

Werk

Titel: Gruppentheorie

Ort: Berlin

Jahr: 1954

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0050|log8

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Schmutz, O.: Koeffizientenbedingungen zur Kontrolle des Dämpfungsgrades bei Ausgleichsvorgängen (verallgemeinerte Hurwitzbedingungen). Ingenieur-Arch. 21, 33—41 (1953).

Die bekannten Determinantenkriterien von Hurwitz für durchweg negative Realteile b_r der Wurzeln p_r charakteristischer Gleichungen n -ten Grades mit reellen Koeffizienten entsprechen in der durch Achsenverschiebung herbeigeführten Form $b_r < -b$ der Forderung einer Mindestgröße T der Abkling-Zeitkonstanten T_r der einzelnen Schwingungen. Praktisch bedeutsamer ist die Forderung eines Mindest-Dämpfungsgrades $D_r > D$, bei der alle Wurzeln innerhalb eines durch $\pm \beta$ gegenüber der negativen reellen Achse begrenzten Winkelraumes mit $0 \leq \beta < \pi/2$ liegen, wobei $\cos \beta = D$ ist. Durch Koordinatendrehung $p = q e^{i\beta}$ bzw. $= q e^{i(\pi/2-\beta)}$ wird diese Forderung auf die Hermite'sche Forderung durchweg positiver Imaginärteile bzw. auf die Hurwitz'sche durchweg negativer Realteile zurückgeführt. Auf die so transformierte Gleichung mit nunmehr komplexen Koeffizienten werden Determinantenkriterien von Hermite bzw. Bilharz angewandt. Die Hermite-Kriterien benutzen n Determinanten bis zur Ordnung n , die von Bilharz ebenso viele bis zur Ordnung $2n$. Beide Male wird auch der Grenzfall durchweg negativ-reeller Wurzeln ($\beta \rightarrow 0$) betrachtet. Schließlich lassen sich normierte Gleichungen für festen Dämpfungsgrad D und Wurzeln sämtlich vom Betrage 1 zur Wahl der Koeffizienten eines Regelkreises mit vorgeschriebenem Dämpfungsgrad benutzen. R. Zurmühl.

Afriat, S. N.: The rank and multiplicity theorem for the reduction of quadratic forms. Math. Gaz. 37, 27—28 (1953).

Im Anschluß an Arbeiten von Ferrar (dies. Zbl. 29, 199) und Todd (dies. Zbl. 29, 2) wird eine Methode besprochen, die zwei reelle quadratische Formen a und b , wobei b positiv-definit ist, simultan auf die Normalform transformiert. Hierbei wird die Kenntnis der Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ der Matrix $a - \lambda b$ und deren Vielfachheit vorausgesetzt. R. W. Weitzenböck.

Quade, W.: Beweis eines Satzes über positive Matrizen. Indagationes math. 15, 50—51 (1953) = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 56, 50—51 (1953).

Eine n -reihige quadratische Matrix $C = A + iB$ mit komplexen Elementen wird positiv genannt, wenn für jeden reellen Vektor u die quadratische Form $u' A u \geq 0$ ist. Verf. beweist, daß es bei positivem C mit $\text{Det } C = 0$ einen reellen Vektor $s \neq 0$ gibt, der $Cs = 0$ befriedigt. Andere Beweise dieses Satzes gaben Peremans, Duparc und Lekkerkerker (dies. Zbl. 46, 11). R. W. Weitzenböck.

Foulkes, H. O.: Matrix differentiation of S -functions. Proc. Edinburgh math. Soc., Ser. II. 10, 5—10 (1953).

Verf. bezeichnet hier mit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ die charakteristischen Wurzeln einer Matrix $X = [x_{ij}]$; das Symbol $\Omega = [\partial/\partial x_{ij}]$ bedeutet die Matrixdifferentiation. Wenn z. B. $S_r = \sum \lambda_i^r$ gesetzt wird, so ist (1) $\Omega S_r = r X^{r-1}$. Ziel des Verf. ist zunächst die Berechnung des Ausdrucks $\Omega \{\lambda\}$, wo $\{\lambda\}$ diejenige S -Funktion bedeutet, die der Partition (λ) der ganzen Zahl n entspricht. Da $\{\lambda\}$ eine Funktion von $S_1, S_2, \dots, S_n$ ist, so findet man leicht, als Anwendung der Formel (1), daß $\Omega \{\lambda\}$ ein Polynom des Grades $n - 1$ in der Matrix X ist. Die Koeffizienten dieses Polynoms sind lineare Funktionen von S -Funktionen; sie werden hier ohne Benutzung einer Tafel von Gruppencharakteren berechnet. — Der übrige Teil der Abhandlung enthält eine Verallgemeinerung folgender zwei Formeln von Turnbull:

$$\Omega^2 \{p\} = (n + p - 1) \cdot \Omega \{p - 1\}; \quad \Omega^2 \{1^q\} = -(n - q + 1) \cdot \Omega \{1^{q-1}\};$$

solche Verallgemeinerungen lauten:

$$\Omega^r \{p\} = (n + p - 1) \cdot \Omega^{r-1} \{p - 1, 1\}; \quad \Omega^r \{1^q\} = -(n - q + 1) \cdot \Omega^{r-1} \{1^{q-1}\}.$$

Es folgen noch einige weitere Entwicklungen.

E. Togliatti.

Gruppentheorie:

Ijapin, E. S.: Die assoziativen Systeme aller partiellen Transformationen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 88, 13—15 (1953) [Russisch].

Es seien Γ_1 und Γ_2 zwei gleichmächtige Teilmengen einer Menge Ω . Eine eindeutige Abbildung von Γ_1 auf Γ_2 heißt eine partielle Transformation von Ω .

Die Gesamtheit aller partiellen Transformationen von Ω wird in naheliegender Weise als assoziative Halbgruppe aufgefaßt. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die so entstehenden Systeme durch gewisse Struktureigenschaften zu charakterisieren. Als Beispiel sei folgender Satz genannt: Es sei $\mathfrak{A}$ eine assoziative Halbgruppe. Ein Ideal $\mathfrak{I}$ heißt in $\mathfrak{A}$ dicht liegend, wenn von allen homomorphen Abbildungen von $\mathfrak{A}$ in sich nur die Isomorphismen in $\mathfrak{I}$ isomorphe Abbildungen induzieren, während $\mathfrak{I}$ für jedes echte Obersystem von $\mathfrak{A}$ diese Eigenschaft nicht mehr besitzt. Notwendig und hinreichend dafür, daß $\mathfrak{A}$ als die Gesamtheit aller partiellen Transformationen einer Menge Ω aufgefaßt werden kann, ist die Existenz eines in $\mathfrak{A}$ dicht liegenden Ideals $\mathfrak{I}$ mit folgenden Eigenschaften: 1. $0 \in \mathfrak{I}$. 2. Für jedes $A \in \mathfrak{I}$ gibt es idempotente Elemente E und J in $\mathfrak{I}$ mit $E A = A J = A$. 3. Zu jedem Paar von Null verschiedener idempotenter Elemente E, J aus $\mathfrak{I}$ gibt es in $\mathfrak{I}$ ein $A \neq 0$ mit $E A = A J = A$. 4. Das Produkt zweier verschiedener idempotenter Elemente ist gleich dem Nullelement. — Keine Beweise.

R. Kochendörffer.

Vorob'ev, N. N.: Assoziative Systeme, von denen jedes Teilsystem eine Einheit besitzt. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 88, 393—396 (1953) [Russisch].

