Werk

Titel: Modulfunktionen. Fastperiodische Punktionen

Ort: Berlin

Jahr: 1959

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0049|log23

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Tornehave, H.: On analytic functions of several variables. Some results concerning analytic completion. Mat. Tidsskr. B **1952**, 44—60 (1952).

Im Raum R^{2n} der komplexen Veränderlichen $(z_1, \ldots, z_n) = z = x + i\,y$ sei E_ν^{n+1} der $(n+1)$-dimensionale Teilraum $y_1 = \cdots = y_{\nu-1} = y_{\nu+1} = \cdots = y_n = 0$, ferner $G^{2n} = g_1 \times \cdots \times g_n$ ein Zylindergebiet, dessen Projektionen g_ν einfachzusammenhängende, in bezug auf die reelle Achse symmetrische Gebiete in den Ebenen der Veränderlichen z_ν sind. Verf. zeigt, daß die Holomorphiehülle $H(M^{n+1})$ der $(n+1)$-dimensionalen Punktmenge $M^{n+1} = G^{2n} \cap (E_1^{n+1} \cup \cdots \cup E_n^{n+1})$ wie folgt erhalten werden kann: Man bilde jedes g_ν konform so auf die rechte Halbebene ab, daß das in g_ν enthaltene Stück der reellen Achse in die positive reelle Achse übergeht; die Abbildungsfunktionen seien mit $\varphi_\nu(z_\nu)$ bezeichnet. Es sei B^{2n} das durch $|\arg \varphi_1(z)| + \cdots + |\arg \varphi_n(z_n)| < \pi/2$ gegebene analytische Polyeder. Dann ist $H(M^{n+1}) = G^{2n} \cap B^{2n}$. Im Beweise wird die bekannte Konstruktion der Holomorphiehüllen Reinhardtscher Körper wesentlich benutzt. Abschließend werden Beispiele behandelt und frühere Resultate des Verf. über das Schwarzsche Spiegelungsprinzip im R^{2n} erweitert (vgl. vorstehendes Ref.). *K. Stein.*

Motzkin, T. S. and I. J. Schoenberg: On lineal entire functions of n complex variables. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 517—526 (1952).

Ein Polynom $P(z_1, \ldots, z_n)$ mit reellen oder komplexen Koeffizienten heißt „lineal" (bzw. reell-lineal, bzw. posititiv reell-lineal), wenn es in Linearfaktoren mit komplexen (bzw. reellen, bzw. nichtnegativen reellen) Koeffizienten zerlegbar ist. Eine ganze Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ heißt lineal (reell-lineal, positiv reell-lineal), wenn sie in jedem kompakten Teil des Raumes der komplexen Veränderlichen $z_1, \ldots, z_n$ gleichmäßig durch lineale (reell-lineale, positiv reell-lineale) Polynome approximiert werden kann. Lineale Funktionen können als Nullstellenflächen höchstens analytische Ebenen besitzen, und diese Eigenschaft ist charakteristisch. Verff. zeigen ferner, daß eine lineale Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ genau dann reell-lineal bzw. positiv reell-lineal ist, wenn sie gewisse besondere Weierstraßsche Produktentwicklungen zuläßt. Für $n = 1$ ist diese Aussage mit älteren Ergebnissen von Laguerre und Pólya äquivalent. *K. Stein.*

Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

Tsuji, Masatsugu: Myrberg's approximation theorem on Fuchsian groups. J. math. Soc. Japan **4**, 310—312 (1952).

Folgender Satz von Myrberg (dies. Zbl. **1**, 2) wird mit Hilfe des Ergodensatzes von Hopf (Ergodentheorie, Berlin 1937, S. 72; dies. Zbl. **17**, 283) kurz gezeigt: Sei G eine Fuchssche Gruppe, die $|z| < 1$ invariant läßt und einen Fundamentalbereich mit endlichem nichteuklidischen Maße hat, sei $L(\theta)$ der Durchmesser von $|z| \leq 1$ durch den Randpunkt $e^{i\theta}$, und seien L_k seine Bilder bei den Abbildungen aus G. C sei irgendein auf $|z| = 1$ senkrechter Kreis. Dann gibt es eine Teilmenge E vom Maß 2π auf $|z| = 1$, so daß für alle $e^{i\theta} \in E$ eine Teilfolge der L_k gegen C konvergiert. *G. Lochs.*

Hervé, Michel: Sur les fonctions fuchsiennes de deux variables complexes. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. **69**, 277—302 (1952).

