Werk

Titel: Algebra und Zahlentheorie

Ort: Berlin

Jahr: 1953

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0047|log6

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

the original axiom schemes B2, B3 by (B) $(P \to Q) \to ((P \to (Q \to R)) \to (P \to R))$ and prove similar results. In this case the conditions imposed on the implication function are intermediate between the two previous conditions. — In the fourth chapter the foundations of the theory of m-valued first order predicate calculi are developed and in the fifth chapter these calculi are formalised. The formalisations are shown to be deductively complete and it is also shown that every assertion of the calculus is acceptable according to the truth-value stipulation. The formalisation is the same as that of the authors' first paper, except that the axiom schemes which contain only symbols of the propositional calculus are altered in the same way as at the beginning of the third chapter. The „standard" conditions of the authors' papers are also weakened in a manner similar to that of the beginning of the third chapter. — In the sixth chapter the previous results are applied to formalise m-valued predicate calculi of the first order based on the primitives of Łukasiewicz together with a particular generalisation of the two-valued universal quantifier. — In the last chapter a number of unsolved problems are stated. The book concludes with a copious bibliography. *A. Rose.*

Götlind, Erik: Some Sheffer functions in n-valued logic. Portugaliae Math. **11,** 141—149 (1952).

The author shows that a certain class of second degree functions are Sheffer functions. Such a function may be denoted by p/q and its truth-value is determined as follows. Let the truth-values of p, q, p/q be A_i, A_j, $F(A_i, A_j)$ respectively, where $A_1, A_2, \ldots, A_n$ is a permutation of the truth-values $1, 2, \ldots, n$. It is shown that p/q is a Sheffer function provided that the following conditions are satisfied, A_{i+kn} being regarded as A_i where $1 \leq i \leq n$: (1) $(a, n) = 1$; (2) $b \neq 1 + a$; (3) $r \neq \frac{1}{2}n, n$; (4) $1 \leq r \leq n$; (5) $F(A_1, A_i) = A_{1+a}$ $(i \neq 1 + r)$; (6) $F(A_n, A_i) = A_{i+a}$ $(i \neq r)$; (7) $F(A_i, A_n) = A_{i+a}$ $(i \neq n - r)$; (8) $F(A_i, A_i) = A_{i+a}$; (9) $F(A_i, A_{i+r}) = A_b$; (10) There exists i such that one of the following four equations holds:

$$F(A_{i-1-a+b-r}, A_i) = A_{b+r},\quad F(A_{i-1-a+b-r}, A_i) = A_{b-r},$$
$$F(A_i, A_{i-1-a+b-r}) = A_{b+r},\quad F(A_i, A_{i-1-a+b-r}) = A_{b-r}.$$

A. Rose.

Algebra und Zahlentheorie.

● **Aiken, D. J. and K. B. Henderson: Algebra, its big ideas and basic skills. Book II.** New York: McGraw-Hill Book Company 1952. XII, 397 p. $ 2,72.

● **Phillips, Lewis W.: Elementary mathematics.** London: MacDonald and Co. (Publishers), Ltd., 1952. 339 p. 12s. 6d. net.

Gupta, Hansraj: A note on sums of powers. Math. Student **19,** 117 (1952).

Moessner, Alfred: Eine Bemerkung über die Potenzen der natürlichen Zahlen. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1951,** 29 (1952).

Dans la suite indéfinie des entiers naturels, on supprime chaque $k^{\text{ième}}$ terme (les entiers k, $2k, \ldots$); on forme la suite des sommes partielles de la série $1 + 2 + 3 + \cdots$ restante; dans cette suite on supprime chaque $(k-1)^{\text{ième}}$ terme; on forme à nouveau la suite des sommes partielles de la série restante, et ainsi de suite. La $k^{\text{ième}}$ suite obtenue de cette manière est la suite des $k^{\text{ième}}$ puissances $1^k, 2^k, 3^k, \ldots$ — Ce théorème remarquable attend sa démonstration. *S. Bays.*

Perron, Oskar: Beweis des Moessnerschen Satzes. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1951,** 31—34 (1952).

L'A. démontre le théorème de Moessner (réf. ci-dessus), en particulier par un passage de n à $n + 1$. *S. Bays.*

Carlitz, Leonard: Note on a paper of Shanks. Amer. math. Monthly **59,** 239—241 (1952).

Il s'agit de la formule suivante établie par Shanks $\binom{x}{i}^k = \sum_{s=1}^{ik-i+1} A_{ks}^i \binom{x+s-1}{ik}$, les A_{ks}^i étant des entiers positifs, déterminés par la formule de récurrence $A_{ks}^i = A_{k,ik-i-s+2}^s$. L'A. ajoute plusieurs remarques concernant cette formule. Il généralise en particulier les formules pour A_{ks} se rapportant au cas $i = 1$, de Euler déjà:

$$A_{ks} = \sum_{r=0}^{s} (-1)^r \binom{k+1}{r} (s-r)^k, \quad k \geq 1,$$

et de Worpitzky: $A_{k+1,s} = (k + 2 - s) A_{k,s-1} + s A_{ks}$. Son résultat qui paraît le plus intéressant est le suivant: Soit $f(x)$ un polynôme arbitraire de degré $\leq m$; on a $f(x) = (-1)^m \sum_{s=0}^{m} C_s \binom{x+s-1}{m}$ où les coefficients C_s sont déterminés par $C_s = \sum_{r=0}^{s} (-1)^r \binom{m+1}{r} f(r-s)$. *S. Bays.*

Kombinatorik:

García Pradillo, Julio: Permutationen von n Elementen und i Inversionen. Gac. mat., Madrid **4**, 125—130 (1952) [Spanisch].

Etant donnée une permutation des éléments 1, 2, 3, . . ., n, on sait [Gergonne, Ann. de Math. IV. Sér., 148 (1813)] que deux éléments, consécutifs ou non, de cette permutation présentent une inversion si le plus grand est écrit à gauche du plus petit. L'A. redécouvre et publie pour la première fois dans la littérature espagnole l'équation aux différences qui permet de calculer le nombre $P(n, i)$ des permutations ayant i inversions; relation déjà obtenue par Muir [Proc. Edinburgh math. Soc. **22**, 454, Nr. 17 (1899)] dont l'A. ne semble pas avoir connu les résultats. $P(n, i) = P(n-1, i) + P(n, i-1) - P(n-1, i-n)$; $P(n, k) = 0$ si k est négatif. Table de $P(n, i)$ jusqu'à $n, i = 10$. Mise de $P(n, i)$ sous la forme: $\sum \binom{n-i}{t} P(i+t, i-t)$; $(t = 0, 1, 2, \ldots, i)$ d'après l'expression connue des différences finies. Fonction génératrice de $P(n, i)$ (Muir, Ibid. 456, Nr. 20). Vérifications numériques. Page 128, lignes 16 et 18 lire x^i au lieu de x; ligne 21, lire h au lieu de 2 dans le coefficient binomial. Page 130, dernière ligne, les coefficients doivent être: -5, -165, -356, $+516$ au lieu de -23, -172, -354, $+540$. *A. Sade.*

Bush, K. A.: A generalization of a theorem due to MacNeish. Ann. math. Statistics **23**, 293—295 (1952).