In der Menge $\mathfrak{S}(\mathfrak{G})$ aller idempotenten Elemente E_ν einer Halbgruppe $\mathfrak{G}$ führt Verf. eine Relation $\leq$ ein mit der Festsetzung: es sei $E_\mu \leq E_\nu$, falls $E_\nu E_\mu = E_\mu E_\nu = E_\nu$ gilt; dann wird $\mathfrak{S}(\mathfrak{G})$ bez. $\leq$ teilweise geordnet. Es gilt nun: Eine Halbgruppe $\mathfrak{G}$ hat genau dann die Eigenschaft, daß jede ihrer Unterhalbgruppen ein Einselement besitzt, wenn $\mathfrak{G}$ die Vereinigung von paarweise elementfremden periodischen Gruppen ist und außerdem $\mathfrak{S}(\mathfrak{G})$ bez. $\leq$ wohlgeordnet ist [ein analoges Problem für Ringe wurde kürzlich von T. Szele und Ref. betrachtet, vgl. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 3, 233—239 (1952)]. Jede Halbgruppe mit der erwähnten Eigenschaft läßt sich folgendermaßen konstruieren: Man nehme eine wohlgeordnete Folge von paarweise elementfremden periodischen Gruppen $\mathfrak{G}_\alpha$ und zu jedem Gruppenpaar $\mathfrak{G}_\alpha, \mathfrak{G}_\beta$ ($\beta < \alpha$) einen festen Homomorphismus γ_β^α von $\mathfrak{G}_\alpha$ in $\mathfrak{G}_\beta$ mit den Kompatibilitätsbedingungen $\gamma_\beta^\beta \gamma_\beta^\alpha = \gamma_\delta^\alpha$ ($\delta < \beta < \alpha$); dann sei das Produkt $G_\alpha G_\beta$ mit $G_\alpha \in \mathfrak{G}_\alpha, G_\beta \in \mathfrak{G}_\beta$ als $G_\alpha G_\beta$ (in $\mathfrak{G}_\beta$), $(\gamma_\beta^\alpha G_\alpha) G_\beta$ bzw. $G_\alpha (\gamma_\alpha^\beta G_\beta)$ erklärt, je nachdem $\alpha = \beta, \beta < \alpha$ oder $\beta > \alpha$ ist. Es werden auch weitere Eigenschaften der Halbgruppe vom erwähnten Typ untersucht, z. B. die Ideale, Automorphismen usw. angegeben.

L. Fuchs.

Klein-Barmen, Fritz: Zur Theorie der Operative und Assoziative. Math. Ann. 126, 23—30 (1953).

L'A. développe l'étude des propriétés élémentaires du groupoïde au sens de Ore („das Operativ“) et du demi-groupe („das Assoziativ“). Il précise notamment le comportement d'un élément d'ordre fini („potenzgebunden“) d'un demi-groupe, en particulier d'un élément de période 1 („eng gebunden“) et d'un élément sans prépériode („tief gebunden“). Pour terminer, il indique un procédé permettant la construction de groupoïdes d'un certain type qui sont ipso facto associatifs et dont tous les éléments sont d'ordre fini et de période 1; ceci peut être précieux dans la recherche d'exemples particuliers de demi-groupes, l'associativité étant souvent la propriété la plus longue à vérifier.

R. Croisot.

Teissier, Marianne: Sur les demi-groupes admettant l'existence du quotient d'un côté. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 1120—1122 (1953).

L'A. rappelle, sous une forme un peu plus naturelle et en le généralisant légèrement, l'exemple donné par R. Baer et F. Levi (ce Zbl. 4, 338; p. 7 de la note) d'un demi-groupe sans idempotent dans lequel la division à gauche est possible; il s'agit du demi-groupe de toutes les applications biunivoques α d'un ensemble E infini dans lui-même telles que le complémentaire de $\alpha(E)$ dans E ait une puissance déterminée au moins égale au dénombrable; un tel demi-groupe sera appelé demi-groupe de Baer et Levi. Elle étudie les propriétés des demi-groupes sans idempotent

admettant la division à gauche et elle montre que ces demi-groupes sont représentables comme sous-demi-groupe d'un demi-groupe de Baer et Levi s'ils sont simplifiables à gauche. S'ils ne sont pas simplifiables à gauche, ils possèdent une image homomorphe qui est un sous-demi-groupe d'un demi-groupe de Baer et Levi et ils sont représentables comme sous-demi-groupe d'un demi-groupe d'un certain type que l'A. introduit sous le nom de demi-groupe de Baer et Levi généralisé.

R. Croisot.

Thierrin, Gabriel: Sur quelques classes de demi-groupes. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 33—35 (1953).

Le résultat principal exposé dans cette note concerne, comme le travail de R. Croisot, Bull. Soc. math. France **80**, 217—223 (1952), l'ensemble quotient $D/\mathfrak{R}$ d'un demi-groupe D par l'équivalence principale $\mathfrak{R}$ associée à un sous-demi-groupe S de D supposé net et symétrique. Cette fois, S n'est plus supposé fort, mais il est supposé supérieur à droite (notion introduite par l'A.: il existe $t \in S$ tel que $Q_s \subseteq Q_t$ pour tout $s \in S$, Q_s et Q_t désignant les quotients à droite de S par s et t). Avec ces hypothèses, $D/\mathfrak{R}$ est un homogroupe homomorphe à D . („Sur les homogroupes“, voir ce Zbl. **46**, 17.)

L. Lesieur.

Thierrin, Gabriel: Sur quelques équivalences dans les demi-groupes. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 565-567 (1953).

H étant un complexe quelconque d'un demi-groupe D , l'A. introduit, entre autres notions, la généralisation suivante, notée $\mathfrak{R}_{[H]}$, de l'équivalence principale $\mathfrak{R}_H$ associée à H : $a \equiv b (\mathfrak{R}_{[H]})$ si et seulement si $Q_a = Q_b = \emptyset$, ou s'il existe un nombre fini d'éléments $m_1, m_2, \dots, m_r \in D$, tels que:

$$Q_a \cap Q_{m_1} \neq \emptyset; Q_{m_1} \cap Q_{m_2} \neq \emptyset; \dots, Q_{m_r} \cap Q_b \neq \emptyset.$$

Q_x désigne dans ces notations le quotient à droite de H par x . Le résultat énoncé est alors le suivant: si H est net à droite et si $\mathfrak{R}_{[H]}$ est régulière, $D/\mathfrak{R}_{[H]}$ est un homogroupe à droite (demi-groupe contenant un groupe comme idéal à droite); si H est net, $\mathfrak{R}_{[H]}$ étant toujours régulière, $D/\mathfrak{R}_{[H]}$ est un groupe.

L. Lesieur.

Iséki, Kiyosi: Sur les demi-groupes. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 1524—1525 (1953).

L'A. étend aux idéaux d'un demi-groupe D la théorie des idéaux d'un anneau donnée par M. N. H. McCoy (ce Zbl. **35**, 18) en ce qui concerne les idéaux premiers, le radical, et la partie régulière de D . Le théorème de Hopkins d'après lequel le radical d'un demi-groupe D , avec zéro, satisfaisant à la condition de chaîne descendante, est nilpotent, a été donné par M. Teissier (ce Zbl. **46**, 17), et, sous une forme plus générale s'appliquant aux treillis, par L. Lesieur (ce Zbl. **42**, 27).

L. Lesieur.

Chehata, C. G.: On an ordered semigroup. J. London math. Soc. **28**, 353—356 (1953).

An ordered semigroup satisfies both cancellation laws. A. Malcev (this Zbl. **15**, 388) constructed a cancellation semigroup which is not embeddable in a group. The author fully orders Mal'cev's semigroup, thus proving that not even every ordered semigroup is embeddable in a group.

Hanna Neumann.

Evans, Trevor and B. H. Neumann: On varieties of groupoids and loops. J. London math. Soc. **28**, 342—350 (1953).

