielecke

konstruiert. Dann werden die Bedingungen dafür untersucht, daß die Mitten dieser Vielecke ein regelmäßiges Vieleck bilden. *M. Zacharias.*

Sz.-Nagy, Gy.: Mittelkante, Mittelebene, Mittelpunkt von Kanten einer Ecke. Publ. math., Debrecen 2, 161—165 (1953).

Durch einen festen Punkt O gehende Halbgeraden OA_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ heißen Kanten der Ecke O. Ihre Mittelkante ist die Halbgerade OM mit $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OE_k}$, wobei E_k der Schnittpunkt von OA_k mit der Einheitskugel um O ist. (Wenn $M = O$, so heißt O Mittelpunkt der n Kanten.) Schließlich wird die Normalebene zu OM durch O Mittelebene der n Kanten genannt. Für diese Begriffe beweist Verf. neben einigen elementaren, wohl trivialen Aussagen Sätze, wie z. B.: Haben 3(4) Kanten einer Ecke einen Mittelpunkt, so bilden ihre Einheitspunkte ein gleichseitiges Dreieck (ein gleichseitiges Tetraeder oder sind Endpunkte von zwei Durchmessern eines Kreises). Für die Ecke O wird schließlich eine Minimaleigenschaft angeführt und ein Beweis eines von J. Steiner (ges. Werke 2, Berlin 1882, S. 35) aufgestellten Satzes gegeben. *H. R. Müller.*

Sydler, J.-P.: Sur l'équivalence des polyèdres à dièdres rationnels. Elemente Math. 8, 75—79 (1953).

Mit wesentlicher Verschärfung des früher vom Verf. erzielten Resultats (dies. Zbl. 48, 136) wird gezeigt: Sind für zwei Polyeder A und A' des gewöhnlichen Raumes die notwendigen Dehnschen Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit (symbolisch $A \sim A'$) erfüllt, so gibt es zwei Polyeder S und S' mit Flächenwinkeln, welche ausschließlich ganzzahlige Multipla von $\pi/4$ sind, so daß $A + S \sim A' + S'$ gilt. — Verf. kann nämlich zeigen, daß für jedes Polyeder R mit „rationalen" Flächenwinkeln (vgl. Symbolik im oben zitierten Referat) stets $R \sim S \pmod{W}$ gilt, wo S ein Polyeder der oben beschriebenen Art bedeutet. Die noch ungelöste Frage, ob Dehns Bedingungen auch hinreichend sind, würde durch den Nachweis, daß $S \sim W$ (W = Würfel) gilt, positiv beantwortet. — Zur Beweisführung beansprucht Verf. wieder recht kunstvolle Polyederverwandlungen. *H. Hadwiger.*

Steiger, Franz: Zu einer Frage über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung. Elemente Math. 8, 66—67 (1953).

Verf. zeigt, wie im R_k zu jeder natürlichen Zahl $N > k$ ein System von mindestens N Punkten konstruiert werden kann, die lauter ganzzahlige Entfernungen haben und nicht alle demselben linearen Unterraum von $k - 1$ Dimensionen angehören. *E. Trost.*

Locher-Ernst, L.: Bilder zur Geometrie der regelmäßigen Figuren. Elemente Math. 8, 97—102 (1053).

Jakobi, R.: Einige Parabeleigenschaften. Elemente Math. 8, 107—109 (1953).

Thébault, Victor: Recreational geometry: Curvilinear and mixtilinear figures. Scripta math. **19**, 69—77 (1953).

● **Breidenbach, W.: Das Delische Problem. (Die Verdoppelung des Würfels).** 3. Aufl. (Math.-phys. Bibliothek, Reihe I, Nr. 68). Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1953. 59 S.; kart. DM 2,40.

● **Randolph, John F.: Trigonometry.** New York: The Macmillan Company 1953. X, 220 p. $ 3,25.

Dieses Buch enthält einen elementaren Lehrgang der ebenen Trigonometrie. Die Grundformeln werden mittels rechtwinkliger Koordinaten hergeleitet. Das notwendige Rüstzeug liefern zwei Anhänge über Algebra (29 Seiten) und über Koordinaten (11 S.). Ein dritter Anhang (21 S.) dient der Einführung der Logarithmen und der Behandlung von Exponentialgleichungen. An Tafeln (16 S.) sind beigegeben die vierstelligen gemeinen Logarithmen der Zahlen 1,00 bis 9,99 mit Intervall 0,01 und die fünfstelligen der Zahlen von 1,000 bis 2,009 mit Intervall 0,001, die vierstelligen Werte der trigonometrischen Funktionen einschließlich sec und cosec (sowie die Bogenlängen) für spitze Winkel von 10′ zu 10′ und ihre vierstelligen Logarithmen. — Der

eigentliche Lehrgang (125 S.) bringt in klarer Darstellung: I. die Einführung der trigonometrischen Funktionen und einiges über die Tafeln, II. die Herleitung der Additionstheoreme für beliebige Argumente, III. das rechtwinklige Dreieck und die Addition von Vektoren, IV. das schiefwinklige Dreieck, V. Identitäten und trigonometrische Bestimmungsgleichungen (u. a. auch $a \sin\theta + b\cos\theta = c$), VI. komplexe Zahlen und Wurzelberechnung, VII. Funktionsbilder und Umkehrfunktionen. — In den Text sind zahlreiche durchgerechnete Beispiele eingestreut, die vielfach praktische Anwendungen behandeln und im Verein mit den reichlich beigegebenen Figuren das Verständnis erleichtern. An die einzelnen Abschnitte schließt sich eine Fülle von Übungsaufgaben an. Etwa für die Hälfte derselben findet der Leser am Schluß die Resultate (16 S.), so daß das Buch besonders auch zum Selbststudium geeignet erscheint. Das gediegen ausgestattete Buch ist mit ausführlichem Inhaltsverzeichnis und mit alphabetischem Register versehen. Seinem elementaren Charakter entsprechend geht es auf Reihenentwicklungen nicht ein. Daher fehlt die Behandlung der trigonometrischen Funktionen kleiner Winkel. Auch wird die Frage der Genauigkeit nur gelegentlich flüchtig gestreift. In rechentechnischer Hinsicht wird man vielleicht die Lalandesche Regel vermissen. *E. Schönhardt.*

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

● **Fabricius-Bjerre, Fr.: Lehrbuch der Geometrie. I. Analytische Geometrie.** 2. Aufl. Kopenhagen: Jul. Gjellerup 1953. 169 S. Kr. 24.— [Dänisch].

● **McCrea, W. H.: Analytical geometry of three dimensions.** 2. ed. New York: Interscience Publishers 1953. VII, 144 p. $ 1,25.

Cadwell, J. H.: A property of linear cyclic transformations. Math. Gaz. **37**, 85—89 (1953).

Ausgehend von der Beobachtung, daß die Seitenmitten eines beliebigen Vierecks ein Parallelogramm bilden und daß die fortgesetzte Wiederholung des Halbierungsprozesses auf zwei Serien ähnlicher und ähnlich gelegener Parallelogramme führt, betrachtet Verf. folgenden verallgemeinerten Prozeß: Aus einem gegebenen n-Eck P_0 im R_h, dessen Ecken durch die Ortsvektoren $\mathfrak{x}_r$ festgelegt seien, wird vermöge $\mathfrak{x}'_r = \sum_{s=0}^{n-1} \alpha_s \mathfrak{x}_{r+s}$ (mit konstanten reellen Koeffizienten α_s) ein zweites n-Eck P_1 abgeleitet, und dieser Prozeß wird ständig wiederholt; der Fall der Seitenhalbierung ist hierin für $\alpha_0 = \alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$ enthalten. Das Hauptergebnis der gehaltvollen Untersuchung, die sich auf eine geschickte Darstellung der Transformationsmatrix stützt, besteht in der Feststellung, daß die Folge der Polygone P_m sich der Gestalt nach im allgemeinen ebenen n-Ecken nähert, die zu einem regulären n-Eck affin sind. Auch das Auftreten von Teilfolgen (nahezu) ähnlicher und ähnlich gelegener Polygone P_m wird geklärt. Abschließend wird noch auf besondere Ausnahmefälle hingewiesen. *W. Wunderlich.*

Lauffer, Rudolf: Wege in Minimalebenen. Math. Nachr. **9**, 241—242 (1953).

Betrachtung der Weglängen in Minimalebenen, in Paaren und geradlinigen Anzahlen von Minimalebenen. Der Sonderfall des isotropen Vierflachs, den auch W. Blaschke (dies. Zbl. **31**, 178) studiert hat, spielt übrigens auch in der Zyklographie eine Rolle. *K. Strubecker.*

Gutiérrez Novoa, Lino: Über den antimetrischen quadratischen Raum. Revista Soc. Cubana Ci. Fis. Mat. **3**, 1—7 (1953) [Spanisch].

Allen, E. F.: An extended inversive geometry. Amer. math. Monthly **60**, 233—237 (1953).

Die „Inversive Geometrie" von F. Morley und F. V. Morley (London 1933, dies. Zbl. **9**, 29) geht von den gewöhnlichen komplexen Zahlen $z = x + i\,y$ und $\bar{z} = x - i\,y$ mit $i^2 = -1$ aus und benutzt sie zur Herleitung von Sätzen der Geometrie des Dreiecks mit dem Umkreis $z\bar{z} = x^2 + y^2 = 1$. Verf. verallgemeinert den Begriff der inversiven Geometrie: Er geht aus von den Variablen $z = x + r\,y$ und $\bar{z} = x - r\,y$, wo $r^2 = -k^2, +1, +k^2$ sein kann (k eine reelle Zahl). Die Gleichung $z\bar{z} = 1$ stellt dann entweder die Ellipse $x^2 + k^2\,y^2 = 1$ oder die gleichseitige Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ oder die Hyperbel $x^2 - k^2\,y^2 = 1$ dar. Er ist dann

in der Lage, in diesen drei Fällen entsprechende Sätze für Dreiecke, die Mittelpunktskegelschnitten einbeschrieben sind, zu beweisen. So erhält er Sätze für einen Neunpunktekegelschnitt und für eine Pseudo-Eulergerade eines einem Mittelpunktskegelschnitt einbeschriebenen Dreiecks, für eine verallgemeinerte Wallacegerade und eine verallgemeinerte „Bildergerade" („line of images"). *M. Zacharias.*

Müller, Hans Robert: Sulla proiezione cinematica nello spazio euclideo. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **2**, 407—411 (1953).

Die Geraden des elliptischen Raumes E kann man nach Hjelmslev, Fubini, Study so auf die Punkte zweier Einheitskugelflächen K_1, K_2 beziehen, daß dabei den Bewegungen von E die Drehungen der K_j entsprechen. Es werden nun der Raum E und entsprechend die Kugeln K_j aus dem reellen ins Gebiet der dualen Zahlen $(a + \varepsilon b,\ \varepsilon^2 = 0)$ erweitert zu E^* und K_j^*. K_j^* kann weiter nach Study, Blaschke auf die Geraden eines reellen Euklidischen Raumes R_j so abgebildet werden, daß den dualen Drehungen von K_j^* die reellen Euklidischen Bewegungen von R_j entsprechen. Somit sind schließlich die dualen Geraden von E^* auf die Paare reeller Geraden in R_1, R_2 bezogen. Diese Abbildung wird an Beispielen erläutert.

W. Blaschke.

Gambier, B.: Potentiels circulaires. Faisceaux de cercles; points de Poncelet. J. Math. pur. appl., IX. Sér. **32**, 185—201 (1953).

„Kreispotential" (potentiel circulaire) mit dem Zentrum O nennt Verf. den Ausdruck $(O, \varepsilon R^2) \equiv MO^2 - \varepsilon R^2$, wo O ein fester Punkt, M ein beliebiger Punkt der Ebene, $\varepsilon = \pm 1$ und R eine gegebene Länge ist (die auch Null sein kann). Der Kreis um O mit dem Radius R heißt das Bild des Kreispotentials, wenn $\varepsilon = +1$ ist. Der Ausdruck $[\lambda (MO^2 - \varepsilon R^2) + \mu (MO'^2 - \varepsilon' R'^2)]/(\lambda + \mu)$, wo λ/μ veränderlich ist, definiert ein lineares Büschel von Kreispotentialen, dessen ∞^1 Zentren die ganze Gerade OO' erfüllen. Auf OO' liegen zwei (reelle oder konjugiert komplexe) „Ponceletsche Punkte" O_1, O_2, für die der Ausdruck für das Büschel der Kreispotentiale die reduzierte Form $(l\, MO_1^2 + m\, MO_2^2)/(l + m)$ annimmt. Der Ausdruck $MO^2 - \varepsilon R^2$ heißt Potenz des Punktes M bezüglich des Kreispotentials. Die Punkte gleicher Potenz bezüglich zweier (und damit aller) Kreispotentiale eines Büschels liegen auf der Potenzlinie (axe radical) des Büschels. Weiter definiert Verf. zwei „orthogonale" Kreispotentialbüschel analog dem Begriff der orthogonalen Kreisbüschel: Die Zentren jedes der beiden Büschel erfüllen die Radikalachse des andern Büschels. Das eine Büschel hat reelle, das andere imaginäre Ponceletsche Punkte. Verf. gibt sodann einige Anwendungen auf Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen, die den Nutzen seiner neuen Begriffe zeigen sollen. *M. Zacharias.*

● **Hopkins, E. J. and J. S. Hails: An introduction to plane projective geometry.** Oxford: At the Clarendon Press (Geoffrey Cumberlege) 1953. VI, 276 p. 27 S. 6 d. net.

Ein hübsches Anfängerbuch der algebraischen projektiven Geometrie in der Ebene. Ausgehend von den einfachsten Vorkenntnissen wird der Leser sofort in die projektive Gedankenwelt eingeführt. Eine Fülle von schönen Aufgaben erhöht den Wert des klar geschriebenen Buches. *J. C. H. Gerretsen.*

Neville, E. H.: Involution. Math. Gaz. **37**, 199—202 (1953).

Lauffer, Rudolf: Zur Topologie der Konfiguration von Desargues. II. Math. Nachr. **10**, 179—180 (1953).

Vgl. Teil I (dies. Zbl. **50**, 156). Zu jeder Konfiguration von Desargues gehört bekanntlich ein Polarsystem mit null- oder einteiliger Inzidenzkurve 2. Ordnung, in dem jedem Konfigurationspunkt die zugehörige Perspektivitätsachse als Polare zugeordnet ist. Im ersten Teil hat Verf. die sechs topologisch wesentlich verschiedenen Gestalten untersucht, die die Konfiguration annehmen kann. Jetzt beweist er: Hat die Konfiguration die dort mit I bezeichnete Gestalt, so ist die Inzidenzkurve nullteilig; in den fünf anderen Fällen ist sie einteilig. Indem er die Inzidenzkurve als Maßkurve einer nichteuklidischen Geometrie deutet, ergeben sich gewisse Klasseneinteilungen der Dreiecke der elliptischen und der hyperbolischen Maßgeometrie. *M. Zacharias.*

Court, N. A.: Pascal's theorem in space. Duke math. J. **20**, 417—421 (1953).

Man kann den Pascalschen Satz in der Ebene so aussprechen: Die drei Seitenpaare eines Dreiecks ABC werden von drei geraden Transversalen α, β, γ dann

und nur dann in sechs Punkten eines Kegelschnitts geschnitten, wenn die restlichen drei Schnittpunkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ der Dreiecks(gegen)seiten mit den Transversalen auf einer Geraden liegen. Die drei Transversalen können dabei (1) ein Dreieck bilden, (2) durch einen Punkt laufen. Dual dazu kann man den Brianchonschen Satz aussprechen. — Verf. gibt folgende zwei Übertragungen dieser Auffassung des Pascalschen Satzes auf den Raum an: (I) Die vier Kantentripel eines Tetraeders $ABCD$ werden von vier Transversalebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dann und nur dann in zwölf Punkten einer Fläche zweiter Ordnung geschnitten, wenn die restlichen vier Schnittgeraden $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ der Tetraeder(gegen)ebenen mit den Transversalebenen entweder hyperbolischen Lage haben oder in einer Ebene liegen. Die vier Transversalebenen können dabei (1) ein Tetraeder bilden, (2) einen Punkt gemeinsam haben, (3) eine Gerade gemeinsam haben. Dementsprechend läßt der Satz noch verschiedene weitere Formulierungen zu. Es gelten auch entsprechende Umkehrungen dieser Sätze. Dual ergibt sich eine Übertragung des Satzes von Brianchon auf den Raum. — Die zweite Übertragung des Pascalschen Satzes auf den Raum lautet: (II) Die drei windschiefen Kantenvierseite eines Tetraeders werden von drei Transversalebenen α, β, γ dann und nur dann in zwölf Punkten einer Fläche zweiter Ordnung geschnitten, wenn die in den Transversalebenen liegenden Treffgeraden des jeweils dritten Tetraedergegenkantenpaares in einer Ebene liegen. Dual ergibt sich ein zweites Gegenstück des Satzes von Brianchon. — [Bem. des Ref.: Es ist dem Verf. offenbar entgangen, daß seine räumliche Übertragung (I) der Sätze von Pascal und Brianchon nicht neu ist; sie findet sich schon in dem „Aperçu historique" von Chasles aus dem Jahre 1837. — Der grundsätzliche Nachteil der heute bekannten Ausdehnungen des Pascalschen Satzes auf Flächen zweiter Ordnung liegt darin, daß bei ihnen mehr als zehn Flächenpunkte im Spiele sind. Die wahre Gestalt des Theoremes, dessen Existenz gesichert ist, handelt nur von zehn Punkten; sie ist aber trotz aller Bemühungen noch unbekannt.] *K. Strubecker.*

Alguneid, A. R.: Complete quadric primals in four-dimensional space. Proc. math. phys. Soc. Egypt. **4**, Nr. 4, 93—104 (1953).

Eine „vollständige Quadrik" eines Raumes S_4 bedeutet eine Quadrik, welche nicht nur als Ort Q_0 von Punkten betrachtet wird, sondern auch gleichzeitig als Ort Q_1 von Berührungsgeraden, als Ort Q_2 von Berührungsebenen und als Enveloppe Q_3 von Hyperebenen. Verf. bezeichnet mit (Q) den Inbegriff aller vier Gebilde Q_0, Q_1, Q_2, Q_3. Im allgemeinsten Falle werden sie durch folgende Gleichungen analytisch dargestellt:

$$(1) \qquad \sum a_{rs} x_r x_s = 0;\ \sum c_{rr',ss'} p_{rr',ss'} = 0;\ \sum C_{rr',ss'} \pi_{rr',ss'} = 0;\ \sum A_{rs} u_r u_s = 0;$$

wo die x_r, $p_{rr',ss'}$, $\pi_{rr',ss'}$, u_r Koordinaten von Punkten, Geraden, Ebenen, Hyperebenen bzw. bedeuten, und $c_{rr',ss'}$, $C_{rr',ss'}$, A_{rs} die Unterdeterminanten der Ordnungen 2, 3, 4 der Determinante $|a_{rs}|$ sind. In den besonderen Fällen, wo Ausartungen auftreten, betrachtet man nur diejenigen Systeme von Gleichungen (1), deren Koeffizienten denselben bilinearen Gleichungen wie im allgemeinsten Falle genügen. Es gibt verschiedene Arten solcher Gleichungen; sie verbinden miteinander: die a_{rs} und die A_{rs}; die a_{rs} und die $c_{rr',ss'}$; die A_{rs} und die $c_{rr',ss'}$; ...; die $c_{rr',ss'}$ und die $C_{rr',ss'}$ (darunter sind einige besonders wichtig). Auf Grund dieser Relationen und durch die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems findet man 15 verschiedene Ausartungen: vier 1. Ordnung, sechs 2. Ordnung, vier 3. Ordnung, und eine einzige 4. Ordnung. Betrachtet man dann die Segresche Mannigfaltigkeit: $\xi_s = a_{r_1 s_1} \cdot c_{r_2 r_2', s_2 s_2'} \cdot C_{r_3 r_3', s_3 s_3'} \cdot A_{r_4 r_4'}$, so findet man auf ihr eine singularitätenfreie M_{14}, deren Punkte allen (Q) eineindeutig entsprechen. Die Untersuchung ist eine Verallgemeinerung bekannter Arbeiten über vollständige Kegelschnitte und vollständige Quadriken des Raumes S_4. *E. Togliatti.*

Puckette, C. C.: The curve of pursuit. Math. Gaz. **37**, 256—260 (1953).

Deaux, R.: Cubiques anallagmatiques. Mathesis **62**, 193—204 (1953).

Es gibt 14 Familien von Kubiken, die invariant sind bezüglich einer quadratischen involutiven Punkttransformation τ, deren vereinigte Punkte und deren singuläre Punkte die Ecken eines vollständigen Vierecks $U \equiv U_1 U_2 U_3 U_4$ mit den Diagonalpunkten $A \equiv (U_1 U_2, U_3 U_4)$, $B \equiv (U_1 U_3, U_2 U_4)$, $C \equiv (U_1 U_4, U_2 U_3)$ sind. Zwei entsprechende Punkte in τ sind konjugiert bezüglich des Büschels der Umkegelschnitte von U und werden daher aus jedem Diagonalpunkt durch zwei konjugierte Strahlen einer Involution projiziert, deren Doppelstrahlen Gegen-

seiten von U sind. Ihre Koordinaten x, y, z und x', y', z' in einem System, dessen Bezugsdreieck ABC und dessen Einheitspunkt eine Ecke von U ist, sind durch die Gleichungen $xx' = y\,y' = z\,z'$ verbunden. τ läßt invariant 1. die Kubiken Γ_1 mit der Gleichung $a\,x(y^2 - z^2) + b\,y(z^2 - x^2) + c\,z(x^2 - y^2) = 0$, 2. die Kubiken Γ_2 mit der Gleichung $a\,x(y^2 + z^2) + b\,y(z^2 + x^2) + c\,z(x^2 + y^2) + d\,x\,y\,z = 0$ und 3. die 12 Familien von Kubiken Γ_3, die einen Doppelpunkt in einer Ecke von ABC haben und durch eine andere Ecke von ABC gehen und die Gleichung $x(a\,y^2 + 2b\,y\,z + c\,z^2) + \varepsilon\,z\,(c\,y^2 + 2b\,y\,z + a\,z^2) = 0$, $\varepsilon = \pm 1$, haben. Verf. untersucht die Eigenschaften dieser 14 Familien von Kubiken. Die Veranlassung zu seiner Untersuchung war die Arbeit von L. Droussent (s. nachstehendes Referat). *M. Zacharias.*

Droussent, Lucien: Cubiques circulaires anallagmatiques par points réciproques ou isogonaux. Mathesis **62**, 204—215 (1953).