Neuer und einfacherer Beweis einer Boseschen Verallgemeinerung von MacNeishs Satz, daß man $r - 1$ orthogonale lateinische Quadrate der Seite s konstruieren kann, wenn r den kleinsten Faktor in der kanonischen Darstellung von s als Produkt teilerfremder Primzahlpotenzen bedeutet. *R. Sprague.*

Norton, Donald A.: Groups of orthogonal row-latin squares. Pacific J. Math. **2**, 335—341 (1952).

Verf. bezeichnet als pseudo-lateinisch (lat.) ein Quadrat mit n^2 Feldern, in dem von n paarweis verschiedenen Elementen jedes n-mal auftritt, und als zeilen-lat. bzw. spalten-lat. ein Quadrat (Q.), das in jeder Zeile bzw. Spalte alle n Elemente aufweist. Es wird eine Verknüpfung definiert, vermöge welcher die zeilen-lat. Q. eine Gruppe bilden, und gezeigt, daß die Existenz von Klassen paarweis orthogonaler lat. Q. von dem entsprechenden Problem für zeilen-lat. Q. abhängt. Einige Klassen von orthogonalen zeilen-lat. Q., die bei der Verknüpfung entstehen, werden untersucht. *R. Sprague.*

Bush, K. A.: Orthogonal arrays of index unity. Ann. math. Statistics **23**, 426—434 (1952).

L'A. appelle tableau orthogonal (N, k, s, t), d'indice λ une matrice rectangulaire, A, de k lignes et de N colonnes ou blocs, dont chaque élément est l'un des entiers $0, 1, 2, 3, \ldots, s-1$ $(s > 1)$ et telle que, dans chacune des $\binom{k}{t}$ sousmatrices formées par t lignes de A, les N colonnes soient constituées par les s^t arrangements avec répétition des s entiers t à t, chaque arrangement apparaissant λ fois. Le papier est consacré aux tableaux d'indice 1. Dans ce cas $N = s^t$. Si $f(N, s, t)$ désigne la plus grande hauteur k, compatible avec les valeurs N, s, t, il est montré que 1°) si $s \leq t$, $f(N, s, t) \leq t + 1$; 2°) si s est impair quelconque et $t = 3$, $f(N, s, 3) \leq$

$s+1$; 3°) si $s \geq t$ et s pair, $f \leq s+t-1$; 4°) Si $s \geq t \geq 3$ et s impair, $f(N, s, t) \leq s+t-2$; 5°) si p est premier impair et $s = p^n$, $f(N, s, 3) = s+1$; 6°) Si $s = 2^n$ $f(N, s, 3) = s+2$. 7°) Si $s \leq t$ et $s = p^n$, $f(N, s, t) = t+1$. Ces résultats sont un perfectionnement des limites connues. Construction d'une matrice orthogonale $(N, s+1, s, t)$ quand s, supérieur à t, est premier ou puissance d'un nombre premier, au moyen de polynomes dont les coefficients parcourent le champ de Galois GF(s). Indications sur l'emploi des tableaux orthogonaux. *A. Sade.*

Touchard, Jacques: Sur un problème de configurations et sur les fractions continues. Canadian J. Math. **4**, 2—25 (1952).

In this paper the author continues his study of a problem considered previously (this Zbl. **38**, 8). Let there be $2n$ abscissas, $1, 2, \ldots, 2n$, marked from left to right along a horizontal axis. These points are joined, two by two, by n convex arcs such that each abscissa is the beginning or the end of a single arc, with the beginning at the left and the end at the right. One thus obtains $p_{2n} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$ configurations and one asks the number of those which have p double points. It is defined that two arcs C_1 and C_2 belong to the same system if one covers the other or if one cuts the other or if a third arc C_3 covers C_1 and C_2 or cuts both of them or cuts one of them and covers the other. When a system S_1 is covered by an arc of the system S_2 and each arc of S_1 is not cut by any arc of S_2, S_1 and S_2 form a system S of which S_1 is a sub-system. A system is said to be proper if it does not contain a sub-system. The problem in question was previously approached by the notion of proper systems, but the difficulty in the formation of proper systems prevented further work. There is another method which consists in the representation of a figure having p double points by x^p. The ensemble of the configurations of n arcs is thus represented by a polynomial $T_n(x)$, in which the coefficient of x^p is the number of those which have p double points. In the same manner, the configurations of n arcs, forming a unique system, are represented by a polynomial $S_n(x)$ and those which form a proper system by a polynomial $P_n(x)$. The determination of $S_n(x)$ is obtained by a generalization of the properties of the arithmetic triangle of Delannoy. Just as the numbers of Delannoy can be generated by a continued fraction, so the function generated by the polynomials $S_n(x)$ is a continued fraction $F(x, z)$ which is here studied. The polynomials $T_n(x)$ and $P_n(x)$ are determined, as well as certain numerical values and the relations between the polynomials $P_n(x)$ and $S_n(x)$. Also the connection is shown between the method of the preceding article and that employed here. *E. Frank.*

Lineare Algebra. Polynome:

● **Krull, Wolfgang: Elementare und klassische Algebra vom modernen Standpunkt.** 2. erweiterte Aufl. (Sammlung Göschen Band 930.) Berlin: Walter de Gruyter & Co., 1952. 136 S. DM 2,40.

● **Aitken, A. C.: Determinants and matrices.** 7th ed. (University Mathematical Texts). — Edinburgh and London: Oliver and Boyd, Ltd., 1952. VII, 144 p. 6 s. net.

Rham, G. de: Sur un théorème de Stieltjes relatif à certaines matrices. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. **4**, 133—134 (1952).