Verf. gibt eine ausführliche Darstellung und Begründung seiner Ergebnisse, über die er zum Teil bereits früher berichtet hatte (dies. Zbl. **30**, 387; **42**, 90; **46**, 312). Zugrunde gelegt wird ein beschränktes Gebiet $\mathfrak{G}$ in einem komplexen C^2 mit einer diskontinuierlichen Gruppe γ aus Automorphismen von $\mathfrak{G}$. Vorausgesetzt wird, daß ein volles Vertretersystem von Punkten aus $\mathfrak{G}$ nach γ in einem ganz im Innern von $\mathfrak{G}$ enthaltenen Kompaktum liegt. Eine in $\mathfrak{G}$ holomorphe Funktion Θ wird als fonction fuchsienne („f. f.") bezeichnet, wenn für eine ganze Zahl m, die Dimension der „f. f.", (1) $\Theta(f(z)) = \Theta(z)\,[\mathrm{D}f(z)]^{-m}$ für alle f aus γ und alle z aus $\mathfrak{G}$ ist, wobei $\mathrm{D}f(z)$ die Funktionaldeterminante von $f(z)$ bezeichnet. Verf. erhält folgende Hauptergebnisse: (a) Jede in $\mathfrak{G}$ meromorphe Funktion, die invariant gegenüber den Transformationen aus γ ist, läßt sich als Quotient zweier „f. f." darstellen. (b) Für hinreichend großes m ist jede „f. f." als

Poincarésche Reihe darstellbar. (c) Der Rang der Schar der „f. f." der Dimension m ist $d(m) = a\,m^2 + b(r)\,m + c(r)$, falls m hinreichend groß ist. a ist eine Gruppenkonstante, r ist der reduzierte Rest von m mod dem k. g. V. der Ordnungen der „elliptischen Substitutionen" aus γ. — Das wesentliche Hilfsmittel ist die Einführung des Begriffes der fonction ε-fuchsienne („f. ε-f."). Ist ε eine analytische Mannigfaltigkeit in $\mathfrak{G}$, die durch alle Transformationen aus γ in sich übergeführt wird, so heißt eine in $\mathfrak{G}$ holomorphe Funktion Θ „f. ε-f." der Dimension m, wenn (1) auf ε erfüllt ist. Zwei „f. ε-f." betrachtet man als äquivalent, wenn sie auf ε übereinstimmen. Der Rang der Schar der so entstehenden Klassen von Funktionen läßt sich leicht als $\delta_\varepsilon(m) = O(m)$ abschätzen. Durch Konstruktion passender Poincarésche Reihen erhält man $d(m)/m^2 > 1/2\,k^2 > 0$ für große m und durch Vergleich mit $\delta_\varepsilon(m)$ die Existenz einer „f. f.", die auf ε verschwindet, was dann unmittelbar (a) liefert. Um (b) und (c) zu erhalten, muß man für ε die Nullstellenmannigfaltigkeit einer zu diesem Zweck konstruierten „f. f." $\alpha(z)$ benutzen, die insbesondere nur einfache Nullstellen haben darf. Man konstruiert weiter mit Poincaréschen Reihen zwei „f. f." $\beta_1(z)$ und $\beta_2(z)$ so, daß $\beta_1(z) = 0$, $\alpha(z) = 0$ nur isolierte Punkte enthält, in denen $\beta_2(z)$ nicht verschwindet. Diese Funktionen ergeben mit Hilfe der Cartanschen Idealtheorie eine Darstellung der Klassen der „f. ε-f." in der Form (2) $(\Theta) = (\beta_1)\,(g) + (\beta_2)\,(h)$, worin die Klasse (h) nicht nur „f. ε-f.", sondern auch mindestens eine „f. f." enthält. Mit dieser Darstellung kann man $\delta_\varepsilon(m)$ zu (3) $\delta_\varepsilon(m) = \lambda\,m + \varrho(r)$ bestimmen und damit dann $d(m)$ ermitteln. (b) ergibt sich ebenfalls ohne Schwierigkeiten. — Die Beschränkung auf den C^2 war vor allem darum nötig, weil wesentlich ausgenutzt wurde, daß jeder Punkt von $\alpha(z) = 0$ uniformisierbar ist.

K.-B. Gundlach.

Bohr, Harald: A survey of the different proofs of the main theorems in the theory of almost periodic functions. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) **1**, 339—348 (1952).

Expository paper. *E. Følner.*

Kopeć, J.: On vector-valued almost periodic functions. Ann. Soc. Polon. Math. **25**, dédié à H. Steinhaus, 100—105 (1952).