Es handelt sich um Kubiken, die dem Bezugsdreieck ABC eines Systems baryzentrischer Koordinaten α, β, γ umbeschrieben sind. Die bezüglich reziproker Punkte invarianten Kubiken bilden zwei Familien A_1, B_1, mit den Gleichungen $A\,\alpha\,(\beta^2 + \gamma^2) + B\,\beta\,(\gamma^2 + \alpha^2) + C\,\gamma\,(\alpha^2 + \beta^2) + D\alpha\,\beta\,\gamma = 0$, $A\,\alpha\,(\beta^2 - \gamma^2) + B\,\beta\,(\gamma^2 - \alpha^2) + C\,\gamma\,(\alpha^2 - \beta^2) = 0$, und die bezüglich isogonaler Punkte invarianten Kubiken bilden zwei Familien A_2, B_2 mit den Gleichungen $A\,\alpha\,(\beta^2/b^2 + \gamma^2/c^2) + B\,\beta\,(\gamma^2/c^2 + \alpha^2/a^2) + C\,\gamma\,(\alpha^2/a^2 + \beta^2/b^2) + D\,\alpha\,\beta\,\gamma = 0$, $A\,\alpha\,(\beta^2/b^2 - \gamma^2/c^2) + B\,\beta\,(\gamma^2/c^2 - \alpha^2/a^2 + C\,\gamma\,(\alpha^2/a^2 - \beta^2/b^2) = 0$, wo a, b, c die Seiten des Dreiecks ABC und A, B, C, D Parameter sind. Die Familien A_1 und A_2 einerseits, B_1 und B_2 andererseits haben dieselben projektiven Eigenschaften. Die Untersuchung der Beziehungen dieser Kurven zu den merkwürdigen Punkten und Linien des Dreiecks bildet den Gegenstand der Arbeit. *M. Zacharias.*

Goormaghtigh, R.: Sur un problème de géométrie infinitésimale. Mathesis **62**, 99—102 (1953).

Zwei Geraden Δ, Δ' einer Ebene drehen sich in dieser gleichförmig um zwei Punkte O, O', ausgehend von zwei Anfangslagen, die miteinander einen Winkel φ bilden, und beschreiben in derselben Zeit zwei Winkel ϑ, ϑ', die sich wie n zu n' verhalten. Der Ort des Schnittpunktes M von Δ und Δ' ist eine Kurve (M), deren Gleichung in Polarkoordinaten (r, α) für den Pol O und eine mit OO' den Winkel $-\vartheta$ bildende Polarachse $r = OO' \sin(\alpha\,n'/n - \vartheta) : \sin(n'/n - 1)\alpha$ lautet. Verf. entwickelt Konstruktionen der Tangente und des Krümmungsmittelpunktes der Kurve im Punkt M. — Für $n = -n'$ ergibt sich der Satz: Die Tangente in einem Punkte einer gleichseitigen Hyperbel ist die Symmediane (d. h. die Winkelgegengerade der Seitenhalbierenden) in jedem Dreieck, das diesen Punkt und die Endpunkte eines beliebigen Durchmessers zu Ecken hat. *M. Zacharias.*

Algebraische Geometrie:

Samuel, Pierre: Quelques tendances récentes de la géométrie algébrique. Enseignement math. **39**, 180—191 (1953).

This paper is a compact and good essay on the recent progress in „abstract" algebraic geometry. The author first recollects historically the „position" of algebraic geometry in mathematics and then lists some remarkable contributions to this field in the last ten years. Most of them are due to Chevalley, Weil, Zariski, and their schools. The author also expresses some of his opinions about the immediate future of this field. *J. Igusa.*

Benedicty, Mario: La geometria algebrica astratta e il concetto di varietà algebrica. Archimede **5**, 133—144 (1953).

Eine für einen weiteren Kreis berechnete kurze Einführung in die modernen Richtungen der algebraischen Geometrie. Die „abstrakte algebraische Geometrie" steht zur klassischen algebraischen Geometrie etwa in demselben Verhältnis wie die „abstrakte Algebra" zur klassischen Algebra. In beiden Fällen handelt es sich darum, die logische Struktur der Theorie möglichst frei von „konkreten" Beimischungen, die nichts mit der logischen Schlußkette zu tun haben, herauszuarbeiten. Dabei er-

geben sich neue aussichtsreiche Probleme für die Forschung, und manche Beweise können in überraschender Weise vereinfacht werden, wenn sich auch die Hoffnungen, wesentlich über die klassischen Ergebnisse hinauszugelangen, bisher noch nicht erfüllt haben. *W. Gröbner.*

Piazzolla-Beloch, M.: Alcune osservazioni sulla simmetria obliqua nelle curve algebriche piane. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser. **2**, 151—154 (1953).

La droite D, $a\,x + b\,y + c = 0$ est axe de symétrie oblique de la courbe $f(x, y) = 0$ par rapport à la direction $L(l, m)$ si son équation divise l'expression $l\,\partial f/\partial x + m\,\partial f/\partial y$, le quotient représentant encore une courbe admettant D pour axe de symétrie relativement à L. L'application répétée de ce résultat conduit à l'annulation des restes de divisions successives, d'où les conditions liant a, b, c, l, m. Exemple de la courve de Lamé $x^4/a^4 + y^4/b^4 = 0$ dont les axes de symétrie sont les axes de coordonnées (s. orthogonale) et les deux obliques $bx + a\,y = 0$ relatif à la direction (a, b) et $b\,x - a\,y = 0$ relatif à $(-a, b)$. *B. d'Orgeval.*

Turri, Tullio: Sulla classificazione delle trasformazioni involutorie del piano. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **22**, 16—26 (1953).

Involutions de Geiser et de Bertini dont les courbes unies ont le genre inférieur au genre habituel. *L. Godeaux.*

Godeaux, Lucien: Ancora sopra una particolare involuzione di Geiser. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **22**, 1—2 (1953).

L'objection de Turri (cf. ce Zbl. **47**, 146) à une construction donnée par l'A., d'une involution de Geiser changeant en lui-même le système des cubiques planes passant par six points est réfutée. *B. d'Orgeval.*

Pisano, Paolo: Rappresentazione piana di involuzioni sopra superfici cubiche. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **22**, 27—33 (1953).

L'A. considère une surface cubique F, un point simple O et deux droites r, s de cette surface. Deux droites s'appuyant sur r, s sont homologues si elles coupent encore F en deux points alignés sur O. Etude de l'involution déterminée sur un plan sécant par ces droites. *L. Godeaux.*

Derwidué, L.: A propos des variétés exceptionnelles. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **39**, 70—76 (1953).

Etude des variétés exceptionnelles qui peuvent exister dans une transformation birationnelle entre deux variétés algébriques privées de singularités. *L. Godeaux.*

Turri, Tullio: Superficie razionali reali di S_3 rappresentabili su un piano. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **22**, 3—15 (1953).

Etude des surfaces rationnelles réelles de l'espace ordinaire; surfaces représentables sur le plan réel. Problème déjà résolu par Comessatti: Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale [Math. Ann. **73**, 1—72 (1913)]. *L. Godeaux.*

Godeaux, Lucien: Construction de surfaces canoniques de diviseur deux. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **39**, 653—665 (1953).

La surface $\varphi_{2n}(x_1\,x_2\,x_3,\ x_2\,x_3\,x_4,\ x_3\,x_4\,x_1,\ x_4\,x_1\,x_2) + (x_1\,x_2\,x_3\,x_4)^n\,\psi_{2n}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ passe $2n$ fois par les arêtes du tétraèdre de référence; ses courbes canoniques ont une partie fixe dans les plans des faces, d'ordre zéro; le reste appartient à des surfaces d'ordre $6n - 8$ passant $2n - 3$ fois par les arêtes et $3n - 4$ fois par les sommets. On établit leur équation d'où les caractères de la surface $p_a = p_g = (n-1)(4n^2 - 2n + 1)$, $p^{(1)} = 24\,n\,(n-1)^2 + 1$. Si la surface est telle que $\psi_{2n} = \varphi_{2n}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ la transformation homographique T $x_i \to y_{i+1}\,y_{i+2}\,y_{i+3}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ la conserve et si n pair ne contient pas de points unis de T. L'involution d'ordre 2 sans points unis définie par T sur la surface a pour image une surface de diviseur 2 et de caractères $p_a = p_g = n'\,(16\,n'^2 - 12\,n' + 3)$, $p^{(1)} = 24\,n'\,(2\,n' - 1)^2 + 1$ $(n = 2\,n')$. *B. d'Orgeval.*

Burau, Werner: Lo spezzamento dello spazio delle relazioni quadratiche d'una grassmanniana. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **2**, 269—270 (1953).

Burau, Werner: Projektive Klassifikation der Grassmannrelationen und Kennzeichnung der Minimalmodelle für die Gesamtheiten der verallgemeinerten Raumelemente des S_n. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **34**, 133—160 (1953).

Die vorliegende Abhandlung enthält eine geometrische Untersuchung der quadratischen Relationen, die die Grassmannschen S_k-Koordinaten eines Raumes S_n miteinander verbinden, und der Art, wie diese Relationen von den Homographien des Raumes S_n miteinander vertauscht werden. — In den §§ 1, 2 wiederholt Verf. die wichtigsten Eigenschaften der Segreschen und der Grassmannschen Mannigfaltigkeiten und gibt einige Sätze, welche gestatten, eine Mannigfaltigkeit, die die Punktepaare aus einem S_m und einem S_n, oder die S_k eines S_n, eineindeutig abbildet, als eine Segresche $S_{m,n}$-, oder als eine Grassmannsche $G_{n,k}$-Mannigfaltigkeit zu erkennen. Im § 2 ist, für das folgende, Satz 4 besonders wichtig; er besagt, daß die Inzidenzbedingung von zwei S_k eines S_{2k+1} durch Nullsetzen einer symmetrischen oder einer schiefsymmetrischen bilinearen Form ausgedrückt werden kann, je nachdem k ungerade oder gerade ist. [Diese Eigenschaft findet sich schon bei C. Segre, Ann. Mat. pura appl., III. Ser. **27**, 75—123 (1918), Fußnote [6]) im § 4]. Man findet so, für ein ungerades k, eine sogenannte Fundamentalquadrik. die $G_{n,k}$ enthält. — Der § 3 ist den hier genannten Inzidenzmannigfaltigkeiten gewidmet. Sind drei natürliche Zahlen n, k, h, mit $-1 \leq h \leq k \leq n$, gegeben, dann bedeutet $J_{n;k,h}$ das Bild aller Elemente (S_k, S'_h), d. h. aller Paare S_k, S'_h mit voller Inzidenz (S'_h liegt in S_k oder fällt mit S_k zusammen). $J_{n;k,h}$ liegt auf dem Segreschen Produkt $G_{n,k} \times G'_{n,h}$. Es ist $J_{n,k,-1} = G_{n,k}$ und $J_{n;n,h} = G'_{n,h}$ zu setzen. Auch $J_{n;k,h}$ besitzt kennzeichnende Eigenschaften. — Im § 4 wendet sich Verf. seinem Hauptziel zu. Jede $G_{n,k}$ liegt auf einer bekannten Anzahl $r(n,k)$ von linear unabhängigen Quadriken, welche den quadratischen Beziehungen entstammen, die die üblichen S_k-Koordinaten miteinander verbinden. Man kann das Linearsystem aller solcher Quadriken auf einen Raum R, den sogenannten Relationenraum, abbilden. Die projektive Gruppe G des ursprünglichen Raumes S_n liefert im Raume der $G_{n,k}$ eine projektive Gruppe, die das obengenannte Linearsystem von Quadriken in sich überführt; und so wird auch in R eine Kollineationsgruppe induziert. Während aber im S_n und im Raume der $G_{n,k}$ keine linearen invarianten Unterräume vorhanden sind, gibt es in R eine endliche Anzahl von linear unabhängigen Unterräumen, die R selbst aufspannen und die einzeln invariant bleiben; sie sind die Einbettungsräume gewisser wohlbestimmter Inzidenzmannigfaltigkeiten, die etwas verschieden ausgestaltet sind, je nachdem k gerade oder ungerade ist. *E. Togliatti.*

Burau, Werner: Projektive Klassifikation der Veronese-Relationen und Kennzeichnung aller Punktmodelle für die Linienelemente, Geraden und Punkte-Paare des S_n. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **35**, 299—326 (1953).

Die vorliegende Untersuchung ist, für Gehalt und Methoden, mit einer früheren desselben Verf. über Grassmannsche Mannigfaltigkeiten $G_{n,k}$ eng verbunden. Auch eine Veronesesche Mannigfaltigkeit ist die Basis eines Linearsystems von Quadriken, so daß man die Homographien studieren kann, die in einem solchen Linearsystem von den Homographien des ursprünglichen Raumes S_n induziert werden. — Im § 1 wird zunächst die Veronesesche V_n^k eingeführt, als Bild des Linearsystems aller Hyperflächen der Ordnung k des Raumes S_n; ihre parametrischen Gleichungen lauten: $x_{i_0 \ldots i_n} = x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n}$ $(i_0 + \cdots + i_n = k)$, wo $x_0, \ldots, x_n$ projektive Punktkoordinaten in S_n bedeuten. Zusammen mit V_n^k werden auch folgende andere Mannigfaltigkeiten betrachtet: 1. Das Segresche Produkt $\Pi_{2n}^{h+k} = V_n^h \times V_n^k$ mit den Gleichungen:

$$x_{i_0 \ldots i_n; j_0 \ldots j_n} = x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n} y_0^{j_0} \cdots y_n^{j_n} \quad (i_0 + \cdots + i_n = h;\ j_0 + \cdots + j_n = k);$$

2. die V_n^{h+k}, mit den Gleichungen: $x_{i_0 \ldots i_n; j_0 \ldots j_n} = x_0^{i_0+j_0} \cdots x_n^{i_n+j_n}$ $(i_0 + \cdots + i_n = h;\ j_0 + \cdots + j_n = k)$, Schnitt von Π_{2n}^{h+k} mit einem geeigneten linearen Raum; 3. die verallgemeinerte Grassmannsche $G_{n;1}^h$: $x_{i_0 \ldots i_m} = \pi_0^{i_0} \cdots \pi_m^{i_m}$ $(i_0 + \cdots + i_m = h)$, wo $\pi_0, \ldots, \pi_m$ die Grassmannschen Linienkoordinaten in S_n sind; 4. die $J_{n;1,0}^{h,k}$ mit den Gleichungen:

$$x_{i_0 \ldots i_n; j_0 \ldots j_n} = x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n} \pi_0^{j_0} \cdots \pi_m^{j_m} \quad (i_0 + \cdots + i_n = h;\ j_0 + \cdots + j_m = k),$$

die als ein verallgemeinertes Bild der Linienelemente von S_n betrachtet werden kann; 5. die Bildmenge $P_{2n}^{h,k;p}$:

$$x_{i_0 \ldots i_n; j_0 \ldots j_n; s_0 \ldots s_m} = x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n} y_0^{j_0} \cdots y_n^{j_n} \pi_0^{s_0} \cdots \pi_m^{s_m}$$

$(i_0 + \cdots + i_n = h;\ j_0 + \cdots + j_n = k;\ s_0 + \cdots + s_m = p)$ der geordneten Punktepaare in S_n. — Im § 2 werden einige Sätze aufgestellt, die gestatten, die eingeführten Mannigfaltigkeiten zu charakterisieren und zu erkennen. — Im § 3 werden schließlich die Quadriken durch eine V_n^k be-

trachtet. Sie bilden ein Linearsystem und werden auf die Punkte eines Relationenraumes R linear und eineindeutig abgebildet. Die projektive Gruppe G des Raumes S_n verwandelt V_n^k in sich selbst und induziert in R eine Kollineationsgruppe. Während aber sowohl im S_n als auch im Raume der V_n^k kein linearer Raum für die betrachteten Kollineationen invariant war, gibt es in R eine endliche Anzahl von linear unabhängigen Räumen, die R selbst aufspannen und die einzeln invariant bleiben. Sie können als die Einbettungsräume gewisser verallgemeinerter Grassmannscher und Inzidenzmannigfaltigkeiten $G_{n;1}^{2m}$ und $J_{n;1,0}^{h,k}$ definiert werden.

E. Togliatti.

Gallarati, Dionisio: Sul massimo numero di complessi lineari di S_k di S_r linearmente indipendenti, ai quali appartengono gli S_k tangenti di una V_k di S_r. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **15**, 10—15 (1953).

Es wird hier zunächst folgender Satz bewiesen: Wenn eine algebraische Mannigfaltigkeit V_k eines Raumes S_r genau ∞^k Berührungsräume S_k besitzt, so können ihre Berührungsräume höchstens $\theta(r,k) = \binom{r+1}{k+1} - (r-k)(k+1) - 1$ linear unabhängigen linearen S_k-Komplexen angehören. Diese obere Grenze wird für $r = 5$, $k = 2$ von der Veroneseschen Fläche und für beliebige Werte von r, k von den V_k^{r-k+1} (Örter von ∞^1 Räumen S_k) erreicht; es bleibt unentschieden, ob für $k > 1$ noch andere Mannigfaltigkeiten mit derselben Eigenschaft existieren. Zweitens beweist Verf., daß die Berührungsräume der Projektion der V_k auf einen S_{r-1} aus einem ihrer allgemeinen Punkte wenigstens $N - \binom{r}{k} + k + 1$ linear unabhängigen linearen S_k-Komplexen (des S_{r-1}) angehören, falls die Berührungsräume der V_k selbst N S_k-Komplexen (des S_r) angehören. *E. Togliatti.*

Boer, J. H. De: The relation between the Cayley form and the Barsotti form of an algebraic chain. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **56**, 158—161 (1953).

Verf. untersucht die nach Barsotti (dies. Zbl. **41**, 285) durch allgemeine Projektion einer V_d auf einen S_{d+1} gebildete Form und vergleicht sie mit der „zugeordneten Form" von Chow-v. d. Waerden (dies. Zbl. **16**, 40) für dieselbe algebraische Mannigfaltigkeit V_d. Er weist nach, daß beide Formen im wesentlichen äquivalent sind und den gleichen Grad haben. *W. Gröbner.*

Conforto, Fabio: Un'osservazione sopra le superficie abeliane impure di determinante primo. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **8**, 2—6 (1953).

In a paper by C. Bonomi [Rend. Circ. mat. Palermo **43**, 47—70 (1919)] on hyperelliptic impure surfaces of a given determinant d, i. e. containing two elliptic pencils whose general curves (which are elliptic) meet in d points, it is stated that the above mentioned surfaces, when d is an odd prime number p, belong to $(p-1)/2$ different families. The author, in his researches on Riemann matrices from the view point of equivalence (in the sense of Scorza), has shown that C. Bonomi's result is true only apparently, since the $(p-1)/2$ families are not distinct, but are actually a single one; a very simple proof of it is given in this paper. For a Riemann matrix belonging to a generic surface of the family (the matrix being singular in the sense of Scorza) the author has also determined all the singular relations, remarking that the corresponding divisor is always an integer multiple of p. It is thus proved that a singular relation for a Riemann matrix of genus 2 does not imply necessarily singular relations corresponding to all values of the divisor, in contrast with a conjecture expressed by G. Cotty [Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. Sér. **3**, 209—374 (1913)]. This remark puts clearly into evidence that in a complete study on Riemann matrices (of genus ≥ 2) with respect to equivalence it is necessary to make more precise statements about the possible values of elementary divisors, since some phenomena (e. g. that of singularity) can occur only with respect to some particular values of the divisors. *M. Rosati.*

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On pieces of convex surfaces. Amer. J. Math. **75**, 477—487 (1953).

1. $X(u,v)$ sei für einen einfach-zusammenhängenden (u,v)-Bereich der Vektor eines genügend kleinen Flächenstücks S und von der Klasse C^2. $N(u,v)$ sei der Einheitsnormalenvektor von S. Ist $X_u \times X_v \neq 0$ und die Gaußsche Krümmung $K \neq 0$, dann ist die Abbildung $X \to N$ von S auf die Einheitskugel eineindeutig in der Umgebung jeder Stelle. Das kann auch

noch für $K \geqq 0$ oder $K \leqq 0$ der Fall sein. Es gilt aber nicht mehr, wie bewiesen wird, wenn in jeder Umgebung des betrachteten Punktes K sowohl positive wie negative Werte annimmt. **2.** S sei eine streng konvexe Fläche der Klasse C^1 und besitze eine sphärische C^0-Parametrisierung $X(\lambda, \mu)$, d. h. es existiere eine eineindeutige stetige Abbildung eines ebenen (λ, μ)-Gebiets auf S derart, daß λ, μ zwei der drei Komponenten von N sind. S hat stets eine solche Parametrisierung, und für sie ist die Stützfunktion $H = X \cdot N$ von der Klasse C^1, obwohl $X(\lambda, \mu)$ nur von der Klasse C^0 ist. Dieser Satz ist in dem folgenden enthalten: **3.** Ist $z(x, y)$ eine streng konvexe Funktion von der Klasse C^1 in einem konvexen Gebiet D, so wird D durch (*) $p = z_x(x, y)$, $q = z_y(x, y)$ umkehrbar eindeutig und stetig auf ein (p, q)-Gebiet D' abgebildet. Als Funktion von p, q ist dann $h = x\,p + y\,q - z$ von der Klasse C^1 und in jedem konvexen Teilgebiet von D' streng konvex. Die Umkehrabbildung von (*) ist $x = h_p(p, q)$, $y = h_q(p, q)$. Die Legendre-Transformation $(x, y; z) \to (p, q; h)$ mit der C^1-Voraussetzung ist also umkehrbar. **4.** Die Aussagen in **2** und **3** lassen sich nicht verbessern, wie durch ein Beispiel gezeigt wird: $h(p, q)$ braucht nicht von der Klasse C^2 zu sein, wenn $z(x, y)$ analytisch oder gar ein Polynom ist. **5.** Ist die konvexe Fläche $X(u, v)$ von der Klasse C^1 und ist c von zwei Ausnahmewerten verschieden, so ist $Y(u, v) = X + c\,N$ eine Fläche von der Klasse C^1 mit einer C^1-Parametrisierung. Auch bei zusätzlichen Voraussetzungen für X braucht Y nicht von der Klasse C^2 zu sein. **6.** Ein Appendix beschäftigt sich mit dem bekannten Existenztheorem von H. Weyl in folgender Fassung: Zu einem metrischen Tensor $g_{ik}(u, v)$ von der Klasse C^n mit positiver Krümmung $K(u, v)$ von der Klasse C^{n-1} existiert im $\mathfrak{R}_3$ stets eine Eifläche $X(u, v)$ von der Klasse C^{n+1}, deren erste Fundamentalform die Matrix (g_{ik}) hat. Es wird gezeigt, daß der Satz nur für $n = 1$ richtig sein kann. *W. Süss.*

Löbell, Frank: Flächen mit vorgegebener vektorieller Differentialinvariante. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1952**, 99—101 (1953).