Démonstration géométrique du théorème suivant: Soit (g_{ij}), $(1 \leq i, j \leq n)$, une matrice à coefficients réels, régulière, dont les termes non diagonaux sont ≤ 0, et n'ayant pas de valeur propre qui soit un nombre réel < 0. Alors les coefficients de la matrice inverse sont tous ≥ 0. Le théorème de Stieltjes auquel le titre fait allusion est le cas particulier où $g_{ij} = g_{ji}$. *A. Borel.*

Rutledge, W. A.: Quaternions and Hadamard matrices. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 625—630 (1952).

An n-matrix H with elements chosen from the quaternions $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)$ is called an Hadamard matrix when $HH^* = n I_n$, H^* being the conjugate transpose of H. A Jacobson-Teichmüller normal form of such a quaternion Hadamard matrix is derived in case n is a product of distinct primes. *T. Nakayama.*

Fréchet, Maurice: Les solutions non commutables de l'équation matricielle $e^X \cdot e^Y = e^{X+Y}$. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. **1**, 11—27 (1952).

Aus der Kommutativität zweier Matrizen X, Y folgt bekanntlich die Gleichung $e^{X+Y} = e^X e^Y$ für exponentielle Funktionen. Die Umkehrung gilt aber im allgemeinen

nicht. In dieser Arbeit wird bewiesen: Für zwei nicht vertauschbare Matrizen X, Y des Grades 2 gilt dann und nur dann die obige exponentielle Gleichung, wenn die hier auftretenden drei Matrizen e^{X+Y}, e^X, e^Y alle von den Formen $\nu'' I, \nu' I, \nu I$ mit $\nu'' = \nu\nu'$ sind. *K. Shoda.*

Roth, William E.: The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 392—396 (1952).

Let a field F be given. 1. Let A, B, C be given rectangular matrices. If the equation $AX - YB = C$ is solvable (for X, Y), then unimodular matrices P, Q exist so that

$$P\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix};$$

and conversely. 2. If the equation $AX - XB = C$ is solvable, then the same conclusion holds, and moreover, PQ is the identity matrix; and conversely. 3. No. 1 holds over $F[x]$ as well as over F. *J. L. Brenner.*

Bulgakov, B. V.: Die Teilbarkeit von rechteckigen Matrizen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **85**, 21—23 (1952) [Russisch].

The problem considered in the paper is the following: Given two matrices $b = b^{(p,q)}$, $c = c^{(m,q)}$ to find a matrix $x = x^{(m,p)}$ such that $x\,b = c$. Let r be the rank of b. It is known that there exist two permutational matrices $u = u^{(p,p)}$, $v = v^{(q,q)}$ such that $\beta = \beta^{(r,r)}$ is non-singular and $u\,b\,v = \begin{pmatrix} \beta & \beta\,l \\ \eta & \eta\,l \end{pmatrix}$, $\eta = \eta^{(p-r,r)}$, $l = l^{(r,q-r)}$. We write $x\,u^{-1} = (\alpha, \xi)$, $c\,v = (\gamma, \zeta)$, then we have $(\alpha, \xi)\begin{pmatrix} \beta & \beta\,l \\ \eta & \eta\,l \end{pmatrix} = (\gamma, \zeta)$. Consequently, we obtain $\zeta = \gamma\,l$ and $x = ((\gamma - \xi\,\eta)\,\beta^{-1}, \xi)\,u$. The explicite solution of the left hand equation is also given. The cases c being identity and zero matrix are also considered particularly. *L.-K. Hua.*

Lepage, Th.: Sur une classe de polynômes irréducibles. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **38**, 412—425 (1952).

Ausgehend von einer symmetrischen Determinante $Z = |z_{ij}|$ mit $\frac{1}{2}n(n+1)$ unabhängigen Elementen z_{ij} wird zuerst bewiesen, daß jedes Polynom $L(Z)$ der z_{ij}, das sich linear durch Unterdeterminanten von Z ausdrücken läßt, absolut-irreduzibel ist. Die Gesamtheit dieser Polynome $L(Z)$ wird auf einen Vektorraum der Dimension $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-2}$ abgebildet, wonach Rang und Geschlecht definiert werden können. *R. W. Weitzenböck.*

Bruijn, N. G. de and D. van Dantzig: Inequalities concerning determinants and systems of linear equations. Indagationes math. **14**, 315—321 (1952) = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **55**, 315—321 (1952).

In der Arbeit wird als die „Länge" des Vektors x mit den Komponenten x_ν die Zahl $||x|| = \sum_\nu |x_\nu|$ benutzt. Ist ferner $P = (p_{\mu\nu})$ eine rechteckige Matrix, deren Kolonnenvektoren mit p_ν bezeichnet werden mögen, so wird als die entsprechende „Schranke" der Matrix P die Zahl

$$||P|| = \operatorname*{Max}_\nu ||p_\nu|| = \operatorname*{Max}_\nu \sum_\mu |p_{\mu\nu}|$$

benutzt. Es sei P_n eine reguläre quadratische Matrix der Ordnung n ($n \geqq 2$) und Q ihre adjungierte Matrix mit den Kolonnenvektoren q_ν; dann wird bewiesen: Gilt

$$||p_\nu|| \leq u_\nu \quad (0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n),$$

so folgt

$$||Q|| \leq (u_1 + u_2)\,u_3 \cdots u_n, \qquad \sum_\nu ||q_\nu|| \leq u_1 \cdots u_n \left(\frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n}\right),$$

und diese Schranken sind die „besten". Wird andererseits $\frac{1}{n}\sum_\nu ||p_\nu|| \leq 1$ vorausgesetzt, so folgt

$$\frac{1}{n}\sum_\nu ||q_\nu|| \leq 1, \quad ||Q|| \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} < e.$$

Die Beweise dieser Tatsachen werden in eleganter Weise mit Hilfe einer geeigneten Abschwächung

des Konvexitätsbegriffes geführt. — Die weiteren Ergebnisse liefern die Übertragung der Sätze über lineare Gleichungssysteme auf "angenähert gültige" Gleichungen. Hierzu wird der Rangbegriff geeignet erweitert. Ist $A \geqq 0$, $\varepsilon > 0$, so wird r als der (A, ε)-Rang einer Matrix S bezeichnet, wenn wenigstens eine der Determinanten r-ter Ordnung aus dieser Matrix absolut $\geqq A$ und alle Determinanten der Ordnung $r+1$ absolut $\leqq \varepsilon$ sind, mit geeigneten Festsetzungen, um $r = 0$ und $r = n$ zu ermöglichen. — Ist nun P eine rechteckige Matrix mit m Zeilen und y ein m-dimensionaler Kolonnenvektor, so sei die aus P durch Anfügung der y-Kolonne entstehende Matrix mit U bezeichnet. Dann lautet das wichtigste Ergebnis: Ist für $A > 0$ r der (A, ε)-Rang sowohl von P als auch von U, so existiert ein Vektor x derart, daß

$$||P\,x - y|| \leqq (m - r)\,A^{-1}\,\varepsilon, \quad ||x|| \leqq \mu\,||P||^{r-1}\,||y||/A \quad (\mu = \mathrm{Min}\,(2, r)).$$

Während dieser Satz die Übertragung des klassischen Satzes über die Lösbarkeit eines Systems linearer Gleichungen ist, wird im Rest der Arbeit eine Reihe von weiteren Sätzen der Theorie der linearen inhomogenen und homogenen Gleichungen in geeigneter Weise auf den Fall von Ungleichungen übertragen. *A. Ostrowski.*

Stojaković, Mirko: Determinanten rechteckiger Matrizen. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie **4**, Heft 1—2, 9—21 und deutsche Zusammenfassg. 21—23 (1952) [Serbisch].