Die Sätze über fastperiodische Funktionen mit Werten in einem Banachraum werden aus den entsprechenden Sätzen über (nach Bohr) eigentlich-fastperiodische Funktionen hergeleitet. *W. Maak.*

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Viktorovskij, E. E.: Über einen allgemeinen Existenzsatz für die Lösungen von Differentialgleichungen, der mit der Untersuchung von Integralungleichungen zusammenhängt. Mat. Sbornik, n. Ser. **31 (73)**, 27—33 (1952) [Russisch].

Im Anschluß an den Existenzbeweis für die Integrale der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit stetiger rechter Seite von Perron [Math. Ann. **76**, 471—484 (1915)] und ganz nach seinem Muster wird ein Existenzbeweis für die Lösungen derselben Gleichung unter allgemeineren Voraussetzungen über die Funktion $f(x, y)$ geführt. Diese Voraussetzungen sind noch etwas allgemeiner als die von Carathéodory in seinem Buch „Vorlesungen über reelle Funktionen" (Leipzig 1918) eingeführten: $f(x, y)$ sei stetig in y, $-\infty < y < +\infty$, bei fast allen festen $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$, meßbar in x, $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$, bei jedem festen y, und es sei $|f(x, y)| \leq M(x)\,\varphi(|y|)$, wo $M(x)$ eine summierbare Funktion bedeutet und $\varphi(y)$ eine für $y \geq 0$ erklärte, stetige, positive, monoton wachsende Funktion, für die $\int_a^\infty \frac{dy}{\varphi(y)} = \infty$ gilt. Gesucht werden durch den Punkt (x_0, y_0) gehende, absolut stetige Integrale obiger Differentialgleichung. Die zur Bestimmung eines minimalen Integrales dieser Art eingeführte Klasse $\mathfrak{M}(f; y_0)$ von durch den Punkt (x_0, y_0) gehenden, stetigen Näherungsfunktionen $u(x)$ wird nicht wie bei Perron durch die Differentialungleichung $u' < f(x, u)$ definiert, sondern durch die (in ähnlicher Weise ausnutzbare) Integralungleichung $u(x_2) - u(x_1) \geq \int_{x_1}^{x_2} f(x, u(x))\,dx$, gültig für jedes Intervall $[x_1, x_2] \subseteq [x_0, x_0 + \alpha]$, mit umgekehrtem Sinn des Ungleichheitszeichens und zugelassenem Gleichheitszeichen. Dadurch erscheint im Gegensatz zu Perron das Minimalintegral $u_0(x)$ nicht als obere, sondern als untere Grenzfunktion aller Funktionen der Klasse $\mathfrak{M}(f; y_0)$: $u_0(x) = \inf u(x)$. Analoges gilt, mutatis mutandis, für das Maximalintegral. Durch den Nachweis, daß $u_0(x)$ absolut stetig ist und fast überall in $[x_0, x_0 + \alpha]$ der Differentialgleichung genügt, ist der Existenzbeweis geführt. Die Hilfsmittel dazu entstammen den Grundlagen der Theorie der reellen Funk-

tionen und der Lebesgueschen Integrale. Am Schluß wird noch eine Angabe gemacht über die Verallgemeinerung des Satzes auf ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung mit mehreren unbekannten Funktionen. *E. Svenson.*

McAllister, B. L. and C. J. Thorne: Reverse differential equations and others that can be solved exactly. Studies appl. Math. **6**, 26 p. (1952).

Es wird eine Zusammenstellung derjenigen Fälle gegeben, in denen gewöhnliche nichtlineare Differentialgleichungen elementar integrierbar sind, auf elementar integrierbare zurückgeführt oder in ihrer Ordnung reduziert werden können. Besonders ausführlich werden diejenigen Differentialgleichungen behandelt, die durch Vertauschung der Rollen der abhängigen und unabhängigen Veränderlichen vereinfacht werden können. Nützlich hierbei ist eine Tafel, in welcher die Ableitungen der Originalfunktion durch die Ableitungen der Umkehrfunktion ausgedrückt werden. Ein großer Teil von nichtlinearen Differentialgleichungen, bei denen die Rolle der Veränderlichen vertauscht wird, kann auf eine Abelsche Differentialgleichung reduziert werden. *W. Quade.*

Campbell, J. G.: A criterion for the polynomial solutions of a certain Riccati equation. Amer. math. Monthly **58**, 388—389 (1952).

Rainville (this Zbl. **26**, 402) showed that the factorization of certain differential operators is equivalent to finding polynomial solutions of a Riccati differential equation, $A\,y' = B_0 + B_1\,y + B_2\,y^2$, where A, B_0, B_1, B_2 are polynomials, say of degrees a, b_0, b_1, b_2 respectively. The present note shows, by considering the degrees of the various terms, that, if the equation should possess a polynomial solution of degree m, then, if $a = 1 + b_1$, $b_0 - b_1 \leq m \leq b_1 - b_2$, while if $a \neq 1 + b_1$, m must be one of the five numbers $1 + b_0 - a$, $a - b_2 - 1$, $b_0 - b_1$, $\frac{1}{2}(b_0 - b_2)$, $b_1 - b_2$. *W. W. Sawyer.*

Plainevaux, J. E.: Sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **38**, 1142—1148 (1952).

