Werk

Titel: Gewohnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen

Ort: Berlin

Jahr: 1954

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0051|log20

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

$M \cap U(P_0)$ dont les k premières coordonnées n'annulent aucun des discriminants des ω_ν. Parmi les nombreuses propriétés locales démontrées à l'aide de cette méthode, citons l'invariance de la dimension de M en chaque point par une transformation analytique localement biunivoque, qui permet de définir la dimension d'un ensemble analytique dans une variété analytique. — Un point-frontière P de G est dit point singulier essentiel de M si, pour aucun voisinage $U(P)$, on ne peut trouver un ensemble analytique M' dans $G \cup U(P)$ tel que $M = M' \cap G$ (il faut pour cela que $P \in \overline{M}$). Un théorème dû à Thullen (ce Zbl. **11**, 124) dans le cas $k = l = n-1$ est ainsi généralisé: Si F est un ensemble analytique irréductible de dimension l dans G et M un ensemble analytique de dimension pure k dans $G - F$ $(0 \leq l \leq k \leq n-1)$, alors, ou bien $\overline{M} \cap G$ est un ensemble analytique de dimension pure dans G, ou bien, et ceci seulement si $k = l$, tout point de F est point singulier essentiel de M. Application: un ensemble analytique M dans l'espace compact projectif $C^{\overline{n}}$ peut être représenté dans C^{n+1} par un cône analytique de sommet O, c'est-à-dire un ensemble analytique K dans C^{n+1} qui contient, avec le point $(z_1, \ldots, z_{n+1})$, tous les points $(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_{n+1})$, où λ est complexe; puisque K est le lieu des zéros communs à un nombre fini de polynomes homogènes, M est algébrique (théorème de Chow, ce Zbl. **41**, 483).

M. Hervé.

Thimm, Walter: Über die Menge der singulären Bildpunkte einer meromorphen Abbildung. Math. Z. **57**, 456—480 (1953).

Es sei Δ eine analytische Mannigfaltigkeit im x-Raum, $A(\Delta)$ eine meromorphe Abbildung von Δ in den z-Raum. Untersucht wird die Menge $\mathfrak{A}$ der Bilder ζ eines einzelnen Unbestimmtheitspunktes ξ der Abbildung (ζ ist „singulärer Bildpunkt"). Die Ergebnisse werden im Raum der Funktionentheorie abgeleitet und auf den projektiven C^n übertragen. Verf. zeigt, daß — wie schon von Autonne [Acta math. **21**, 249—264 (1897)] vermutet — $\mathfrak{A}$ eine algebraische Mannigfaltigkeit ist. Das folgt sehr einfach mit Hilfe eines Satzes von Chow (dies. Zbl. **41**, 483; vgl. auch: H. Kneser, dies. Zbl. **42**, 154; R. Remmert und K. Stein, vorsteh. Referat). Der wesentliche Inhalt der Arbeit ist jedoch ein von diesem Satz unabhängiger Beweis, der eine tiefere Einsicht in die Struktur von $\mathfrak{A}$ gewährt. Die Hauptpunkte sind: 1. Erzeugung der singulären ζ durch analytische Kurven C auf Δ. 2. Kennzeichnung der C durch ihre „Anfänge Γ", gegeben durch Polynome $x(t)$. 3. Übergang zu „formalen singulären Bildpunkten," welche von den Γ erzeugt werden. 4. Algebraische Berechnung der formalen singulären Bildpunkte. Ihre Gesamtheit ist mit $\mathfrak{A}$ identisch. 5. Das Hauptergebnis: Es gibt eine algebraische Mannigfaltigkeit $\mathfrak{B}$ mit folgenden Eigenschaften: (a) Die Koordinaten der Punkte von $\mathfrak{B}$ sind die Koeffizienten von Polynomen $x(t)$, welche Anfänge Γ analytischer Kurven auf Δ definieren; und so bekommt man auch alle Anfänge Γ. (b) $\mathfrak{A}$ ist rationales Bild von $\mathfrak{B}$. — Es werden noch weitere Sätze bewiesen, welche die singulären Bildpunkte von $A(\Delta)$ mit denen rationaler Abbildungen verbinden.

W. Rothstein.

Peschl, Ernst und Friedhelm Erwe: Über beschränkte Systeme von Funktionen. Math. Ann. **126**, 185—220 (1953).

(Les lettres gothiques désignent les points de l'espace à n dimensions complexes, c'est-à-dire les matrices à n lignes, une colonne; les majuscules désignent les matrices carrées à n lignes, n colonnes; $|\mathfrak{z}|^2$ est la somme des carrés des modules des coordonnées du point $\mathfrak{z}$; $\tilde{\mathfrak{z}}$ est la matrice transposée et conjuguée de $\mathfrak{z}$.) Pour $|\mathfrak{a}| < 1$, on pose $\Gamma(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{a}}/\left(1 + \sqrt{1 - |\mathfrak{a}|^2}\right) + E\sqrt{1 - |\mathfrak{a}|^2}$; la formule $\mathfrak{z}_1 = A\,\Gamma(\mathfrak{a})\,(\mathfrak{z} - \mathfrak{a})/(1 - \tilde{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{z})$, où $|\mathfrak{a}| < 1$, $\tilde{A} = A^{-1}$, donne alors le groupe de tous les automorphismes de la boule $|\mathfrak{z}| < 1$, et $\delta(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) = |\Gamma(\mathfrak{z}_1)\,(\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_1)/(1 - \tilde{\mathfrak{z}}_1\,\mathfrak{z}_2)|$ est, dans cette boule, une métrique invariante par les automorphismes. Application aux transformations analytiques $\mathfrak{z} = \mathfrak{f}(z)$ du cercle-unité $|z| < 1$ dans la boule $|\mathfrak{z}| < 1$: principe du maximum, lemme de Schwarz, algorithme de Schur pour la solution du problème des coefficients, majorations de $\mathfrak{f}'(z)$, rayon d'univalence, dérivée angulaire. *M. Hervé.*

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

●**Rothe, R. und István Szabó: Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. — Teil VI.** (Teubners Mathematische Leitfäden, Bd. 45). Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1953. 251 S. mit 54 Abb. DM 17,60.