Es sei $\mathfrak{a}$ eine Matrix mit r Zeilen, s Spalten und $m = \min(r, s)$. Für jede natürliche Zahl $n \leqq m$ definiert dann Verf. einen Ausdruck $\det_n \mathfrak{a}$. Unter Verwendung des gewöhnlichen Determinantenbegriffs läßt sich $\det_n \mathfrak{a}$ auch als Summe der Determinanten aller n-reihigen Matrizen darstellen, welche durch Weglassen von Zeilen oder Spalten aus $\mathfrak{a}$ gebildet werden können. Für $n = m$ ergibt sich die „Determinante" $\det \mathfrak{a}$. Die letztere besitzt die elementaren Determinanteneigenschaften für $r \leqq s$ bezüglich der Zeilen und für $r \geqq s$ bezüglich der Spalten. Auch der Laplacesche Entwicklungssatz kann übertragen werden. — Die Zeilen (bzw. Spalten) von $\mathfrak{a}$ sind dann und nur dann linear abhängig, wenn die „Norm" $N(\mathfrak{a}) = (\det \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}')^{1/2}$ für $r \leqq s$ bzw. $= (\det \mathfrak{a}'\,\mathfrak{a})^{1/2}$ für $r \geqq s$ verschwindet [für quadratische Matrizen ist $N(\mathfrak{a}) = |\det \mathfrak{a}|$]. Ferner wird u. a. bewiesen: $\det_m \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2 = \det_m \mathfrak{a}_1 \cdot \det_m \mathfrak{a}_2$ für $r_1 \geqq s_1 = m = r_2 \leqq s_2$. Schließlich wird gezeigt, daß die Inversion einer rechteckigen Matrix nach den gleichen Regeln vollzogen werden kann, wie die einer quadratischen. — In etwas anderer Weise hat, was Verf. nicht erwähnt, C. E. Cullis (Matrices and determinoids I., Cambridge 1913, S. 12 und 114) den Begriff der Determinante auf rechteckige Matrizen ausgedehnt (determinoids). Der Unterschied besteht darin, daß die Determinanten, als deren Summe $\det \mathfrak{a}$ erscheint, bei Cullis noch mit bestimmtem Vorzeichen versehen sind. *E. Schönhardt.*

Bonsall, F. F. and Morris Marden: Zeros of self-inversive polynomials. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 471—475 (1952).

Ein Polynom wird selbstinvers genannt, wenn es bei der Transformation $w = 1/\bar{z}$ nicht verändert wird. Diese Inversion führt die Nullstellen eines selbstinversen Polynoms ineinander über. Das Polynom $g(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m$ ist selbstinvers, wenn $b_k = u\,\bar{b}_{m-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ und $|u| = 1$ sind. Die Polynome $g(z)$ und $G(z) = m\,\bar{b}_m + (m-1)\,\bar{b}_{m-1} z + \cdots + \bar{b}_1 z^{m-1}$ haben im Kreise $|z| < 1$ dieselbe Anzahl der Nullstellen. Dies folgt aus einem Satz von Cohn und aus dem Lemma: Ist $g(z)$ selbstinvers, so ist jede Nullstelle von $g'(z)$ auf dem Kreis $|z| = 1$ eine mehrfache Nullstelle von $g(z)$. — Hat ein reelles Polynom $f(w)$ m-ten Grades genau p Nullstellen in der Halbebene $\Im(w) > 0$ und ist ζ ein Punkt, der nicht auf der reellen Achse liegt, und $f(\zeta) \neq 0$, so hat das Polynom $F(w) = (w - \zeta)\,f'(w) - m\,f(w)$ p Nullstellen in der Halbebene $\Im(w)\,\Im(\zeta) > 0$. Die Arbeit enthält einen Satz über die Jensenschen Kreise. Verff. beabsichtigen, ihre Untersuchungen weiter zu führen und später zu veröffentlichen.

Gy. Sz.-Nagy.

Walsh, J. L.: Note on the location of zeros of extremal polynomials in the non-Euclidean plane. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. **4**, 157—160 (1952).

Ein NE-Polynom (nichteuklidisches Polynom) n-ten Grades hat die Form

$$\lambda \prod_{k=1}^{n} \frac{z - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k z}, \quad |\lambda| = 1, \quad |\alpha_k| = 1.$$

Dieses Polynom hat in der nichteuklidischen (hyperbolischen) Ebene $|z| < 1$ n Nullstellen, und sein absoluter Betrag auf dem Kreis $|z| = 1$ ist gleich der Einheit.

Für eine geschlossene Menge E des Bereichs $|z| < r$ (< 1) gibt es mindestens ein NE-Polynom n-ten Grades, ein NE-Extremalpolynom auf E, dessen absoluter Betrag in keinem Punkt von E kleiner als ein anderes NE-Polynom n-ten Grades ist. Die Nullstellen dieses NE-Extremalpolynoms liegen in der nichteuklidischen konvexen Hülle von E. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Fejér [Math. Ann. 85, 41—48 (1922)] über komplexe Polynome. *Gy. Sz. Nagy.*

Tomić, Boško: Quelques formules symboliques pour les polynomes de Bernoulli. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. **7**, 88—91 und französ. Zusammenfassg. 91 (1952) [Kroatisch].

Gruppentheorie:

Evans, Trevor: Embedding theorems for multiplicative systems and projective geometries. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 614—620 (1952).