Unter einem Gruppoid wird verstanden eine nichtleere Menge mit einer darin überall erklärten binären Verknüpfung, welche als Multiplikation geschrieben ist, und unter einer Loop ein Gruppoid mit zwei weiteren, darin überall erklärten binären Verknüpfungen $\backslash$ und $/$, welche den Rechenregeln $(xy)/y = (x/y)y = x$, $x(x \backslash y) = x \backslash (xy) = y$, $x/x = y \backslash y$ genügen. Unter einer Mannigfaltigkeit (variety) von Gruppoiden oder Loops wird eine solche Klasse dieser algebraischen Strukturen verstanden, welche durch (möglicherweise unendlich viele) Rechenregeln (= mittels der Ver-

knüpfungen gebildete Identitäten) gekennzeichnet ist: z. B. bilden die Gruppen eine Mannigfaltigkeit von Loops. Mittels einer bestimmten unendlichen Folge von Gruppoiden wird gezeigt: Die Menge der Mannigfaltigkeiten von Gruppoiden hat die Mächtigkeit des Kontinuums, und es gibt eine Menge monogener, untereinander nichtisomorpher Gruppoide, welche diese Mächtigkeit besitzt. Ferner wird bewiesen, daß die Menge der Mannigfaltigkeiten von Loops ebenfalls die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt und daß die Mannigfaltigkeit der potenzassoziativen Loops (d. h. jede monogene Unterloop ist assoziativ) nicht durch endlich viele Rechenregeln definiert werden kann.

G. Pickert.

Stender, P. V.: Über die Anwendung der Siebmethode zur Lösung des Identitätsproblems für gewisse Gruppen mit abzählbar vielen Erzeugenden und abzählbar vielen definierenden Relationen. *Mat. Sbornik, n. Ser.* **32 (74)**, 97—108 (1953) [Russisch].

Mittels der von Tartakovskij angegebenen Siebmethode (vgl. dies. Zbl. **34**, 15 und 163) läßt sich das Identitätsproblem auch für einige Typen von Gruppen mit abzählbar vielen Erzeugenden und abzählbar vielen definierenden Relationen lösen.

R. Kochendörffer.

Gol'berg, P. A.: Sylowbasen unendlicher Gruppen. *Mat. Sbornik, n. Ser.* **32 (74)**, 465—476 (1953) [Russisch].

Die Ergebnisse von P. Hall (dies. Zbl. **17**, 154) über Sylowsysteme endlicher Gruppen werden auf lokal endliche Gruppen mit Minimalbedingung übertragen. Die vorliegende Arbeit stützt sich dabei auf Ideen von Dietzmann, Kurosch und Uzkwow (dies. Zbl. **18**, 392) und auf zwei frühere Arbeiten des Verf. [*Mat. Sbornik, n. Ser.* **19 (61)**, 451—460 (1946) und dies. Zbl. **32**, 388]. Ferner wird eine Bedingung dafür abgeleitet, daß in einer beliebigen Gruppe je zwei Sylowsysteme konjugiert sind.

R. Kochendörffer.

Smirnov, D. M.: Über die Automorphismengruppen der auflösbaren Gruppen. *Mat. Sbornik, n. Ser.* **32 (74)**, 365—384 (1953) [Russisch].

Die Hauptergebnisse dieser Arbeit sind vom Verf. schon in zwei Noten (dies. Zbl. **43**, 22 und **46**, 249) angezeigt worden. Die Beweise stützen sich zum großen Teil auf die wichtige Arbeit von A. I. Ma'cev (dies. Zbl. **43**, 23; siehe auch **33**, 246). An weitergehenden Resultaten erwähnen wir die folgenden: Jede lokal auflösbare Gruppe von Automorphismen einer auflösbaren A_3 -Gruppe ist selbst auflösbar. Jede Gruppe von Automorphismen einer auflösbaren A_3 -Gruppe besitzt einen maximalen auflösbaren Normalteiler. Dagegen braucht eine auflösbare Gruppe von Automorphismen einer Abelschen A_3 -Gruppe nicht einmal eine A_1 -Gruppe zu sein, wie das Beispiel der additiven Gruppe der rationalen Zahlen und ihrer Automorphismen-Gruppe, der multiplikativen Gruppe der von Null verschiedenen rationalen Zahlen, zeigt. Für A_5 -Gruppen (auflösbare Gruppen mit Maximal-Bedingung für Untergruppen oder S -Gruppen im Sinne des Ref.) gilt dagegen: Jede auflösbare Gruppe von Automorphismen einer auflösbaren A_5 -Gruppe ist selbst eine A_5 -Gruppe. [Diesen Satz hat Ma'cev (loc. cit.) für Abelsche A_5 -Gruppen bewiesen.] Eine auflösbare Gruppe von Automorphismen einer nilpotenten A_3 -Gruppe besitzt eine Untergruppe endlichen Indexes, deren Kommutator-Gruppe nilpotent ist.

K. A. Hirsch.

Sesekin, N. F.: Über lokal nilpotente Gruppen ohne Torsion. *Mat. Sbornik, n. Ser.* **32 (74)**, 407—442 (1953) [Russisch].

Das Leitmotiv dieser Arbeit ist, aus Eigenschaften von maximalen Abelschen Untergruppen in lokal-nilpotenten und nilpotenten Gruppen Schlüsse auf Eigenschaften der Gruppe selbst zu ziehen. Darüber hinaus ergeben sich einige Verbindungen mit den von P. G. Kontorovič untersuchten R -Gruppen (dies. Zbl. **40**, 6). Die hauptsächlichsten Resultate sind vom Verf. in einer kurzen Note (dies. Zbl. **46**, 249) angezeigt worden. Wir erinnern zunächst an einige Definitionen. Wenn H eine Untergruppe der Gruppe ist, so heißt eine (transfinite) Reihe — falls sie existiert — $1 = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_\alpha \subset \dots \subset H_\gamma = H$ eine aufsteigende Zentralreihe für H bezüglich G , falls $[G, H_{\alpha-1}] \subseteq H_\alpha$ und für eine Limeszahl α H_α die Vereinigungsmenge der H_β