Table des matières: I. Quelques théorèmes de théorie des fonctions et applications à des fonctions spéciales: § 1 Intégrations et développements en séries dans le domaine complexe. § 2 Intégrale d'Euler. § 3 Séries asymptotiques et autres fonctions transcendantes. II. Suite de la théorie des équations différentielles linéaires. § 4 Compléments. § 5 Equations différentielles linéaires d'ordre supérieur. § 6 Le comportement des intégrales autour d'une singularité

isolée. § 7 Intégration d'équations différentielles linéaires par des intégrales définies. III. Equations différentielles linéaires spéciales. § 8 Equation hypergéométrique, équation de Legendre. § 9 Equation hypergéométrique confluente et cas particuliers. § 10 Equation de Bessel. § 11 Equation différentielle linéaire du second ordre à coefficients périodiques. IV. Equations aux dérivées partielles. § 12 Equations du premier ordre. § 13 Equations du second ordre. Nombreux exercices après chaque paragraphe, avec une brève solution. — Les AA. ont su trouver un compromis très heureux entre les diverses exigences d'un tel ouvrage. Certaines parties sont condensées à l'extrême, mais restent cependant à la portée d'un étudiant doué. Le § 11 (35 pages) mérite une mention spéciale; il est sans doute le plus détaillé de l'ouvrage, le plus original aussi: de l'avis du réf., on ne trouve actuellement dans aucun ouvrage de ce genre un exposé aussi clair et aussi complet de la théorie des équations à coefficients périodiques. *Ch. Blanc.*

Popov, B. S.: On Weber's differential equation. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **38**, 64—66 (1953).

Verf. gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Differentialoperator

$L(x, D) = y'' + P_1 y' + P_2 y$, $D = d/dx$, $P_i(x) = a_{i1} x^2 + a_{i2} x + a_{i3}$; $a_{11} = 0$, reduzibel ist; als Beispiele werden die Differentialgleichungen $4y'' - (x^2 + a) y = 0$ und $y'' + x y' + (n + 1) y = 0$ gewählt. *O. Volk.*

Potter, Ruth Lind: On self-adjoint differential equations of second order. Pacific J. Math. **3**, 467—491 (1953).

Es wird im Anschluß an Arbeiten von Leighton (dies. Zbl. 48, 65) das Verhalten der Lösungen von (1) $[r(x) y']' + p(x) y = 0$ für große positive x untersucht, wobei $p(x)$, $r(x)$ für $a \leq x < \infty$ stetig und $r(x) > 0$ sei. Eine Lösung wird oszillatorisch genannt, wenn sie keine größte Nullstelle besitzt. Zunächst wird der Fall $r = 1$ betrachtet. Bei beliebigen r erweist sich eine Hilfsfunktion $R(x) = r(x)\, d[r(x)\, p(x)]^{-1/2}/dx$ als wichtig. Es sei $\lim_{x \to \infty} R(x) = L$ vorhanden. Im Falle $\lim_{x \to \infty} \int_a^x r^{-1}(x)\, dx = \infty$ sind die Lösungen von (1) für $L < 2$ oszillatorisch, für $L > 2$ sind sie es nicht. Im Falle $\lim_{x \to \infty} \int_a^x p(x)\, dx = \infty$ und $p(x) > 0$ für große x sind die Lösungen für $L > -2$ oszillatorisch und für $L < -2$ sind sie es nicht. Für die Anzahl $N(a, x)$ der Nullstellen einer Lösung von $y'' + h^{-2} y = 0$ wird, falls $g(x) = (x^2 h^{-2} - 1/4)^{1/2}$ reell ist und $\lim_{x \to \infty} x(g^{-1})' = 0$ gilt, die asymptotische Formel $N(a, x) \sim \frac{1}{\pi} \int_a^x \frac{g(x)}{x}\, dx$ aufgestellt. Die Lösungen von (1) lassen sich im Falle $p(x) < 0$ und r' stetig in der Form $c_1 u(x) \exp v(x) + c_2 u(x) \exp(-v(x))$ schreiben, wobei $r u^3 [(r u')' + p u] = -1$, $r u^2 v = 1$ gilt. Hier kann die Beschränktheit der Lösungen für großes x untersucht werden. Wenn $\lim_{x \to \infty} \int_a^x r^{-1}\, dx = \infty$ und $r p < 0$ und monoton abnehmend für große x ist, so gibt es eine Lösung $y_1(x)$ von (1), welche für $x \to \infty$ gegen Null strebt, während keine von $y_1(x)$ linear unabhängige Lösung beschränkt bleibt; alle Lösungen sind monoton. Haben $\int_a^\infty r^{-1}\, dx$ und $\int_a^\infty p\, dx$ endliche Werte, so sind alle Lösungen von (1) beschränkt, und es gibt eine Konstante M mit $|y'| < M r^{-1}$. Wenn $r p$ monoton fällt und $\int_a^\infty r^{-1}\, dx$ endlich ist, oder wenn $r p$ monoton wächst und $\int_a^\infty p\, dx$ endlich ist, sind alle Lösungen von (1) nicht oszillatorisch und beschränkt. *L. Collatz.*

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On non-oscillatory linear differential equations. Amer. J. Math. **75**, 717—730 (1953).

Es werden Bedingungen dafür aufgestellt, daß die Differentialgleichung (1) $x'' + f(t) x = 0$ [$f(t)$ für große positive t stetig] die Eigenschaft besitzt: I. Es gibt ein Paar von Lösungen $x = x(t)$, $x = y(t)$ mit $x(t) \to 1$, $x'(t) \to 0$, $y(t) \sim t$, $y'(t) = o(t)$ für $t \to \infty$, oder schärfer: II. Es gibt ein Paar von Lösungen $x(t)$, $y(t)$ mit $x(t) \to 1$, $x'(t) = o(t^{-1})$, $y(t) \sim t$, $y'(t) \to 1$. Als hinreichend für I. erweisen sich die Bedingungen: $\int_t^\infty f(t)\, dt$ konvergiert (evt. bedingt), für $F(t) = \int_t^\infty f(s)\, ds$

konvergiert (evt. bedingt) $\int^{\infty} F(t)\,dt$, und es gilt $\int^{\infty} t\,F(t)^2\,dt < \infty$. Die letzte Forderung ist dabei sogar notwendig, falls die vorangehenden gelten. II. gilt, wenn außerdem noch $F(t) = o(t^{-1})$ erfüllt ist. Dabei ist für II. die Konvergenz von $\int^{\infty} f(t)\,dt$ und $F(t) = o(t^{-1})$ auch notwendig. — II. gilt ebenfalls unter den Bedingungen: $\int^{\infty} t\,f(t)\,dt$ konvergiert, und mit einem $p\,(1 \leqq p \leqq 2)$ gilt $\int^{\infty} t^{2p-1}\,|f(t)|^p\,dt < \infty$. — Diese Kriterien verschärfen frühere Ergebnisse, insbesondere von A. Wintner.