Let A be a class of algebras (such as groups, loops, or projective planes) and denote by $\mathfrak{m}(A)$ the least cardinal $\mathfrak{m}$ such that every countable algebra of A can be embedded in an algebra of A with $\mathfrak{m}$ generators; if free algebras in A have a meaning, denote by $\mathfrak{n}(A)$ the least cardinal $\mathfrak{n}$ such that the free algebra on $\mathfrak{n}$ generators contains a free subalgebra on a countable infinity of generators. Then it is shown that if $\mathfrak{n}(A)$ exists, then $\mathfrak{n}(A) \leq \mathfrak{m}(A)$. Generalizing the known result that $\mathfrak{m}(A) = 2$ for the class of all groups, the author shows also that $\mathfrak{m}(A) = 1$ when A is the class of all loops, or all quasigroups, or all groupoids, or all groupoids with unique division on one side; that $\mathfrak{m}(A) = 2$ for the class of all semigroups; that $\mathfrak{m}(A) = 4$ for the class of all projective planes. As an incidental result those subsemigroups E of a free two-generator semigroup F are characterised which have the property that every homomorphism of E onto a semigroup S can be extended to a homomorphism of F onto a semigroup $T \supset S$: they are free and such that $x \in E$ and $u\,x\,v \in E$ implies $u \in E$ and $v \in E$. *B. H. Neumann.*

Teissier, Marianne: Sur l'algèbre d'un demi-groupe fini simple. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 2413—2414 (1952).

Soit S un demi-groupe fini simple, c. à d. n'ayant pas d'autre idéal bilatère que lui-même. Suschkewitsch a montré [Math. Ann. **99**, 30—50 (1928)] que S est la réunion $\bigcup_{i=1,2,\ldots,s} G_i$ d'idéaux à gauche minimaux, chaque G_i étant la réunion $\bigcup_{k=1,2,\ldots,t} G_{ik}$ de groupes G_{ik} tous isomorphes entre eux. L'A. construit l'algèbre $\mathfrak{A}$ de S sur un corps K de caractéristique nulle. Dans cette première note, elle étudie la sous-algèbre $\mathfrak{A}_1$ engendrée sur K par les éléments de G_1; elle détermine le radical R_1 de $\mathfrak{A}_1$ et montre que $\mathfrak{A}_1 = R_1 + C_1$ est somme directe de R_1 et d'une algèbre semi-simple C_1. On a de plus la relation $\mathfrak{A}_1 R_1 = 0$, qui entraîne $R_1^2 = 0$. *L. Lesieur.*

Teissier, Marianne: Sur l'algèbre d'un demi-groupe fini simple. II. Cas général. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 2511—2513 (1952).

Dans cette deuxième note l'A. applique les résultats obtenus ci-dessus: $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \cdots + \mathfrak{A}_s$, $\mathfrak{A}_i = R_i + C_i$; $\mathfrak{A}_i R_i = 0$, pour montrer que, si le radical R de $\mathfrak{A}$ n'est pas nul, on a: $\mathfrak{A} R \mathfrak{A} = 0$, et par suite $R^3 = 0$. Elle démontre ensuite que la condition $R \neq 0$ est toujours vérifiée si S n'est pas un groupe. Dans le cas particulier où S n'a qu'un idéal à gauche, ses représentations irréductibles sont celles de l'un quelconque des groupes isomorphes G_{ik}. *L. Lesieur.*

Popova, Hélène: Logarithmétiques des quasi-groupes finis. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1936—1937 (1952).

On peut retenir de cette publication les notions suivantes: Q étant un quasi-groupe fini, on appelle logarithmétique de Q l'ensemble L_Q des applications $x \to x^a$ de Q dans lui-même, a étant une puissance associative ou non. Cet ensemble

est muni d'une structure multiplicative par la loi associative $x \to x^{ab} = (x^a)^b$ et d'une structure additive par la loi $x \to x^{a+b} = x^a \cdot x^b$. — Un quasi-groupe Q d'ordre n est plein s'il n'a pas de sous-quasi-groupe d'ordre k tel que $1 < k < n$. L'A. donne différents résultats sur la logarithmétique additive et sur les quasi-groupes pleins, en particulier sur leur ordre. L'absence de démonstrations et de références bibliographiques, ainsi qu'un manque de précision dans les définitions et les notations, rendent la lecture difficile. *L. Lesieur.*

Thurston, H. A.: Noncommuting quasigroup congruences. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 363—366 (1952).

Mittels eines Verfahrens von G. E. Bates und F. Kiokemeister (dies. Zbl. **34**, 298) wird die freie (gleichungsmäßig definierte) Quasigruppe mit vier Erzeugenden gebildet. Für diese werden zwei nichtvertauschbare Kongruenzrelationen angegeben. *G. Pickert.*

Casas, Pablo: Einführung in die Gruppentheorie. I. II. Revista Mat. element. **1**, 3—11, 34—39 (1952) [Spanisch].

Linés Escardó, E. und R. Mallol Balmaña: Über l-Gruppen. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. **12**, 129—136 (1952) [Spanisch].

Mallol Balmaña, R.: Bemerkung. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. **12**, 137 (1952) [Spanisch].

Es werden verschiedene Axiomsysteme für l-Gruppen aufgestellt und ihre Äquivalenz nachgewiesen. Die Arbeit und die ihr angehängte Note hängen eng zusammen mit Untersuchungen von T. Michiura (dies. Zbl. **36**, 293 und **38**, 159) sowie einen im erstgenannten Referate gemachten Vorschlage. *F. W. Levi.*

Krull, Wolfgang: Halbgeordnete Gruppen und asymptotische Größenordnung. Arch. der Math. **3**, 1—7 (1952).