L'A. obtient, sans faire appel ni à la transformation intégrale, ni au calcul symbolique, la formule qui donne la solution correspondant au repos à l'instant initial d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants avec second membre. *M. Hukuhara.*

Barbuti, Ugo: Sulla stabilità delle soluzioni per la equazione: $x'' + B(t)\,x = 0$. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **12**, 170—175 (1952).

The author gives sufficient conditions for the boundedness of the solutions of the linear equation (1) $x'' + [b^2 - C(t)]\,x = 0$, where $b \neq 0$ is a real constant, and $C(t)$, $t_0 \leq t < +\infty$, a real function supposed L^* integrable in every finite interval $[t^0, t^1]$, $t^0 < t^1 < +\infty$. Put $\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t^0}^{t} C(\tau) \sin 2b\tau\, d\tau$, $\psi(t) = \psi_0 + \int_{t^0}^{t} C(\tau) \cos 2b\tau\, d\tau$, where φ_0, ψ_0 are constants. — I. If two constants φ_0, ψ_0 exist such that $\varphi(t)$, $\psi(t)$ are bounded and L^2-integrable in $(t^0, +\infty)$ then all solutions of (1) are bounded in $(t^0, +\infty)$. — II. If the integrals $\Phi(t) = \int_{t}^{+\infty} C(\tau) \sin 2b\tau\, d\tau$, $\Psi(t) = \int_{t}^{+\infty} C(\tau) \cos 2b\tau\, d\tau$, $t^0 \leq t < +\infty$, exist and are L^2-integrable functions in $(t^0, +\infty)$, then all solutions of (1) are bounded in $(t^0, +\infty)$. — III. If $C(t) = f(t)\,\omega(t)$, where $f(t)$ is monotone in $(t_0, +\infty)$, and a constant $M > 0$ exists such that $\left|\int_{t_1}^{t_2} \omega(\tau) \sin 2b\tau\, d\tau\right| < M$, $\left|\int_{t_1}^{t_2} \omega(\tau) \cos 2b\tau\, d\tau\right| < M$ for all $t^0 \leqq t_1 < t_2 < +\infty$, then all solutions of (1) are bounded in $(t^0, +\infty)$. *L. Cesari.*

Kulikov, N. K.: Zur Bestimmung des Grenzwertes der allgemeinen Lösung einer nichtlinearen Differentialgleichung erster Ordnung. Priklad. Mat. Mech. **16**, 729—734 (1952) [Russisch].

Verf. untersucht die Stabilität der Lösungen der nichtlinearen Differentialgleichung $\dot{x} + F(x) = M \sin pt$, M und p const., in welcher $F(x)$ eine stetige positive Ableitung besitzt. Dabei macht er die Annahme, daß die Differentialgleichung eine periodische Lösung mit der Periode τ $(0 \leqq \tau \leqq 2\pi/p)$ besitzt und eine Beziehung $\Phi(x_\infty, \tau) = 0$ besteht, die er als „Grenzwert" der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung bezeichnet. Es wird ein Satz mitgeteilt, mit dessen Hilfe es möglich ist, die Funktion Φ durch M, p, $F(x)$ und τ darzustellen. Der Satz wird an Beispielen erläutert, und es werden die Eigenschaften der allgemeinen Lösung diskutiert. *W. Quade.*

Blaquière, A.: Les oscillateurs non linéaires et le diagramme de Nyquist. J. Phys. Radium **13**, 527—540 (1952).

Blaquière, A.: Adaptation générale de la méthode du diagramme de Nyquist dans le domaine non linéaire. J. Phys. Radium **13**, 636—644 (1952).