Die Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ im dreidimensionalen euklidischen Raum besitzt $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$ als vektorielle Differentialinvariante vom Gewicht 1 (Löbell, S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1943**, S. 217ff.). Verf. untersucht das Problem der Bestimmung aller Flächen mit vorgegebener dritter Fundamentalform und vorgegebener Gaußscher Krümmung als Funktionen der Parameter, welches mit dem Problem der Bestimmung aller Flächen mit vorgegebenem $(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)(u, v)$ identisch ist, und vergleicht es mit demjenigen der Bestimmung aller Flächen mit vorgegebener erster Fundamentalform. [Beide Probleme wurden, teilweise verallgemeinert, von Ref. behandelt, vgl. Math. Z. **57**, 244—264 (1953).] *K. Leichtweiss.*

Nirenberg, Louis: The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large. Commun. pure appl. Math. **6**, 337—394 (1953).

Le présent travail contient des solutions des problèmes de Weyl, sur l'existence d'une surface convexe pour chaque métrique définie à courbure partout positive, et de Minkowski, sur l'existence d'une surface convexe pour toute courbure positive donnée. Pour le problème de Weyl la métrique est supposée C^4, pour celui de Minkowski la courbure doit être C^2. La démonstration suit la méthode de continuité, l'A. utilise les dérivées de Hölder, pour lesquelles il peut améliorer les estimations de Weyl pour les dérivées ordinaires. L'exposé est particulièrement clair et complet. *H. Guggenheimer.*

Minagawa, T. and T. Rado: On the infinitesimal rigidity of surfaces of revolution. Math. Z. **59**, 151—163 (1953).

Es werden Rotationsflächen untersucht, die wie der äußere bzw. innere Teil des Torus von 2 parabolischen Kurven mit parallelen Flächennormalen berandet sind und hier konvexe Gürtel (belt) bzw. R-Flächen heißen. Der Meridian sei eine zweimal differenzierbare konvexe Kurve. Die konvexen Gürtel sind nach Liebmann starr. Verff. beweisen: Die mannigfachen Rotationsflächen, die einen Gürtel enthalten, sind starr. Wenn nämlich der Vektor $\mathfrak{z}$ der infinitesimalen Verbiegung auf einem Parallelkreis der Nullvektor ist, so besteht Starrheit jeder anschließenden Fläche mit konvexem Meridian. Bei R-Flächen betrachtet man die einparametrige Schar mit gleicher Meridiankurve, aber variablem Achsenabstand. Es wird gezeigt: Wenn es unter ihnen unstarre gibt, so doch nur abzählbar viele. Die Existenz unstarrer Flächen, die Ref. im analytischen Fall nachgewiesen hat, folgt hier nicht. Ein Ergebnis von Ziebur wird angekündigt, daß im analytischen Fall die unstarren Flächen überall dicht liegen. *E. Rembs.*

Nitsche, Joachim: Ein mit der Verbiegung der Halbkugel verbundenes Randwertproblem. Arch. der Math. **4**, 331—336 (1953).

Die „nördliche" Halbkugel ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqq 0$) ist stereographisch aus dem Südpol in die Äquatorebene projiziert und auf rechtwinklige Koordinaten in dieser bezogen. L, M, N seien die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung einer isometrischen Fläche F, bezogen auf dieselben Koordinaten, und a, b sei eins der drei Paare (F. Noether) konjugierter Potentialfunktionen, für die am Rande $a \cos\varphi + b \sin\varphi = 0$ wird (φ = geogr. Länge). Wenn man dann den Gaußschen Integralsatz auf $a(L\,dx + M\,dy) + b(M\,dx + N\,dy)$ anwendet, verschwinden in zweien der drei Fälle die Integranden der Flächenintegrale. Daraus folgt: Ist ϱ die Krümmung der Randkurve von F, so muß $\oint \varrho \sin\varphi\, d\varphi = 0$, $\oint \varrho \cos\varphi\, d\varphi = 0$ sein. Man kann also ϱ nicht willkürlich vorgeben. Die dritte Formel, die man erhält, lautet $\oint \varrho\, d\varphi = 2 \iint H z\, do$; $\oint \varrho\, d\varphi$ ist also hier erst mit der mittleren Krümmung H von F bestimmt. Wegen $H \geqq 1$ läßt sich zwar $\oint \varrho\, d\varphi \geqq 2\pi$ folgern, aber diese Ungleichung gilt ja nach Fenchel für jede geschlossene Kurve. *E. Rembs.*

Vaccaro, Giuseppe: Sull'isometria di calotte appartenenti a due varietà. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **14**, 404—407 (1953).

Let σ_n, $\bar{\sigma}_n$ be two „caps" (calotte) of order n, belonging to a variety in a euclidean space. According to Bompiani, σ_n and $\bar{\sigma}_n$ are said to be isometric of order k, if it is possible to have a one-to-one correspondence between them, in such a way that the expansions of the line elements ds^2, $\overline{ds}^2$ of σ_n, $\bar{\sigma}_n$, in the neighborhoods of the respective centers, coincide up to the order $k - 1$. The author considers two caps belonging to two manifolds V_m, $\bar{V}_m$ imbedded in a euclidean S_{n+m}, and proves that they are always isometric of order two; they are isometric of order three if, and only if, the mean curvatures at the centers of the caps coincide. *V. Dalla Volta.*

Tsien, T. C.: Über die Formeln von Dini und Levi-Cività der geodätischen Abbildungen. J. Chinese math. Soc. **2**, 144—155 u. deutsche Zusammenfassg. 156 (1953) [Chinesisch].

Beweis der folgenden Sätze: 1. Wenn zwischen zwei Flächen eine Abbildung besteht, welche die beiden Scharen isotroper Linien der ersten Fläche auf zwei Scharen komplexer geodätischer Linien der zweiten Fläche und zugleich die beiden Scharen isotroper Linien der zweiten Fläche auf zwei Scharen komplexer geodätischer Linien der ersten Fläche abbildet, so ist die Abbildung geodätisch. Die Fundamentalformen der beiden Flächen lassen sich auf die klassische Dinische Form bringen. 2. Angenommen zwei Riemannsche Räume haben ein gemeinsames orthogonales Bezugssystem und es besteht eine Abbildung der beiden Räume aufeinander, welche ein gewisses System von 2^{n-1} isotropen Kurvenkongruenzen des ersten Raumes auf 2^{n-1} komplexe geodätische Normalenkongruenzen des zweiten Raumes und zugleich ein gewisses System von 2^{n-1} isotropen Kurvenkongruenzen des zweiten Raumes auf 2^{n-1} komplexe geodätische Normalenkongruenzen des ersten Raumes abbildet, so ist die Abbildung geodätisch. Die Fundamentaltensoren der beiden Räume lassen sich auf die klassische Form von Levi-Cività bringen. Autoreferat.

Finn, Robert: A property of minimal surfaces. Proc. nat. Acad. Sci. USA **39**, 197—201 (1953).

D sei offenes und beschränktes Gebiet und $\varphi(x, y)$ eine in D eindeutige Lösung von $(1 + \varphi_y^2)\varphi_{xx} - 2\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} + (1 + \varphi_x^2)\varphi_{yy} = 0$. Ist dann der Inhalt der von $z = \varphi(x, y)$ mit $(x, y) \in D$ gegebenen Fläche kleiner als $\mathfrak{A}$, so gilt in allen Punkten von D, deren Abstand vom Rand von D nicht kleiner als d ist, eine Abschätzung (*) $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \leq K_D(\mathfrak{A}, d)$. Dabei ist K bei festem d nicht abnehmend in $\mathfrak{A}$ und bei festem $\mathfrak{A}$ nicht zunehmend in d. In (*) kann rechts auch eine Funktion $K_D^*(M, d)$ genommen werden, wenn $|\varphi(x, y)| \leq M < \infty$ in D gilt. Solche Abschätzungen gelten auch für eine allgemeinere Klasse C von Differentialgleichungen, darunter die vom Typ $(\varrho\,\varphi_x)_x + (\varrho\,\varphi_y)_y = 0$, wenn $\varrho = \sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2} + \lambda\,\varepsilon(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)$ gilt und $\varepsilon(t)$ für große Werte des Argumentes $\varepsilon(t) = o(t^{-3/2})$, $d\varepsilon/dt = o(t^{-5/2})$ erfüllt und λ hinreichend klein ist. — Mittels eines Satzes über Auswahlfolgen für Mengen beschränkter Funktionen mit gleichmäßig beschränkter Exzentrizität leitet Verf. her: Sind $\varphi^n(x, y)$ in D eindeutige Lösungen einer Gleichung der Klasse C, sind weiter die Inhalte der von $z = \varphi^n(x, y)$, $(x, y) \in D$, bestimmten Flächen gleichmäßig beschränkt und gilt für einen Punkt $(x_0, y_0) \in D$: $|\varphi^n(x_0, y_0)| \leq K < \infty$,

so gibt es eine Teilfolge, die mit Einschluß der 2. Ableitungen in D konvergiert. — Die Arbeit schließt mit der Erwähnung des Satzes, daß das erste Randwertproblem einer Differentialgleichung der Klasse C (eindeutig) lösbar sei, wenn D konvex ist und die Randkurve stetige, nicht-verschwindende Krümmung besitzt. *Joachim Nitsche.*

Hopf, Eberhard: On an inequality for minimal surfaces $z = z(x, y)$. J. rat. Mech. Analysis **2**, 519—522 (1953).

Unter wesentlicher Benützung einer Ungleichung von E. Heinz leitet Verf. für die Gaußsche Krümmung K einer Minimalfläche S die folgende bemerkenswerte Abschätzung her: ist S über dem Kreis $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$ regulär, so gilt in x_0, y_0 die Ungleichung: $|K| \leq \varkappa\, \zeta^2 (1 + \zeta^2)/R^2$, $\zeta = 1/\sqrt{1 + p^2 + q^2}$; $S: z(x, y) = z$. *H. Beckert.*

Hopf, Eberhard: Correction to the paper „On an inequality for minimal surfaces $z = z(x, y)$". J. rat. Mech. Analysis **2**, 801—802 (1953).

Verf. bemerkt, daß die in der angeführten Arbeit (s. vorherg. Ref.) angegebene Berechnung der günstigsten Konstanten $\varkappa$ lückenhaft ist. Er berichtet über eine neue, allerdings nur Schranken liefernde Schlußweise. *H. Beckert.*

Pinl, M.: B-Kugelbilder reeller Minimalflächen in R_4. Math. Z. **59**, 290—295 (1953).

In Verallgemeinerung bekannter Eigenschaften der gewöhnlichen Minimalflächen des R_3 wird für die 2-dimensionalen Minimalflächen des Euklidischen R_4 gezeigt: Die beiden sphärischen Bilder (Blaschke, dies. Zbl. **36**, 114) sind konform. *W. Blaschke.*

Strubecker, Karl: Über die Flächen, deren Asymptotenlinien ein Quasi-Rückungsnetz bilden. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1952**, 103—110 (1953).

R. Sauer hatte in einer Arbeit „Infinitesimale Verbiegung der Flächen, deren Asymptotenlinien ein Quasi-Rückungsnetz bilden" (dies. Zbl. **40**, 88) eine Klasse von Flächen angegeben, deren infinitesimale Verbiegungen sich in geschlossener Form durch Quadraturen darstellen lassen. Verf. zeigt, daß sich diese Klasse von Flächen mittels seiner Theorie des isotropen Raumes auf noch einfachere Weise charakterisieren läßt, nämlich als alle Flächen $z = z(x, y)$ mit fester Relativkrümmung $K = -1$. Es gelingt, eine integralfreie Darstellung anzugeben, sowie eine kinematische Erzeugungsweise. Durch Ersetzen von z durch $i\,z$ erhält man eine Flächenschar der isotropen Krümmung $K = +1$. Auch diese Flächenschar läßt sich entsprechend einfach darstellen und geometrisch diskutieren. Verf. gibt einige einfache Beispiele. *W. Haack-H. J. von Schnakenburg.*

Calapso, Renato: Sulle reti derivate dalle reti O. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **2**, 287—300 (1953).

Verf. betrachtet im n-dimensionalen euklidischen Raum O-Netze; er zeigt, daß M-Netze, die aus O-Netzen entstehen, durch eine Transformation von Combescure mit der Bedingung, daß die Summe der reziproken Krümmungen in entsprechenden Punkten konstant und ungleich Null ist, O-Netze sind, welche ein deriviertes Netz von der Eigenschaft zulassen, daß die Entfernung entsprechender Punkte konstant ist. Die Krümmung K wird definiert durch $K = -(1/h\,l)\,(\partial p/\partial v + \partial q/\partial u)$, wobei h, l, p, q Funktionen von u, v sind, die durch die Integrabilitätsbedingungen bestimmt sind. Zum Schluß wird der Fall der involutorischen Transformation der O-Netze untersucht; es ergibt sich, daß das O-Netz mit dem System der Krümmungslinien einer Fläche konstanten Krümmungsmaßes zusammenfällt und die Combescure-Transformierte mit ihrem Gaußschen sphärischen Bild. *O. Volk.*

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Dou, P. Alberto: Ebene Viergewebe. Mem. Acad. Ci. Art. Barcelona **31**, Nr. 5, 92 S. (1953) [Spanisch].

Es werden „Viererwaben" in der Ebene betrachtet, die durch vier Kurven-

scharen $u_j(x, y) = \text{fest}$; $j = 1, 2, 3, 4$ mit $\partial(u_j, u_k)/\partial(x, y) \neq 0$ gebildet worden, und ihre Invarianten gegenüber „beliebigen" Punkttransformationen $x^* = x^*(x, y)$, $y^* = y^*(x, y)$ untersucht. Dabei wird insbesondere von folgender Darstellung des Gewebes durch Pfaffsche Formen $\sigma_j = 0$ mittels zweier Hilfsformen α, β ausgegangen: $\sigma_1 = +\alpha \cos r - \beta \sin r$, $\sigma_2 = +\alpha \sin r + \beta \cos r$, $\sigma_3 = +\alpha \cos r + \beta \sin r$, $\sigma_4 = -\alpha \sin r + \beta \cos r$, worin r mit dem Doppelverhältnis der vier Tangenten an die Wabenkurven zusammenhängt. Auf Grund dieser Darstellung des Gewebes wird ein vollständiges Invariantensystem und eine kanonische Darstellung gewonnen. Für ein Gewebe wird die Höchstzahl p von Relationen der Gestalt

$$f_{j1}(u_1) + f_{j2}(u_2) + f_{j3}(u_3) + f_{j4}(u_4) = 0,$$

$j = 1, 2, \ldots, p$, als „Rang" erklärt. Es werden invariante Bedingungen für $p = 1, 2, 3$ hergeleitet. Die Darstellung ist ausführlich und übersichtlich und ohne Vorkenntnisse lesbar. *W. Blaschke.*

Chung, Tong-Der: The projective differential geometry of certain pairs of plane curves. J. Chinese math. Soc. **2**, 157—165 u. engl. Zusammenfassg. 166 (1953) [Chinesisch].

The projective differential geometry of certain pairs of plane curves at ordinary points has been investigated by Hsiung [Duke math. J. **10**, 539—546 (1943); Bull. Amer. math. Soc. **49**, 786—792 (1943)]. The purpose of the present paper is to use the same method to study the projective differential geometry of certain pairs of plane curves for the following cases: (1) Two curves in a plane intersecting at an inflexion point (§§ 2, 3, 4); (2) Two curves in a plane having a common tangent at two inflexion points (§ 5). We give a detailed discussion about the curves in case (1), while the theory about the curves in case (2) is easily obtained from this. For the previous case we obtain a projective invariant which is determined by the neighborhood of the fifth order of the curves at the point in question, and by using Bompiani's osculants [Bull. Un. mat. Ital., I. Ser. **5**, 118—120 (1926)] of the curve at this point we give the projective invariant a simple geometric characterization. Moreover, by suitably choosing a covariant point for the unit point of the coordinate system, we obtain the canonical power series expansions of the curves at the considered point. According to the invariant obtained vanishes or not, we have four different types. The interpretation of the absolute invariants in the expansions of each type is given in terms of certain cross ratios alone. Autoreferat.

Bol, G.: Über die Flächen, deren Godeaux-Kette sich schließt und die Periode 8 hat. Arch. der Math. **4**, 61—74 (1953).

Si on considère une surface (x) rapportée à ses asymptotiques u, v, les points U, V qui représentent les tangentes aux asymptotiques u, v se succèdent dans une suite de Laplace. Godeaux a étudié le cas où cette suite de Laplace a la période 6; il existe alors une surface (x') en correspondance avec (x) telle qu'en deux points homologues, ces deux surfaces ont même quadrique de Lie. L'A. étudie le cas où la suite de Laplace a la période 8; il existe alors une surface (x') en correspondance avec (x) telle que les quadriques de Lie de ces surfaces en deux points homologues se touchent en quatre points. Il étudie également quelques questions connexes en utilisant la méthode définie dans son ouvrage Projektive Differentialgeometrie I (Göttingen 1950, ce Zbl. **35**, 234). *L. Godeaux.*

Bol, Gerrit: Über die Flächen, bei denen die Diagonalen der Vierseite von Demoulin linearen Kongruenzen angehören. Math. Z. **59**, 97—150 (1953).

Les tangentes asymptotiques en un point d'une surface (x) non réglée ont pour images sur l'hyperquadrique Q de Klein de S_5 deux points transformés de Laplace l'un de l'autre et qui déterminent une suite de Laplace L. Les quadriques de Lie de (x) ont, en dehors de x, quatre points caractéristiques, sommets du quadrilatère de Demoulin. L'A. étudie le cas où les diagonales de ce quadrilatère appartiennent à une congruence linéaire. Dans ce cas, il existe dans S_5 une suite de Laplace de période 4, la droite joignant les deux points consécutifs déterminant cette suite coupant Q aux points images des diagonales considérées. L'A. étudie minutieusement la configuration obtenue et montre qu'il existe des homographies de S_5, fixes, en relation avec la suite L. Il étudie aussi le cas où la suite L est périodique et ensuite les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie distinctes de (x). *L. Godeaux.*

Decuyper, Marcel: Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques des deux familles appartiennent à des complexes linéaires. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **39**, 688—696 (1953).

L'A. montre que si les diagonales du quadrilatère de Demoulin coupent les directrices de Wilczynski d'une surface au foyers de ces directrices, les asymptotiques des deux familles de la surface appartiennent à des complexes linéaires. Il donne ensuite une exemple de deux surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin, une de ces surfaces dépendant d'un paramètre. *L. Godeaux.*

Muracchini, Luigi: Sulla geometria differenziale conforme delle trasformazioni puntuali fra due piani. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 252—258 (1953).

Conformal properties of point-transformations (trf.) between two Euclidean planes. Through each point and in each direction there are two elements of the second order E_2 such that there is a circular E_3 containing E_2 to which corresponds a circular E_3 in the other plane. These E_2 belong generally (in each plane) to a system of ∞^2 curves C determined by the trf.; however their system is only ∞^1 if and only if the trf. is a conformal one; the curves C are indetermined only for circular affinities. The following theorem is proved: A point trf. which changes ∞^2 circles in circles is necessarily the product of homographic trfs. between the net of lines in one plane and the circles of a net in the other plane. *E. Bompiani.*

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Sun, J. Tseying: A remark on the equivalence problem for affine and metric spaces. J. Chinese math. Soc. **2**, 133—137 u. engl. Zusammenfassg. 138 (1953) [Chinesisch].

An analytic proof for the equivalence of two affine spaces and two metric spaces in terms of their curvature tensors was given by the author in a previous paper [J. Chinese math. Soc. **1**, 133—137 (1952)] by making use of a known theorem about differential equations of mixed system (L. P. Eisenhart, Non-Riemannian Geometry, New York 1927, p. 14). In the present note we shall give a proof for the same purpose without any application of the theorem just mentioned, instead of which some identities in curvature tensors and its covariant derivations (this Zbl. **17**, 131; **18**, 171) are used. Autoreferat.

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On the existence of Riemannian manifolds which cannot carry non-constant analytic or harmonic functions in the small. Amer. J. Math. **75**, 260—27e (1953).

The main purpose of the paper is to prove the following theorem. If $ds^2 = g_{ij}\,dx_i\,dx_j$ $(i, j = 1, 2)$ is a continuous metric [i. e. g_{ij} are continuous and $\det(g_{ij}) > 0$] on the domain D_a $(x_1^2 + x_2^2 < a^2)$ then, no matter how small a be chosen, there need not exist any transformation $u_i = u_i(x_1, x_2)$ of class C^1 and non-vanishing Jacobian, which transforms ds^2 into a conformal normal form $ds^2 = h^2(du_1^2 + du_2^2)$. The theorem may be generalized, for $n > 0$, as follows. If $ds^2 = g_{ij}\,dx_i\,dx_j$ $(i, j = 1, 2)$ is a C^n metric on D_a, then there [exists a transformation $u_i = u_i(x_1, x_2)$ of class C^n but] need not exist any transformation $u_i = u_i(x_1, x_2)$ of class C^{n+1} of non-vanishing Jacobian, which transforms ds^2 into a conformal normal form $ds^2 = h^2(du_1^2 + du_2^2)$. Some refinements of both theorems are also given. *L. A. Santaló.*

Janenko, N. N.: Einige Fragen der Theorie der Einbettung Riemannscher Metriken in Euklidische Räume. Uspechi mat. Nauk **8**, Nr. 1 (53), 21—100 (1953) [Russisch].

Verf. gibt einen Überblick über die wichtigsten Tatsachen der Theorie der m-dimensionalen Flächen in einem euklidischen Raume E_n und der Einbettungstheorie des Riemannschen Raumes V_m in einem euklidischen Raume E_n. Die Arbeit beginnt mit der Einführung in die Cartansche ω-Symbolik und in die Integrabilitätstheorie. Dann folgt der Existenzsatz für die Fläche, die durch ein System von Grundformen angegeben ist, und es wird der Rang und der Typus einer m-dimen-

sionalen Fläche definiert. Der Beweis des Satzes von Allendörfer über die Unverbiegbarkeit in E_n der Fläche V_{n-p} vom Typus $t > 2$ wird auch durchgeführt. In dem letzten Paragraphen finden wird die allgemeine Formulierung des Problems der Bestimmung der Klasse einer Metrik und ausführliche Erwägungen über die Metrik der Klasse 1. Es wird die algebraische Abhängigkeit der Gaußschen und Peterson-Codazzi-Gleichungen bewiesen und die Klassifizierung der Metriken der Klasse 1 angegeben. *W. Wrona.*

Walker, A. G.: The fibring of Riemannian manifolds. Proc. London math. Soc., III. Ser. **3**, 1—19 (1953).