F. W. Schäfke.

Ascoli, Guido: Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione $y'' = (1 + f(t))\,y$ in un caso notevole. Rivista Mat. Univ. Parma **4**, 11—29 (1953).

Si consideri l'equazione (*) $y'' = [1 + f(t)]\,y$ dove $|f| \in L^p$ in $(0, \infty)$ e $p \geq 1$. L'A, riducendo la (*) ad un'equazione di Riccati, assegna un perspicuo metodo ricorrente per determinare la struttura asintotica dei suoi integrali e ritrova in particolare formule già note [caso $1 \leq p \leq 2$, Ph. Hartman (questo Zbl. **31**, 398), caso $p = 3$ (R. Bellman, questo Zbl. **40**, 194)] e altre nuove. Si ha ad es.: per $p = 1$, $\log y - t = C + o(1)$ (M. Bôcher); per $1 < p \leq 2$, $\log y - t = \frac{1}{2}\int_0^t f(\tau)\,d\tau + C + o(1)$ (Ph. Hartman); per $2 < p \leq 3$,

$$\log y - t = \frac{1}{2}\int_0^t f(\tau)\,d\tau - \frac{1}{4}\int_0^t f(\tau)\,d\tau \int_0^\tau e^{-2(\tau - s)}\,f(s)\,ds + C + o(1)$$

(R. Bellman, per $p = 3$). *G. Sansone.*

Wasow, Wolfgang: Asymptotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability in a domain containing a transition point. Ann. of Math., II. Ser. **58**, 222—252 (1953).

Verf. stellt sich die Aufgabe, für die Differentialgleichung

(1) $L_\varrho[u] \equiv u^{(4)} + \sum_{j=1}^{4} a_j(x)\,u^{(4-j)} + \lambda^2 \sum_{j=0}^{2} b_j(x) u^{(2-j)} = 0 \quad [b_0(0) = 0,\ b_0'(0) \neq 0,\ b_2(0) \neq 0]$

in einer vollen komplexen Nachbarschaft von $x = 0$ ein Fundamentalsystem mit bekanntem asymptotischen Verhalten für $\lambda \to +\infty$ zu finden [Durchführung für $b_1 \equiv 0$, $b_2(0) = b_0'(0) = 1$]. Dies geht über die Resultate einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **31**, 402) hinaus, wo sich solche Funktionen in gewissen Sektoren der x-Ebene außerhalb einer beliebigen festen Umgebung von $x = 0$ ergaben. — Der leitende Gedanke der vorliegenden Arbeit ist, ein System von Funktionen $v_j(x, \lambda)$ $(j = 1, \ldots, 4)$ zu finden, die zunächst einmal in einem näher präzisierten Sinne als asymptotische Näherungen eines Fundamentalsystems von (1) in Frage kommen, und anschließend eine Differentialgleichung (2) $L_r(v) \equiv v^{(4)} + \sum_{\mu=1}^{4} e_\mu(x, \lambda)\,v^{(4-\mu)} = 0$ mit den v_j als Fundamentalsystem aufzustellen. Der Vergleich von (1) und (2) führt schließlich zu dem gesuchten Lösungssystem von (1), über das sich jetzt strenge weitergehende asymptotische Aussagen bis zu den Ableitungen dritter Ordnung machen lassen, insbesondere auch im Verhalten zu den Lösungen der „reduzierten" Gleichung $\sum_{j=0}^{2} b_j(x)\,u^{(2-j)} = 0$. Die Grundlage zur Konstruktion der v_j bildet die Untersuchung des Verf. über die spezielle Differentialgleichung $y^{(4)} + \lambda^2(xy'' + y) = 0$ (dies. Zbl. **38**, 246), die zwar selbst noch nicht zur Vergleichsbetrachtung ausreicht, für die aber eine vollständige asymptotische Analyse vorliegt. *K. Maruhn.*

Kestin, J. and S. K. Zaremba: Geometrical methods in the analysis of ordinary differential equations. Appl. sci. Research, B **3**, 149—189 (1953).

Gli AA. danno notizia dei principali risultati relativi al comportamento delle curve integrali delle equazioni differenziali $dy/dx = Y(x, y)/X(x, y)$; sono richiamati i più noti tipi di punti singolari, le nozioni sui cicli limite e sulla stabilità e il teorema sugli indici di Poincaré. Sette esempi, ben scelti, e 34 figure illustrano la teoria; una bibliografia, abbastanza estesa, chiude l'opuscolo, scritto principalmente per richiamare l'attenzione degli ingegneri sulla teoria delle equazioni differenziali non lineari. *G. Sansone.*

Minorsky, Nicolas: Sur l'extinction asynchrone. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 643—645 (1953).

Bei $\ddot{x} - (a - c\,x^2)\,\dot{x} + x = \gamma \sin \omega\, t$ (nichtlineare Schwingung bei periodischer äußerer Kraft der Kreisfrequenz ω) seien a, c, γ kleine Größen derselben Größenordnung. In üblicher Weise werden Phasenkoordinaten r, φ in der Phasenebene x, $\dot{x}$ (mit $r^2 = x^2 + \dot{x}^2$) eingeführt und in der Phasenebene die singulären Punkte des Systems von Differentialgleichungen für r und φ mit Hilfe von Variationsgleichungen untersucht. Es ist ein stabiler Knotenpunkt als singulärer Punkt vorhanden, der sich mit wachsendem ω unbegrenzt der kritischen Grenzkurve nähert, welche die Zone der stabilen Knoten abgrenzt, so daß bei genügend großem ω die Stabilität aufhört, indem bei kleiner Störung die Grenzkurve überschritten werden kann. Diese Erscheinung des Aufhörens der Stabilität bei hoher Erregerfrequenz nennt Verf. extinction ansynchrone. *L. Collatz.*

Minorsky, Nicolas: Sur l'excitation asynchrone. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 964—966 (1953).

In $\ddot{x} - (a + c\,x^2 - e\,x^4)\,\dot{x} + x = \gamma \sin \omega\, t$ (nichtlineare Schwingung bei periodischer äußerer Kraft der Kreisfrequenz ω) seien a, c, e, γ kleine positive Größen derselben Größenordnung ε. Als ein gewisses Gegenstück zur vorangehenden Arbeit wird hier mit den gleichen Methoden das Auftreten einer Schwingung im Falle $\beta = 8a/\varepsilon < 0$ bei einer äußeren Kraft von irgendeiner Frequenz beschrieben, und zwar die Existenz eines Verzweigungspunktes mit einem Wechsel der topologischen Struktur in der Phasenebene von dem Bilde für $\gamma = 0$ (ein singulärer stabiler Punkt, umgeben von einem instabilen Zyklus, dieser wieder von einem stabilen Zyklus umgeben, keine Schwingung) zu einem Bild für $\gamma \neq 0$ (ein singulärer instabiler Punkt umgeben von einem stabilen Zyklus), d. h. die Schwingung tritt auf für $\gamma \neq 0$. *L. Collatz.*

Castro, Antonio de: Sopra l'equazione differenziale delle oscillazioni non-lineari. Rivista Mat. Univ. Parma **4**, 133—143 (1953).