Diese beiden Arbeiten enthalten manche Anregungen, lassen aber auch viele Fragen offen. Verf. behandelt einige Beispiele nichtlinearer Schwingungsdifferentialgleichungen (1) $H_0\{x(t)\} = 0$, welche die Form (2) $H_0\{x(t)\} \equiv L'\{x\} + L''\{x^3\} = 0$ mit linearen Operatoren L', L'' haben. [Anm. d. Ref.: Das Verfahren läßt sich auf Gleichungen der Gestalt (2') $P_0(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n)}) \equiv H_0\{x(t)\} = 0$ übertragen, wobei die Funktion P_0 in x ganz-rational und in den Ableitungen $\dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n)}$ linear sei, während sie von t nicht explizit abhänge.] Die vom Verf. behauptete Möglichkeit der Übertragung auf allgemeinere nichtlineare Gleichungen wird nicht erläutert. Es wird vorausgesetzt, daß (1) eine sinusähnliche Lösung der Form (3) $x(t) = a(t) \sin \psi(t)$ mit $\psi(t)/t = \omega(t)$; $a(t) \geqq 0$ zulasse, wobei die Amplitude $a(t)$ und die Frequenz $\omega(t)$ nur langsam veränderlich sein sollen. $a(t)$ läßt sich dann (nicht eindeutig! Ref.) als Einhüllende der Schwingung $x(t)$ bestimmen. [Anm. d. Ref.: Vorzuziehen wäre wohl (3') $x(t) = a(t) \sin \psi(t)$ mit $\omega(t) = d\psi/dt$; (3) wird gewöhnlich nur für kürzere Zeitabschnitte bei passender Verschiebung des t-Nullpunktes zutreffen.] Diese Voraussetzung bedeutet, daß (1) nur „schwach nichtlinear" ist. — (1) wird nun durch eine andere Gleichung ersetzt, die man als „säkular-nichtlinear" bezeichnen könnte, weil sich in dieser Form (4) $H(a)\{x(t)\} = 0$ die Nichtlinearität nur durch das Auftreten der Amplitude in den Beiwerten des im übrigen bezüglich $x(t)$ linearen Operators $H(a)$ bemerkbar macht. Dabei gibt Verf. keine allgemeine Vorschrift, wieweit man in $H(a)$ die Veränderlichkeit von $a(t)$ berücksichtigen soll. Er setzt vielfach $H(a)$ in (4) als gegeben voraus und läßt hier auch gebrochen-rationale Operatoren (bezüglich d/dt) zu. Der entscheidende Gedanke dieser beiden Arbeiten — von denen die zweite, entgegen ihrem Titel, nicht wesentlich allgemeiner ist als die erste — besteht nun darin, daß Verf. irgendeinen Wert der Funktion $a = a(t)$ festhält, um dann (4) insbesondere auf (5) $x(t) = a \sin \omega t$ (mit festen a, ω) anzuwenden. So bekommt er eine Schar linearer Operatoren (6) $L_1(a) = H(a) \cdot a$, die nur noch auf die Funktionen $\sin \omega t$ wirken sollen. Damit werden aber alle Methoden der komplexen Schwingungsforschung benutzbar. [Zus. d. Ref.: Physikalisch mag es, besonders in der Elektronik, wohl Schwingungssysteme geben, die sich ziemlich unmittelbar durch eine Gleichung der Gestalt (4) beschreiben lassen. Mathematisch jedoch bleibt hier die Voraussetzung unklar: Verf. zeigt zwar am Falle (2), wie sich einem nichtlinearen Operator H_0 ein säkularer Operator $H(a)$ zuordnen läßt, gibt aber nicht an, wie $H(a)$ allgemein zu bestimmen sei. Sein Verfahren läßt sich für die unter (2') zusammengefaßten Fälle in der Weise verallgemeinern, daß man H_0 auf (5) anwendet und die Grundschwingung der zugehörigen Fourier-Entwicklung (7) $H_0\{a \sin \omega t\} = \Sigma P_n(a, \omega) \sin n\omega t$ $(n = 1, 2, \ldots)$ durch einen linearen Operator darstellt (was eindeutig möglich ist): (8) $P_1(a, \omega) \sin \omega t = L_1(a)\{\sin \omega t\}$. Darauf kann man noch $H(a) = a^{-1} L_1(a)$ setzen. Die Voraussetzung, daß in (2') P_0 bezüglich der Ableitungen linear sein solle, kann gemildert werden; sie soll nur verhindern, daß L_1 von höherer Ordnung werden kann als H_0. Ist H_0 nur schwach nichtlinear, so kann man jetzt in (7) die Oberschwingungen vernachlässigen und (1) durch (4) ersetzen.] Nachdem die Schar (6) der „berührenden linearen Operatoren" $L_1(a)$ gewonnen ist, ergeben die Nullstellen (9) $\omega(a) = \omega_1(a) + i\,\omega_2(a)$ der Gleichung (10) $e^{-i\omega t} L_1(a)\{e^{i\omega t}\} = L(a, \omega) = 0$ eine „berührende sinusartige Schwingung" (11) $y(t) = a \exp i\omega t = a \exp(-\omega_2 t) \exp i\omega_1 t$. Verf. setzt voraus, daß das System (1) schwingungsfähig sei, daß es also eine sich anfachende Schwingung (3) gebe, deren Amplitude $a(t)$, von 0 anfangend, einem stabilen Grenzwert a_s zustrebt. Es wird demgemäß für $0 \leqq a$ a_s stets eine Wurzel (9) mit $\omega_2 < 0$ geben. Die Dauerschwingung $x(t) = a_s \sin \omega_s t$ wird durch $\omega_2 = 0$ gekennzeichnet sein: (12) $L(a_s, \omega_s) = 0$ mit reeller Frequenz $\omega_s = \omega_1(a_s)$. — Die Funktionswerte (13) $z = L(a, \omega) \equiv U(a, \omega) + i\,V(a, \omega)$ ergeben für reelle Werte von a und ω zwei Kurven-