Es sei M eine zusammenhängende n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit der Klasse C^∞ (resp. C^ω). Alle auftretenden differentialgeometrischen Begriffe sind C^∞- (resp. C^ω) differenzierbar. Es werde vorausgesetzt, daß M (in bezug auf seine Riemannsche Metrik) vollständig ist und daß in M ein Parallel-Feld $\mathfrak{R}$ von r-dimensionalen Ebenen gegeben ist $(0 < r < n)$. Dann gibt es das zu $\mathfrak{R}$ orthogonale Parallel-Feld $\mathfrak{S}$ von s-dimensionalen Ebenen, wo $s = n - r$. Die Parallel-Felder $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ sind vollständig integrierbar, man erhält eine Doppel-Blätterung von M. die Blätter gehören zwei Familien R, S von r- (bzw. s-)dimensionalen Untermannigfaltigkeiten von M an. Durch jeden Punkt x von M geht genau ein Blatt $R(x)$ der Familie R und genau ein Blatt $S(x)$ der Familie S. Alle Blätter sind geodätische Untermannigfaltigkeiten von M und sind vollständig in bezug auf ihre (durch M induzierte) Riemannsche Metrik. Die Riemannsche Mannigfaltigkeit M ist lokal reduzierbar. Verf. führt, um speziellere Aussagen erhalten zu können, die folgende Voraussetzung ein, die allem Weiteren zugrunde gelegt wird. Voraussetzung 1: Es gibt ein Blatt $S_0 = S(x_0)$ derart, daß jeder Punkt von S_0 eine Umgebung in S_0 besitzt, die jedes Blatt $R(x)$ höchstens einmal trifft. — Verf. beweist: M ist ein Faserbündel mit den Blättern $R(x)$ als Fasern, die alle einer Riemannschen Mannigfaltigkeit R_0 isometrisch homöomorph sind. Der Basisraum B ist eine s-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, und die lokalen Produkte sind Produkte im Sinne der Riemannschen Metrik. Das Blatt S_0 ist eine isometrische Überlagerung von B (jeder Punkt x von S_0 wird auf den der Faser $R(x)$ entsprechenden Punkt von B abgebildet). Die Strukturgruppe des Faserbündels $M/R_0 = B$ ist eine Faktorgruppe der Fundamentalgruppe von B. — Von jetzt an wird auch noch die folgende Voraussetzung 2 angenommen. Voraussetzung 2: Die Strukturgruppe, die natürlich eine Gruppe von Automorphismen von R_0 ist, enthält, abgesehen von der Identität, keinen Automorphismus mit Fixpunkt. — Verf. beweist: Die Überlagerung $S_0 \to B$ ist regulär, und die Strukturgruppe ist isomorph zur Gruppe der Decktransformationen von S. Alle Blätter $S(x)$ sind isometrisch homöomorph (mit S_0), entsprechende Punkte liegen dabei auf demselben Blatt der Familie R. Die Riemannsche Mannigfaltigkeit $R_0 \times S_0$ besitzt in natürlicher Weise eine Gruppe G von fixpunktfreien isometrischen Automorphismen, die zur Strukturgruppe isomorph ist, derart, daß $R_0 \times S_0/G$ isometrisch homöomorph mit M ist. Jedes Blatt $R(x)$ trifft jedes Blatt $S(x')$ in einer Anzahl von Punkten, die unendlich sein kann. Diese Anzahl ist von x und x' unabhängig und gleich der Ordnung der Strukturgruppe. — Schließlich führt Verf. noch die Voraussetzung 3 ein, die die Voraussetzungen 1 und 2 impliziert und besagt: Jeder Punkt von M hat eine Umgebung, in welcher sich jedes Blatt $R(x)$ mit jedem Blatt $S(x')$ höchstens einmal trifft. — Aus Voraussetzung 3 folgt, daß M in zwei Weisen gefasert werden kann. Im ersten Fall sind die Fasern mit den Blättern der Familie R identisch, im zweiten Fall mit den Blättern der Familie S. Die jeweiligen Basisräume sollen mit B, A bezeichnet werden. Die Mannigfaltigkeit M ist dann eine reguläre Überlagerung von $A \times B$ mit isometrischer Überlagerungsabbildung. Die Gruppe der Decktransformationen von M ist isomorph zur Strukturgruppe der Faserung $M/R_0 \to B$ und auch isomorph zur Strukturgruppe der Faserung $M/S_0 \to A$. Unter Voraussetzung 3 ist, wie Beispiele zeigen, die Riemannsche Mannigfaltigkeit M im allgemeinen kein Riemannsches direktes Produkt, aber sie überlagert isometrisch das Riemannsche direkte Produkt $A \times B$ und wird selbst isometrisch von dem direkten Produkt $R_0 \times S_0$ überlagert. *F. Hirzebruch.*

Nomizu, Katsumi: Sur les transformations affines d'une variété riemannienne. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1308—1310 (1953).

Es sei V eine zusammenhängende differenzierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit, $A(V)$ und $I(V)$ seien die Gruppe der affinen und isometrischen Transformationen von V. Verf. zeigt: Ist V irreduzibel (d. h. ist die homogene Holonomiegruppe irreduzibel), so liegt jede kompakte Untergruppe von $A(V)$ in $I(V)$. Ein zweites Theorem lehrt unter anderem: Ist $\dim(T_0) \leq 1$, so liegt jede kompakte Untergruppe von $A_0(V)$ in $I(V)$. Hier ist T_0 der euklidische Teil der kanonischen Zerlegung des Tangentialraums nach de Rham (dies. Zbl. 48, 157) und $A_0(V)$ der mit der Identität zusammenhängende Teil von $A(V)$. *W. Klingenberg.*

Eisenhart, Luther P.: Generalized Riemann spaces and general relativity. Proc. nat. Acad. Sci. USA **39**, 546—551 (1953).

The author continues his investigations on concomitants of manifolds in which a non symmetric tensor g_{ij} is given (see this Zbl. **43**, 373). Here he shows how the equations of Einstein's Fourth Edition of „The Meaning of Relativity" (Princeton 1953, this Zbl. **50**, 212) can be obtained. There are connections Γ^h_{ij} and Δ^h_{ij} where $\Delta_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k})$, $g_{ij,k} = \partial g_{ij}/\partial x^k$. Raising and lowering of indices is performed with respect to g_{ij} and g^{ik}, $g_{ij}g^{ik} = \delta^k_j$. Then $a^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} - \Delta^h_{ij}$ is a tensor. It is shown that the equations $g_{ij,k} = g_{hj}\Gamma^h_{ik} + g_{ih}\Gamma^h_{kj}$ can be satisfied if $\underset{\smile}{a^h_{ij}} = -\frac{2}{3}\underset{\smile}{\Delta^h_{ij}}$. Then $\Gamma_i \equiv \Gamma^j_{\underset{\smile}{ij}} = 0$, $\Gamma^h_{hk} = (\log w)_{,k}$ where $w = \sqrt{-g}$. Then a tensor density $\mathfrak{g}^{ij} = w g^{ij}$ is introduced for which $g^{\underset{\smile}{it}}{}_{,t} = 0$. Then follows the expression for the Einstein tensor R_{ij} and its relation to the other Einstein equations. The notation $g_{\underset{\smile}{ij}}$ is used for what usually is written $g_{(ij)}$, and similarly $g_{\underset{\smile}{ij}}$ for $g_{[ij]}$. *D. J. Struik.*

Deicke, Arno: Über die Finsler-Räume mit $A_i = 0$. Arch. der Math. **4**, 45—51 (1953).

In einem n-dimensionalen Finslerschen Raum mit der Metrik $ds = L(x^i, \dot{x}^i)\,dt$ kommt dem Vektor $A_i = L\,\partial \log \sqrt{g}/\partial \dot{x}^i$, wobei $g = \|\frac{1}{2}\,\partial^2 L^2/\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k\|$ ist, eine besondere Bedeutung zu. Seit langem werden die speziellen Räume mit $A_i = 0$ in der Literatur wegen ihrer Ähnlichkeit mit den Riemannschen Räumen diskutiert. Verf. zeigt aber nun, daß diese Räume mit den Riemannschen identisch sind, falls die Indikatrix $L(x_0, \dot{x}) = 1$ geschlossen und $L(x_0, \dot{x})$ in x^i hinreichend oft differenzierbar ist. Wie sich zunächst ergibt, ist die Behauptung äquivalent zu dem Satz, daß alle geschlossenen Affin-Sphären Ellipsoide darstellen. Diese Aussage wiederum beweist Verf. durch eine geschickte n-dimensionale Verallgemeinerung eines von Blaschke für den R_3 gegebenen Beweises. — Es ist bemerkenswert, wie durch vorliegende Arbeit die Bedeutung der affinen Differentialgeometrie für die Untersuchung der allgemeinen metrischen Räume betont wird. *W. Barthel.*

Deicke, Arno: Über die Darstellung von Finsler-Räumen durch nichtholonome Mannigfaltigkeiten in Riemannschen Räumen. Arch. der Math. **4**, 234—238 (1953).

E. T. Davies (this Zbl. **50**, 163) pointed out that it might be possible to represent a Finsler space F_n as an n-dimensional non-holonomic subspace of a Riemannian space R_{2n}. The author investigates the conditions to be satisfied by F_n such that this representation be possible, which is always the case when $n = 2$, as was shown by O. Galvani [C. r. Acad. Sci., Paris **223**, 1088—1090 (1946)]. In this case the „non-holonomic" subspace turns out to be holonomic, a result which the author confirms for general values of n. Instead of R_{2n} the author chooses the space R_{2n-1} of line-elements of F_n. An n-direction is associated with each point of R_{2n-1} such that the local metric and the coefficients of the „euclidean connection" (in the sense of Cartan) of F_n are obtained by the projection of the Riemannian metric and the connection parameters of R_{2n-1} onto the n-direction. The author then shows that a necessary and sufficient condition for such a local representation to be possible is that there exists a twice differentiable $(n-1)$-parameter family of fields of directions such that the torsion of Cartan's connection vanishes when the element of support is taken to coincide with the direction of the field at each point. This theorem contains the result of Galvani (loc. cit.) as a special case. *H. Rund.*

Jongmans, F.: Étude de géométrie kählérienne. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **39**, 77—93 (1953).

La première partie de cette note traite des conditions nécessaires pourqu'une forme différentielle sur une variété kählérienne close soit harmonique. La plupart des résultats est contenue dans un travail du réf. [Tohoku mat. J., II. Ser. **4**, 157—171 (1952)] et dans une conférence de Strasbourg 1952 [Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **36**, 223—246 (1954)]. La seconde partie a affaire à l'étude de la structure multiplicative de l'anneau de cohomologie (à coefficients complexes) d'une variété kählérienne. Est introduite une notion de produit harmonique de formes harmoniques, associant à deux formes harmoniques la partie harmonique de leur produit extérieur. Cette notion paraît assez superflue, comme seule la notion de produit cup (d'une cohomologie appropriée) est utilisée. Les énoncés sont tous formulés pour les variétés kählériennes, mais ont voit tout de suite, en remplaçant

le produit harmonique par le produit cup, que les arguments d'algèbre linéaire du no. 10 valent pour tout espace topologique avec quelques modifications: Soient en effet X un espace topologique de dimension cohomologique m, et $\varphi^p, \ldots$ des classes de cohomologie, on a trivialement $\varphi^p \cup \psi^q = 0$ pour $p + q > m$, et toujours $\varphi^{2k+1} \cup \varphi^{2k+1} = 0$. L'A. nomme décomposition stricte de zéro toute relation $\varphi^p \cup \psi^q = 0$ qui n'est pas des deux cas précités. Le problème est alors de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une décomposition stricte de zéro. A cet effet, supposons les groupes de cohomologie H^p être des espaces vectoriels de dimension b^p. Les éléments de base soient $\varphi_1^p, \ldots, \varphi_{b^p}^p$. $b^p\, b^q > b^{p+q}$ implique l'existence d'au moins $b^p\, b^q - b^{p+q}$ relations $\sum_{i,k} \varrho_{ik}^{(h)} \varphi_i^p \cup \varphi_k^q = 0$. Une décomposition de zéro $\left(\sum x_i \varphi_i^p\right) \cup \left(\sum y_k \varphi_k^q\right) = 0$ correspond à $x_i\, y_k = \sum_h r_h \varrho_{ik}^{(h)}$. On peut toujours trouver des coefficients x_i, y_k si $b^{p+q} \leq b^p + b^q - 2$. Si $p = q = 2k + 1$, on aura une décomposition stricte $(x \neq y)$ sûrement pour $b^{2p} \leq 2(b^p - 2)$. La démonstration se fait en interprétant les x_i, y_k, $\varrho_{ik}^{(h)}$ comme coordonnées dans un espace projectif de dimension $b^p\, b^q - 1$, les points $x_i\, y_y$ y forment une sousvariété, produit de deux espaces projectifs de dimensions $b^p - 1$ et $b^q - 1$. De ce résultat, qu'on a vu être de validité générale, l'A. déduit des résultats pour les variétés kählériennes. Le seul cas d'une variété kählérienne V_{2m} dont l'algèbre de cohomologie ne possède pas de diviseurs stricts de zéro est celui où cette algèbre est engendrée par la classe fondamentale Ω, pour $m > 1$. Pour $m = 1$, ceci reste vrai pour $b^1 \neq 2$, le cas $b^1 = 2$ n'est pas tranché par l'A., mais il est facile de voir que dans ce cas une base de H^1 est formée par une forme analytique et son adjointe de Hodge-de Rham, de façon que le théorème est sûrement en défaut dans ce cas. Il est encore démontré que le produit extérieur de 2 formes analytiques sur un type spécial de V_2 est nul, mais ceci vaut en général comme un tel produit contient toujours $dz \wedge dz$. Pour le reste de l'énoncé 12.2, le réf. ne voit pas comme il peut exister une infinité de décompositions strictes de zéro en formes analytiques, s'il n'existe qu'un nombre fini de formes analytiques linéairement indépendantes, et quelle influence doit avoir la propriété multiplicative des formes harmoniques. — A la fin sont trouvées les conditions pour l'existence d'une décomposition de zéro en formes analytiques pour une V_{2m} kählérienne quelconque (remarque: Si on renonce à l'interprétation en termes de cohomologie, les résultats de ce no. valent pour toute V_{2m} complexe, même non kählérienne). Il y a là une erreur d'impression, remplacer $b_{(0)}^p \leq \cdots$ par $b_{(0)}^{2p} \leq \cdots$. *H. Guggenheimer.*

Yano, Kentaro: On Killing vector fields in a Kaehlerian space. J. math. Soc. Japan **5**, 6—12 (1953).

Bochner [Bull. Amer. math. Soc. **52**, 716—747 (1946) und dies. Zbl. **40**, 243] hat verschiedene Sätze bewiesen über die Existenz von harmonischen und Killingschen Vektorfeldern in kompakten Riemannschen und Kählerschen Räumen. Es besteht zwischen diesen beiden Arten von Vektorfeldern eine bemerkenswerte Analogie. Im ersten Abschnitt wird hier der bekannte Satz bewiesen, daß in einem kompakten Kählerschen Raum ein Feld ξ_α. $\xi_{\bar{\alpha}}$ dann und nur dann harmonisch ist, wenn die ξ_α $(\xi_{\bar{\alpha}})$ analytische Funktionen der Koordinaten z^λ $(z^{\bar{\lambda}})$ sind. Sodann wird die Beweismethode angewandt auf den analogen Satz für Killingsche Vektorfelder. *J. A. Schouten.*

Lichnerowicz, André: Sur les espaces homogènes kählériens. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 695—697 (1953).

The following theorems on homogeneous Kähler manifolds are announced: Be $W = G/H$ such a manifold. If the center of G is not discrete, any invariant Kähler metric contains (locally) a unitary part. — For F compact, and W not locally unitary, the center of the connected group of isotropy of the Kähler structure is not discrete. — For G semi-simple compact, H connected, W is direct product of homogeneous Kähler manifolds with simple G, of center reduced to unity, and where H is the connected centralisator of the connected part of the unity of his own center, the Kähler structure being the sum of the Kähler structures of the components. — Any fourdimensional homogeneous Kähler manifold with compact G is symmetric Hermitian. *H. Guggenheimer.*

Calabi, Eugenio: Isometric imbedding of complex manifolds. Ann. of Math., II. Ser. **58**, 1—23 (1953).

Es handelt sich um das Problem der komplex analytischen Einbettung komplex analytischer

Mannigfaltigkeiten. Die Arbeit geht zurück auf Bochner (dies. Zbl. **35**, 104) und Calabi [Ann. Math. Studies Nr. **30**, 77—85 (1953)]. — In dem zweiten Abschnitt wird die invariante „diastatische" Funktion für eine sogenannte Kählersche Metrik definiert. Für ebene unitäre oder Hilbertsche Räume geht diese in die gewöhnliche Entfernung über. — Im dritten Abschnitt wird u. a. bewiesen, daß für die lokale Einbettung in einem solchen ebenen Raum n. u. h. ist, daß die einzubettende Mannigfaltigkeit eine analytische Kählersche Metrik trägt. Auch werden die n. u. h. Bedingungen angegeben für die globale Einbettung einer solchen Mannigfaltigkeit. Der dritte Abschnitt befaßt sich mit der lokalen und globalen Einbettung in eine Mannigfaltigkeit von Fubini-Study (das Analogon der Riemannschen Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung). Auch hier werden die n. u. h. Bedingungen aufgestellt, sowohl für den lokalen als für den globalen Fall. Eine analytische Kählersche Metrik bleibt notwendig. Im letzten Abschnitt wird eine Anwendung gegeben auf die globale Einbettung von Fubini-Studyschen Räumen ineinander. *J. A. Schouten.*

Libermann, Paulette: Problèmes d'équivalence relatifs à une structure presque complexe. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **2**, 366—369 (1953).

In dieser Note wird über einige Ergebnisse von Ch. Ehresmann und P. Libermann kurz berichtet [Ehresmann, dies. Zbl. **39**, 397; Proc. internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) **2**, 412—419 (1952); Ehresmann-Libermann, dies. Zbl. **42**, 159; Libermann, Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **36**, 742—755 (1950) und dies. Zbl. **42**, 406]. Insbesondere werden Ergebnisse über die lokale Äquivalenz fast-komplexer Strukturen im Falle von 2 komplexen Dimensionen angekündigt. *F. Hirzebruch.*

Egorov, I. P.: Über Bewegungen in Räumen mit affinem Zusammenhang. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **89**, 781—784 (1953) [Russisch].

The author gives a geometrical characterization of an affinely connected space, of non-zero curvature with maximal mobility a) when the space, A_n, has no torsion, b) when the space, L_n, has a semi-symmetric connexion. — It is known [Egorov, this Zbl. **29**, 417; Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **87**, 693—696 (1952)] that the concerned A_n is characterized by the presence either of a transitive (complete) group of motions of order n^2, or of an intransitive group of order n^2-1. — It is also known that the A_n's with maximal mobility are necessarily equiaffine and projectively flat, and the components of the Ricci tensor are of the form: $R_{ij} = (1-n)\varepsilon\,\lambda_i\,\lambda_j$; $\varepsilon = \pm 1$; $\lambda_{i,j} = a\,\lambda_i\,\lambda_j$, a being a constant when the group of motions is transitive, and a function of λ when the group is intransitive. — The author draws from (1) some consequences, of which the most important are: 1. A projectively flat space which admits at least one field of parallel contravariant vectors, is equiaffine. — 2. An A_n has maximal mobility if, and only if, it admits exactly $n-1$ independent fields of parallel contravariant vectors. — 3. For any such space the ∞^1 family of hypersurfaces $\lambda(x^1, \ldots, x^n) = \text{const}$ is a family of imprimitivity (intransitivity). 4. Any hypersurface of the family is totally geodesic. — Using then the geodesic mapping of our A_n in a euclidean E_n, the author gives a canonical form for the components of the connexion, and shows how, in this E_n, the motions of the group may be realized as projectivities leaving invariant a suitable hypersurface (absolute). Any such space may also be realized as a hypersurface in a euclidean E_{n+1}. Besides, the immediately successive value for the order of the group of motion for an A_n with an intransitive group of motions is n^2-n. As for the L_n's with maximal mobility, the canonical form for the component of the connexion and for the torsion is given, and it is proved that in this case too the highest order for the order of the complete group of motions is n^2 or n^2-1, according that the group is transitive or intransitive; and the immediately successive value is in this case also n^2-n. *V. Dalla Volta.*

Nijenhuis, Albert: On the holonomy groups of linear connections. Ia, Ib. General properties of affine connections. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **56**, 233—240, 241—249 (1953).

Part Ia deals with the holonomy group $h(M, p)$ at a point p of a connected n-dimensional manifold M with affine connection $\Gamma^k_{\mu\lambda}$ (not necessarily symmetric), and its normal subgroup $h^0(M, p)$ belonging to curves that can be contracted to zero. It is shown that this group h^0 is a Lie subgroup of the centered affine group, and that its Lie algebra is spanned by the matrices arising from the $R_{\mu\lambda}(x)$, $x \in M$, by parallel transport to p along any curves. Here the $R_{\mu\lambda}$ matrices are determined by the curvature tensor $R^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}_{\nu\mu\lambda}$ with $\varkappa$ and λ as column and row indices. Then the local holonomy group $h^*(p)$ is introduced for a connected open set $U \ni p$, this group is obtained by taking a sequence $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$; $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = p$ and taking the intersection of the shrinking Lie groups $h^0(U_i, p)$, $i = 1, 2, \ldots$. It is shown that every element of $h^0(M, p)$ can by suitable parallel mapping be written as a finite product of elements of the groups $h^*(x)$,

$x \in M$. The group $h^*(p)$ at p is a Lie subgroup of $h^0(M, p)$, its Lie algebra is spanned by the matrices arising from the $R_{\mu\lambda}(x)$ in a suitable neighborhood of p by suitable parallel support to p. — Part Ib introduces the infinitesimal holonomy group h' (which is not an infinitesimal group but a group of infinitesimal holonomy). It is determined by its Lie algebra and the requirement that it be a connected Lie subgroup of the group of centered affine transformations. It is only defined if M and the connection are of class C^∞. The Lie algebra is spanned by the matrices $R_{\mu\lambda}(p)$, $\nabla_\nu R_{\mu\lambda}(p), \ldots, \nabla_{\nu_k \ldots \nu_1} R_{\mu\lambda}(p), \ldots$; it is a subgroup of $h^*(p)$. If $h'(x) = h^*(x)$ for all $x \in M$, then $h^0(M, p) = h'(p)$. The paper ends with the non-analytic case. A result is that if p is a non- singular point of h', and if M_t is the component of $M - \Omega^*$ to which p belongs (Ω^* being the set of singular points of h^*), and moreover Q is a quantity invariant under $h'(p)$, then in every connected and simply connected open subset of M_t containing p there is precisely one covariant constant field $Q(x)$ such that $Q(p) = p$. *D. J. Struik.*

Castoldi, Luigi: Attorno alla teoria delle connessioni. — Deduzione autonoma del carattere tensoriale dei sistemi quadrupli di curvatura. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 127—130 (1953).