mit $\beta < \alpha$ ist. [Siehe z. B. R. Baer, Trans. Amer. Math. Soc. 58, 295—347 (1945)]. Eine Untergruppe H von G heißt isoliert in G , falls alle Lösungen der Gleichung $x^m = h$ mit $h \in H$ schon in H liegen. Wenn M ein beliebiger Komplex ist, so heißt der Durchschnitt $I(M)$ aller in G isolierten Untergruppen, die M enthalten, der Isolator von M in G . Eine Gruppe G heißt R -Gruppe, wenn aus $x' = y^n$ mit $x, y \in G$ folgt, daß $x = y$ ist. Der Zentralisator eines Komplexes M wird mit $\mathfrak{Z}(M)$ bezeichnet. Eine Gruppe G heißt nilpotent, wenn sie eine aufsteigende Zentralreihe endlicher Länge besitzt, und lokal-nilpotent, wenn jeder endliche Komplex in eine nilpotente Untergruppe eingebettet werden kann. Solche Gruppen, falls torsionsfrei, sind immer R -Gruppen. Eine Gruppe G hat endlichen Rang r , wenn sie eine Normalreihe endlicher Länge r mit lokal-zyklischen torsionsfreien Faktoren besitzt (siehe S. N. Černikov, dies. Zbl. 35, 295). Wenn H Untergruppe einer R -Gruppe ist, dann gilt $\mathfrak{Z}(H) = \mathfrak{Z}(I(H))$ und ferner, falls das Zentrum $Z(H) \supset 1$ ist, $Z(I(H)) \supset Z(H)$. — Satz 1. Wenn H Untergruppe endlichen Ranges r in einer R -Gruppe G ist und bezüglich G eine aufsteigende Zentralreihe besitzt, so gilt für den Rang der Faktorgruppe nach dem Zentralisator von H $r(G/\mathfrak{Z}(H)) \leq r(r-1)/2$. In einer lokal-nilpotenten torsionsfreien Gruppe G hat ein Abelscher Normalteiler endlichen Ranges immer eine aufsteigende Zentralreihe, woraus noch folgt, daß in einer solchen Gruppe ein lokal-zyklischer Normalteiler im Zentrum enthalten sein muß. Ein nicht-triviales Zentrum existiert immer, wenn G wenigstens eine maximale Abelsche Untergruppe endlichen Ranges enthält. Satz 2. Ein Normalteiler N endlichen Ranges r in einer lokal-nilpotenten torsionsfreien Gruppe G besitzt eine aufsteigende Zentralreihe bezüglich G , und also hat die Faktorgruppe $G/\mathfrak{Z}(N)$ endlichen Rang $\leq r(r-1)/2$. Von den beiden folgenden Sätzen geben wir nur die interessanten Korollare: Wenn in einer torsionsfreien Gruppe G die Kommutator-Gruppe im Zentrum liegt und das Zentrum Z den Rang n besitzt und wenn G eine maximale Abelsche Untergruppe endlichen Ranges $n+k$ besitzt, dann übersteigt der Rang der Faktorgruppe G/Z nicht $k(n+1)$, und folglich der Rang der Gruppe G nicht $k n + k + n$. Eine nilpotente torsionsfreie Gruppe, die wenigstens eine maximale Abelsche Untergruppe endlichen Ranges besitzt, hat selbst endlichen Rang. Wenn in einer nilpotenten torsionsfreien Gruppe auch nur einer der Faktoren der oberen Zentralreihe unendlichen Rang hat, so müssen alle maximalen Abelschen Untergruppen endlichen Rang haben. Weiter ergibt sich Satz 5. Wenn in einer lokal-nilpotenten torsionsfreien Gruppe G wenigstens eine maximale Abelsche Untergruppe endlichen Rang hat und in einem nilpotenten Normalteiler enthalten ist, dann ist G selbst nilpotent und hat endlichen Rang. — Eine Gruppe G heißt „von nilpotenten Normalteilern überdeckt“ oder kurz N -Gruppe, wenn jedes ihrer Elemente (oder auch jeder endliche Komplex) in einem eigentlichen nilpotenten Normalteiler enthalten ist. Das ist z. B. bei nilpotenten Gruppen der Fall. Satz 6. Eine torsionsfreie Gruppe G ist dann und nur dann nilpotent von endlichem Rang, wenn sie eine N -Gruppe ist und wenigstens eine maximale Abelsche Untergruppe endlichen Ranges besitzt. Satz 7. Wenn unter den maximalen Abelschen Normalteilern einer torsionsfreien N -Gruppe auch nur einer endlichen Rang r hat, dann ist G nilpotent und hat endlichen Rang, der $r(r+1)/2$ nicht übersteigt. Diese letzteren Resultate sind eine wesentliche Verschärfung von Sätzen von A. I. Mal'cev (dies. Zbl. 43, 23), der alle Abelschen Untergruppen, nicht nur die maximalen, heranzieht. Die weiter folgenden Entwicklungen in §§ 4—7 sind von zu spezieller Natur, um hier im einzelnen dargestellt zu werden. Die Arbeit schließt mit zwei interessanten Beispielen. (i) Es ist bekannt (S. N. Černikov, dies. Zbl. 33, 347), daß eine periodische lokal-nilpotente Gruppe, die eine endliche maximale Abelsche Untergruppe enthält, einen Abelschen Normalteiler von endlichem Index besitzt. Man könnte nun vermuten, daß eine torsionsfreie lokal-nilpotente Gruppe, die eine maximale Abelsche Untergruppe endlichen Ranges enthält, auch einen Abelschen Normalteiler besitzt, dessen Faktor-Gruppe endlichen Rang hat. Dies ist aber nicht der Fall. Verf. konstruiert eine torsionsfreie Gruppe der Klasse $\omega 2 + 1$ mit einer maximalen Abelschen Untergruppe vom Rang 3. (ii) Eine N -Gruppe braucht kein Zentrum zu besitzen, wie z. B. die Gruppe der dreieckigen Matrizen der Form $\begin{pmatrix} I_n & X_n \\ 0 & I_\infty \end{pmatrix}$, wobei I_n und I_∞ Einheits-Matrizen sind und X_n ein unendliches Rechteck mit n Zeilen und Koeffizienten aus einem beliebigen Körper ist. Verf. gibt aber sogar ein Beispiel für eine N -Gruppe ohne Zentrum, deren Kommutator-Gruppe Abelsch ist.

K. A. Hirsch.

Gruenberg, K. W.: Two theorems on Engel groups. Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 377—380 (1953).

Mit „Engel-Gruppe“ wird eine Gruppe G mit der Eigenschaft bezeichnet, daß für $x, y \in G$ es eine endliche (nicht notwendig beschränkte) Anzahl r gibt, so daß der r -te Kommutator $(\dots(x, y), y), \dots, y) = 1$ wird. Zassenhaus (dies. Zbl. 21, 200) und Zorn [Bull. Amer. math. Soc. 42, 485 (1936)] haben bewiesen, daß alle endlichen Engel-Gruppen nilpotent sind. Gestützt auf einen noch nicht veröffentlichten Satz von Philip Hall (Hat G ein endliches Erzeugendensystem $a_1, \dots, a_d$, so ist G dann und nur dann nilpotent, wenn in der aus diesen Erzeugenden abge-

leiteten „basic sequence“ fast alle Elemente $= 1$ sind) zeigt Verf., daß alle auflösbaren Engel-Gruppen mit endlichem Erzeugendensystem nilpotent sind. Daraus wird weiter gefolgert, daß die Gruppen der unteren Zentralreihe einer Engel-Gruppe G endliche Erzeugendensysteme haben, wenn dasselbe von G gilt. Zuletzt wird gezeigt, daß sich diese Resultate und ihre Beweise von Gruppen entsprechend auf Liesche Ringe übertragen lassen.

F. W. Levi.

Camm, Ruth: Simple free products. J. London math. Soc. 28, 66—76 (1953).

Continuously many non-isomorphic simple groups are constructed, each the free product of two free two-generator groups with an amalgamated subgroup. They are generated by four elements a, p, b, q with defining relations $a^i p^{\mu(i)} = b^{r(i)} q^{\pi(i)}$ where i ranges over the set of all non-zero integers and μ, r, π are suitable permutations of this set. It is shown that these groups can also be generated by two of their elements. As free products of locally infinite groups with an amalgamated subgroup these groups are, moreover, locally infinite. The existence of finitely generated infinite simple groups had previously been shown only by a non-constructive method (Graham Higman, this Zbl. 42, 22). *B. H. Neumann.*

Hall jr., Marshall: Subgroups of free products. Pacific J. Math. 3, 115—120 (1953).

A proof of Kuroš's subgroup theorem for free products. For an enumeration and comparison of the existing proofs cf. the review of Kuhn (this Zbl. 47, 23). The author does not mention Takahasi's proof which also is short and leads further. His proof is a streamlining of Kuroš's original proof: The alphabetical and semi-alphabetical well-orderings of the elements of the free product [used for free groups by F. Levi, Math. Z. 32, 315—318 (1930), and the author, this Zbl. 35, 13] replace the transfinite induction needed in Kuroš's proof. The resulting version of the proof is simpler than Kuroš's and a straightforward generalization of F. Levi's proof of the subgroup theorem for free groups quoted above.

Hanna Neumann.

Matsushita, Shin-ichi: Sur la puissance des ordres dans un groupe libre. Indagationes math. 15, 15—16 (1953) = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 56, 15—16 (1953).

Der folgende Satz wird bewiesen: Die Menge der verschiedenen linearen Ordnungen der freien Gruppe mit einer endlichen Anzahl $n \geq 2$ von Erzeugenden hat die Mächtigkeit des Kontinuums.

L. Fuchs.

Higman, Graham: On a problem of Takahasi. J. London math. Soc. 28, 250—252 (1953).

Takahasi (this Zbl. 41, 8) has raised the question whether the countable free groups are characterized among the countable locally free groups by the ascending chain condition for subgroups of bounded finite rank. [That free groups satisfy the ascending chain condition for subgroups of bounded finite rank has been shown by Takahasi (op. cit.) and by the author (this Zbl. 42, 21)]. The author now uses the unrestricted free product of a countable set of free cyclic groups which he has introduced and studied in an earlier paper (this Zbl. 46, 26) to answer Takahasi's problem in the negative. He proves a lemma on the inverse limit G of a set of groups G_α of which the following two facts are corollaries: If all the G_α are locally free then so is G ; if all the G_α satisfy, moreover, the ascending chain condition for subgroups of bounded finite rank, then so does G .