Data l'equazione (*) $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t)\,\dot{x} + g(x) = e(t)$, nelle ipotesi: i) siano $f(x, v, t)$, $g(x)$, $e(t)$ continue; $f(x, v, t)$ sia lipschitziana in x e v e $g(x)$ in x; ii) esistano due costanti positive a, E ed una funzione $\varphi(x, v)$, anch'essa lipschitziana, tali che $|e(t)| < E$; $f(x,v,t) > \varphi(x,v)$ con $\varphi(x,v) > -K$, $(K > 0)$, $0 < \varepsilon \leq \varphi(x,v) \leq A$ per $|x| > a$; iii) sia $g(-x) = -g(x)$, $g(x) \neq 0$ per $x \neq 0$. — L'A., facendo uso del teorema di Brouwer, prova l'esistenza di almeno una soluzione periodica della (*). L'A. assegna anche un criterio molto generale che assicura per ampie classi di equazioni della forma (*) l'esistenza di una sola soluzione periodica cui sono asintotiche tutte le altre soluzioni. *G. Sansone.*

Castro, Antonio de: Sulle oscillazioni non-lineari dei sistemi in uno o più gradi di libertà. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **22**, 294—304 (1953).

L'A. considera l'equazione differenziale (1) $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t) + g(x) = 0$ e il sistema di equazioni differenziali:

$$(2)\quad \ddot{x}_1 + f_1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t) + g_1(x_1) = 0, \quad \ddot{x}_2 + f_2(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t) + g_2(x_2) = 0$$

dove $f(x_1, \dot{x}, t)$, $f_1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t)$, $f_2(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t)$ sono funzioni periodiche di periodo T, rispetto a t, e prova l'esistenza di soluzioni periodiche, di periodo T, per l'equazione (1) e per il sistema (2). Dimostra poi l'esistenza di soluzioni periodiche per il sistema indipendente dal tempo:

$$\ddot{x}_1 + f_1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) + g_1(x_1) = 0, \qquad \ddot{x}_2 + f_2(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) + g_2(x_2) = 0.$$

Questi risultati sono ottenuti in base a diverse ipotesi sulle f e sulle g. La più importante consiste nel supporre dissipativo per grandi valori di x e $\dot{x}$ o di ambedue (eccettuato il caso $x\,\dot{x} < 0$ e $|\dot{x}|$ limitata) il sistema meccanico rappresentato dalle equazioni (1), (2), (3). *D. Graffi.*

Gagliardo, Emilio: Sul comportamento degli integrali dell'equazione differenziale non lineare $x'' + f(x)\,x' + g(x) = 0$ con $g(x)$ crescente e $f(x)$ positiva per $|x| > M > 0$. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 309—314 (1953).

L'A. studia il comportamento asintotico degli integrali della equazione (1) $d^2x/dt^2 + f(x)\,dx/dt + g(x) = 0$ supposto i) $f(x)$ continua per ogni x finito, $f(x) > 0$ per $|x| > M > 0$, ii) $g(x)$ continua per ogni x finito, non decrescente, $g(0) = 0$, $g'(0) > 0$. Con considerazioni elementari l'A. prova che a) se $f(0) < 2\sqrt{g'(0)}$ tutti gli integrali della (1) sono oscillanti; b) se $f(x) \geq 0$, $f(0) > 2\sqrt{g'(0)}$ tutti gli integrali della (1) tendono a zero senza oscillare. *G. Sansone.*

Manaresi, Gabriella: Sull'equazione di Liénard generalizzata. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 59—64 (1953).

Data l'equazione di Liénard generalizzata $\ddot{x} + \omega^2 x - \varepsilon\, g'(x)/2 + \mu\, f(x)\,\dot{x} = 0$, per l'intervallo di tempo T che intercede fra due massimi successivi della soluzione l'A. assegna l'espressione approssimata

$$(*) \qquad T = 2\pi/\omega + \frac{\varepsilon}{c\,\omega^3} \int_0^{2\pi} \frac{g'(c\cos\vartheta)}{2} \cos\vartheta\, d\vartheta,$$

dove $c(t)$ soddisfa l'équazione $\frac{dc}{dt} = -\frac{\mu\, c}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c\cos\vartheta)\,\mathrm{sen}^2\vartheta\, d\vartheta$. Manca la valutazione dell'errore nella (*). *G. Sansone.*

Volpato, Mario: Sopra un problema al contorno per l'equazione differenziale $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 22, 334—349 (1953).

L'A. dà un teorema di esistenza di una soluzione $y(x)$, assolutamente continua insieme con le proprie derivate dei primi $n-1$ ordini, del problema di valori al contorno

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)});\quad y(x_1) = c_1, \ldots, y(x_n) = c_n.$$

Tale proposizione fornisce un'ulteriore estensione (cfr. G. Zwirner, questo Zbl. 48, 69) sia di un teorema di S. Cinquini (questo Zbl. 22, 339), sia di un teorema di G. Zwirner (questo Zbl. 27, 314), il quale costituiva già un'estensione di un altro teorema di S. Cinquini. Per l'enunciato del nuovo teorema, che è alquanto lungo, rinviamo al lavoro in esame. *S. Cinquini.*

Doetsch, Gustav: Die lineare Differentialgleichung im zweiseitig unendlichen Intervall unter Anfangs- und Randbedingungen. Math. Ann. **126**, 307—324 (1953).