This is a new, simple, proof of the well known fact that the Riemann symbols with four indexes $L_{ijh}{}^k$, defined in the usual way for any affine (linear) connection $L_{ij}{}^k$ are actually the components of a tensor. — According to author's expression, this is an „autonomous" proof, in the sense that it does not use the commutation formulas for the 2nd covariant derivative of a vector, that appear as something non intrinsic to the connection. This is a sketch of the proof: let $N_{jh}{}^k$ be a connection, whose components, in a given coordinate system x^i, are zero and let $N_{jhk}{}^i$ be the Riemann symbols for $N_{jh}{}^k$; then, it is easy to prove that the components $N_{h'j'k'}{}^{i'}$ are zero in any coordinate system $x^{i'}$. If we put $D_{ij}{}^k = L_{ij}{}^k - N_{ij}{}^k$, it is well known that $D_{ij}{}^k$ is a tensor; if we now express $L_{ijh}{}^k$ by means of $N_{ij}{}^k$, (its derivatives) and $D_{ij}{}^k$, it turns out that $L_{ijh}{}^k$ is equal to the sum of $N_{ijh}{}^k$ and of an expression that is a tensor; since we know that $N_{ijh}{}^k = 0$ in any coordinate system, the statement follows. *V. Dalla Volta.*

Castoldi, Luigi: Calcolo della connessione affine integrale associata ad un punto di una varietà a connessione affine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **14**, 760—765 (1953).

This Reviewer has introduced the notion of affine integral connection (a. i. c.) associated with a point of an affinely connected space [Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **24**, 257—282 (1945)]. The author proves that the a. i. c. is uniquely determined by the following properties: 1. it has at the given point the same paths as the given connection with the same affine parameters; 2. it is symmetric and flat (its curvature tensor vanishes). A method to calculate the derivatives of the a. i. c. at the fixed point is given. *E. Bompiani.*

Ruse, H. S.: Simply harmonic affine spaces of symmetric connection. Publ. math., Debrecen **2**, 169—174 (1953).

Eine V_n heißt centro-harmonisch, wenn die Distanzfunktion $\Omega = e\, s^2/2$; $e = \pm 1$ in bezug auf einen Basispunkt der Bedingung $\Delta_2 \Omega = f(\Omega)$ genügt, und einfach centro-harmonisch, wenn f eine Konstante ist. Patterson (dies. Zbl. **46**, 154) definierte die einfach harmonische A_n mit Hilfe einer Relationenfolge von Walker [Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. **7**, 16—26 (1942)]. Mit Hilfe eines Vektorfeldes Y^i, das in bezug auf einen Basispunkt mittels Normalkoordinaten definiert werden kann, wird hier bewiesen, daß eine A_n einfach centro-harmonisch ist, wenn $\nabla_i Y^i = n$, und einfach harmonisch, wenn diese Beziehung gilt für alle Felder Y^i in bezug auf alle Basispunkte. Y^i spielt in A_n dieselbe Rolle wie $\Omega^i = s\, dx^i/ds$ in V_n, wie schon von Synge (dies. Zbl. **2**, 154) gezeigt wurde. Wenn R_{2n} die „Riemann Erweiterung" (Patterson und Walker, dies. Zbl. **48**, 156) von A_n ist, so hat Patterson (l. c.) bewiesen, daß V_{2n} einfach harmonisch ist, wenn und nur wenn A_n einfach harmonisch ist. Darüber hinaus wird hier bewiesen, daß schon, wenn V_{2n} harmonisch ist, V_{2n} und A_n einfach harmonisch sind, und daß der Satz gültig bleibt, wenn „harmonisch" überall durch „centro-harmonisch" ersetzt wird. *J. A. Schouten.*

Sen, R. N.: On pairs of teleparallelisms. J. Indian math. Soc., n. Ser. **17**, 21—32 (1953).

Für einen Raum mit Riemannscher Metrik werden zuerst zwei Bedingungen aufgestellt, unter denen zu einem gegebenen Fernparallelismus $\Gamma_i^t{}_j(x)$ jeweils ein

weiterer Fernparallelismus erzeugt werden kann. Schließlich wird in gewissen 3-dimensionalen Räumen mit diesen Bedingungen ein Paar von Fernparallelismen konstruiert. Während der erste Typ von Räumen auf ein neues Paar von Fernparallelismen führt, ergeben die beiden anderen Typen den Cliffordschen Rechts- und Linksparallelismus bzw. den euklidischen Parallelismus. *W. Barthel.*

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Zin, Giovanni: Contributo alla geometria infinitesimale diretta delle curve piane. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **34**, 41—53 (1953).

C: arc (image biunivoque et bicontinue d'un intervalle fermé) dans le plan orienté. P_1, P_2: points variables de C tels que P_1 précède P_2. $\alpha(P_1, P_2)$: détermination de l'angle polaire mesuré en radians de la direction $P_1 P_2$, suivie par continuité sur C. Amplitude angulaire („ampiezza") de C: oscillation de la fonction $\alpha(P_1, P_2)$ sur C. Oscillation angulaire („angolosità") $\omega(P)$ de C en un de ses points P: oscillation de $\alpha(P_1, P_2)$ en (P, P). Proposition: Les conditions suivantes sont équivalentes: (1) $\omega(P) < \pi$, (2) C est lipschitzien en P, (3) Le paratingent de C en P laisse échapper au moins une direction. Un exemple montre qu'un arc rectifiable peut n'être nulle part lipschitzien. [Rem. du rapp. Il s'agit en d'autres termes d'un arc plan rectifiable dont la tangente prend sur tout arc partiel toutes les directions. Un exemple spatial se trouve chez Z. Zahorski (ce Zbl. 48, 164). En vertu du théorème de G. Choquet (Thèse, Paris 1946 (1948); ce Zbl. **35**, 242) relatif à la coïncidence du paratingent et du contingent sur un résiduel, le phénomène ne peut plus se produire si l'arc possède partout une tangente.] *Chr. Pauc.*

Lane, N. D. and Peter Scherk: Differential points in the conformal plane. Canadian J. Math. **5**, 512—518 (1953).

In der euklidischen Ebene E_2 sei B ein Bogen, d. h. eindeutiges stetiges Bild der Strecke $S = (0 \leq s \leq 1)$. Ist $P(s)$ das Bild von s, so soll zu jedem s eine Umgebung U auf S gehören derart, daß $P(s) \neq P(s')$ für jedes $s' \in U - (s)$. Als Tangentialkreis $C(P(s), Q) = C(s, Q)$ an B in $P(s)$ werde bezeichnet jeder Limes von Kreisen durch $P(s)$, $P(s')$ und Q für $s' \to s$, unter Q einen beliebigen, von $P(s)$ verschiedenen, aber festgehaltenen Punkt verstanden. $P(s)$ selbst werde als Nullkreis zu den $C(s, Q)$ hinzugerechnet. — 1. Forderung: Es ist $C(s, Q)$ eindeutig durch s und Q bestimmt. I. Satz: Bei festem s bilden die $C(s, Q)$ ein (Kreis-)Büschel $t(s)$ von 2. Art mit $P(s)$ als Grundpunkt, d. h. die $C(s, Q)$ berühren einander alle in $P(s)$. Jeder nicht zu $t(s)$ gehörige Kreis K' durch $P(s)$ hat mit B in der Umgebung von s nur endlich viele Punkte gemeinsam, stützt oder schneidet also den Bogen B in $P(s)$; wird B in $P(s)$ von einem einzigen derartigen Kreis K' gestützt (bzw. geschnitten), so wird B von allen K' gestützt (bzw. von allen geschnitten). — 2. Forderung: Es sei B in $P(s)$ differenzierbar, d. h. außer Forderung 1 soll noch gelten: $C(P(s), P(s'))$ hat für $s' \to s$ einen Limes, den (eindeutig) bestimmten Schmiegkreis $C(s)$ an B in $P(s)$; es ist $C(s) \in t(s)$. II. Satz: Jeder von $C(s)$ verschiedene Kreis K'' durch $P(s)$ hat mit B in einer Umgebung von s nur endlich viele Punkte gemeinsam, schneidet oder stützt also. Ist $C(s)$ der Nullkreis $P(s)$, so wird B in $P(s)$, wenn von einem $K \in t(s)$ mit $K \neq C(s)$, dann von allen K gestützt (bzw. von allen geschnitten). Ist $C(s) \neq P(s)$, dann wird B in $P(s)$ von jedem K gestützt $[K \in t(s), K \neq C(s)]$. — Die Kombination der im I. und II. Satz aufgezeigten Fälle des Stützens oder Schneidens kombiniert ferner mit den Fällen $C(s) \neq P(s)$ oder $C(s) = P(s)$ sowie mit den Fällen, daß $C(s)$ B in $P(s)$ einen Häufungspunkt besitzt oder daß $C(s)$ den Bogen B in $P(s)$ stützt bzw. schneidet, führt zu einer Klassifikation der differenzierbaren Punkte, die in einer Tabelle zusammengestellt ist. *Otto Haupt.*

Gale, David: On inscribing n-dimensional sets in a regular n-simplex. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 222—225 (1953).

Nach dem bekannten Satz von H. W. E. Jung läßt sich im n-dimensionalen euklidischen Raum jede Punktmenge vom Durchmesser 1 durch eine Kugel überdecken, die sich einem regulären Simplex vom Durchmesser 1 umschreiben läßt; ihr Radius ist $R_n = (n/2\,(n+1))^{1/2}$. Verf. stellt diesem klassischen Ergebnis ein duales gegenüber: Jede Punktmenge vom Durchmesser 1 läßt sich durch ein reguläres Simplex überdecken, das sich einer Kugel vom Durchmesser 1 umschreiben läßt; sein Durchmesser ist $D_n = (n\,(n+1)/2)^{1/2}$ (Ref. bemerkt hierzu, daß dies auch leicht auf Grund der Bemerkung folgt, daß jede Punktmenge vom Durchmesser 1

in einem Körper konstanter Breite 1 enthalten ist, und daß D_n der mittlere Durchmesser der einem solchen Körper umbeschriebenen regulären Simplexe ist). — Es bezeichne d_n bzw. d_n^0 den kleinsten Wert mit der Eigenschaft, daß sich jede Punktmenge bzw. die Kugel vom Durchmesser 1 durch $n+1$ Mengen überdecken läßt, deren Durchmesser alle $\leq d_n$ bzw. $\leq d_n^0$ sind. Nach einer noch unbewiesenen Vermutung von K. Borsuk gilt $d_n < 1$. Trivialerweise ist $d_n^0 < 1$ und $d_n^0 \leq d_n$. Verf. verstärkt die Borsuksche Vermutung, indem er erwägt, daß $d_n^0 = d_n$ sein könnte. Aus seinem Ergebnis kann er jedenfalls im Falle $n = 2$ auf $d_2^0 = d_2 = \sqrt{3}/2$ schließen. *H. Hadwiger.*

Bouligand, Georges: Sur un type d'énoncé stable en théorie des transformations de contact. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 2136—2138 (1953).

L'A. reprend un théorème d'aplatissement donné dans une note antérieure (ce Zbl. **50**, 164). Il signale que l'indépendance des vecteurs $\partial M/\partial x + p\,\partial M/\partial z$, $\partial M/\partial y + q\,\partial M/\partial z$, en assurant la biunivocité locale entre S et son image, est une hypothèse essentielle à la stabilité de l'aplatissement. *Ch. Pauc.*

Hammer, P. C. and Andrew Sobczyk: Planar line families. I. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 226—233 (1953).

The authors call a family of straight lines in the plane „outwardly simple" if it covers the exterior of some circle simply. [They exclude families consisting of parallel lines only.] Such families can be associated with a continuous involutary transformation T without fixed points of the circle into itself; or, alternatively, with a continuous increasing function f which maps a closed real interval onto itself. To each transformation T (or function f) an outwardly simple line family can be defined, uniquely apart from similarity transformations of the plane. On the other hand T (or f) is not uniquely determined by the family but also depends on the choice of a circle: the connection between different transformations T arising from the same outwardly simple line family is an interesting but presumably difficult problem. The main result of the paper is the remarkable fact that all orthogonal trajectories of an outwardly simple line family which have a point outside a sufficiently large circle are smooth convex curves of constant breadth; moreover all convex curves of constant breadth are obtained as orthogonal trajectories of outwardly simple line families; to each family F there belongs a minimal such convex curve C of constant breadth, which need not be smooth (and may degenerate to a single point). The others belonging to F are the „exterior associated convex bodies" of C in the sense of P. C. Hammer, this Zbl. **43**, 163. The minimal C is „irreducible" (cf. op. cit.). The family F consists of the (extended) diameters of C and its associated curves; thus it follows incidentally that the plane outwardly simple line families are exactly the families of essential diameters (cf. op. cit.) of convex curves. It is stated that this is no longer true in three dimensions.
B. H. Neumann.

Ohmann, D.: Einige dem Vierscheitelsatz verwandte Sätze über Eilinien. J. reine angew. Math. **192**, 74—76 (1953).

$h^{(\mu)}(\varphi)$ sei die μ-te Ableitung der Stützfunktion einer Eilinie. Für ein „Linearaggregat" $y(\varphi) = \sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu}\, h^{(\mu)}(\varphi + \alpha_\nu)$ gilt: Ein translationsinvariantes stetiges Linearaggregat der Stützfunktion einer Eilinie [mit $y(\varphi) + y(\varphi + \pi) = \text{const}$] nimmt seinen Mittelwert wenigstens vier- (sechs-)mal an. Anwendung auf verschiedene Linearaggregate ergibt einheitliche einfache Beweise für folgende z. T. bekannte Sätze: 1. Unter allen einer Eilinie (konstanter Breite) umbeschriebenen Vierecken mit vorgegebenen Eckenwinkeln gibt es wenigstens vier (sechs) Kreistangentenvierecke. — 2. Unter allen einer Eilinie (konstanter Breite) des Umfangs L umbeschriebenen Polygonen mit den fest vorgegebenen Außenwinkeln α_ν gibt es wenigstens vier (sechs), deren Umfang den Wert $L \cdot \Sigma \operatorname{tg} \alpha_\nu/2$ annimmt. — 3. Unter allen Teilbogen einer Eilinie (konstanter Breite) der festen Gesamtkrümmung α existieren wenigstens vier (sechs) der Länge $\alpha\, L/2\pi$. — 4. Auf einer Eilinie lassen sich wenigstens drei Paare von Gegenpunkten angeben, die den Umfang hälften. — Die Sätze 2, 3, 4 gestatten Verallgemeinerungen auf Paare von Eilinien. *H. Gericke.*

Ohmann, D.: Isoperimetrische und verwandte Extremalprobleme für beschränkte ebenen Punktmengen. J. reine angew. Math. **192**, 65—73 (1953).

Verf. untersucht, ob sich die Aussagen (I) über Extremwerte des Umfangs U eines ebenen

konvexen Bereiches bei gegebenem Durchmesser D und Dicke Δ und (II) über Bereiche maximalen oder minimalen Inhalts F bei Vorgabe einer oder mehrerer der Größen U, D, Δ, auf beliebige beschränkte ebene Punktmengen übertragen lassen. U, F, D, Δ werden als Lebesguesche Maße definiert. Dann findet Verf. „für die erste Gruppe von Extremalproblemen, daß zwischen dem Quermaßintegral und den Quermaßextremalen nur die der Definition unmittelbar zu entnehmenden Ungleichungen bestehen können. Weiter fällt die Gruppe von Extremalproblemen, die sich mit dem minimalen Maß beschäftigt, naturgemäß aus. Hingegen erweisen sich die Extremalprobleme für maximales Maß als weitgehend übertragungsfähig." Haupthilfsmittel der Beweise sind: 1: Vergleich der Maße mit denen eines konvexen Mittelpunktsbereichs, des folgendermaßen definierten „Rumpfbereiches": Ist $q(\varphi)$ das Quermaß in Richtung φ, so deute man $q(\varphi)/2$ als Abstand von Geraden $G(\varphi)$ der Richtung φ vom Nullpunkt. Der Durchschnitt der O enthaltenden Halbebenen ist der Rumpfbereich. 2. Konstruktion von Mengen, deren inneres und äußeres Quermaß in jeder Richtung zusammenfällt und in einer ausgezeichneten Richtung verschwindet, während es in allen übrigen Richtungen gleichen positiven Wert annimmt, und von Mengen, deren Quermaß in allen Richtungen verschwindet, mit Ausnahme einer Richtung, in der es einen gegebenen Wert annimmt. Die Existenz von Mengen der zweiten Art zeigt z. B. unmittelbar, daß ein Analogon der Ungleichung $U \geq 2D$ nicht bestehen kann. *H. Gericke.*

Rogers, C. A.: Certain integrals over convex sets. J. London math. Soc. **28**, 293—297 (1953).

Mit Hilfe eines Lemmas von Erhard Schmidt aus seinen Untersuchungen zum isoperimetrischen Problem beweist Verf. folgenden Satz, den er a. a. O. (s. folgend. Ref.) verwenden will: Die Funktion $\varrho(r) > 0$ sei für $0 < r < 1$ nichtabnehmend, für $r > 1$ sei $\varrho(r) = 0$. μ sei das Lebesguesche Maß im euklidischen R_n, S die Einheitskugel um den Ursprung O, K eine abgeschlossene konvexe Menge des R_n, für die $\mu(K) < \mu(S)$ ist, und $S(K)$ sei ein Kugelsegment, das von S durch eine $(n-1)$-dimensionale Hyperebene so abgeschnitten ist, daß $\mu(S(K)) = \mu(K)$ ist. Ist $|X|$ die Entfernung des Punktes $X \in R_n$ von O, so ist stets

$$\int_K \varrho(|X|)\, d\mu \leq \int_{S(K)} \varrho(|X|)\, d\mu. \qquad \textit{W. Süss.}$$

Rogers, C. A.: The volume of a polyhedron inscribed in a sphere. J. London math. Soc. **28**, 410—416 (1953).

R. P. Bambah und H. Davenport haben bei Untersuchungen über Kugellagerungen im R_n (dies. Zbl. **47**, 51) die folgende Abschätzung benutzt (Bezeichnungen wie im vorigen Ref.): Ist $\Pi \subset S$ ein konvexes Polyeder mit N Seitenflächen, ist $\delta = 2/(n-1)$ und $\bar{c} = n\,\Gamma[(n+1)/2]\,\mu(\Pi)/N\,\pi^{(n-1)/2}$, so gilt stets $\frac{\mu(S)}{\mu(\Pi)} \geqq \int_0^1 \frac{dt}{[1-\bar{c}^{\delta}(1-t^{\delta})]^{n/2}}$. Der Beweis beschränkte sich auf den allein benötigten Fall, daß die Fußpunkte der Lote von O auf die Seitenflächen in deren Inneres fallen. Verf. beweist dasselbe Ergebnis ohne diese Einschränkung. Als Folgerung zeigt sich: Wachsen n und N derart über alle Grenzen, daß $N^{1/n} \to \lambda$, dann ist die obere Grenze von $\mu(\Pi)/\mu(S) \leqq 1 - \lambda^{-2}$. *W. Süss.*

Ohmann, D.: Über die Summe der Inkreisradien bei Überdeckung. Math. Ann. **125**, 350—354 (1953).

Es bezeichne $\varrho(B)$ den Inkreisradius eines ebenen konvexen Bereiches B. Verf. beweist: Ist $B \subset \bigcup B_\nu$, d. h. wird B durch endlich viele B_ν überdeckt, so gilt $\varrho(B) \leq \Sigma\,\varrho(B_\nu)$. Der originelle Beweisansatz geht von einer Massenbelegung der Ebene aus, deren Dichte durch $\mu = 1/\sqrt{1-r^2}$ $(0 \leq r < 1)$ bzw. $\mu = 0$ $(1 \leq r < \infty)$ gegeben ist; hierbei ist r der Abstand des Punktes vom Mittelpunkt eines Einheitskreises K. Bedeutet D ein Dreieck, so folgt aus $K \subset \bigcup D_\nu$ offenbar $2\pi = M(K) \leq \Sigma\, M(D_\nu)$, wobei $M(B)$ die Masse von B darstellt. Mit der Hilfsaussage $M(D) \leq 2\pi\,\varrho(D)$ ist der Satz bereits bewiesen; als D_ν wähle man Umdreiecke von B_ν mit gleichem Inkreisradius, und K sei ein Inkreis von B. Der vom Verf. erbrachte Nachweis der Hilfsaussage ist verhältnismäßig verwickelt.

H. Hadwiger.

Levi, F. W.: Eine Ergänzung zum Hellyschen Satze. Arch. der Math. **4**, 222—224 (1953).

Für eine Familie F von konvexen Mengen C_j des R_n wird die Beziehung der beiden folgenden Angaben zueinander untersucht: (A_m) Die Vereinigungsmenge von je m Mengen C_j hat eine zusammenhängende Komplementärmenge; (B_m). Der Durchschnitt von je m Mengen C_j ist nicht leer ($m = 1, 2, \ldots$). Der Satz von Helly besagt, daß jedes B_m aus B_{n+1} folgt. Verf. zeigt: Sind alle C_j abgeschlossen, so folgen alle B_m aus B_n und A_{n+1}. Sind alle C_j beschränkt, so folgt für $m > 1$ A_m aus B_m. Sind alle C_j abgeschlossen und beschränkt, dann gilt A_n für $s \leqq n$ und $n > 1$. Ein dem sog. Pflastersatz von Lebesgue verwandter Hilfssatz wird benutzt, der ein selbständiges Interesse verdient: Sind $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$ abgeschlossen und ist $K = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_{n+1}$ konvex, so folgt aus B_n in K, daß $C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_{n+1} \neq 0$ ist. Die Konvexität der C_j ist hierbei eine notwendige Voraussetzung. *W. Süss.*

Vincensini, Paul: Les ensembles d'arcs d'un même cercle dans leurs relations avec les ensembles de corps convexes du plan euclidien. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **2**, 456—464 (1953).

In Verallgemeinerung von Hellys Satz wird das folgende, als schwierig bezeichnete Problem gestellt: Es sei E^n der n-dimensionale euklidische Raum und $1 \leqq h \leqq n-1$; es ist $p = p(h)$ so zu bestimmen, daß allemal, wenn je p Körper eines Systems $\mathfrak{C}$ von konvexen Körpern im E^n von einem h-dimensionalen linearen Teilraum E^p von E^n getroffen werden, sogar alle Körper von $\mathfrak{C}$ von einem E^p getroffen werden. Zur Behandlung dieser Frage in der Ebene bedient sich der Verf. „konvexer Mengen von Richtungen", über welche einige Sätze bewiesen werden. Als Anwendung davon ergibt sich: Kann man je 4 Körper eines Systems von konvexen Körpern der Ebene auf einer Geraden aufspießen, so kann man das ganze System auf einer Geraden aufspießen. *G. Aumann.*

Müller, Hans Robert: Über Momente ersten und zweiten Grades in der Integralgeometrie. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. **2**, 119—140 (1953).