B. H. Neumann.

Lazard, Michel: Sur certaines suites d'éléments dans les groupes libres et leurs extensions. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 36—38 (1953).

F is a free group, G its completion in the subgroup topology defined by the lower central series, L the completed Lie algebra of the group algebra of G over the rational field, and L_k the set of elements of L whose homogeneous components have degree $\geq k$. The author considers power series $g(t) = \sum t^k a_k$ in a non-negative

integral variable t with coefficients $a_k \in L_k$ and values $g(t)$ in G for all t ; they form the set $\mathcal{P}$ of „typical sequences“. A characterization of typical sequences as infinite products in G (Theorem I) is, in essence, P. Hall's commutator identity (cf. this Zbl. 7, 291). Theorems II and III give one-to-one correspondences between $\mathcal{P}$ and a set of certain sequences of elements of G , and a set of certain elements of L respectively. These are interpreted as giving Hall's identity a canonic form, and as inverting the Campbell-Baker-Hausdorff formula respectively. Applications to locally infinite nilpotent groups and to regular p -groups are adumbrated.

B. H. Neumann.

Szele, T.: On direct sums of cyclic groups with one amalgamated subgroup. Publ. math., Debrecen 2, 302—307 (1953).

Several classic examples of abelian groups not decomposing into a direct sum in some specified manner are direct sums of cycles with one amalgamated subgroup [cf. e. g. S. Fomin, this Zbl. 18, 11; H. Prüfer, Math. Z. 17, 35—61 (1923)]. The author investigates the structure of such groups in general: the abelian group G is generated by a set of elements a_i (of any cardinal), and defined by the relations $m_i a_i = c$ where, for all i , the m_i are positive integers, and c generates the amalgamated subgroup. G is the direct sum of two groups A and B , where B is a direct sum of finite cycles, and A is of the same type as G but with the additional assumption $m_j \neq m_k$ for $j \neq k$, hence countable. First let all a_i be of infinite order. Then the maximal periodic subgroup T of A is a direct sum of cycles, its factorgroup is of rank one. T is trivial if, and only if, the m_i are relative prime in pairs. T is direct summand of A if, and only if, there exists no prime p such that every power of p divides some m_i . G is a direct sum of cycles if, and only if, the integers m_i are bounded, hence A finitely generated. If the a_i are of finite order, in particular c of order m , then G is a direct sum of cycles if, and only if, no prime factor p of m has the property that every power of p divides some m_i . *Hanna Neumann.*

Szélpál, I.: Über die untere Grenze der Ordnung n -stufig nicht-kommutativer Gruppen. Commentarii math. Helvet. 27, 73—74 (1953).

Das Minimum der Ordnung derjenigen endlichen Gruppen G , in denen es eine Kette (ohne Wiederholung) von nichtabelschen Untergruppen $G = G_1 \supset \dots \supset G_n$ gibt, ist $3 \cdot 2^n$. Das Minimum wird (trivialerweise) für das direkte Produkt der symmetrischen Permutationsgruppe 6-ter Ordnung und einer elementaren Abelschen Gruppe von der Ordnung 2^{n-1} erreicht. (Ref. bemerkt, daß sich dabei das Wort „elementar“ streichen läßt.) *L. Rédei.*

Mills, W. H.: On the non-isomorphism of certain holomorphs. Trans. Amer. math. Soc. 74, 428—443 (1953).

Verf. hat kürzlich bewiesen, daß zwei Abelsche Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden, deren Holomorphe isomorph sind, selbst isomorph sein müssen (dies. Zbl. 43, 257). Er zeigt nun in der vorliegenden Arbeit, daß bei zwei endlichen Gruppen mit isomorphen Holomorphen beide Abelsch oder beide nicht-Abelsch sind. G. A. Miller [Amer. J. Math. 21, 287—337 (1899)] hatte zwar behauptet, daß die zyklische Gruppe der Ordnung 8 und die Dieder-Gruppe der Ordnung 8 gleiche Holomorphe besitzen — jedoch hat für die erstere Gruppe das Holomorph die Ordnung 32, für die letztere die Ordnung 64. Zwei nicht-Abelsche Gruppen, die nicht isomorph sind, können tatsächlich isomorphe Holomorphe haben, z. B. die Dieder-Gruppen und die zyklischen Gruppen der Ordnung $4n$ mit $n \geq 3$. *K. A. Hirsch.*

Hochschild, G. and J.-P. Serre: Cohomology of group extensions. Trans. Amer. math. Soc. 74, 110—134 (1953).

Let K be an invariant subgroup of a group G . The relations between the cohomology groups of G , K and G/K are studied (cf. R. Lyndon, this Zbl. 31, 198). Giving hitherto unpublished details of the techniques of the Leray-Cartan spectral sequence (see Cartan and Leray, this Zbl. 40, 100), the authors prove that if A is a G -module there exists a spectral sequence (E_r) in which E_2 is isomorphic with $H(G/K, H(K, A))$, and E_∞ is isomorphic with the graduated group associated with $H(G, A)$, suitably filtered (cf. J. P. Serre, this Zbl. 38, 365). — An alternative approach, in which the cochains of G are directly filtered, is given for use in the applications. A (possibly different) spectral sequence is obtained with E_2 again isomorphic with $H(G/K, H(K, A))$. The method has the advantage of identifiable mappings. If A^K denotes the subgroup of A which consists of all $a \in A$ such that $ka = a$ for all $k \in K$; G is finite; $m = [G:K]$; $n = [K:(1)]$;

$(m, n) = 1$ and $j > 0$; then it is proved that $H^j(G, A) \approx r, H^j(K, A)^G + l, H^j(G/K, A^K)$ where the imbedding isomorphisms of the direct factors, r , and l , are identifiable (the decomposition is multiplicative with respect to cup products). Certain exact sequences in the cohomology theory of groups (cf. J. P. Serre, loc. cit.) which involve the transgression of the spectral sequence are also obtained. One such sequence yields the cup product reduction of Eilenberg-MacLane (this Zbl. 29, 340). An interpretation of another of these sequences in terms of the cohomology theory of simple algebras is also given (this last is not obtainable from the Leray-Cartan spectral sequence).
W. H. Cockcroft.

Baer, Reinhold: Factorization of n -soluble and n -nilpotent groups. Proc. Amer. math. Soc. 4, 15—26 (1953).

Two elements x, y of a group G are called n -commutative if $(xy)^n = x^n y^n$ and $(yx)^n = y^n x^n$. It is known that n -commutativity and $(1-n)$ -commutativity are equivalent. Out of this generalization of commutativity there arise naturally the corresponding notions of n -abelian group [F. W. Levi, J. Indian math. Soc., n. Ser. 8, 1—7 (1944), 9, 37—42 (1945)]; n -commutator (Otto Grün, this Zbl. 37, 11), n -centre. An n -soluble group is then a group possessing a composition series with n -abelian factors; an n -nilpotent group is one whose n -centre series ends with the whole group. The author establishes a number of results for n -soluble and n -nilpotent groups which generalize known theorems on soluble and nilpotent groups; for example: If G is n -soluble, of order hk , where h and k are relative prime, and each of n and $1-n$ is prime to at least one of the numbers h and k , then G is the product of two subgroups of orders h and k respectively. A group is called m -group if the order of each element divides a power of m , and Pm -group if the order of each element is prime to m . With this notation it follows: An n -soluble group is the product of an n -group, a $(1-n)$ -group, and a $P(n \cdot (n-1))$ -group which is soluble in the ordinary sense. Further: Every n -nilpotent group is the direct product of an n -group, a $(1-n)$ -group, and a $P(n \cdot (n-1))$ -group which is nilpotent in the ordinary sense. In the proofs all groups are assumed finite, but the author points out that a number of the results, suitably formulated, remain true if this assumption is dropped.
Hanna Neumann.

Gaschütz, Wolfgang: Über die Φ -Untergruppe endlicher Gruppen. Math. Z. 58, 160—170 (1953).