In dieser grundlegenden Arbeit wird zum ersten Male das Anfangs- und Randwertproblem im Intervall $-\infty < t < +\infty$ für die Differentialgleichung (1) $Y^{(n)}(t) + c_{n-1}\,Y^{(n-1)}(t) + \cdots + c_1\,Y'(t) + c_0\,Y(t) = F(t)$ [$F(t)$ eine beliebige Störfunktion] mit Hilfe der zweiseitigen Laplace-Transformation $f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} F(t)\,dt = \mathfrak{L}_{\mathrm{II}}\{F\}$ allgemein behandelt. Das charakteristische Polynom $p(s) = s^n + c_{n-1}\,s^{n-1} + \cdots + c_1\,s + c_0$ habe die Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, die als verschieden angenommen werden, und es sei $\Re\,\alpha_1 \leqq \cdots \leqq \Re\,\alpha_m \leqq 0 < \Re\,\alpha_{m+1} \leqq \cdots \leqq \Re\,\alpha_n$. Verf. zeigt, daß das Anfangswertproblem für $t \to -\infty$, wenn überhaupt, so nur in der Form gestellt werden kann: (2) $Y(-\infty) =$ beliebiger fester Wert, $Y'(-\infty) = \cdots = Y^{(n-1)}(-\infty) = 0$, wobei eine Lösung aber keineswegs eindeutig bestimmt zu sein braucht. Da (im Gegensatz zur einseitigen Laplace-Transformation) hier zu einer Bildfunktion i. a. andere und andere Originalfunktionen gehören, je nach den zulässigen Streifen (senkrecht zur reellen Achse der s-Ebene), in denen man die Rückübersetzung vornimmt, so muß man sich auf einen bestimmten solchen Streifen festlegen, als welchen Verf. den Streifen $0 < x_1 < x_2 < \Re\,\alpha_{m+1}$ wählt. Bei dieser Wahl werden nämlich die $F(t)$ aufzuerlegenden Bedingungen besonders einfach. Das zu Beginn der Arbeit präsise formulierte Differentiationsgesetz ergibt dann u. a. $\mathfrak{L}_{\mathrm{II}}\{Y^{(\nu)}\} = s^\nu\,\mathfrak{L}_{\mathrm{II}}\{Y(t) - Y(-\infty)\}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ für $x_1 < \Re\,s < x_2$ und mit $\mathfrak{L}_{\mathrm{II}}\{Y(t) - Y(-\infty)\} = \hat{y}(s)$, $\mathfrak{L}_{\mathrm{II}}\{F(t) - c_0 Y(-\infty)\} = \hat{f}(s)$ lautet die Bildgleichung von (1): $p(s)\,\hat{y}(s) = \hat{f}(s)$, woraus sich $\hat{y}(s) = \hat{f}(s)/p(s)$ ergibt. $1/p(s)$, in $x_1 < \Re\,s < x_2$ zurückübersetzt, liefert die „Greensche Funktion" $Q(t)$, aus der durch Faltung das $Y(t)$ folgt: (3) $Y(t) - Y(-\infty) = Q(t) \overset{\infty}{*}_{-\infty} [F(t) - c_0\,Y(-\infty)]$. Gemäß einem bekannten allgemeinen Prinzip des Verf. untersucht er nun ganz unabhängig von der Art der Her-

leitung von (3), unter welchen Bedingungen für das als stetig angenommene $F(t)$ das durch (3) bestimmte $Y(t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems (2) ist, wobei es sich um Bedingungen für das Verhalten von $F(t)$ für $t \to \pm\infty$ handelt. Als solche wählt er (I): $F(-\infty)$ und $F(+\infty)$ sollen existieren und (II): $\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|\,dt$ soll existieren. Im Falle (I) ergibt sich: notwendig ist, daß (4) $\Re\,\alpha_\mu \neq 0$ $(\mu = 1, \ldots, n)$, speziell also $c_0 \neq 0$ und weiter, daß (5) $Y(-\infty) = F(-\infty)/c_0$ ist; umgekehrt reichen (4) und (5) hin, damit (3) das betr. Anfangswertproblem löst, und es läßt sich die Lösung, wie folgt, einfacher schreiben: (6) $Y(t) = Q(t) \overset{\infty}{*}_{-\infty} F(t)$. Da für die (spezielle) Lösung (6) überdies $Y(+\infty) = F(+\infty)/c_0$, $Y'(+\infty) = \cdots = Y^{(n-1)}(+\infty) = 0$ ist, stellt diese auch die jetzt eindeutig bestimmte Lösung des folgenden Randwertproblems dar, bei dem statt der n Anfangswerte verlangt wird: $Y(-\infty) = F(-\infty)/c_0$, $Y(+\infty) = F(+\infty)/c_0$ (Sätze 1 und 2). Im Falle (II) ergibt sich: notwendig ist (7) $Y(-\infty) = 0$ und umgekehrt reicht (7) hin, um eine Lösung von der Gestalt (6) für das Anfangswertproblem: $Y(-\infty) = Y'(-\infty) = \cdots = Y^{(n-1)}(-\infty) = 0$ zu sichern. Fragt man auch hier, wie sich diese spezielle Lösung $Y(t)$ für $t \to +\infty$ verhält, so zeigt sich: $Y(+\infty)$ existiert im allgemeinen [soll heißen, wenn $F(t)$ nicht noch weitere Bedingungen erfüllt] nur dann, wenn kein α_μ rein imaginär ist; trifft dies zu, wird umgekehrt (7) $Y(+\infty) = \dfrac{1}{p'(0)} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,dt$, falls $c_0 = 0$, und $= 0$, falls $c_0 \neq 0$ ist, und es ist das $Y(t)$ dann wieder die eindeutige Lösung des Randwertproblems mit dem Randwert $Y(+\infty)$ von (7) und $Y(-\infty) = 0$. (Sätze 3 und 4). — Nimmt man die Rücktransformation in anderen Streifen der s-Ebene vor, so entstehen Lösungen mit anderen Bedingungen für $F(t)$, z. B. $F(t) - c_0\,Y(-\infty) = O(e^{\sigma t})$ für einen Streifen der rechten Halbebene, der $\sigma > 0$ enthält und frei von Wurzeln α_μ ist, wobei jedoch die Lösung jetzt die kompliziertere Gestalt (3) behält. Ist speziell $\sigma >$ Max $(\Re\,\alpha_\mu, 0)$, so hängt die Lösung nur von den $F(\tau)$-Werten ab, für die $\tau \leq t$ ist. Arbeitet man in einem Streifen der linken Halbebene, so übernimmt $t \to +\infty$ die Rolle von $t \to -\infty$ und umgekehrt. Schließlich lassen sich nach derselben Methode auch d'Alembertsche Systeme behandeln. *E. Mohr.*

Abramowitz, Milton: On the solution of the differential equation occurring in the problem of heat convection in laminar flow through a tube. J. Math. Physics **32**, 184—187 (1953).