Es sei B ein Eibereich in der Euklidischen Ebene mit den Cartesischen Zeigern x_1, x_2. B sei belegt mit Masse von der Dichte Eins, B^h sei der Parallelbereich von B im Abstand $h > 0$ nach außen. Es werden die linearen und quadratischen Momente von B betrachtet: $F_j[B] = \int_B x_j\, dF$, $F_{jk}[B] = \int_B x_j\, x_k\, dF$. Für B^h findet sich dann entsprechend zu Steiners Formel für $F[B^h]$ $F_j[B^h] = F_j + h\, U_j + \frac{1}{2} h^2 C_j$, $F_{jk}[B^h] = F_{jk} + h\, U_{jk} + \frac{1}{2} h^2 (C_{jk} + 2\delta_{jk} F) + \frac{1}{3} h^3 (T_{jk} + \delta_{jk} U) + \frac{1}{4} h^4 \delta_{jk} \pi$. Darin haben die rechts auftretenden Festwerte einfache Deutungen, z. B. $C_{jk} = \int_{B^*} x_j\, x_k\, d\tau$, wenn B^* den Rand von B und $d\tau$ den Winkel benachbarter Tangenten von B^* bedeutet. Ist nun B ein ruhender, B' ein bewegter Bereich mit der „kinematischen Dichte" dB', ferner BB' der Durchschnitt von B, B', so gilt in Erweiterung von Formeln von Santaló und Blaschke (1936)

$$\int C_j[BB']\, dB' = 2\pi \{C F'_j + U U'_j + F C'_j\},\ \int C_{jk}[BB']\, dB = 2\pi \{C F'_{jk} + U U'_{jk} + F C'_{jk}\}.$$

Diese Ergebnisse lassen sich auch mittels eines allgemeinen Satzes von H. Hadwiger gewinnen. Man vergleiche dessen Buch über konvexe Körper (Basel 1954). Es werden auch Parallelbereiche nach innen betrachtet. *W. Blaschke.*

Topologie:

Sakakihara, Kenenji: The structures of neighbourhood systems and the types of convergences. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A **4**, 1—7 (1953).

Relations are studied of the notions of convergence, „conv", and neighbourhood, „nbd", defined in an abstract set R. „conv" is supposed to be defined by means of a given directed set X (the „base") and „nbd" as a relation between points and

subsets of R fulfilling different sets of axioms. „conv" given, „nbd" is defined by (1) $N \operatorname{nbd} a \equiv \overset{\varphi}{\forall}\, \varphi \operatorname{conv} a \to \varphi \operatorname{ult} N$, and „nbd" given, „conv" is defined by (2) $\varphi \operatorname{conv} a \equiv \overset{N}{\forall}\, N \operatorname{nbd} a \to \varphi \operatorname{ult} N$, where φ is a map from X to R and $\varphi \operatorname{ult} N \equiv \underset{x_0}{\exists}\, \underset{x}{\forall}\, x > x_0 \to \varphi(x) \in N$. — The conditions are studied for „nbd" and „conv" to be mutually reversible by these transformations. Also the relations between „nbd", „conv" and the closure operator f are investigated. *A. v. Heemert.*

Thielman, H. P.: Types of functions. Amer. math. Monthly **60**, 156—161 (1953).

X und Y seien topologische Räume, $f(x)$ sei eine auf X definierte Funktion mit Werten aus Y. $f(x)$ heißt „nachbarlich" („neighborly") in $c \in X$, wenn es zu jeder Umgebung N_c von c und zu jeder Umgebung M von $f(c)$ eine offene Menge $N \subset N_c$ mit $f(N) \subset M$ gibt (vgl. W. W. Bledsoe, dies. Zbl. **46**, 403). Ist Y ein metrischer Raum, so wird $f(x)$ in $c \in X$ „sippschaftlich" („cliquish") genannt, wenn es zu jeder Umgebung N_c von c und zu beliebigem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $N \subset N_c$ gibt, so daß für $x_1, x_2 \in N$ $\varrho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ gilt. Folgende Behauptungen werden bewiesen: Ist $f(x)$ „sippschaftlich" in den Punkten einer in X dichten Menge, so ist sie „sippschaftlich" in jedem Punkt von X. Ist die Menge der Punkte, in welchem $f(x)$ nicht „sippschaftlich" ist, dicht in X, so ist ihre Komplementärmenge nirgendsdicht. Dagegen gibt es für $X = R_1$, $Y = R_1$ Funktionen $f(x)$, so daß die Menge der Punkte, in welchen $f(x)$ „nachbarlich" ist, und auch ihre Komplementärmenge dicht in X sind. Die Grenzfunktion einer Folge von überall „sippschaftlichen" Funktionen kann überall „nichtsippschaftlich" sein.

Á. Császár.

Ellis, David and Gaines Lang: The space of groupoids over a compactum. Acta math. **89**, 209—215 (1953).

M: compactum (compact metric space). $\delta(x, y)$: distance function of M. Groupoid $\mathfrak{a}$ over M: single-valued function $z = x\,\mathfrak{a}\,y$ on MM to M. Distance of two groupoids $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$: $\delta(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sup_{x,y \in M} \delta(x\,\mathfrak{a}\,y, x\,\mathfrak{b}\,y)$. $\mathfrak{G}$: space of all groupoids over M. Main propositions: $\mathfrak{G}$ is complete (in the sense of Fréchet). If M is infinite, then $\mathfrak{G}$ includes a subset $\mathfrak{D}$ with the properties (1) $\mathfrak{D}$ consists of finite-valued groupoids and (2) $\mathfrak{D}$ is dense in $\mathfrak{G}$. If M is convex, then $\mathfrak{G}$ is convex. If $\mathfrak{a}$ is discontinuous at (x, y), then any $\mathfrak{b}$ in a suitable neighbourhood of $\mathfrak{a}$ is also discontinuous at (x, y). The set C of the continuous groupoids is closed in $\mathfrak{G}$. The set $\mathfrak{Q}_\tau$ of the „topological" quasigroups is closed in $\mathfrak{G}$. At the end of the paper the author raises the characterization problem for spaces of groupoids among metric spaces, and the following interesting question: What groupoids may be approximated by semigroups, by loops, by quasigroups, by groups ?

Chr. Pauc.

Gottschalk, W. H.: Intersection and closure. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 470—473 (1953).

The question of when $\overline{A \cap B}$ equals $\bar{A} \cap \bar{B}$ for two subsets of a space is treated for uniformisable (T_0) spaces. It is shown that this is true if A and B are continuously separable, and further that continuous separability of A, B is also necessary when A or B is conditionally compact. Two subsets A, B of a topological (uniform) space X are said to be continuously (uniformly) separated if there is a map of X in the real unit interval taking A, B respectively into 0 and 1 such that this map is continuous (uniformly continuous) over X. And two subsets A, B of the topological (uniform) space X are continuously (uniformly) separable if, whenever U is a neighbourhood of $A \cap B$ such that $A \cap B$ is continuously (uniformly) separated from $X - U$, then $A - U$ and $B - U$ are continuously (uniformly) separated. The above result for uniformisable spaces follows from the following: (i) two subsets of a uniformisable space are continuously separable if, and only if, they are uniformly separable relative to some uniformity for the space compatible with its topology; (ii) two subsets A, B of a uniform space X are uniformly separable if, and only if, for any vicinity α of X, there exists a vicinity β of X such that $A\,\beta \cap B\,\beta \subset (A \cap B)\,\alpha$; (iii) two subsets of a dense subset Y of a uniform space are uniformly separable in Y if, and only if, they are uniformly separable in X; and (iv) in a uniform space two subsets A, B which are uniformly separable satisfy $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, and uniform separability is also necessary for the equality if A, B are subsets of a dense subset of X and also A or B is conditionally compact in X. Deductions are made regarding the closure of the intersection and intersection of the closures in the Čech-compactification of the uniform space; for instance

normality is shown to be equivalent to the equality of $A^* \cap B^*$ and $(A \cap B)^*$, for any two closed sets A, B of the space, A^* denoting the closure in the Čech-compactification. (Note that ‚vicinity α' is used for ‚entourage V_α de diagonal' in the sense of A. Weil).

V. S. Krishnan.

Isbell, J. R.: Homogeneous spaces. Duke math. J. **20,** 321—329 (1953).

The relation between various types of homogeneity of topological spaces are first investigated. A space is termed an s-space provided any two of its points have neighborhood bases which may be put into one-one correspondence so that corresponding terms are homeomorphic; the space is microhomogeneous if any two of its points x and y have homeomorphic neighborhoods under a map sending x to y. A space is almost homogeneous provided for any two points x and y there exists a homeomorphism of the space into itself sending x to y; the space is shrinkable about the point x provided there exists for each neighborhood U of x a homeomorphism of the space into U, leaving x fixed; it is shrinkable if it is shrinkable about all of its points. Interesting examples are given of: 1. a plane set which is an s-space, not almost homogeneous nor microhomogeneous, locally connected at and shrinkable about some but not all of its points; 2. a subset of the Hilbert cube which is shrinkable and almost homogeneous, but is not an s-space; 3. a locally Euclidean space, made up of uncountably many planes, which is not involutory homogeneous. Further, it is shown that every microhomogeneous connected, linearly ordered space is locally Birkhoff homogeneous; a linearly ordered space is Birkhoff homogeneous if it is order-isomorphic to all its open intervals. — Reviewer's remarks: a) The authors conjecture that a shrinkable connected space is locally connected is false: let E be a homogeneous non locally connected continuum; according to the authors theorem 2.10, an infinite power of E is shrinkable, obviously connected but not locally connected. b) Exemple 3. above is intended to provide the negative answer to a problem of van Dantzig [Fundamenta Math. **15,** 102—125 (1930), Probl. 47] the answer is not very satisfactory since the authors locally Euclidean space has no countable base, whereas von Dantzig's manifolds are always assumed simplicial. *T. Ganea.*

Bing, R. H.: A connected countable Hausdorff space. Proc. Amer. math. Soc. **4,** 474 (1953).

Examples are constructed of connected countable Hausdorff spaces whose points are the rational points in a Euclidean half-plane, resp., in a quadrant of a Euclidean three space, such that these are infinite-dimensional in the Lebesgue sense, but have dimension 1 and 2 respectively in the Menger-Urysohn sense. The same method could be used to get similar spaces of any finite dimension in the Menger-Urysohn sense. A correction that seems necessary in line 14 is to replace „neighbourhoods" by „Open sets covering the space". *V. S. Krishnan.*

Yoneda, Nobuo: On the mappings of complexes. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I **6,** 393—419 (1953).

L'A. donne: 1° Une définition de l'isotopie combinatoire de deux sous-complexes d'un complexe au moyen de déformations locales dans l'étoile d'un simplexe; il montre alors que deux applications simpliciales homotopes peuvent être déformées l'une dans l'autre par un produit de telles déformations. 2° Si $f: K \to K'$ est une application simpliciale d'un complexe K de dimension m dans le complexe K' de dimension n, on appelle singularité de f sur un simplexe T^q de dimension q de K' l'excès sur q de la dimension du complexe image réciproque $f^{-1}(T^q)$; de même, la „singularité" de f sur un sous-complexe A de K' est Sup des singularités de f sur les simplexes de A. L'A. montre alors que si K' est un complexe qui a les propriétés d'homotopie locale d'une variété de dimension n, toute application $f: K \to K'$ peut être approchée à ε près par une application simpliciale f' pour laquelle la „singularité" est égale à Sup $(m-n, 0)$. Application en est donnée à la théorie du degré, notamment à la théorie du degré tordu de l'application canonique de S^2 sur le plan projectif réel $P_2(R)$. *R. Thom.*

Samelson, Hans: A connection between the Whitehead and the Pontryagin product. Amer. J. Math. **75,** 744—752 (1953).

Es sei X ein zusammenhängender, einfach-zusammenhängender Raum ($\pi_0(X) = \pi_1(X) = 0$; 1-zusammenhängend). Es sei $\Omega(X)$ der Raum der geschlossenen Wege von X, die einen vorgegebenen Anfangs- und Endpunkt haben. Der Raum $\Omega(X)$ besitzt eine natürliche Multiplikation: Wenn $w_1, w_2 \in \Omega(X)$, dann ist $w_1 w_2$ der komponierte Weg (erst w_1, dann w_2). Diese Multiplikation erzeugt eine Multiplikation für Homologieklassen a, b von $\Omega(X)$; wenn $a \in H_r(\Omega(X))$ und $b \in H_s(\Omega(X))$, dann ist $a * b \in H_{r+s}(\Omega(X))$, (Pontrjaginsches Produkt). Bekanntlich hat man

einen natürlichen Isomorphismus T von $\pi_n(X)$ auf $\pi_{n-1}(\Omega(X))$ und einen natürlichen Homomorphismus h von $\pi_{n-1}(\Omega(X))$ in $H_{n-1}(\Omega(X))$. Der Homomorphismus $h \circ T$ wird mit τ bezeichnet. Für die Homotopiegruppen von X ist das Whitehead-Produkt $[,]$ definiert. Wenn $\alpha \in \pi_{p+1}(X)$ und $\beta \in \pi_{q+1}(X)$, dann ist $[\alpha, \beta] \in \pi_{p+q+1}(X)$. Zwischen dem Whiteheadschen und dem Pontrjaginschen Produkt besteht der folgende Zusammenhang (+): Wenn $\alpha \in \pi_{p+1}(X)$ und $\beta \in \pi_{q+1}(X)$, $(p, q \geq 1)$, dann ist $\tau[\alpha, \beta] = (-1)^p (\tau\alpha * \tau\beta - (-1)^{pq} \tau\beta * \tau\alpha)$. [Das Vorzeichen $(-1)^p$ ergibt sich, wenn man die Abbildung T (mit Vorzeichen) in einer gewissen Weise festlegt.] Verf. gibt am Schluß der Arbeit einige Anmerkungen: 1. Bekanntlich gilt die Vertauschungsregel $[\alpha, \beta] = (-1)^{(p+1)(q+1)} [\beta, \alpha]$. Natürlich muß dann auch $\tau[\alpha, \beta] = (-1)^{(p+1)(q+1)} \tau[\beta, \alpha]$ gelten. Das ergibt sich in der Tat formal aus der rechten Seite von (+). — 2. Wenn X eine n-Sphäre S^n ist und $\alpha = \beta = \iota_n \in \pi_n(S^n)$, ($\iota_n$ gehört zur identischen Abbildung), dann ergibt (+): $\tau[\iota_n, \iota_n] = 0$ für ungerades n und $\tau[\iota_n, \iota_n] = -2\tau\iota_n * \tau\iota_n$ für gerades n. Das entspricht der Tatsache, daß die Hopfsche Invariante von $[\iota_n, \iota_n]$ für ungerades n verschwindet und gleich ± 2 für gerades n ist. — 3. Wenn $\alpha \in \pi_{p+1}(X)$, $\beta \in \pi_{q+1}(X)$ und $\gamma \in \pi_{r+1}(X)$ ist, dann ergibt sich aus (+), daß das τ-Bild von $[\alpha, \beta, \gamma] = (-1)^{(p+1)r} [\alpha, [\beta, \gamma]] + (-1)^{(q+1)p} [\beta, [\gamma, \alpha]] + (-1)^{(r+1)q} [\gamma, [\alpha, \beta]]$ verschwindet. Vermutung: $[\alpha, \beta, \gamma]$ verschwindet selbst. Anm. des Ref.: H. Uehara hat auf dem Baltimore meeting der Amer. Math. Soc. (Dezember 1953) einen Beweis dieser „Jacobischen Identität" $[\alpha, \beta, \gamma] = 0$ angekündigt. — Verf. gibt für seine Formel (+) zwei Beweise. Der erste benutzt allgemeine Sätze, ergibt jedoch (+) nur bis auf das Vorzeichen. Der zweite Beweis ist elementar und direkt. Der erste Beweis soll kurz skizziert werden, da einige Dinge vorkommen, die selbständiges Interesse haben: Es sei $p : E \to B$ eine Faserabbildung des zusammenhängenden Raumes E auf B, die Fasern seien zusammenhängend. Ferner sei E' eine Teilmenge von E derart, daß $p' = p|E'$ eine Faserabbildung von E' auf $B' = p'(E')$ ist und daß die Fasern $p'^{-1}(x)$ wieder zusammenhängend sind. Dann gilt: Es existiert ein natürlicher Homomorphismus T_0 der Homotopiesequenz von (B, B') in die von (F, F'), der die Dimension um 1 erniedrigt. Die Abbildung von $\pi_n(B)$ in $\pi_{n-1}(F)$ bzw. von $\pi_n(B')$ in $\pi_{n-1}(F')$ ist gleich $(-1)^n \delta \circ p^{-1}$ bzw. $(-1)^n \delta' \circ p'^{-1}$. Hier bezeichnet p^{-1} den natürlichen Isomorphismus von $\pi_n(B)$ auf $\pi_n(E, F)$ und δ den Randoperator der Homotopiesequenz von (E, F). Entsprechend für E', F', B'. Wenn insbesondere die Räume E und E' zusammenziehbar sind, dann bildet T_0 die Homotopiesequenz von (B, B') eineindeutig auf die von (F, F') ab (mit Erniedrigung der Dimension um 1). Folgerung: Es sei $X \supset Y$. Beide Räume seien 1-zusammenhängend. Dann hat man einen Isomorphismus T_0 der Homotopiesequenz von (X, Y) auf die von $(\Omega(X), \Omega(Y))$. — Anwendung dieser Tatsache auf $X = S^{p+1} \times S^{q+1}$, $Y = S^{p+1} \cup S^{q+1}$ („union" mit einem gemeinsamen Punkt) zusammen mit Sätzen über die Struktur der Pontrjaginschen Ringe von X und Y [vgl. R. Bott und H. Samelson, Commentarii math. Helvet. **27**, 320—337 (1953)] ergibt einen Beweis für (+). *F. Hirzebruch.*

Spanier, E. H. and J. H. C. Whitehead: A first approximation to homotopy theory. Proc. nat. Acad. Sci. USA **39**, 655—660 (1953).

Die Einhängung (suspension) SX eines topologischen Raumes X, in dem ein Punkt x_* als Basispunkt ausgezeichnet sei, wird folgendermaßen definiert: Es bezeichne E^1 das Intervall $\{-1 \leq t \leq +1\}$. Der Raum SX entsteht aus dem cartesischen Produkt $X \times E^1$, indem man $(X \times 1) \cup (X \times -1) \cup (x^* \times E^1)$ auf einen Punkt zusammenzieht. Dieser Punkt von SX wird ebenfalls mit x_* bezeichnet. Die n-fache Einhängung von X wird mit $S^n X$ bezeichnet [induktive Definition: $S^{k+1} X = S(S^k X)$]. Nun sei Y ein topologischer Raum mit dem ausgezeichneten Punkt y_*. Die Menge der Homotopieklassen (x_*, y_* als Basispunkte) von stetigen Abbildungen von $S^m X$ in $S^n Y$ kann für $m \geq 1$ zu einer Gruppe $\pi((X \to Y)^n_m)$ gemacht werden (track addition). Die Gruppe $\pi((X \to Y)^n_m)$ ist abelsch für $m \geq 2$. Anm. des Ref.: Die track addition wird in der vorliegenden Arbeit nicht definiert. Die Verff. verweisen auf eine demnächst in Proc. London Math. Soc. erscheinende Arbeit von M. G. Barrat. Offenbar erfolgt die Definition der track addition in Analogie zur Definition der üblichen Homotopiegruppen. — Man hat einen natürlichen Homomorphismus von $\pi\left((X \to Y)^n_n\right)$ in $\pi\left((X \to Y)^{n+1}_{n+1}\right)$. Deshalb kann man den direkten Limes $\pi_S(X \to Y) = \lim_{n \to \infty} \pi((X \to Y)^n_n)$ bilden. $\pi_S(X \to Y)$ ist eine abelsche Gruppe, deren Elemente S-Abbildungen von X in Y genannt werden. Jede Abbildung f von X in Y bestimmt eine S-Abbildung $\{f\}$ von X in Y. Wenn $\tilde{f}$ eine S-Abbildung von X in Y und $\tilde{g}$ eine S-Abbildung von Y und Z ist (Z: topologischer Raum mit ausgezeichnetem Punkt z_*), dann ist in natürlicher Weise eine S-Abbildung $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ von X in Z definiert. Nun kann man S-Erweiterungs- und S-Deformationsprobleme im Sinne des folgenden Beispiels betrachten: A sei in X eingebettet, die Einbettungsabbildung werde i genannt ($x_* \in A \subset X$). Gegeben ist eine Abbildung f von A in Y mit $f(x_*) = y_*$. Kann man eine S-Abbildung $\tilde{g}$ von X in Y finden derart, daß $\tilde{g} \circ \{i\} = \{f\}$? — S-Probleme sind im allgemeinen leichter zu lösen als Probleme, die gewöhnliche Abbildungen betreffen. Mit Hilfe der Freudenthalschen Einhängungssätze gelangen die Verff. zu einem Satz, der im wesentlichen besagt, daß innerhalb der „suspension range" die

natürliche Abbildung von $\pi(X \to Y)$ in $\pi_S(X \to Y)$ eineindeutig auf ist. Mit $\pi(X \to Y)$ wird dabei die Menge der Homotopieklassen (mit x_*, y_* als Basispunkten) von stetigen Abbildungen von X in Y verstanden. (In the case of mappings of a space X into an $(n-1)$-connected space Y the suspension range for dim X is dim $X \leqq 2n-2$). Innerhalb der suspension range sind die gewöhnlichen „Probleme" mit den entsprechenden S-Problemen äquivalent. — Die gesamten Überlegungen der Verff. werden allgemeiner durchgeführt als hier im Referat beschrieben wurde. Die relative Homotopietheorie wird nämlich mit Hilfe von „carriers" berücksichtigt. (Es werden nur Abbildungen und Homotopien zugelassen, die mit einem gewissen „carrier" Φ verträglich sind. Φ ist eine Abbildung einer Familie von x_* enthaltenden Teilmengen von X in eine Familie von y_* enthaltenden Teilmengen von Y, die die Inklusionsbeziehung erhält.) Insbesondere betrachten die Verff. eine gewisse exakte Sequenz, die der exakten Sequenz der üblichen relativen Homotopietheorie entspricht. — Einzelheiten der Beweise sollen in einer späteren Arbeit erscheinen. *F. Hirzebruch.*

Wu, Wen-tsün: On squares in Grassmann manifolds. J. Chinese math. Soc. **2**, 205—229 und englische Zusammenfassg. 230 (1953) [Chinesisch].