Abkürzungen, Definitionen, einfache Tatsachen: $A(\mathfrak{G})$ Automorphismengruppe von $\mathfrak{G}$, $I(\mathfrak{G})$ Gruppe der inneren Automorphismen von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ Zentrum von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ maximaler nilpotenter Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\Phi(\mathfrak{G})$ Durchschnitt der maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$, $\Delta(\mathfrak{G})$ Durchschnitt der maximalen und nicht invarianten Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{N}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{N} \overline{\mathfrak{G}}$, $\mathfrak{N} \cap \overline{\mathfrak{G}} = 1$ so sagt man, $\mathfrak{G}$ zerspaltet über $\mathfrak{N}$. Halbeinfach heißt eine Gruppe, wenn sie keine invariante abelsche Untergruppe enthält. Mit einer Untergruppe Γ von $A(\mathfrak{N})$ nennt Verf. eine Gruppe $\mathfrak{N}$ Γ -vollreduzibel, wenn $\mathfrak{N}$ Produkt minimaler unter Γ invarianter Untergruppen von $\mathfrak{N}$ ist. Ist $\mathfrak{N}$ Normalteiler einer Gruppe $\mathfrak{G}$, Γ die Gruppe der durch die Transformationen mit den Elementen aus $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{N}$ induzierten Automorphismen und $\mathfrak{N}$ Γ -vollreduzibel, so sagt man: $\mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{G}$ -vollreduzibel. Bezeichne $\mathfrak{N}_\alpha$ für $\mathfrak{G}$ -vollreduziblen $\mathfrak{N}$ den maximalen auflösbaren Normalteiler von $\mathfrak{N}$, dann besteht eine direkte Zerlegung $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_\alpha \times \mathfrak{N}_\eta$. $\mathfrak{N}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{N}_\eta$ sind abelsche bzw. halbeinfache Komponenten von $\mathfrak{N}$. Bezeichne $\mathfrak{S}(\mathfrak{G})$ (der Sockel von $\mathfrak{G}$) das Produkt der minimalen Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{G}$ -vollreduzibel, so sagt man $\mathfrak{G}$ ist vollreduzibel. Zwei isomorphe Gruppen besitzen isomorphe Sockel. Verf. beweist zuerst einen Satz von Miller: ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, so ist $\Phi(\mathfrak{G}) = \Phi(\mathfrak{M}) \times \Phi(\mathfrak{N})$. Zum Beweis sind die folgenden Sätze nötig: 1. für einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ gilt dann und nur dann $\mathfrak{N} \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$, wenn $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{N}$ nicht zerspaltet. 2. $\mathcal{P}$ sei Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\mathcal{P} \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$. Dann ist $\Phi(\mathfrak{G}/\mathcal{P}) = \Phi(\mathfrak{G})/\mathcal{P}$. 3. Ist $\mathfrak{N}$ Normalteiler, $\mathfrak{U}$ Untergruppe von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N} \subseteq \Phi(\mathfrak{U})$ so ist $\mathfrak{N} \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$. Die Hauptergebnisse sind: a) (Verallgemeinerung eines Satzes von Frattini) $\mathfrak{N}$ und $\mathcal{P}$ seien Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\mathcal{P} \subseteq \mathfrak{N} \cap \Phi(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{N}/\mathcal{P}$ nilpotent. Dann ist $\mathfrak{N}$ nilpotent. Zum Beweis wird der Satz 1. gebraucht. b) (Eine Konstruktion der Φ -freien Gruppen, das heißt wo $\Phi(\mathfrak{G}) = 1$ gilt) $\mathfrak{S}$ sei ein direktes Produkt einfacher Gruppen und $\{\Gamma\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem für die Klassen unter $A(\mathfrak{S})$ konjugierter Untergruppen von $A(\mathfrak{S})$ mit folgenden Eigenschaften: I. $\mathfrak{S}_\alpha$ ist Γ_α -vollreduzibel. II. $I(\mathfrak{S}_\eta) \subseteq \Gamma$. Durchläuft dann Γ dieses Repräsentantensystem, so bilden die Gruppen $\mathfrak{F}_\Gamma$ mit den Elementen (a, γ) , $a \in \mathfrak{S}_\alpha$, $\gamma \in \Gamma$ und der Verknüpfung $(a, \gamma)(b, \delta) = (a b^{\gamma \alpha}, \gamma \delta)$ ein vollständiges Repräsentantensystem für die Typen der Φ -freien Gruppen mit einem Sockel vom Typus $\mathfrak{S}$. Zum Beweis sind die folgenden Sätze nötig: 1., 3., 4. Ist $\mathfrak{A}$ abelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A} \cap \Phi(\mathfrak{G}) = 1$, so zerfällt $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{A}$. Außerdem ist $\mathfrak{A}$ dann $\mathfrak{G}$ -vollreduzibel. 5. Eine Gruppe ist dann und nur dann Φ -frei, wenn sie über der abelschen Komponente ihres Sockels zerfällt. Weitere bemerkenswerte Sätze sind: 6. $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$. 7. Ist $\mathfrak{L}$ nilpotent, so gilt $\Phi(\mathfrak{L}) = 1$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{L}$ direktes Produkt von Gruppen mit Primzahlordnung ist. 8. $\mathcal{P}$ sei Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\mathcal{P} \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$. Es ist $I(\mathcal{P}) \subseteq \Phi(A\mathcal{P})$. Aus diesem Satz folgt, daß nicht jede nilpotente Gruppe Φ -Untergruppe sein kann. 9. In einer Φ -freien Gruppe $\mathfrak{F}$ ist $\mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ das Produkt der minimalen abelschen Normalteiler von $\mathfrak{F}$. 10. $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})/\Phi(\mathfrak{G})$ ist das Produkt der minimalen

abelschen Normalteiler von $\mathcal{G}/\Phi(\mathcal{G})$. 11. In einer Φ -freien Gruppe $\mathfrak{F}$ ist $\mathfrak{Z}(\mathfrak{F}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{F})) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{F})/\mathfrak{Z}(\mathfrak{F})$ und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{F}) = \mathcal{A}(\mathfrak{F})$. 12. Für beliebiges $\mathcal{G}$ ist $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ nilpotent. J. Szép.

Hamill, Christine M.: A collineation group of order $2^{13} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$. Proc. London math. Soc., III. Ser. 3, 54—79 (1953).

Die Gruppe wird erzeugt von 120 Kollineationen der Ordnung 2 des projektiven 7-dimensionalen Raumes [7], die jeweils alle Punkte einer Hyperebene und deren Pol hinsichtlich $\sum x_i^2 = 0$ invariant lassen. Sie enthält Untergruppen von den Ordnungen $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$ und $2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$, die Kollineationsgruppen der Räume [5] bzw. [6] sind, und die von 36 bzw. 63 Kollineationen der genannten Art erzeugt werden. Die Methoden sind den in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 43, 28) auf eine Kollineationsgruppe des [5] von der Ordnung $2^8 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7$ angewandten ähnlich. Die Resultate sind entsprechend reichhaltiger und in 5 Tafeln am Ende der Schrift zusammengefaßt. F. W. Levi.

Richert, Hans-Egon: Über die Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung. II. Math. Z. 58, 71—84 (1953).

Part I this Zbl. 46, 250. Let $a_0(n)$ be the number of essentially distinct Abelian groups of order n . The author proves: let $q > 0$, $(l, q) = 1$ then

$$A_0(x; q, l) = \sum a_0(n) = c_1(q)x + c_2(q)x^{1/2} + c_3(q)x^{1/3} + O(x^{3/10} \log^{9/10} x q^{8/5})$$

$n \leq x$, $n \equiv l \pmod{q}$, which is an extension of the author's previous result with $q = 1$ and an improvement of a result due to Šapiro-Pjateckij (this Zbl. 39, 19) for q comparatively smaller than x . L. K. Hua.

Conrad, Paul F.: Embedding theorems for Abelian groups with valuations. Amer. J. Math. 75, 1—29 (1953).