Zur Bestimmung der Eigenwerte β_s der Randwertaufgabe $y'' + y'/r + \beta^2(1 - r^2)\,y = 0$ mit $y = y(r)$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0$, wird ein Reihenansatz in Besselfunktionen $y(r, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\beta)\,(\beta r)^n J_n(\beta r)$ gemacht, der mit Rücksicht auf die numerische Bestimmung der β_s einer unmittelbaren Potenzreihe vorzuziehen ist. Die so ermittelten Werte β_s sind für $s = 0$ bis 4 angegeben, ebenso die zur Berechnung von $y(r, \beta_s)$ benötigten Größen $\beta_s^n A_n(\beta_s)$ bis zu $n = 37$. Für die höheren Eigenwerte gibt es eine gute asymptotische Formel. *R. Zurmühl.*

Krejn, M. G.: Ein Analogon der Čebyšev-Markovschen Ungleichungen beim eindimensionalen Randwertproblem. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **89**, 5—8 (1953) [Russisch].

The author continues his fruitful investigations [cf. i. a. (I) this Zbl. **40**, 202; (II) **42**, 95; (III) Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **87**, 881—884 (1952)] bringing to light further correspondences between Sturm-Liouville theory and the theory of moment-problems; a unified theory of the two has still not been found. Let $q(x)$ and $\varrho(x)$, $(0 \leq x < l < \infty)$, be measurable and summable in every interval $(0, a)$, $(0 < a < l)$, and let $\varphi(x; \lambda)$, $\psi(x; \lambda)$ be solutions of $y'' - q(x)\,y + \lambda\,\varrho(x)\,y = 0$ such that $\varphi(0; \lambda) = 1$, $\varphi'(0; \lambda) = h$, $\psi(0; \lambda) = 0$, $\psi'(0; \lambda) = 1$. He considers mainly the „indeterminate" case in which for every λ, real or complex, both φ and ψ belong to $\varrho^2(0, l)$, this including the non-singular cases. He defines $D_0(x; \lambda) = -\lambda \int_0^x \varphi(s; \lambda)\,\varphi(s; 0)\,\varrho(s)\,ds$, and three similar functions D_1 (with a misprint), E_0, E_1 (cf. (I)). Let also $N(\lambda)$ be any function holomorphic for $\operatorname{Im}\lambda > 0$ such that $\operatorname{Im} N(\lambda) \geq 0$ for $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Theorem 1 asserts without proof the possibility of the representation $\dfrac{E_0(l; \lambda)\,N(\lambda) + E_1(l; \lambda)}{D_0(l; \lambda)\,N(\lambda) + D_1(l; \lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{d\tau(\mu)}{(\mu - \lambda)}$, where $\tau(\mu)$ is non-decreasing, and $\tau(\mu - 0) = \tau(\mu)$, $\tau(0) = 0$. The set of all such τ for all $N(\lambda)$, including $N(\lambda) \equiv \infty$, is said to coincide

with the set S_h of spectral functions for the boundary problem characterised by

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^l f(x)\,\varphi(x;\lambda)\,\varrho(x)\,dx \right|^2 d\tau(\lambda) = \int_0^l |f(x)|^2\,\varrho(x)\,dx;$$

however $\tau(\lambda)$ is „orthogonal" [see (III)] only if $N(\lambda)$ is a real constant. For any real μ there is a unique orthogonal $\tau_\mu(\lambda)$ which has μ as a point of its spectrum. If λ_k is a point of this spectrum, then $\tau_\mu(\lambda_k+0)-\tau_\mu(\lambda_k-0)=\delta(\lambda_k)=1\Big/\int_0^l |\varphi(x;\lambda_k)|^2\,\varrho(x)\,dx$. The result referred to in the title is Theorem 2, which asserts the extremal properties

$\tau(\lambda_m+0)-\tau(\lambda_0-0)\leq\tau_\mu(\lambda_m+0)-\tau_\mu(\lambda_0-0)$, $\tau(\lambda_m-0)-\tau(\lambda_0+0)\geq\tau_\mu(\lambda_m-0)-\tau_\mu(\lambda_0+0)$, for any $\tau\in S_h$. The proof is indicated. There is then a brief discussion of the application of Theorem 2 to the asymptotic behaviour of $\tau(\lambda)$ as $\lambda\to\infty$ (cf. B. M. Levitan, this Zbl. 48, 324). Also discussed is the dependence of $\tau(\lambda)=\tau(\lambda;l)$ on l. [Reviewer's remarks: The analogy, which is not fully explained by the author, appears as follows. Taking the Hamburger problem $\int_{-\infty}^{\infty} t^n\,d\psi(t)=\mu_n$, (cf. J. A. Shohat and J. D. Tamarkin, The problem of moments, New York 1943), $\psi(t)$ corresponds to $\tau(\lambda)$. If $P_n(z)/Q_n(z)$ is the n-th approximant in the continued fraction development of $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(t)}{z-t}$ (loc. cit. p. 46), then $P_n(z), Q_n(z)$, n and z correspond respectively to $\psi(x;\lambda), \varphi(x;\lambda)$, x and λ respectively. The author's functions $E_0(l;\lambda)$ etc., which for the analogy are better defined as Wronskians, correspond in the moment-problem to functions $A(z)$ etc. (loc. cit. pp. 51—52). His Theorem 1 corresponds to a result of R. Nevanlinna (loc. cit. pp. 57—60). In comparing his Theorem 2 to the Čebyšev inequalities (loc. cit. p. 43) he equates the boundary problem to the reduced moment-problem; if the boundary problem were made to correspond as in Theorem 1 with the full moment problem Theorem 2 would appear to be analogous to Nevanlinna's extremal property (loc. cit. p. 60)]. *F. V. Atkinson.*

Chaundy, T. W.: Second-order linear differential equations with polynomial solutions. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **4**, 81—95 (1953).

It is required to find all linear differential equations of the second order, of the form $F\,y=\lambda\,G\,y$ such that a polynomial solution $y=P_n(x)$ of exact degree n corresponds to the eigenvalue λ_n for every non-negative integer n. The problem was discussed, incompletely, by the author, this Zbl. **34**, 196. Writing $F=\sum_{r=0}^{P} x^r f_r(\delta)$, $G=\sum_{r=0}^{P} x^r g_r(\delta)$ where $\delta=x\cdot\frac{d}{dx}$, the possible cases are classified according to the number of non-negative integers ν for which $f_0(\nu)=g_0(\nu)=0$. (1) No roots ν; but for trivial exceptions $P_n(x)$ must be x^n simply. (2) A single root $\nu=0$; then $P_n(x)=\sum_{r=0}^{n} a_{n,r}\,x^r$ where $\frac{a_{n,r+1}}{a_{n,r}}$ is a rational function of r, with numerator and denominator of degree not exceeding 6. (3) Two roots, $\nu=0$ and $\nu=m$; it is shown $1\leq m\leq 5$. If the algebraic conditions for polynomial solutions $P_n(x)$ with $0\leq n\leq m$ are met, the existence of polynomial solutions for all n automatically follows, provided only that $P_m(x)$ is not simply x^m. (4) Only slight changes are needed in results (2) and (3) if the assumption of a zero root for ν is discarded. *W. W. Sawyer.*

Lehmann, N. Joachim: Die asymptotische Verteilung der Eigenwerte bei natürlichen Eigenwertaufgaben. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden **2**, 373—380 (1953).