scharen in der komplexen Ebene: $a = \text{const}$, $\omega = \text{const}$. Von diesen können die Amplitudenkurven ($a = \text{const}$) nach Nyquist dazu dienen, durch ihren Umlaufssinn um den Nullpunkt die Existenz einer sich anfachenden Schwingung (1) anzuzeigen, was Verf. aber nur nebenbei erwähnt. Er weist darauf hin, daß nach (12) nur die Amplitudenkurve $a = a_s$ durch $z = 0$ geht und daß zwar alle Frequenzkurven ($\omega = \text{const}$) wegen des Faktors a in $L_1(6)$ aus dem Nullpunkt entspringen, daß dann aber nur die Kurve $\omega = \omega_s$ für endliches $a = a_s$ nochmals durch den Nullpunkt geht. Die benachbarten Frequenzkurven werden sich ebenfalls zurückwenden, um nahe am Nullpunkt vorbeizugehen. Anwendungsmöglichkeiten: I. Die genannten Eigenschaften des Netzes der Amplituden- und Frequenzkurven geben unmittelbar ein Verfahren zum Aufsuchen der stabilen Schwingung (a_s, ω_s). II. Die Schnittpunkte der Amplitudenkurven $a = a_1$ mit den nach (9) zugeordneten Frequenzkurven $\omega = \omega_1(a_1)$ liefern eine Übergangskurve, längs welcher sich der Einschwingungsvorgang vollzieht. Diese Kurve geht von $z = 0$ aus, wendet sich und läuft dann beim Erreichen der Dauerschwingung wieder in den Nullpunkt hinein. Der Winkel, unter dem sie die beiden Kurvenscharen dabei schneidet, und deren Dichten bestimmen den Zusammenhang der Änderungen von a und ω bei Störungen der stabilen Schwingung. Nur wenn die Übergangskurve im Nullpunkt die Grenzfrequenzkurve berührt (zur Grenzamplitudenkurve steht sie dort normal), ist die Grenzfrequenz störungsunempfindlich (wichtig für die Brauchbarkeit des Schwingers zur Zeitmessung!). Formeln ergeben sich nach (13) aus den Ableitungen von U und V im Grenzpunkt. III. Aus der Diff.-Gl. $da/dt = -a\,\omega_2(a_1)$, welche für die Amplitude der in $a(t) = a_1$ berührenden Schwingung (11) gilt, bildet Verf. die Gleichung (14) $da/dt + a\,\omega_2(a) = 0$ und gewinnt durch Integration ein Gesetz $a = a(t)$, worin er das des Einschwingvorganges (3) erkennt. IV. Recht einfach läßt sich auch das Problem der Synchronisation, d. h. der Erzeugung erzwungener Schwingungen vorbestimmter Frequenz, behandeln, wiederum mit der für das ganze Verfahren typischen Beschränkung auf die Grundschwingung. Wird in (4) die rechte Seite durch $E \sin(\omega^* t + \varphi)$ oder in komplexer Schreibweise durch $E \exp i(\omega^* t + \varphi)$ ersetzt, so ergibt sich mit dem Ansatz $x(t) = a^* \exp i\omega^* t$ nach (6) die Gleichung $L_1(a^*)\{\exp i\omega^* t\} = E \exp i(\omega^* t + \varphi)$, die sich mit (10) zu (15) $L(a^*, \omega^*) = E\,e^{i\varphi}$ vereinfacht. Man hat also auf der Frequenzkurve $\omega = \omega^*$ den Schnittpunkt M mit dem Betragkreise $|z| = E$ zu suchen und den Parameter $a = a^*$ der durch M gehenden Amplitudenkurve festzustellen. Das Argument von M ist gleich der Phasenverschiebung φ (die vom Verf. angegebene Regel stimmt nicht ganz). So läßt sich die Funktion $a^*(E)$ ermitteln. V. Bei dieser Konstruktion erkennt man leicht, daß es zu jedem ω im allgemeinen ein Intervall für die Amplitude E der erregenden Schwingung gibt, wo sich drei Schnittpunkte M finden, während für noch kleinere oder noch größere E nur ein Schnittpunkt entsteht. Es kommt jedoch noch auf die Stabilität der gefundenen Schwingungen an, insbesondere kann bei sehr schwacher Erregung E eine stabile Schwingung unmöglich sein. Die Grenzen des Bereiches (E, ω), in dem Synchronisation des Schwingers möglich ist, werden durch die Berührungspunkte der E-Kreise mit den ω-Kurven bestimmt. Zur Prüfung der Stabilität der erzwungenen Schwingung wird ein Rechenverfahren angegeben. [Ref. bezweifelt, daß hierbei der säkulare Operator $H(a)$ die Veränderlichkeit von $a(t)$ ausreichend erfaßt, es sei denn in Nähe der Grenzschwingung (a_s, ω_s). Das gleiche Bedenken ist vielleicht auch bezüglich der Ermittlung der Amplitudenfunktion $a(t)$ aus (14) am Platze.] *U. T. Bödewadt.*