A is an abelian group with operator domain R , I a partially ordered set. To each $a \neq 0$ in A is assigned a non-empty trivially ordered subset of I as the set of „values“ of a such that, if none of the values of a and b is $> \gamma$, or $\geq \gamma$, for $\gamma \in I$, then none of the values of $a \pm b$ and ra ($r \in R$) is $> \gamma$, or $\geq \gamma$ resp. The special case where A is an ordered group, I the set of its archimedean classes, and the (only) value of a is its archimedean class, is behind this definition of valuation. In this way the contents of the paper represents a generalization of H. Hahn's classical paper on ordered abelian groups [S.-ber. math.-naturw. Kl. Akad. Wiss. Wien, II. Abt. 116, 601—655 (1907)]. The analogue to Hahn's complete group is defined, and various results on valuation-preserving isomorphisms and decompositions connected with the valuation lead up to the principal result of the first part: Any abelian group with valuation whose operator domain is a skew field can be embedded in a „complete group“. In the second part these results are applied to partially ordered locally infinite abelian groups, resulting in particular in a new proof of Hahn's theorem that every ordered abelian group is order-isomorphic to a subdirect sum of an ordered set of groups each isomorphic to the additive group of reals. — For the intermediate results we have to refer the reader to the paper itself. It should, however, be mentioned that some of the nomenclature used in the second part is unfortunate: e. g. a subgroup is called convex if it is convex in the customary sense, and isolated (here: „ d -closed“) in addition. In the final statement of Hahn's theorem „archimedean subgroup“ does not mean what one would expect; it is a subgroup whose archimedean classes are the same as those of the supergroup. Hanna Neumann.

Zajceva, M. J.: Über die Gesamtheit der Anordnungen einer Abelschen Gruppe. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 1 (53), 135—137 (1953) [Russisch].

Die von G. Birkhoff gestellte Aufgabe, alle nicht-isomorphen Anordnungen einer torsionsfreien abelschen Gruppe G mit endlich vielen Erzeugenden zu finden, wird vom Verf. in folgender Weise gelöst: G ist die geordnete direkte Summe ihrer archimedischen Untergruppen (vgl. Mal'cev, dies. Zbl. 38, 159). Daher kann man sich auf archimedische Anordnungen beschränken. Sei also G eine archimedische Gruppe mit den Erzeugenden $g_1, \dots, g_n$. Dann ist G bekanntlich isomorph einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen. Bei einem solchen Isomorphismus entspricht den Erzeugenden ein System von rational linear unabhängigen reellen Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Eine Anordnung von G ergibt sich dadurch, daß man ein Element $\xi_1 g_1 + \dots + \xi_n g_n$ als positiv definiert, wenn $\xi_1 \alpha_1 + \dots + \xi_n \alpha_n > 0$

ist. Alle möglichen Anordnungen erhält man so durch Abbildung auf alle möglichen Systeme $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Zwei Systeme $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ liefern dann und nur dann isomorphe Anordnungen, wenn zwischen ihnen eine Beziehung der Form $c \alpha_i = \sum_j \lambda_{ij} \alpha'_j$ ($i = 1, \dots, n$) besteht, wo c eine reelle Zahl $\neq 0$ und die Determinante $|\lambda_{ij}| = \pm 1$ ist.

R. Kochendörffer.

Brauer, Richard: A characterization of the characters of groups of finite order.
Ann. of Math., II. Ser. 57, 357–377 (1953).

Es sei $\mathcal{G}$ eine endliche Gruppe. Eine Untergruppe $\mathcal{E}$ von $\mathcal{G}$ heißt elementar, wenn $\mathcal{E}$ direktes Produkt von zwei Gruppen teilerfremder Ordnungen ist, von denen die eine zyklisch ist und die andere Primzahlpotenzordnung besitzt. Hauptziel dieser Arbeit ist ein neuer Beweis des vom Verf. und dann vom Ref. bewiesenen „Satz über induzierte Charaktere“ (vgl. dies. Zbl. 29, 15; 48, 19): Jeder absolut irreduzible Charakter χ von $\mathcal{G}$ ist darstellbar als ganzrationale Linearkombination $\chi = \sum c_{\psi} \psi^*$ derjenigen Charaktere ψ^* , die sich aus den absolut irreduziblen Charakteren ψ der elementaren Untergruppen $\mathcal{E}$ durch den gruppentheoretischen Induktionsprozeß ergeben. Verf. gibt hier diesem Satz eine etwas andere Form, welche sich leicht als äquivalent mit der obigen erweist: Eine komplexwertige Klassenfunktion θ von $\mathcal{G}$ ist genau dann ein verallgemeinerter Charakter von $\mathcal{G}$ (d. h. eine ganzrationale Linearkombination der χ), wenn für jede elementare Untergruppe $\mathcal{E}$ die Einschränkung von θ auf $\mathcal{E}$ ein verallgemeinerter Charakter von $\mathcal{E}$ ist. Die Beweismethode ist eine Kombination von Beweismethoden aus früheren Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 26, 56; 29, 15) und beruht wie dort auf den Methoden der linearen Algebra, der lokalen Elementarteilerttheorie, sowie auf der Theorie der Sylowgruppen. Jedoch ist hier der Beweis kurz und durchsichtig. — Die schon heute vorliegenden zahlreichen und bedeutenden Anwendungen des Satzes über induzierte Charaktere [vgl. auch Springer, dies. Zbl. 30, 107; Brauer, dies. Zbl. 34, 161; Witt, J. reine angew. Math. 180, 231–245 (1952); Hasse, Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl. 1952, Nr. 1 (1952); Osima, dies. Zbl. 47, 258] zeigen, daß dieser Satz als ein Fundamentalsatz der Darstellungstheorie endlicher Gruppen zu werten ist. Verf. fügt diesen Anwendungen hier noch drei weitere hinzu, für deren Behandlung sich die neue Formulierung als besonders günstig erweist. Die erste Anwendung bezieht sich auf lineare Charaktere (d. h. auf Charaktere ersten Grades). Zunächst wird gezeigt, daß sich jeder absolut irreduzible Charakter einer elementaren Gruppe $\mathcal{E}$ durch einen geeigneten linearen Untergruppencharakter induzieren läßt (der Beweis ist im wesentlichen derselbe wie der frühere Beweis des Verf., vgl. dies. Zbl. 29, 15; vgl. auch den Wittschen Beweis, loc. cit.). Diese Tatsache ermöglicht es, im Satz über induzierte Charaktere die elementaren Untergruppencharaktere zu ersetzen durch die linearen Untergruppencharaktere von $\mathcal{G}$. In der neuen Form lautet der Satz dann folgendermaßen: Eine komplexwertige Klassenfunktion θ von $\mathcal{G}$ ist genau dann ein verallgemeinerter Charakter von $\mathcal{G}$, wenn für jeden linearen Charakter λ einer elementaren Untergruppe $\mathcal{E}$ das innere Produkt

$$(\theta, \lambda)_{\mathcal{E}} = \frac{1}{(\mathcal{E}:1)} \sum_{E \in \mathcal{E}} \theta(E) \lambda(E^{-1}) \text{ ganzrational ist.}$$