Als natürliche Eigenwertprobleme bezeichnen E. Stiefel und H. Ziegler (dies. Zbl. **35**, 344) Variationsprobleme $\delta[(y\,M\,y)-\lambda\,(y\,N\,y)]=0$ $(y\in\mathfrak{W})$ mit Eigenwertparameter λ von folgender Art: Es sind $m>n$ nicht-negative ganze Zahlen; $\mathfrak{W}$ ist die Gesamtheit aller reellen Funktionen, die im Intervall $a\leq x\leq b$ $m-1$ stetige und eine stückweise stetige m-te Ableitung besitzen und p $(0\leq p\leq 2m)$ (unabhängigen) Randbedingungen $\sum_{\nu=0}^{m-1}[\alpha_{\mu\nu}y^{(\nu)}(a)+\beta_{\mu\nu}y^{(\nu)}(b)]=0$ genügen $(\mu=1,2,\ldots,p)$ $(\alpha_{\mu\nu},\beta_{\mu\nu}$ reelle Konstante); es ist $(u\,M\,v)=\sum_{\nu=0}^{m}\int_a^b f_\nu(x)\,u^{(\nu)}(x)\,v^{(\nu)}(x)\,dx+\mathfrak{x}'(u)\,\boldsymbol{M}\,\mathfrak{x}(v)$, $(u\,N\,v)=\sum_{\nu=0}^{n}\int_a^b g_\nu(x)\,u^{(\nu)}(x)\,v^{(\nu)}(x)\,dx+\mathfrak{x}'(u)\,\boldsymbol{N}\,\mathfrak{x}(v)$, dabei sind $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ reelle symmetrische $(2m, 2m)$-Matrizen, $\mathfrak{x}'(y)=(y(a), y(b), y'(a), y'(b), \ldots, y^{(m-1)}(a), y^{(m-1)}(b))$; $f_\nu(x), g_\nu(x)$ sind in $a\leq x\leq b$ $(\nu-1)$-mal stetig differenzierbar, die ν-te Ableitung ist zumin-

dest stückweise stetig, es ist $f_m(x) > 0$. — Verf. fordert zusätzlich: $(y\,N\,y) > c \int_a^b y^2\,dx$ ($y \in \mathfrak{B}$, $y \not\equiv 0$), c eine positive Konstante; $g_n(x) > 0$ ($x \in [a, b]$); $f_m(x)$ und $g_n(x)$ sind $(2m-1)$-mal stetig differenzierbar, die $2m$-ten Ableitungen sind stückweise stetig. Er beweist das asymptotische Gesetz für die Eigenwerte: $\lambda_i = [i\pi\gamma]^{2(m-n)} \left(1 + O\left(\frac{1}{i}\right)\right)$ mit $\gamma^{-1} = \int_a^b \sqrt[2(m-n)]{\frac{g_n(x)}{f_m(x)}}\,dx$. — Der Beweis stützt sich neben der üblichen Variablentransformation allein auf das Courantsche Maximum-Minimum-Prinzip. *F. W. Schäfke.*

McEwen, W. H.: Spectral theory and its application to differential eigenvalue problems. Amer. math. Monthly **60**, 223—233 (1953).

Nichts Neues; „the treatment will be descriptive and suggestive rather than rigorous; ... may be of interest to ... the study of this subject for the first time". Leider werden auch einige Unklarheiten über den Begriff der Selbstadjungiertheit nahegelegt. *F. W. Schäfke.*

Sternberg, R. L. and H. Kaufman: Applications of the theory of systems of differential equations to multiple non-uniform transmission lines. J. Math. Physics **31**, 244—252 (1953).

The behaviour of multiple transmission lines depends upon differential equations of the form $u' = -Yv$, $v' = -Zu$, where u, v are vectors, and Y, Z are given symmetrical, complex, square matrices. All quantities are functions of x, the distance along the transmission line. It is shown how to obtain the general solution from a continuous symmetric matrix H satisfying the equation $H' - HZH + Y = 0$. It is also shown that, when the line is lossless, no nodes can occur if a purely imaginary solution H of this equation exists. *W. W. Sawyer.*

Viswanatham, B.: The existence of harmonic vibrations. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 371—372 (1953).

A vector is called monotonic if each of its components is monotonic. It follows immediately that if a periodic system of differential equations admits a monotonic vector solution, there exists a harmonic vibration. *J. L. Massera.*

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On the behavior of the solutions of real binary differential systems at singular points. Amer. J. Math. **75**, 117—126 (1953).

Gegeben sei das System $x' = f(x, y)$; $y' = g(x, y)$ bei den Voraussetzungen: 1. f, g stetig, $f(0,0) = g(0,0) = 0$. 2. Ω^* sei abgeschlossene, mit 2π periodische Menge und enthalte kein Intervall, für $\theta \notin \Omega^*$ existiere $\lim_{r \to 0^+} r^{-1} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = F(\theta)$, $\lim_{r \to 0^+} r^{-1} g(r\cos\theta, r\sin\theta) = G(\theta)$ und gleichmäßig für jedes zu Ω^* punktfremde θ-Intervall. 3. Für $\theta \notin \Omega^*$ gelte $F^2 + G^2 > 0$. 4. Die Menge Ω^0 der θ-Werte, für die $J(\theta) \equiv G\cos\theta - F\sin\theta = 0$, sei entweder leer oder habe keinen Häufungspunkt im Komplement von Ω^*. Verff. betrachten Lösungen $\Gamma(x(t), y(t))$, die für $t \to b\,(\leq \infty)$ den Nullpunkt erreichen, und untersuchen, in welchem Fall (*) $\lim_{t \to b} \operatorname{arc\,tg}\, y/x = \theta_0$ existiert und wann zusätzlich (**) $\lim_{t \to b} \operatorname{arc\,tg}\, y'/x' = \theta_0$ gilt. Es wird bewiesen: a) Existiert (*), so gilt $\theta_0 \in \Omega^*$ oder $\theta_0 \in \Omega^0$. Im zweiten Falle besteht (**). b) Existiert (*) nicht, so ist Γ eine Spirale, und es gilt $|\theta(t)| \to \infty$ für $t \to b$. c) Wechselt $J(\theta)$ für $\theta = \theta_0$ das Vorzeichen, so gibt es wenigstens eine Lösungskurve Γ, für die (*) existiert. d) Nimmt $J(\theta)$ positive und negative Werte an, so existiert für jedes Γ der Grenzwert (*). — Bei der Anwendung auf Systeme der Gestalt $x' = \alpha x + \beta y + f^*(x, y)$; $y' = \gamma x + \delta y + g^*(x, y)$ mit $f^* = o(r)$, $g^* = o(r)$, f^*, g^* stetig, zeigen die Verff. u. a. im Falle verschiedener reeller Wurzeln der nicht-ausgearteten Matrix $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ den Satz: Jede den Nullpunkt erreichende Lösung besitzt daselbst eine Tangente, und diese ist die Grenzlage von Tangenten. Weiter tangiert jede solche Lösungskurve eine solche des linearen Systems und umgekehrt. — Zum Schluß wird ein hinreichendes Kriterium dafür angegeben, daß keine Lösung des allgemeinen Systems $x' = f(t, x)$ (x, f n-reihige Vektoren) den Nullpunkt erreicht: Es soll eine Funktion $\Phi(s)$ existieren, so daß $\int_{0^+} ds/\Phi(s) < \infty$ und $|x \cdot f(t, x)| \geq \Phi(x \cdot x) > 0$ gilt (der Punkt bedeutet Skalarmultiplikation). *Joachim Nitsche.*