Otsuki, Tominosuke: On a boundary value problem of systems of paths in plane. Tôhoku math. J., II. Ser. **4**, 284—293 (1952).

The author considers differential equations of the second order of the type

$$(*) \qquad y'' = A(x, y)\,y'^3 - B(x, y)\,y'^2 + C(x, y)\,y' - D(x, y),$$

where A, B, C, D are bounded continuous functions in the (x, y) plane and proposes the following problem: When we take arbitrary two points in the (x, y) plane, is there any integral curve (path) which passes through these two points? The referee treated the special case where A, B, C, D are all constants (this Zbl. **37**, 343) and got the following results: Differential equations of such kind can be classified into two types. For one of them any two points can be bound always by a path, and for the other one any point can be bound by a path with those and only those points which lie between certain parallel lines at equal distance from the first point. The author calls these as type (α) and (β) and he first gives another proof of it getting moreover two invariants Φ and Ψ such that they are homogeneous polynomials of A, B, C, D and $\Phi \neq 0$ and $\Psi > 0$ are the necessary and sufficient conditions in order that (1) is of type (β). In the second place, he considers the general case getting the following results: Suppose that for two given points (a_0, b_0), (a_1, b_1) $(a_0 \quad a_1)$ there exists a path binding them in the system of paths which are given by the differential equation $y'' = A(a_0, b_0)\,y'^3 - B(a_0, b_0)\,y'^2 + C(a_0, b_0)\,y' - D(a_0, b_0)$. Then, if the differential equations $dz/dx = f_1(z)$, $dz/dx = F_1(z)$ where $f_1(z)$ and $F_1(z)$ are continuous functions of z such that $f_1(z) < f(z) = \text{g. l. b. } P(x, y, z)$, $F_1(z) > F(z) = \text{l. u. b. } P(x, y, z)$, $P(x, y, z) = A(x, y)\,z^3 - B(x, y)\,z^2 + C(x, y)\,z - D(x, y)$, are soluble in $|x| \leq a_1 - a_0$ under the initial condition $z(0) = (b_1 - b_0)/(a_1 - a_0)$, there exists a path binding them in the given

system of paths. The key point of the proof is to put

$$H(x,\tau) = \frac{(a_1 - x)(\tau - a_0)}{(a_1 - a_0)} \quad \text{for} \quad x \geqq \tau, \quad = \frac{(a_1 - \tau)(x - a_0)}{(a_1 - a_0)} \quad \text{for} \quad x < \tau,$$

$$\bar{y}(x) = -\int_{a_0}^{a_1} H(x,\tau)\, P(\tau, y(\tau), z(\tau))\, d\tau + \frac{(a_1 - x)\, b_0 + (x - a_0)\, b_1}{a_1 - a_0},$$

$$\bar{z}(x) = -\int_{a_0}^{a_1} \frac{\partial}{\partial x} H(x,\tau)\, P(\tau, y(\tau), z(\tau))\, d\tau + \frac{b_1 - b_0}{a_1 - a_0}$$

and to find a fixed element in the function space B which consists of pairs of functions $(y(x), z(x))$ such that $y(x), z(x)$ are continuous functions in $a_0 \leqq x \leqq a_1$. *S. Sasaki.*

Coddington, E. A.: On the spectral representation of ordinary self-adjoint differential operators. Proc. nat. Acad. Sci. USA **38**, 732—737 (1952).