This paper gives detailed proofs of results annouced previously (this Zbl. **35**, 249). We determine completely the squares in grassmannian manifolds. As a consequence we prove that for an $(m-1)$-sphere bundle the mod 2 Stiefel-Whitney classes are all determined, with the aid of cup products and squares, by those of dimensions a power of 2. Autoreferat.

James, I. M.: Note on factor spaces. J. London math. Soc. **28**, 278—285 (1953).

Die Stiefelsche Mannigfaltigkeit $V_{n,r}$ kann als Faktorraum $O(n)/O(n-r)$ definiert werden, wo $O(n)$ die orthogonale Gruppe bezeichnet. Die Grassmannsche Mannigfaltigkeit $M_{n,r}$ kann als Faktorraum $O(n)/O(n-r) \times O(r)$ definiert werden. Für $i \geqq 2$ erhält Verf. die Formeln

$$\pi_i(M_{n,r}) \simeq \pi_i(V_{n,r}) + \pi_{i-1}(O(r)) \quad \text{für} \quad 2r \leqq n \quad \text{oder äquivalent}$$
$$\pi_i(M_{n,r}) \simeq \pi_i(V_{n,n-r}) + \pi_{i-1}(O(n-r)) \quad \text{für} \quad 2r \geqq n.$$

(Beweis: Für $2r \leqq n$ ist $O(r)$ in $V_{n,r}$ auf einen Punkt zusammenziehbar.) Diese Formeln werden folgendermaßen verallgemeinert: Es sei H das direkte Produkt der orthogonalen Gruppen $O(r_i)$, (wo $r = r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_j$ und $\sum_{i=1}^{j} r_i \leqq n$), und es werde H in natürlicher Weise als Untergruppe von $O(n)$ aufgefaßt. Man schreibe $H = O(r) \times \mathrm{L}$. Dann hat man für $i \geqq 2$ die Gleichungen $\pi_i(O(n)/H) \simeq \pi_i(V_{n,n-r}) + \pi_{i-1}(L)$. Daher sind die Homotopiegruppen der Faktorräume $O(n)/H$ bekannt, wenn man diejenigen der Stiefelschen Mannigfaltigkeiten kennt. — Schließlich untersucht Verf. die Frage, wann ein Feld von r-dimensionalen Ebenenelementen auf der Sphäre S^n durch ein r-Feld von Vektoren aufgespannt werden kann. Verf. bemerkt, daß nach Steenrod im Falle $2r \leqq n$ die Sphäre S^n dann und nur dann ein Feld von r-Ebenen zuläßt, wenn sie ein r-Feld von Vektoren zuläßt. Es gibt in diesem Falle jedoch im allgemeinen Felder von r-Ebenen, die nicht durch ein r-Feld von Vektoren aufgespannt werden können. Dies kommt (unter der Annahme, daß $2r \leqq n$ und daß S^n wenigstens ein r-Feld zuläßt) dann und nur dann vor, wenn $\pi_{n-1}(O(r)) \neq 0$. Da $\pi_6(O(3)) = \pi_6(S^3) \neq 0$, gibt es auf S^7 ein Feld von 3-dimensionalen Ebenen, das nicht durch ein 3-Feld von Vektoren aufgespannt werden kann. — Verf. verweist wiederholt auf Steenrods Buch (The topology of fibre bundles, Princeton 1951). *F. Hirzebruch.*

Hopf, H.: Vom Bolzanoschen Nullstellensatz zur algebraischen Homotopietheorie der Sphären. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **56**, 59—76 (1953).

In diesem auf der Tagung der Deutsch. Math.-Verein. in Berlin im September 1951 gehaltenen Vortrag berichtet Verf. über die Entwicklung des Problems der Bestimmung der Homotopiegruppen $\pi(m, n) = \pi_m(S^n)$. (Der Bericht ist nachträglich bis 1952 ergänzt worden.) Der Vortrag ist so abgefaßt, daß er insbesondere für den Nicht-Topologen ein sehr interessantes und spannendes Bild dieses wichtigen Problems gibt. Verf. sagt: Der Ausgangspunkt ist der alte Satz von Bolzano: „Auf einer Strecke E habe man eine stetige reelle Funktion f, deren Werte in den Endpunkten a und b von E entgegengesetzte Vorzeichen haben; dann besitzt f in E eine Nullstelle". Der Satz von Bolzano führt zu der folgenden allgemeinen Fragestellung: (I) Auf der Sphäre S^m [= Rand der $(m+1)$-dimensionalen Vollkugel E] sei ein stetiges Funktionensystem $(f_0, \ldots, f_n)$ ohne gemeinsame Nullstellen gegeben $(m \geqq n)$; wie kann man entscheiden, ob diese Randwerte wesentlich sind, d. h. ob jedes in ganz E stetige Funktionensystem, das diese Randwerte hat, in E eine gemeinsame Nullstelle besitzt? (Bolzano: $m = n = 0$). Das Problem (I) führt zu der Frage (II): Für welche m und n existieren Randwertsysteme $(f_0, \ldots, f_n)$ auf der Sphäre S^m, welche wesentlich sind? Die Probleme (I), (II) können zu (I′), (II′) verfeinert werden: (I′) Zwei Abbildungen F und G von S^m in S^n seien gegeben; wie kann man entscheiden, ob sie einander homotop sind? (II′) Wie groß ist die Anzahl $A(m, n)$ der Homotopieklassen von Abbildungen von S^m in S^n? — Verf. bespricht nun die Teilantworten auf (I′), (II′), die bis zur Einführung der Homotopiegruppen durch Hurewicz (dies. Zbl. **10**, 378; **11**, 371;

13, 229; **13**, 283) im Jahre 1935 bekannt waren: $m = n$ (Kroneckersche Charakteristik, Brouwerscher Abbildungsgrad); $m > n = 1$ $(A(m, 1) = 1)$; $m = 4k - 1$, $n = 2k$ [Hopfsche γ-Invariante, $A(4k - 1, 2k) = \infty$, dies. Zbl. **1**, 407; **12**, 319]. — Nach der Einführung der Homotopiegruppen können gruppentheoretische Begriffe verwendet werden. Man hat das Problem (II*): Man bestimme die Struktur der Gruppe $\pi(m, n)$. Die ersten Teilergebnisse waren: $\pi(n, n) = Z$; $\pi(3, 2) = Z$; $\pi(m, 3) = \pi(m, 2)$ für $m \geqq 3$ (Hurewicz, loc. cit.); $\pi(4k - 1, 2k)$ enthält eine Untergruppe Z. Freudenthal (dies. Zbl. **18**, 177) bewies 1937 seine Einhängungssätze, aus denen folgt, daß $\pi(n + d, n) = \pi(2d + 2, d + 2) = \pi'(d)$ für $n \geqq d + 2$. Danach kann (II*) in zwei Teilprobleme zerlegt werden: (II$_1^*$) Man bestimme die Struktur der Gruppe $\pi'(d)$. Das Problem (II$_2^*$) besagt: Man bestimme die Struktur der $d - 1$ Gruppen $\pi(n + d, n)$ für $d > 0$ und $3 \leq n \leq d + 1$. Verf. bespricht die Fortschritte, die von Freudenthal (loc. cit.), Pontrjagin und G. Whitehead (dies. Zbl. **35**, 111; **37**, 397), Blakers und Massey (dies. Zbl. **40**, 258; **42**, 173; **46**, 406), Hilton (dies. Zbl. **45**, 120), Eckmann (dies. Zbl. **26**, 93), G. Whitehead (dies. Zbl. **41**, 519) erzielt wurden. — Ein neuer Abschnitt in der Entwicklung des Problems (II*) wurde durch die Arbeiten von H. Cartan und J. P. Serre eingeleitet [Cartan-Serre, dies. Zbl. **48**, 413, C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 393—395 (1952); Serre, dies. Zbl. **42**, 174; **45**, 260; **46**, 107; **48**, 414; **50**, 175), die das Problem (II*) einer Algebraisierung recht nahe brachten. Insbesondere werden die folgenden Sätze von Serre hervorgehoben. A. Alle Gruppen $\pi(m, n)$ sind endlich, mit der Ausnahme von $\pi(n, n) = Z$ und der Gruppen $\pi(4k - 1, 2k)$, die die direkte Summe einer unendlich zyklischen Gruppe und einer endlichen Gruppe sind. B. Wenn p eine Primzahl und $n > 2$, dann ist $\pi(n + 2p - 3, n) \neq 0$. Schließlich bemerkt Verf., daß die alten Ergebnisse die Vermutung zuließen, daß $\pi(m, n) \neq 0$ für $m > n > 1$. Diese Vermutung wird widerlegt durch die Ergebnisse von Serre, nach denen $\pi'(4) = \pi'(5) = 0$. „Unsere alte Frage (II) hat jedenfalls noch an Aktualität gewonnen, und man wird es verstehen, warum ich am Anfang gesagt habe, daß der heutige Zustand unseres Problems merkwürdig und spannend sei." *F. Hirzebruch.*

Kirchhoff, A.: Beiträge zur topologischen linearen Algebra. Compositio math. **11**, 1—36 (1953).

Die Arbeit zerfällt in drei Teile. I. Die linearen Selbstabbildungen orientierter Vektorräume. II. Die Topologie der einseitigen Abbildungen. III. Anwendungen auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten. In I. wird der n-dimensionale Vektorraum R^n über den reellen Zahlen R betrachtet. $\mathfrak{A}^+$ sei die Gruppe der linearen Automorphismen von R^n, deren Determinante positiv ist. R^n werde mit einer Orientierung versehen. $\mathfrak{A}^+$ ist also die Automorphismengruppe des orientierten Vektorraumes R^n. Zwei lineare Selbstabbildungen A, B von R^n in sich (im folgenden kurz Abbildungen genannt) heißen positiv ähnlich, wenn es eine Abbildung $T \in \mathfrak{A}^+$ mit $A = TBT^{-1}$ gibt. Die Abbildungen zerfallen in Klassen positiv ähnlicher. Jede Ähnlichkeitsklasse im üblichen Sinne zerfällt in eine oder zwei Klassen positiv ähnlicher Abbildungen. Im ersten Falle heißen die Abbildungen zweiseitig, im zweiten Falle einseitig. Eine Abbildung ist genau dann einseitig, wenn sie mit keiner Abbildung negativer Determinante vertauschbar ist. Daher ist die Determinante einer einseitigen Abbildung stets $\geqq 0$. Einseitige Abbildungen gibt es nur in Räumen gerader Dimension. Allgemeiner: Wenn es in R^n zwei zueinander komplementäre Fixräume der einseitigen Abbildung A gibt, dann sind die Dimensionen dieser Fixräume gerade. Jede einseitige Abbildung A bestimmt in folgender Weise eine Orientierung des R^n: Nach bekannten Sätzen ist R^n die direkte Summe von Fixräumen F_i von A derart, daß es in jedem (r_i-dimensionalen) Fixraum F_i einen Vektor e_i gibt mit der Eigenschaft, daß $e_i, A e_i, \ldots, A^{r_i - 1} e_i$ eine Basis des Fixraumes F_i ist. Da A einseitig ist, sind alle r_i gerade. Die durch die Reihenfolge $e_i, A e_i, \ldots, A^{r_i - 1} e_i$ gegebenen Orientierungen der Fixräume erzeugen in eindeutiger Weise eine Orientierung des R^n, da alle Fixräume von gerader Dimension sind. Verf. zeigt, daß diese Orientierung nicht von der Wahl des Fixraumsystems und der Vektoren e_i abhängt. Damit hat man die durch A bestimmte Orientierung von R^n. — Zwei ähnliche einseitige Abbildungen sind genau dann positiv ähnlich, wenn sie dieselbe Orientierung des R^n bestimmen. — Nun beweist Verf. die Umkehrung eines oben erwähnten Satzes: Jede Abbildung, die keine komplementären Fixräume ungerader Dimension besitzt, ist einseitig. (Hier wird zum erstenmal von der reellen Abgeschlossenheit des Grundkörpers R Gebrauch gemacht.) Eine Abbildung ist also genau dann einseitig, wenn alle ihre (reellen) Elementarteiler Polynome geraden Grades sind. — Eine Abbildung des R^n in sich, die keinen reellen Eigenvektor hat, heißt I-Abbildung (vgl. H. Hopf, dies. Zbl. **33**, 25). Die I-Abbildungen lassen sich auch dadurch charakterisieren, daß sie keine ungerade dimensionalen Fixräume haben. Die I-Abbildungen sind also spezielle einseitige Abbildungen. Unter einer speziellen I-Abbildung wird eine I-Abbildung verstanden, die die zusätzliche Eigenschaft $I^2 = -E$ hat, wo E die identische Abbildung bezeichnet. Je zwei solche I-Abbildungen sind einander ähnlich. Die speziellen I-Abbildungen entsprechen eineindeutig den linearen komplexen Strukturen, die man auf dem Vektorraum R^n ($n = 2m$) einführen kann. Verf. definiert eine Funktion ϱ_n, die jeder I-Abbildung eine spezielle I-Abbildung zuordnet und die folgende Eigenschaften hat: Für eine spezielle I-Abbildung I ist $\varrho_n(I) = I$. Die Abbildungen I und $\varrho_n(I)$ bestimmen dieselbe Orientierung

des R^n. Wenn $I = T\,I'\,T^{-1}$ ist, dann gilt $\varrho_n(I) = T\,\varrho_n(I')\,T^{-1}$. Diese Funktion ϱ_n wurde auch von G. de Rham definiert. Mit Hilfe der Funktion ϱ_n kann also jeder beliebigen I-Abbildung eine komplexe Struktur des R^n zugeordnet werden. Im letzten Paragraphen des ersten Teils untersucht Verf. die I-Abbildungen in Vektorräumen R^n, die mit einer orthogonalen Struktur versehen sind. Eine spezielle I-Abbildung ist genau dann orthogonal, wenn sie schiefsymmetrisch ist. Stellt man die spezielle I-Abbildung I in der eindeutig bestimmten Weise als Produkt GP dar, wo G eine orthogonale Abbildung und P eine positiv definite symmetrische Abbildung ist, dann ist G schiefsymmetrisch. Verf. setzt $\chi_n(I) = G$. — II. Die Selbstabbildungen von R^n in sich werden in natürlicher Weise als Punkte eines topologischen Raumes $\mathfrak{R}$ betrachtet. Die Menge $\mathfrak{J}_n$ der I-Abbildungen ist eine offene Teilmenge von $\mathfrak{R}$, die der offene Kern der Menge der einseitigen Abbildungen ist. Eine Klasse positiv ähnlicher Abbildungen ist stets zusammenhängend. Die Ähnlichkeitsklasse einer zweiseitigen Abbildung ist zusammenhängend, die einer einseitigen Abbildung besteht aus zwei Komponenten, nämlich den beiden Klassen positiv ähnlicher Abbildungen. Mit $\mathfrak{Sp}\,\mathfrak{J}_n$ werde die Menge der speziellen I-Abbildungen bezeichnet. $\mathfrak{Sp}\,\mathfrak{J}_n$ ist eine Ähnlichkeitsklasse von einseitigen Abbildungen, besteht somit aus zwei Komponenten $\mathfrak{Sp}\,\mathfrak{J}_n^+$ und $\mathfrak{Sp}\,\mathfrak{J}_n^-$. Auch $\mathfrak{J}_n$ besteht aus zwei Komponenten $\mathfrak{J}_n^+$, $\mathfrak{J}_n^-$. Die Abbildung ϱ_n bildet $\mathfrak{J}_n^+$ stetig auf $\mathfrak{Sp}\,\mathfrak{J}_n^+$ und $\mathfrak{J}_n^-$ auf $\mathfrak{Sp}\,\mathfrak{J}_n^-$ ab, und zwar so, daß $\mathfrak{Sp}\,\mathfrak{J}_n^+$ (bzw. $\mathfrak{Sp}\,\mathfrak{J}_n^-$) durch ϱ_n Deformationsretrakt von $\mathfrak{J}_n^+$ (bzw. $\mathfrak{J}_n^-$) wird. Auch die Menge der einseitigen Abbildungen wird durch die Orientierung in zwei fremde Teilmengen zerlegt. Dies ist aber für $n \geq 4$ keine Komponentenzerlegung. Die Menge der einseitigen Abbildungen ist nämlich für $n \geq 4$ zusammenhängend. Nach Einführung einer orthogonalen Struktur in R^n kann man in $\mathfrak{J}_n^+$ die Teilmenge $\mathfrak{O}\,\mathfrak{Sp}\,\mathfrak{J}_n^+$ der orthogonalen speziellen I-Abbildungen betrachten. Die Funktion χ_n ist stetig. Unter χ_n wird $\mathfrak{O}\,\mathfrak{Sp}\,\mathfrak{J}_n^+$ Deformationsretrakt von $\mathfrak{Sp}\,\mathfrak{J}_n^+$. Die Homotopieeigenschaften von $\mathfrak{J}_n^+$ sind also mit denen von $\mathfrak{O}\,\mathfrak{Sp}\,\mathfrak{J}_n^+$ äquivalent. $\mathfrak{O}\,\mathfrak{Sp}\,\mathfrak{J}_n^+$ ist eine $n(n-2)/4$-dimensionale Mannigfaltigkeit, die in natürlicher Weise mit dem homogenen Raum $SO(n)/U(m)$ $(n = 2m)$ homöomorph ist [vgl. Ehresmann, dies. Zbl. **39**, 397, Steenrod, The topology of fibre bundles, Princeton 1951, und A. Borel, Ann. of Math., II. Ser. **57**, 115—207 (1953)]. — III. Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit heißt I-Mannigfaltigkeit, wenn es ein stetiges Feld von I-Abbildungen I_p gibt. (I_p hängt stetig von p ab und ist eine I-Abbildung des Tangentialraumes von p.) Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit heißt fastkomplex, wenn es ein stetiges Feld von speziellen I-Abbildungen gibt. Aus den in I. und II. angegebenen Eigenschaften der Abbildung ϱ_n folgt, daß eine differenzierbare Mannigfaltigkeit genau dann eine I-Mannigfaltigkeit ist, wenn sie fastkomplex ist. Verf. bespricht schließlich seinen bekannten Satz: Wenn die Sphäre S^n fastkomplex ist, dann ist die Sphäre S^{n+1} parallelisierbar (vgl. Kirchhoff, dies. Zbl. **30**, 273 und Eckmann, dies. Zbl. **42**, 416). Mit Hilfe anderer Methoden kann bewiesen werden, daß nur die Sphären S^2 und S^6 fastkomplex sind. (A. Borel und J. P. Serre, dies. Zbl. **50**, 396). *F. Hirzebruch.*

Chern, Shiing-shen: On the characteristic classes of complex sphere bundles and algebraic varieties. Amer. J. Math. **75**, 565—597 (1953).

Es sei E ein Bündel über dem Basisraum X mit dem komplexen Vektorraum C_q als Faser und der linearen Gruppe $GL(q, C)$ als Strukturgruppe. Die Chernschen Klassen dieses Bündels werden mit $c_i(E)$ bezeichnet [$c_i \in H^{2i}(X, Z)$, $c_0 = 1$]. Verf. geht von der Definition der c_i als Hindernisse aus, betrachtet das bekannte Universalbündel für $GL(q, C)$, das eine komplexe Grassmannsche Mannigfaltigkeit als Basis hat, bestimmt die Chernschen Klassen des Universalbündels und beweist mit Hilfe bekannter Eigenschaften des Cohomologie-Ringes der Grassmannschen Mannigfaltigkeit (formuliert mit Schubertsymbolen) das sogenannte Dualitäts-Theorem für die Chernschen Klassen: Es seien E, E' zwei Bündel über demselben Basisraum X mit C_q bzw. $C_{q'}$ als Faser und $GL(q, C)$ bzw. $GL(q', C)$ als Strukturgruppe. Dann ist in natürlicher Weise das Produktbündel $E \boxtimes E'$ definiert, das $C_{q+q'}$ als Faser und $GL(q + q', C)$ als Strukturgruppe hat. Man führt mit Hilfe einer Unbestimmten x das Chernsche Polynom $c = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\,x^i$ ein. Dann gilt die Formel: $c(E \boxtimes E') = c(E) \cdot c(E')$. — Verf. führt auch noch die Cohomologieklassen $\bar{c}_i \in H^{2i}(X, Z)$ und das entsprechende Polynom $\bar{c} = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{c}_i\,x^i$ ein. Die Klassen $\bar{c}_i$ werden mit Hilfe der Gleichung $c \cdot \bar{c} = 1$ definiert. Natürlich gilt das Dualitätstheorem auch für die $\bar{c}_i$, d. h. es gilt: $\bar{c}(E \boxtimes E') = \bar{c}(E) \cdot \bar{c}(E')$. — [Anm. des Ref.: Aus einer kürzlich erschienenen Arbeit von A. Borel und J. P. Serre (dies. Zbl. **50**, 396) ergibt sich, daß die Chernschen Klassen durch drei Eigenschaften axiomatisch charakterisiert werden können. 1. Invarianz bei Abbildungen (d. h., wenn durch $f: X \to X'$ aus dem Bündel E über X ein Bündel E' über X' induziert wird, dann ist $c(E') = f^* c(E)$.) 2. Dualitäts-Theorem. 3. Normierung: Für ein Bündel mit C_1 als Faser und $C^* = GL(1, C)$ als Strukturgruppe ist $c_0 = 1$, c_1 ist die Hindernis-Klasse (definiert mit einem wohlbestimmten Vorzeichen!), und es ist $c_i = 0$ für $i > 1$. — Nach Borel und Serre (loc. cit.) kann man die Chernschen Klassen direkt als „elementar-symmetrische Funktionen" definieren. Bei Verwendung dieser Definition sind die Eigen-