Hartman, Philip and Aurel Wintner: Linear differential and difference equations with monotone solutions. Amer. J. Math. **75**, 731—743 (1953).

Sei $A(t)$ eine (n, n)-Matrix von für $0 < t < \infty$ stetigen, nicht-negativen Funktionen. Dann besitzt das Differentialgleichungssystem $x' = -A(t)\,x$, $x = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, zumindest eine nicht-triviale Lösung mit $x_i(t) \geqq 0$, $-x_i'(t) \geqq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ 0 < t < \infty)$. — Für diesen Hauptsatz wird ein eleganter Beweis gegeben. Als Folgerungen werden hergeleitet zunächst ein Satz über die Existenz total-monotoner Lösungen $x_i(t)$ für den Fall, daß die Elemente von $A(t)$ total-monoton sind, und weiter entsprechende Sätze für lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung. — Für alle diese Sätze werden schließlich auch die Analoga bezüglich linearer Differenzengleichungen bewiesen. — Auf diese Weise werden frühere Resultate von A. Kneser, P. Hartman und A. Wintner verallgemeinert und dabei in den Beweisen vereinfacht. *F. W. Schäfke.*

Wouk, Arthur: Difference equations and J-matrices. Duke math. J. **20**, 141—159 (1953).

Für Jacobimatrizen der Form $J = ((j_{ik}))$; $j_{ik} = 0$, $|i - k| > 1$; $j_{i,i+1} = j_{i+1,i} > 0$ kann das Eigenwertproblem $Jx + \lambda x = 0$ in der Form $\Delta(p_n \Delta x_n) + (q_n + \lambda)\, x_{n+1} = 0$, $(j_{11} + \lambda)\, x_1 + j_{12}\, x_2 = 0$ geschrieben werden mit $p_n = j_{n,n+1}$, $q_n = j_{n+1,n+1} + j_{n,n+1} + j_{n+1,n+2}$, $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$. Verf. nutzt die Analogie dieser Differenzenschreibweise zu den singulären Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblemen aus zur Entwicklung einer entsprechenden Spektraltheorie für diese Matrizen. Die bekannten Kriterien von Weyl, Levinson, Hartman-Wintner für das Vorliegen des Grenzpunktfalles liefern analoge Kriterien für die Selbstadjungiertheit der Jacobimatrix. Unter Benutzung des Zusammenhanges zwischen Kettenbrüchen und Jacobimatrizen wird die Konvergenz der Abschnittsspektren gegen das Spektrum von J untersucht. Sind $j_{i,i}$ und $j_{i,i+1}$ periodisch, so ergibt sich die Existenz von Stabilitätsintervallen mit Eigenschaften entsprechend denen bei Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten. Es folgt eine Anwendung der Theorie zur Herleitung bekannter Resultate über die Mathieusche Differentialgleichung. *H. O. Cordes.*

Crandall, Stephen H.: On a stability criterion for partial difference equations. J. Math. Physics **32**, 80—81 (1953).

Vor einiger Zeit haben O'Brien, Hyman und Kaplan (dies. Zbl. **42**, 132) einen Vorschlag zur Ausdehnung des auf von Neumann zurückgehenden Verfahrens zur Untersuchung der Stabilität linearer partieller Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten auf nichtlineare Gleichungen und solche mit variabeln Koeffizienten gemacht. Sie haben zwar die heuristische Natur ihres Verfahrens zugegeben, aber behauptet, daß es in der Praxis gute Resultate liefere. Verf. zeigt in der vorliegenden Note, daß es im allgemeinen nicht möglich ist, solche Stabilitätsuntersuchungen in der vorgeschlagenen Weise durchzuführen, indem er ein Beispiel einer linearen partiellen Differenzengleichung mit fast konstanten Koeffizienten angibt, deren Lösungen exponentiell anwachsen, obwohl von Neumanns Stabilitätskriterium in jedem Punkte erfüllt ist. Als Beispiel wird die der Differentialgleichung $(1 - 2\,\varepsilon \cos 2t)\, \psi_{xx} = \psi_{tt}$ mit $0 < \varepsilon \ll 1$ entsprechende Differenzengleichung gewählt. *F. Reutter.*

Duffin, R. J.: Discrete potential theory. Duke math. J. **20**, 233—252 (1953).

Die Funktion $u(P)$ sei für die Punkte des R^3 mit ganzen Koordinaten definiert. Der Differenzenoperator $Du(P) \equiv \sum_{n=1}^{6} u(P_n) - 6\,u(P)$ ($P_1, P_2, \ldots, P_6$ = Nachbarpunkte zu P) gibt Anlaß zu einer „diskreten" Potentialtheorie. Für diese untersucht Verf. das asymptotische Verhalten der Fundamentallösung $g(P)$ (Definition: $Dg = -1$ im Ursprung, $Dg = 0$ sonst, $g \to 0$ für $P \to \infty$) im Unendlichen. Ferner werden Analoga zum Gaußschen Mittelwertsatz und zur Harnackschen Ungleichung für positive harmonische Funktionen bewiesen. Als Korollar ergibt sich u. a. ein Satz von J. Capoulade (vgl. dies. Zbl. **5**, 17). — In einem Anhang wird das asymptotische Verhalten gewisser dreifacher Fourierintegrale diskutiert.

A. Huber.