Verwendet man nun die von Frobenius stammende Schlußweise, daß ein verallgemeinerter Charakter θ von $\mathcal{G}$ genau dann im gewöhnlichen Sinne absolut irreduzibel ist, wenn $(\theta, \theta)_{\mathcal{G}} = 1$ und $\theta(1) \geq 0$ ist, so erhält man fast unmittelbar den folgenden Satz: Eine komplexwertige Funktion $\theta \neq 0$ ist genau dann ein linearer Charakter von $\mathcal{G}$, wenn für jede elementare Untergruppe $\mathcal{E}$ die Einschränkung von θ auf $\mathcal{E}$ ein linearer Charakter von $\mathcal{E}$ ist. Anders formuliert: Eine Klassenfunktion, welche „im Kleinen“ überall ein linearer Charakter ist, ist es auch „im Großen“. Als Folge dieses wichtigen Satzes zeigt Verf. u. a., daß ein linearer Charakter λ einer Sylowgruppe $\mathcal{P}$ von $\mathcal{G}$ genau dann zu einem linearen Charakter von $\mathcal{G}$ fortgesetzt werden kann, wenn $\lambda(P)$ nur von der Klasse in $\mathcal{G}$ des Elements P aus $\mathcal{P}$ abhängt, wenn also $\lambda(P) = 1$ ist für alle P aus derjenigen Untergruppe $\mathcal{P}^*$ von $\mathcal{P}$, welche erzeugt wird von den Quotienten $P_1 P_2^{-1}$ aller Paare von in $\mathcal{G}$ konjugierten Elementen P_1, P_2 aus $\mathcal{P}$. Es ergibt sich daraus, daß $\mathcal{P}^*$ gleich dem Durchschnitt von $\mathcal{P}$ mit der Kommutatorgruppe $\mathcal{G}'$ von $\mathcal{G}$ ist und daß weiter $\mathcal{G}/\mathcal{G}'$ isomorph ist zu dem direkten Produkt der $\mathcal{P}/\mathcal{P}^*$, wenn $\mathcal{P}$ ein volles Repräsentantensystem der Sylowgruppen von $\mathcal{G}$ zu den verschiedenen Primzahlen durchläuft. (Für einen anderen Beweis dieses Satzes verweist Verf. auf Higman, Focal series of finite groups, erscheint im Canadian J. Math.) — Als zweite Anwendung des Satzes über induzierte Charaktere beweist Verf. einen Satz von Frobenius [vgl. S.-Ber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin 1907, 428–437 (1907)]; dieser ist eine darstellungstheoretische Verallgemeinerung des bekannteren Satzes, daß für eine Klasse $\mathcal{K}$ von $\mathcal{G}$ die Anzahl der in $\mathcal{G}$ liegenden Lösungen von $X^n \in \mathcal{K}$ ein Vielfaches des größten gemeinsamen Teilers von n und der Gruppenordnung g ist. — Die dritte Anwendung des Satzes über induzierte Charaktere bezieht sich auf die vom Verf. entwickelte Theorie der modularen Charaktere modulo einer Primzahl p . U. a. ergibt sich auch sehr leicht der Satz, daß die Cartansche Determinante modulo p von $\mathcal{G}$ eine Potenz von p ist (vgl. dies. Zbl. 26, 56).

P. Roquette.

Farahat, H.: On p -quotients and star diagrams of the symmetric group. Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 157—160 (1953).

The equivalence of the Robinson (this Zbl. 36, 155), Staal (this Zbl. 36, 155) theory of star diagrams and Littlewood's (this Zbl. 44, 257) theory of p -quotients for Young diagrams, is shown. Some simplifications of these theories are indicated. Robinson's (this Zbl. 29, 199) formula for the p -exponent in the degree of an irreducible representation of a symmetric group is proved directly, i. e. without referring to the reviewer's [Japanese J. Math. 17, 89—108 (1941)] one; cf. also Staal, l. c.

T. Nakayama.

Charles, Bernard: Le centre de l'anneau des endomorphismes d'un groupe primaire. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 1122—1123 (1953).

This paper gives a characterization of the center of the endomorphism ring of a primary abelian group as follows: Let R be the ring of integers considered as a ring of operators on G . Let R' be the ring of endomorphisms of G , R'' the center of R' . Consider the set of mappings of G into itself in the topology of simple convergence, G being considered as having the discrete topology. Then R'' is the closure of R .

D. G. Higman.

Dynkin, E. B.: Zur Theorie der kompakten Lieschen Gruppen. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 3 (55), 174—175 (1953) [Russisch].

Raševskij, P. K.: Über einige fundamentale Sätze der Theorie der Lieschen Gruppen. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 1 (53), 3—20 (1953) [Russisch].

Diese Arbeit setzt sich zum Ziel, drei an sich bekannte (aber, wie Verf. feststellt, in der russischen Literatur nur schwer zugängliche) Sätze (für die es auch in der nicht-russischen Literatur schwer sein dürfte, einfache Beweise zu finden) mit einem Minimum von Vorbereitungen zu beweisen. Die Grundlage bildet der folgende Satz A: Zu jeder affinen Darstellung

$\tilde{x}^i = \sum_{\nu=1}^n A_{\nu}^i x^{\nu} + A^i$ einer halbeinfachen lokalen Lieschen Gruppe G , gibt es einen Fixpunkt.

Verf. gibt einen geometrischen und einen algebraischen Beweis; der erstere sei hier skizziert: 1. G sei reell „unitär“, einfach zusammenhängend und kompakt angenommen. Sodann sind die Koeffizienten der affinen Darstellung beschränkt, woraus folgt, daß sie unimodular ist ($|A_{\nu}^i| = 1$). Das Volumen eines beliebigen Teiles des Darstellungsraumes wird also bei Anwendung einer Transformation der affinen Darstellung nicht geändert. Wegen der Beschränktheit der Koeffizienten kann kein Punkt des Kugelgebietes $\sum_{\nu=1}^n (x^{\nu})^2 < 1$ sich beliebig weit entfernen, so daß

alle daraus entstehenden Ellipsoidgebiete ein beschränktes Gebiet D des Raumes erfüllen, das bei allen Transformationen der affinen Darstellung in sich übergeht. Der Schwerpunkt von D ist somit Fixpunkt; denn der Schwerpunkt eines Gebietes geht bei affiner Transformation in den Schwerpunkt des Bildgebietes über. — 2. G_r und die affine Darstellung von G_r sind komplex. Unter Hinweis auf Dynkin [Uspechi mat. Nauk 2, Nr. 4, 59—127 (1947), S. 117, Satz 18] wird in der Lieschen Algebra G_r von G_r eine reell-unitäre Algebra mit den gleichen Basisvektoren $e_1, \dots, e_r$ wie G_r abgesondert, für die es nach 1. einen Fixpunkt gibt. Da sich die infinitesimalen Transformationen von G_r auch aus den Basistransformationen $e_1, \dots, e_r$ (mit komplexen Koeffizienten) zusammensetzen, kann man einsehen, daß die Fixpunkt-Eigenschaft erhalten bleibt. — 3. G_r ist reell, nicht unitär. Dieser Fall wird auf den vorigen zurückgeführt, indem G_r in eine komplexe Algebra eingebettet wird. Von dem so erhaltenen komplexen Fixpunkt werden dann die Realteile der Koordinaten die Koordinaten des gesuchten reellen Fixpunktes. Bei dem algebraischen Beweis des Fixpunktsatzes wird vom Zerlegungssatz Gebrauch gemacht, wonach es nur noch nötig ist, den Satz für einfache Gruppen zu beweisen. — Die drei hier auf Satz A gegründeten Sätze werden geometrisch formuliert. Satz I ist der Satz von der vollständigen Reduzibilität einer linearen (homogenen) Darstellung einer halbeinfachen G_r : Ist E_m invarianter Teilraum im (n -dimensionalen) Darstellungsraum E_n , so gibt es eine invariante Ergänzung E_l zu E_m , die mit E_m zusammen den ganzen Raum E_n aufspannt ($n = m + l$). Als Muster für die Schlußweise möge der Beweis dieses Satzes hier skizziert werden: Durch geeignete Wahl des Koordinatensystems in E_n kann man E_m durch die Gleichungen $x_1 = x_2 = \dots = x_l = 0$ darstellen, so daß die Gleichungen $x^{l+i} = \sum_{\alpha=1}^l a_{\alpha}^i x^{\alpha}$ ($i = 1, \dots, l$) einen Ergänzungsraum E_l

darstellen. Es ist dann leicht einzusehen, daß jede lineare homogene Transformation der x^{α} , die E_m invariant läßt, eine nicht homogene lineare Transformation der a_{α}^i , d. h. eine affine Transformation im $m \cdot l$ -dimensionalen Raum der durch die Matrizen (a_{α}^i) bestimmten Ergänzungs-