Verf. führt den Begriff einer doppelt halbgeordneten Abelschen Gruppe ein, um eine Klassifizierung der reellen Funktionen einer Variablen nach ihrer asymptotischen Größenordnung zu gewinnen. — Bezeichne $\mathfrak{G}$ eine (multiplikativ geschriebene) Abelsche Gruppe mit dem Einselement e, die bezüglich einer Relation $>$ in gewöhnlichem Sinne halbgeordnet ist, und sei $\mathfrak{U}$ eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Der Komplex aller Restklassen (modulo $\mathfrak{U}$), die sowohl Elemente $\geqq e$ als auch Elemente $\leqq e$ enthalten, bildet eine Gruppe in $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$; die ihr entsprechende Untergruppe in $\mathfrak{G}$ wird mit $\mathfrak{U}^*$ bezeichnet. Für diese $\mathfrak{U}^*$ gilt die Beziehung $(\mathfrak{U}^*)^* = \mathfrak{U}^*$. In der Quotientengruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}^*$ können zwei Ordnungsrelationen $\gg$ und $>$ eingeführt werden mit den Festsetzungen ($\bar{a}$ bezeichnet die a enthaltende Restklasse): $\bar{a} \gg \bar{b}$ dann und nur dann, wenn die Klasse $\bar{a}\,\bar{b}^{-1}$ ausschließlich Elemente $> e$ enthält, und $\bar{a} > \bar{b}$ genau dann, wenn es in der Klasse $\bar{a}\,\bar{b}^{-1}$ sowohl Elemente $> e$ als auch mit e unvergleichbare Elemente, aber keine Elemente $< e$ gibt. Die Grundeigenschaften dieser Relationen lassen sich leicht feststellen; eine Gruppe (hier: $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}^*$), versehen mit solchen Ordnungsrelationen $\gg$ und $>$, wird eine doppelt halbgeordnete Gruppe genannt. Die Ergebnisse werden auf die multiplikative Gruppe $\mathfrak{G}$ aller — für alle genügend großen x definierten — positiven Funktionen $f(x)$ angewandt, wobei man zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ schon dann als nicht verschieden ansieht, wenn $f(x) = g(x)$ für alle hinreichend großen x gilt, und in $\mathfrak{G}$ $f(x) > g(x)$ setzt, falls $f(x) \geqq g(x)$ für alle hinreichend großen x. Die Klassifizierung, die man mittels gewisser Komplexe in der Quotientengruppe erhält, ist als eine Verallgemeinerung der in der Analysis seit Landau allgemein benutzten Symbole o und O anzusehen. *L. Fuchs.*

Ohnishi, Masao: Linear order on a group. Osaka math. J. **4**, 17—18 (1952).

Verf. gibt einen Beweis für das Kriterium der strengen Ordenbarkeit einer (nicht-kommutativen) Gruppe (vgl. P. Lorenzen, dies. Zbl. **35**, 293), wobei noch herangezogen wird, daß für eine strenge Ordnung $\leqq$ die Elemente a mit $a < 1$ eine

„prime" invariante Unterhalbgruppe $\mathfrak{g}$ (ohne 1) bilden, d. h.: $xy \in \mathfrak{g} \to x \in \mathfrak{g}$ vel $y \in \mathfrak{g}$. Druckfehler: In (II) ist der Buchstabe $\mathfrak{g}$ zu streichen. *P. Lorenzen.*

Dynkin, E. B.: Die maximalen Untergruppen der klassischen Gruppen. (Autoreferat der Doktordissertation.) Uspechi mat. Nauk **7**, Nr. 6 (52), 226—229 (1952).

Karpelevič, F. I.: Die Untergruppen der reellen Lieschen Gruppen. Uspechi mat. Nauk **7**, Nr. 5 (51), 203—204 (1952) [Russisch].

Kuhn, H. W.: Subgroup theorems for groups presented by generators and relations. Ann. of Math., II. Ser. **56**, 22—46 (1952).

The structure of the subgroups of (1) free groups, (2) free products of groups, (3) free products of groups with amalgamations has been determined algebraically by Schreier-Reidemeister(1) Kurosch and Takahasi (2), and the reviewer (3). Two essentially different methods were used: Schreier, Reidemeister, and Takahasi use coset representatives modulo the subgroup to construct generators of the subgroup, while Kurosch and the rev. build up a set of generators inductively inside the subgroup. The first method has the advantage of giving, in addition to the structure theorem, in case (1) the number of free generators of the subgroup in terms of that of the whole group and the index of the subgroup (Schreier), and in case (2) the number of generators of the free group which occurs as factor in the free decomposition of the subgroup H, this time in terms of the number of factors of the given free product $G = \prod^{*} G_\alpha$, the index of the subgroup H in G, and the number of classes of G with respect to the double module (H, G_α) for every α (Takahasi). The author employs the first method in generalized form: instead of using one system of coset representatives, he works with several such systems on which simultaneous restrictive conditions are imposed as needed. He thus proves anew Schreier's and Takahasi's theorems relating to (1) and (2) respectively; the method permits to deduce the latter from the former by representing the free product $G = \prod^{*} G_\alpha$ as homomorphic map of a free group $F = \prod^{*} F_\alpha$, and obtaining coset representatives for G modulo H as maps of systems of representatives of F w. r. t. the counter image $\bar{H}$ of H in F. Suitable restrictions on the systems of coset representatives thus obtained for G modulo H then make it possible to deduce similarly a new proof for a special case of the subgroup theorem relating to (3), viz. for the case of a free product with one amalgamated subgroup, where moreover the amalgamated subgroup is normal in the whole group —i. e. the only case, where every subgroup H is itself a free product with one amalgamated subgroup K. In this representation of H, there occurs in particular one factor which, modulo K, is a free group. The author here obtains a formula for the number of the free generators modulo K of this factor, which is strictly analogous to Takahasi's formula in case (2). The author states that his method can also be made to deal with the case that the amalgamated subgroup is not normal. As an application the author extends F. Levi's theorem on the structure of the commutator group of a free product of two factors [J. Indian math. Soc., n. Ser. **4**, 136—144 (1940)] to that of an arbitrary free product. The paper concludes with a topological interpretation of his choice of generators as compared with the topological proof of (2) by R. Baer and F. Levi (cf. this Zbl. **15**, 6). *Hanna Neumann.*

Plotkin, B. I.: Zur Theorie der auflösbaren Gruppen ohne Torsion. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **84**, 665—668 (1952) [Russisch].

The author calls a group G ϱ-soluble, if it possesses a well-ordered series of normal subgroups leading from 1 to G

$$1 = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_\alpha \subset A_{\alpha+1} \subset \cdots \subset A_\gamma = G$$

in which for each α $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ is an Abelian group whose factor-group with respect to its periodic part is of finite rank; the transfinite number γ is then called the length of the series. If a group G possesses a finite rational series, i. e. a finite normal series whose factor-groups are Abelian torsion-free groups of rank 1, he calls the group ϱ-finite. The concepts of a locally ϱ-soluble and a locally ϱ-finite group coincide. — The theorems which the author announces (with sketches of proofs) combine results and methods of A. I. Mal'cev (this Zbl. **43**, 23) with those of P. G. Kontorovič on R-groups (this Zbl. **40**, 6). We recall the definitions: A torsion-free group is called an R-group if for any pair x, y, of its elements it follows from $x^n = y^n$ that $x = y$. An R^*-group is a group in which all factor-groups with respect to normal isolated subgroups are R-groups. An R^{**}-group is one whose subgroups are all R^*-groups [see the following review]. A group G is said to possess the property N if for any pair A, B of its subgroups in which A is a maximal isolated subgroup of B it follows that A is normal in B. Theorem 1: A torsion-free ϱ-soluble R^*-group with property N possesses an ascending central series, and conversely a torsion-free group with ascending central series is a ϱ-soluble R^*-group with property N. Theorem 2: A torsion-free group is a locally ϱ-soluble R^{**}-group with property N, if and only if it is locally nilpotent. Theorem 3: A ϱ-soluble R^*-group is the