schaften 1., 2., 3. sofort einzusehen. Aus dem Dualitäts-Theorem für die Chernschen Klassen im Sinne der Hindernis-Definition ergibt sich, daß diese Definition mit der Definition von Borel-Serre übereinstimmt. In der Literatur treten wiederholt Vorzeichen-Schwierigkeiten bezüglich der Chernschen Klassen auf. Wegen der oben erwähnten axiomatischen Charakterisierung hat man sich nur über das Vorzeichen von c_1 zu einigen. Die meist benutzte Vorzeichenwahl wird wohl durch „c_1 = Hindernis" gegeben. Ändert man 3. in 3* ab, indem man verlangt, daß $c_1^* =$ — Hindernis, dann werden durch die Axiome 1., 2., 3*. die „kovarianten" Chernschen Klassen c_i^* definiert. Es gilt: $c_i^* = (-1)^i c_i$. — Einen Beweis des Dualitäts-Theorems findet man auch bei Wu Wen-tsun (Wu, W.-t. et G. Reeb, Sur les espaces fibrés et les variétés feuilletées, Paris 1952)]. — Verf. entwickelt die folgende Aufspaltungs-Methode, die man auch „Adjunktion der Wurzeln des Chernschen Polynoms" nennen könnte und die in engem Zusammenhang mit der oben erwähnten Definition der Chernschen Klassen als elementar-symmetrische Funktionen steht: Es sei C_n der komplexe Vektorraum (Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$). Es bezeichne $H(n, r)$ die Untergruppe derjenigen Elemente von $GL(n, C)$, die alle $L_{(i)}$ der r-Fahne $\{L_{(0)}, L_{(1)}, \ldots, L_{(r)}\}$ als ganzes invariant lassen. Hierbei ist $L_{(i)}$ der i-dmensionale lineare Teilraum $(z_{i+1} = z_{i+2} = \cdots = z_n = 0)$ von C_n. Es sei $K(n, r)$ der Normalteiler von $H(n, r)$, der genau diejenigen Elemente von $H(n, r)$ enthält, die alle Quotienten $L_{(i)}/L_{(i-1)}$ punktweise invariant lassen $(i = 1, \ldots, r)$. Nun sei E ein Bündel über der Basis M mit C_n als Faser und $GL(n, C)$ als Strukturgruppe. Verf. betrachtet das assoziierte Bündel $B_{n,r}$ über M, das den Quotientenraum $GL(n, C)/H(n, r)$ (Links-Restklassen) als Faser hat. (Die Faser ist der Raum aller r-Fahnen im Ursprung des Vektorraumes C_n.) Ferner wird das assoziierte Bündel $\tilde{B}_{n,r}$ mit $GL(n, C)/K(n, r)$ als Faser betrachtet. $\tilde{B}_{n,r}$ ist ein „principal' Bündel über $B_{n,r}$ mit $H(n, r)/K(n, r)$ als Faser und Strukturgruppe. Diese Gruppe ist das direkte Produkt von r Gruppen $C^* = GL(1, C)$, die den oben erwähnten Quotienten $L_{(i)}/L_{(i-1)}$ entsprechen $(i = 1, \ldots, r)$. Man erhält demnach r principal Bündel $U_{(i)}$ mit C^* als Strukturgruppe. Die Hindernis-Cohomologieklassen dieser Bündel sollen der Reihe nach mit u_i bezeichnet werden $[u_i \in H^2(B_{n,r}, Z)]$. Man hat eine natürliche Faserabbildung von $B_{n,r+1}$ auf $B_{n,r}$. Die Faser ist der komplex-projektive Raum P_{n-r-1}. Daher hat man das Diagramm: $B_{n,n} = B_{n,n-1} \to \ldots \cdots \to B_{n,2} \to B_{n,1} \to B_{n,0} = M$. Die Abbildung von $B_{n,r}$ auf M werde mit $q_{n,r}$ bezeichnet. Der natürliche Homomorphismus bildet den Cohomologie-Ring $H^*(B_{n,r}, Z)$ isomorph in $H^*(B_{n,r+1}, Z)$ ab. Wir identifizieren hier im Referat der Kürze halber den Ring $H^*(B_{n,r}, Z)$ mit seinem isomorphen Bild in $H^*(B_{n,r+1}, Z)$ und erhalten demnach eine Folge von Inklusionen: $H^*(M, Z) = H^*(B_{n,0}, Z) \subset H^*(B_{n,1}, Z) \subset \cdots \subset H^*(B_{n,n-1}, Z) = H^*(B_{n,n}, Z)$. Der allumfassende Ring $H^*(B_{n,n}, Z)$ entsteht aus $H^*(M, Z)$, indem man zweidimensionale Cohomologie-Klassen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ adjungiert und sie der einzigen Relation (*) $(1 + c_1 x + \cdots + c_n x^n) = (1 + u_1 x)(1 + u_2 x) \cdots (1 + u_n x)$ unterwirft (x ist eine Unbestimmte). Diese Relation erhält man unmittelbar aus dem Dualitäts-Theorem. Der Ring $H^*(B_{n,r}, Z)$ ist der von $H^*(M, Z)$ und $u_1, u_2, \ldots, u_r$ erzeugte Unterring von $H^*(B_{n,n}, Z)$. Aus (*) folgt die Formel von Hirsch $u_1^n - c_1 u_1^{n-1} + \cdots + (-1)^n c_n = 0$, die man auch zur Definition der Chernschen Klassen verwenden könnte. — Nun werde speziell angenommen, daß M eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit ist, die $B_{n,r}$ sind dann ebenfalls Mannigfaltigkeiten, und zwar in bestimmter Weise orientiert. Unter ϑ werde der Übergang von Homologieklassen zu dualen Cohomologieklassen verstanden. Verf. betrachtet den Homomorphismus $\psi_{n,r} = \vartheta\,(q_{n,r})_*\,\vartheta^{-1}$ der Cohomologiegruppen von $B_{n,r}$ in die von M und erhält die Gleichung:

$$(**) \qquad \psi_{n,r}\,(u_1^{n-2} \cdots u_{r-1}^{n-r}\, u_r^{2n-r}) = (-1)^n\, \bar{c}_{n-r+1}\,.$$

Die Formel (**) wird vom Verf. ganz allgemein für ein Bündel E mit beliebigem Basisraum M bewiesen. Der Homomorphismus $\psi_{n,r}$ muß dann anders definiert werden („integration over the fiber"). — Nun werde angenommen, daß M eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit ist und daß E das Tangential-Bündel von M ist. Wendet man auf E die gerade beschriebene Aufspaltungsmethode an, dann sind alle auftretenden Bündel komplex-analytisch, die Mannigfaltigkeiten $B_{n,r}$ sind komplexe Mannigfaltigkeiten. Insbesondere sind die Cohomologie-Klassen u_i die Hindernis-Klassen gewisser komplex-analytischer C^*-Bündel $U_{(i)}$. Falls M sogar eine (singularitätenfreie) algebraische Mannigfaltigkeit ist, dann ist auch $B_{n,r}$ algebraisch, die $U_{(i)}$ $(i = 1, \ldots, r)$ lassen sich durch Divisoren von $B_{n,r}$ repräsentieren. Die u_i sind also dual zu gewissen algebraischen Zyklen von $B_{n,r}$. Aus (**) folgt dann, daß die c_i zu gewissen algebraischen Zyklen von M dual sind. Daraus ergibt sich schließlich: Die Chernschen Klassen c_i einer algebraischen Mannigfaltigkeit M sind dual zu gewissen algebraischen Zyklen von M. Der letzte Satz ist mit das wesentlichste Ergebnis der vorliegenden Arbeit. Er steht in folgendem Zusammenhang mit den kanonischen Klassen von Eger und Todd [Eger, dies. Zbl. **15**, 272; **16**, 41; Todd, Proc. London math. Soc., II. Ser. **45**, 410—424 (1939)]. Eger und Todd definieren für eine algebraische Mannigfaltigkeit M_n von n komplexen Dimensionen für jede komplexe Dimension eine kanonische Klasse, das ist ein gewisser algebraischer Zyklus, der bis auf „lineare Äquivalenz" eindeutig bestimmt ist. Die Homologieklassen dieser algebraischen Zyklen werden kanonische Homologieklassen genannt, und die dualen Cohomologieklassen werden mit k_i bezeichnet $(k_i \in H^{2i}(M_n, Z))$. Die kanonische Klasse in der komplexen Dimension

$n-1$ ist die Divisorklasse der kanonischen Divisoren. (Der Divisor einer meromorphen n-Form wird kanonischer Divisor genannt.) Die entsprechende Cohomologieklasse ist k_1, und es ist leicht zu zeigen, daß $k_1 = -c_1$. Die kanonische Klasse in der komplexen Dimension 0 ist dual zu k_n. Es ist $k_n = (-1)^n c_n$, und der Wert von c_n auf der natürlich orientierten Mannigfaltigkeit M_n ist gleich der Euler-Poincaréschen Charakteristik von M_n. Hodge (dies. Zbl. **43**, 173) hat die Frage behandelt, ob allgemein die Gleichung $k_i = (-1)^i c_i = c_i^*$ gilt. Er hat diese Frage für spezielle Fälle bejahend beantwortet, z. B. für den Fall, daß M_n ein vollständiger Durchschnitt von Hyperflächen eines komplex-projektiven Raumes ist. Ein allgemeiner Beweis für die Gleichung $k_i = c_i^*$ scheint in der Literatur nicht zu existieren. Daher war es bisher offen, ob die Chernschen Klassen durch algebraische Zyklen repräsentiert werden können. Diese Frage hat nun Verf. vollständig gelöst. Aus der Darstellung der Chernschen Klassen durch Differentialformen [Chern, Ann. of Math., II. Ser. **47**, 85—121 (1946)] ergibt sich unmittelbar, daß die c_i den richtigen Typ (i, i) haben. — Verf. weist auf eine „Lücke" in seinem Beweis hin. Es scheint in der Literatur bisher kein Beweis für die Tatsache zu existieren, daß die $B_{n,r}$ einer algebraischen Mannigfaltigkeit selbst algebraische Mannigfaltigkeiten sind. Diese Lücke läßt sich auf Grund neuerer Ergebnisse von Kodaira sofort schließen. Kodaira hat nämlich den Satz bewiesen, daß ein komplex-projektives Bündel über einer algebraischen Mannigfaltigkeit (Faser: projektiver Raum, Gruppe: projektive Transformationen) selbst eine algebraische Mannigfaltigkeit ist. — Die vorliegende Arbeit enthält ferner eine Reihe topologischer Untersuchungen (Leray-Hirsch-Theorem), die insbesondere für die Aufspaltungs-Methode erforderlich sind und die die Lektüre der Arbeit von anderen Arbeiten verhältnismäßig unabhängig machen. *F. Hirzebruch.*

Hirzebruch, Friedrich: On Steenrod's reduced powers, the index of inertia and the Todd genus. Proc. nat. Acad. Sci. USA **39**, 951—956 (1953).

Soit $g(z) = \sum a_n z^n$ une série entière. Posons $\prod_{i=1}^{m} (1 - \alpha_i z) = \sum_{r=0}^{m} c_r z^r$. Alors le produit $\prod_{j=1}^{m} g(\alpha_j z)$ est une série entière en z dont les coefficients $L_j(c_i)$ sont des polynomes de poids j en les variables c_i, indépendants de m pour $m > j$. La suite des polynomes $L_j(c_i)$ est dite „suite associée" à la série entière $g(z)$. Deux telles suites sont introduites par l'A.: associée à $g(z) = -z(e^{-z} - 1)^{-1}$ la suite $T_j(c_i)$ des polynomes de Todd; associée à $g(z) = \sqrt{z} \cdot (\operatorname{tgh} \sqrt{z})^{-1}$ la suite des polynomes $L_j(c_i)$. Soit P_p^r la puissance de Steenrod qui applique le groupe $H^{m-2(p-1)r}(V^m; Z_p)$ dans $H^m(V^m; Z_p)$, p premier impair, V^m variété différentiable orientée compacte. Si, pour tout $u \in H^{m-2(p-1)r}(V^m; Z_p)$, on pose par dualité: $s_p^r \cdot u = P_p^r u$, la classe s_p^r s'exprime en fonction des classes de Pontrjagin p_i de V^m par: $s_p^r = p^r \cdot L_{r(p-1)/2}(p_i) \bmod p$. Pour $p = 2$, les classes U^i de Wu Wen-tsün, définies de façon analogue, s'expriment en fonction des classes W^i de Stiefel-Whitney par $U^i = 2^i T_i(W^j)$. Si $m \equiv 0 \bmod 4$, désignons par τ l'excès du nombre des carrés positifs sur celui des carrés négatifs de la forme quadratique définie par le cup-produit sur $H^{m/2}(V^m; R)$. Alors τ s'exprime en fonction des classes p_i par $\tau = L_i(p_j)$. Les polynomes $T_j(c_i)$ s'introduisent dans la théorie des variétés presque complexes et complexes; si les c_i désignent les classes de Chern, ils servent (suivant une conjecture connue) à définir dans le cas algébrique le genre arithmétique de la variété. L'A. donne de nombreuses propriétés arithmétiques (divisibilité) et formelles des nombres caractéristiques associés à ces polynomes T_j, ainsi qu'au nombre $T_i(x)$ associé à un diviseur de classe x. Les résultats de cette Note très dense sont trop nombreux pour être tous cités. *R. Thom.*

Kodaira, K.: On cohomology groups of compact analytic varieties with coefficients in some analytic faisceaux. Proc. nat. Acad. Sci. USA **39**, 865—868 (1953).

Let V be a compact complex analytic variety and let F be an analytic fibre bundle over V whose fibre is an affine straight line and whose group on the fibre is the multiplicative group of complex numbers. The family of „germs" of holomorphic p-forms on V with coefficients in F forms a „faisceau" $\Omega^p(F)$ in a natural topology. This faisceau plays a fundamental role in some recent applications of the faisceau theory to the study of compact complex analytic varieties. The author proves a basic theorem for this faisceau to the effect that the „cohomology group $H^q(V; \Omega^p(F))$ of V with coefficients in $\Omega^p(F)$" has a finite dimention for any q. This can be done by introducing a positive definite Hermitian metric on V and reducing, by an isomorphism of Dolbeault type, the finiteness of the dimension of the cohomology group to the finite dimensionality of the space of harmonic forms with respect to some elliptic differential operator corresponding to the metric on V. Therefore the method is not „elementary" and depends on the theory of general elliptic differential operator on a compact Riemann space. *J. Igusa.*

Kodaira, K. and D. C. Spencer: Groups of complex line boundles over compact Kähler varieties. Proc. nat. Acad. Sci. USA **39**, 868—872 (1953).

This paper is a nice treatment of the theory of Picard varieties by faisceau theory. The idea of such a treatment is due to J.-P. Serre. Also the fundamental idea to replace a divisor

class by a complex line bundle goes back to A. Weil. Let V be a compact Kähler variety and let F be a complex line bundle over V (cf. the previous review). Using the coordinate transformations of the bundle the authors define a multiplication in the totality $\mathfrak{F}$ of such F. If $c(F)$ is the characteristic class of the associated principal bundle of F, then c gives a homomorphism from $\mathfrak{F}$ onto the 2nd integer cohomology group $H^2_{(1,1)}(V;Z)$ of type (1, 1). The proof depends on a remarkable isomorphism due to Dolbeault. Moreover the harmonic part Hc of a 1st integer cohomology class c on V is a sum of harmonic forms of types (1, 0) and (0, 1). If ω is the part of type (0, 1) multiplied by $2\pi i$, then such ω form a discrete sub-group of maximal rank in the space of harmonic forms of type (0, 1). Therefore the factor space is a complex torus. This complex torus is shown, again by Dolbeault's isomorphism, to be canonically and „analytically" isomorphic to the kernel $\mathfrak{P}$ of the homormophism $\mathfrak{F} \to H^2_{(1,1)}(V;Z)$. The complex torus $\mathfrak{P}$ is then called the Picard variety of the compact Kähler variety V. *J. Igusa.*

Kodaira, K. and D. C. Spencer: Divisor class groups on algebraic varieties. Proc. nat. Acad. Sci. USA **39**, 872—877 (1953).

This paper is a treatment of the deeper part of the theory of Picard varieties by faisceau theory. The main theorem is stated simply as the group F of complex line bundles F over a compact Kähler variety V (cf. the previous review) is canonically isomorphic to the group of divisor classes on V with respect to linear equivalence. Naturally this theorem is not true in general and the authors prove it when V is a non-singular projective model. The proof is elegant and depends on an important lemma to the effect that the cohomology groups $H^q(V;\Omega^0(F))$ (cf. the review of Kodaira's paper) vanishes for $q \geq 1$ when F is „ample" in a certain sense. As immediate consequences the authors derive Lefschetz-Hodge's theorem on the characterization of algebraic homology classes and Igusa's duality theorems in the theory of Picard varieties. *J. Igusa.*

Kapuano, Isaac: Sur les courbes dont l'homéomorphie avec une circonférence se prolonge à R^3. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 1845—1847 (1953).

Es wird folgender Satz bewiesen: C und C' seien zwei in einem offenen Gebiet D homotope Kurven des R^3. Jede derselben besitze mit einem Kreis eine sich über den ganzen Raum erstreckende Homöomorphie (vom Verf. „absolute Homöomorphie" genannt). Dann existiert eine homöomorphe Deformation von C in C', bei welcher die Punkte von $R^3 - D$ invariant sind. *E. Schönhardt.*

Plans, Antonio: Beitrag zum Studium der Homologiegruppen der zu einem Knoten gehörigen verzweigten zyklischen Überlagerungen. Revista Acad. Ci. Madrid **47**, 161—193 (1953) [Spanisch].

Verf. betrachtet die verzweigten zyklischen Überlagerungen der 3-Sphäre, die einen Knoten als Verzweigungslinie besitzen, und erhält für die Homologiegruppen der Dimension 1 folgende Resultate: (1) Für die Überlagerungen ungerader Ordnung ist die Bettische Zahl gerade und die Torsionskoeffizienten bilden Paare gleicher Zahlen. (2) Für Knoten vom Geschlecht 1 sind die Homologiegruppen aller (endlichen) Überlagerungen und das Alexander-Polynom durch die Homologiegruppe der 2-blättrigen Überlagerung bestimmt. (3) Für Knoten vom Geschlecht 1 wiederholen sich die Homologiegruppen der Überlagerungen mit steigender Blätterzahl genau dann, wenn entweder die Homologiegruppen dieselben sind wie für den Kreis (Periode 1) oder dieselben sind wie für die Kleeblattschlinge (Periode 6). Die Resultate sind korrekt, die Beweise zum Teil nicht. *Horst Schubert.*

Vaughan, H. E.: On two theorems of plane topology. Amer. math. Monthly **60**, 462—468 (1953).

Proofs are given for some simple topological theorems used in Knopp, Theory of functions I, New York 1945, for the statement of the general theorems on complex contour integration. No essentially new results are obtained, as the author himself points out; the article is intended as a supplement to the above mentioned book. To the opinion of reviewer the proofs given here could sometimes have been shortened without using other than elementary topological theory. In another case the advance of the present treatment is not clear. *A. van Heemert.*

Homma, T. and H. Terasaka: On the structure of the plane translation of Brouwer. Osaka math. J. **5**, 233—266 (1953).

Gli AA. sviluppano in tutti i dettagli la teoria sulla struttura delle traslazioni piane generalizzate esposta in un loro lavoro precedente (questo Zbl. **50**, 178).

G. Scorza Dragoni.

Dirac, G. A.: The colouring of maps. J. London math. Soc. **28**, 476—480 (1953).

Im wesentlichen Ergebnisse, die Verf. schon anderwärts gebracht hat (dies. Zbl. **47**, 170, 422). *H. Künneth.*

Luce, R. Duncan: Networks satisfying minimality conditions. Amer. J. Math. **75**, 825—838 (1953).

Ein Netzwerk N ist ein gerichteter (endlicher, schlingenfreier) Graph, bei dem zwei Punkte höchstens durch zwei Kanten verbunden sind, die dann verschieden gerichtet sein müssen. Bezeichnungen siehe bei König „Theorie der endlichen und unendlichen Graphen" (New York 1950, dies. Zbl. **40**, 103) und bei Luce, dies. Zbl. **46**, 169. N heißt zusammenhängend, wenn es von jedem Punkt zu jedem eine Bahn gibt. Ist N vom Grad k, so gibt es von jedem Punkt zu jedem mindestens k Bahnen, die paarweise keine (gerichtete) Kante gemein haben. N hat den Grad $(-k)$ $(k \geqq 0)$, wenn N durch Hinzufügen von $k+1$, aber nicht weniger, Kanten zusammenhängend gemacht werden kann; N ist $(-k)$-minimal, wenn es durch Hinzufügen irgendeiner zwei Punkte von N verbindenden Kante den Grad $(-k+1)$ erhält. N besteht dann aus $k+1$ vollständigen, zueinander fremden Graphen, wozu noch ein weiterer vollständiger Graph G treten kann, dessen Punkte alle mit allen Punkten der übrigen Graphen verbunden sind, wobei die Punkte von G nur Anfangs- oder nur Schlußpunkte dieser Kanten sind. — N hat den Index i, wenn N durch Streichung von i, aber nicht weniger, Punkten und den damit inzidenten Kanten unzusammenhängend gemacht werden kann. Ist m die Anzahl der Punkte, k der Grad und d der Diameter von N, so ist $i \leq k \leq (m+i-1)/2$ und für $d > 2$ $k \leq (m-d+2)/2$. N heißt h-transitiv, wenn es zwischen zwei verschiedenen Punkten in N wenigstens eine Bahn mit h Kanten (h-Bahn) gibt und für jede q-Bahn zwischen zwei verschiedenen Punkten a und b gilt: $(a\,b) \in N$, wenn $q > h$; $(a\,b) \notin N$, wenn $1 < q \leq h$. Wenn $h > 1$, dann gibt es in N keine q-Bahn mit $q > h+1$, die h-transitiven Netzwerke zerfallen dann in drei Arten mit dem Grad 1 oder 2 und bestehen beim Vorhandensein einer $(h+1)$-Bahn und eines durch ein Kantenpaar verbundenen Punktepaars aus zwei zusammenhängenden zueinander fremden Netzwerken, die durch das Kantenpaar verbunden sind. *H. Künneth.*

Angewandte Geometrie:

Szász, G.: Eine neue Behandlung der metrischen Aufgaben in der Zentralprojektion. Elemente Math. **8**, 109—111 (1953).

Jakobi, Robert: Die Konstruktion des orthogonal-axonometrischen Bildes eines Objektes für eine gegebene Projektionsrichtung. Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math. **17**, Nr. 1, 8 S. (1953).

Verf. zeigt, wie man von einem Objekt mittels des Eckhartschen Einschneideverfahrens den Normalriß gewinnen kann, der zu einer vorgegebenen, zusammen mit dem Objekt durch zugeordnete Normalrisse bestimmten Projektionsrichtung gehört. *H. Horninger.*

Parker, Robert L.: Eine praktische Methode zur Transformation von Kristallstereogrammen in gnomonische Projektion. Z. angew. Math. Phys. **4**, 497—499 (1953).

Piazzolla-Beloch, Margherita: Triangolazione aerea grafica di terreni pianeggianti. Boll. Soc. Ital. Fotogrammetria Topografia **1**, 3 p. (1953).

Mineo, Massimo: Sopra un calcolo più approssimato della deviazione della geodetica da una sezione normale su una superficie qualunque. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **14**, 255—261 (1953).

Für den Winkel, den eine vom Punkt P_0 einer allgemeinen Fläche ausgehende geodätische Linie mit dem Normalschnitt in P_0 bildet, der im Abstand s von P_0 durch einen laufenden Punkt P der geodätischen Linie geht, wurde in der Literatur bisher nur das Hauptglied angegeben. Es ist in s von der 2. Ordnung und beträgt im Falle