Übertragung der von K. Kodaira und anderen entwickelten Theorie der Eigenwertprobleme selbstadjungierter Differentialgleichungen $2n$-ter Ordnung auf den Fall beliebiger, auch ungerader Ordnung unter Zulassung komplexer Koeffizienten. Da die Differentialoperatoren nicht mehr reell sind, können sie ungleiche Defektindizes besitzen, es tritt daher auch der Fall ein, daß keine selbstadjungierten Randbedingungen existieren. Es wird für den „Grenzpunktfall", in dem das Problem ohne Randbedingungen hermitesch ist, ein Entwicklungssatz hergeleitet, der die sonst übliche Form besitzt. Wesentliches Beweiselement ist ein Satz von B. M. Levitan (dies. Zbl. **41**, 57). *H. O. Cordes.*

Zadiraka, K. V.: Zur Konstruktion von zweiseitigen Approximationen für die Eigenwerte des Sturm-Liouvilleschen Randwertproblems. Priklad. Mat. Mech. **16**, 735—738 (1952) [Russisch].

In $y'' + Q(x,\lambda)\, y = 0$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$, $0 \leqq x \leqq l$, sei $\mu = \mu(\lambda)$ das Maximum von $Q(x,\lambda)$ in $0 \leqq x \leqq l$. Es wird $m^2(\lambda)$ für $\mu < 0$ zu $-\mu$, für $0 < \mu < (\pi/l)^2$ zu μ und für $\mu > (\pi/l)^2$ zu $(\pi/l)^2$ definiert. Beim Iterationsverfahren $y''_{n+1} \mp m^2(\lambda)\, y_{n+1} = [\pm m^2(\lambda) - Q(x,\lambda)]\, y_n$ (y_{n+1} erfüllt die Anfangsbedingungen, $n = 0, 1, 2, \ldots$) konvergiert y_n gegen die Lösung y für alle λ, und zwar für $y_0(x,\lambda) \leqq y(x,\lambda)$ alternierend, d. h. $y_2, y_4 \ldots$ sind untere, $y_1, y_3 \ldots$ obere Schranken für y. Das wird auf die Eigenwertaufgabe $y'' + [\lambda \varrho(x) - q(x)]\, y = 0$, $y(0) = y(l) = 0$ angewandt, indem $\partial y(x,\lambda)/\partial y = 1$ hinzugenommen wird. Mit $y_{2k}(l,\lambda) \leqq y(l,\lambda) \leqq y_{2k-1}(l,\lambda)$ erhält man auch obere und untere Schranken für den Eigenwert λ. Zahlenbeispiel für den kleinsten Eigenwert bei $y'' + \lambda(1 + x)\, y = 0$, $y(0) = y(1) = 0$. *L. Collatz.*

● **Dubošin, G. N.: Grundzüge der Theorie der Stabilität der Bewegung.** Moskau: Verlag der Moskauer Universität 1952. 318 S. R. 8.30 [Russisch].

Dans son célèbre ouvrage, traduit en français sous le titre: „Problème général de la stabilité des mouvements" (Moskau 1950; nous noterons P les références à ce livre), A. Liapounov a édifié la théorie de la stabilité des solutions de certains systèmes différentiels. Le champ d'application de la théorie n'a pas cessé de s'étendre depuis soixante ans et l'oeuvre du mathématicien russe est loin d'avoir épuisé sa fécondité. Aussi bien, le nombre des lecteurs de P s'accroit; mais sa lecture n'en demeure pas moins difficile au néophyte. Il y a donc un intérêt majeur à présenter l'essentiel de P d'une manière accessible aux étudiants: c'est le but poursuivi par l'A. du présent ouvrage. L'A. suit P de très près; mais il simplifie souvent les démonstrations, multiplie les exemples, commente très clairement les passages difficiles. Il semble que l'A. a pleinement atteint son but; son livre rendra bien des services. — Analysons rapidement la table des matières. Chap. I: Définitions de la stabilité au sens de Liapounov; formation des équations aux variations du système différentiel donné, de celles du mouvement perturbé. Chap. II: Méthode d'intégration des équations au moyen des séries de Liapounov. L'A. insiste sur les services que peut rendre cette méthode en analyse et en physique mathématique et met en évidence les difficultés de son emploi pour obtenir des critères pratiques de stabilité: notons qu'il s'agit là, au fond, d'une variante heureuse des résultats de Cauchy concernant les équations différentielles analytiques. Chap. III: La méthode de Liapunov proprement dite, basée sur l'emploi de la fonction V: critères pratiques de stabilité de Liapounov. Cas ordinaire; cas singulier. C'est ici qu'on trouvera l'essentiel de la théorie de Liapounov. Chap. IV: Solution du problème de la stabilité dans le