extension of its maximal normal subgroup with ascending central series by means of a torsion-free Abelian Group. Theorem 4. A locally ϱ-soluble R^{**}-group is the extension of its maximal locally nilpotent normal subgroup by means of a torsion-free Abelian group. Theorem 5: A locally ϱ-soluble R^{**}-group which satisfies the maximal or minimal condition for isolated subgroups is ϱ-finite. Theorem 6: A locally ϱ-soluble R^{**}-group in which all Abelian subgroups of the commutator-group have finite rank is the extension of a ϱ-finite group by means of an Abelian torsion-free group. Theorem 7. Every convex subgroup of a locally ϱ-finite ordered group is normal. *K. A. Hirsch.*

Plotkin, B. I.: Zur Theorie der nichtkommutativen Gruppen ohne Torsion. Mat. Sbornik, n. Ser. **30 (72),** 197—212 (1952) [Russisch].

Definitions. (i) A group G is an R-group if for any two elements $x, y \in G$ it follows from $x^n = y^n$ that $x = y$ (Kontorovič, this Zbl. **40**, 6). An R-group is torsion-free. (ii) A subgroup H of G is isolated in G, if $x^n \in H$ implies $x \in H$. (iii) The isolator $I(H)$ of H in G is the intersection of all subgroups of G in which H is isolated. Fundamental properties of isolated subgroups and isolators have been studied by Kontorovič [loc. cit.]. The present paper establishes new links between isolated subgroups and isolators in R-groups on the one hand and in locally nilpotent torsion-free groups on the other hand (for the latter see Mal'zev, this Zbl. **34**, 17). Mal'zev's results have been derived by topological methods; the present discussion is algebraic. The author introduces the finer concepts: (iv) An R^*-group is an R-group in which every factor group with respect to a normal isolated subgroup is an R-group. [Free non-cyclic groups are R-groups, but not R^*-groups.] (v) An R^{**}-group is an R^*-group in which every subgroup is also an R^*-group. Locally nilpotent torsion free groups are R^{**}-groups. But the matrices of the form $\begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix}$ with x, y, z rational, x, y positive form an R^{**}-group which is not locally nilpotent torsion-free. (vi) A set of subgroups $L = \{H_\alpha\}$ of a group G forms a local system for G if the subgroups cover G and the intersection of any two contains another subgroup of the system. An example is the set of all finitely generated subgroups of G [see Kuroš and Černikov, Uspechi mat. Nauk **2**, Nr. 3 (19), 18—59 (1947)]. The properties R^* and R^{**} give rise to local theorems: A group G which possesses a local system of R^*- (or R^{**}-)groups is itself an R^*- (or R^{**})-group. Let now $\mathfrak{Z}$ denote the centraliser, Z the centre of a subgroup. If G is an R-group and H any subgroup, then $\mathfrak{Z}(H) = \mathfrak{Z}(I(H))$, and as a corrollary $I(Z(H)) \leq Z(I(H))$. Equality holds if H has periodic index in its isolator, i. e. if some power of each element $I(H)$ lies in H. The same equality holds for all terms of the hypercentral series, $I(Z_\alpha(H)) = Z_\alpha(I(H))$ if every subgroup has periodic index in its isolator. In particular: If H has an ascending central series, then $I(H)$ has one as well, and the classes of H and $I(H)$ are the same. Further theorems deal with rational series in R^*- and R^{**}-groups [a group is rational, if it is Abelian, torsion-free, and of rank 1. A rational series is a soluble series with rational factor-groups] and finally with R-groups which have the property that for any two subgroups A and B A is normal in B, if it is a maximal isolated subgroup of B. These latter groups naturally turn out to be very closely related to nilpotent groups. *K. A. Hirsch.*

Mišina, A. P.: Über die Isomorphie von vollständigen direkten Summen Abelscher Gruppen ohne Torsion vom Range 1. Mat. Sbornik, n. Ser. **31 (73),** 118—127 (1952) [Russisch].

If two isomorphic groups are (restricted) direct sums of torsion-free groups of rank 1, then their components are isomorphic in pairs (Baer, this Zbl. **16**, 203). Whether the same assertion remains true when the restricted direct sum is replaced by the complete direct sum [for the definition see e. g. Grayev, Mat. Sbornik **17 (59)**, 85—104 (1945)] is an open problem, because it is not even known whether for distinct infinite cardinals $\mathfrak{m}$ and $\mathfrak{n}$ it can occur that $2^{\mathfrak{m}} = 2^{\mathfrak{n}}$. A. G. Kuroš has raised the more restricted problem: Given are two isomorphic groups G and H which are complete direct sums of torsion-free Abelian groups of rank 1. We collect for any given type s all those components which have type s and form their complete direct sums, say G_s and H_s. Is it true that $G_s \cong H_s$? — In the present paper the author proves this assertion under a certain (somewhat complicated) set-theoretical restriction on the types of the components. She also shows that when the number of distinct types of components is not more than countable the restriction is immaterial. *K. A. Hirsch.*

Gluškov, V. M.: Über einige Fragen der Theorie der nilpotenten und lokal nilpotenten Gruppen ohne Torsion. Mat. Sbornik, n. Ser. **30 (72),** 79—104 (1952) [Russisch].

The paper contains a large number of results on the structure of locally nilpotent groups without torsion under various restrictions such as maximal or minimal condition for subgroups

or normal subgroups or serving subgroups [Servanz-Untergruppen] or normal serving subgroups. [The conditions on descending chains have to be rather weak: it is known that locally nilpotent groups with minimal condition for normal subgroups cannot contain elements of infinite order!] One of the main results of the paper is (§ 3) that locally nilpotent torsion-free groups with any one of the following additional conditions (i) minimal condition for serving subgroups, (ii) maximal condition for serving subgroups, (iii) maximal condition for normal serving subgroups are completely equivalent to nilpotent groups of finite special rank (Mal'zev, this Zbl. **37**, 150 and Mjagkova, this Zbl. **34**, 303). However the class of groups with (iv) minimal condition for normal serving subgroups which the author calls M_0-groups turns out to be considerably wider. Every M_0-group possesses ascending central series [ZA-groups] where moreover the factors of the upper central series all have finite special rank [ZAF-groups]. It can easily be deduced from the results of Much ammedžan (this Zbl. **42**, 18) that p-groups which are ZAF and „special" p-groups are equivalent. Now since special p-groups are extensions of Abelian p-groups by means of finite groups one could naturally be led to assume that torsion-free ZAF-groups or perhaps M_0-groups, are extensions of Abelian groups by means of groups of finite special rank. However, the author gives a counter-example (§ 7) and two criteria for the truth of the assumption (§ 8). The proofs are based on some general results on locally nilpotent torsion-free groups (§§ 1, 2) and on extensions of ZA-groups by means of ZA-groups and, in particular, of Abelian groups by means of groups of finite special rank (§§ 4, 5). Illustrations and applications are provided by infinite triangular matrices (§ 6, 9). These are of considerable interest. The counter-example of § 7, in particular, is based on the construction of matrix representations of M_0-groups with upper central series of lengths k, $\omega + k$, $\omega \cdot 2 + k$ while it follows from results of Sesekin (this Zbl. **34**, 303) that a ZAF-group without torsion cannot have an upper central series of length ω, $\omega \cdot 2, \ldots, \omega \cdot m$. *K. A. Hirsch.*

Cohn, P. M.: Generalization of a theorem of Magnus. Proc. London math. Soc., III. Ser. **2**, 297—310 (1952).

Magnus (this Zbl. **16**, 294) studies the factor groups F_n/F_{n+1} of successive terms of the lower central series $F = F_1, F_2, \ldots$ of a free group F by means of modules of homogeneous forms in a free Lie-ring. The author extends the method and results to an arbitrary group G. If R is the group ring of G, then the ideal A of R generated by all $s - 1$, where $s \in G$, is called the *Magnus-ring* of G. It is characterized to within isomorphism by G, and even by R. Put $A^{[1]} = A$ and, inductively, let $A^{[n+1]}$ be generated by the Lie products $[a, b] = a\,b - b\,a$ where $a \in A$, $b \in A^{[n]}$; denote by A^n the associative power of A defined by $A^1 = A$, $A^{n+1} = A\,A^n$ (that is the ring generated by all products $a\,b$, $a \in A$, $b \in A^n$). Then the main result of the paper is the isomorphism $G_{n+1}/G_n \cong A^{[n]}/A^{n+1}$, where $G = G_1, G_2, \ldots$ is the lower central series of G. It follows that the factors of the lower central series are determined, to within isomorphism, by the Magnus-ring A, and hence also by the group ring R of G. — Several incidental and preliminary results on the interrelations of Lie-rings and associative rings are derived. In particular an embedding theorem of G. Birkhoff (this Zbl. **16**, 244) and Witt (this Zbl. **16**, 244) for Lie-rings is extended by showing that a Lie-ring can be embedded in an associative ring if its additive group is a (restricted) direct sum of cyclic groups. — The author informs me that M. Michel Lazard has drawn his attention to a gap in the proof of his main result (above). He has not been able to fill the gap in general, but states that the theorem is valid at least for groups of prime exponent. *B. H. Neumann.*

Green, J. A.: On groups with odd prime-power exponent. J. London math. Soc. **27**, 476—485 (1952).

It is shown that to every odd prime power $q \geq 5$ there exists a finite group of exponent q, generated by two of its elements and of nilpotent class $2q - 2$. Let $q = p^x$, where p is an odd prime. In the group G of formal power series in non-commutative variables x, y with coefficients in the prime field of characteristic p and with constant term 1, let F be the subgroup generated by $1 + x$, $1 + y$, let F_n be the n-th group of its lower central series, and let G^q be the fully invariant subgroup of G generated by all q-th powers. Then the group $H = F/F \cap F_{2q-2} G^q$ is shown, by a very intricate argument, to have the required properties. *B. H. Neumann.*

Azleckij, S. P.: Über den Sylowrang und die Länge der Haupt- und Kompositionsreihen einer endlichen Gruppe. Mat. Sbornik, n. Ser. **31 (73)**, 359—366 (1952) [Russisch].

Sia G un gruppo finito di ordine $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ (dove le p_i sono numeri primi distinti e $k > 2$). Si chiami classe di sottogruppi di Sylow, e si indichi con il simbolo $\langle \mathfrak{P}_i \rangle$, l'insieme dei sottogruppi di Sylow di ordine $p_i^{\alpha_i}$; si chiami sistema di classi di Sylow un insieme di classi di Sylow che genera G, sistemi minimi di classi di Sylow quelli tra tali sistemi per il quale il numero

delle classi raggiunge il valore minimo, rango di Sylow di G il numero delle classi di un sistema minimo (S. P. Azleckij, questo Zbl. **42**, 23). Nella prima parte della presente nota l'A. dimostra i seguenti teoremi: 1) Il rango di Sylow di un gruppo non supera la lunghezza di una sua serie principale e, di conseguenza, di una sua serie di composizione; 2) Ogni gruppo G, nel quale il rango di Sylow è uguale alla lunghezza della sua serie di composizione, è il prodotto diretto di due gruppi semplici; 3) Un gruppo risolubile, il rango di Sylow del quale sia uguale alla lunghezza di una serie principale, è un gruppo speciale; 4) L'unico gruppo risolubile, nel quale il rango di Sylow coincide con la lunghezza di una serie di composizione, è il gruppo abeliano di ordine $p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ (dove le p_i sono numeri primi distinti). — Nella seconda parte l'A. applica i teoremi trovati alla classificazione (dal punto di vista della loro generazione per mezzo di sistemi di classi di Sylow) dei gruppi finiti per i quali la lunghezza di una serie di composizione è uguale a due. L'A. mostra che si presentano otto tipi come possibili; in sei casi egli dà esempi di gruppi finiti effettivamente esistenti del tipo richiesto, negli altri due invece la questione dell'esistenza rimane aperta (e si riconduce a questioni non ancora risolte di esistenza relative a gruppi semplici). *Lombardo-Radice.*

Čunichin, S. A.: Über die Untergruppen einer endlichen Gruppe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **86**, 27—30 (1952) [Russisch].

The author continues his study of Π-properties of finite groups. He announces a further series of ten theorems, without proofs. The definitions and notations are those of his previous papers (see e. g. this Zbl. **39**, 17). Theorem 1. In order that a group G be Π-separable it is necessary and sufficient that there exists in G a Π-permutable series in which each index contains among its distinct prime divisors at most one prime number of Π. Theorem 2. If a group G of order $g = a\,b$, where b is the largest Π-Sylow divisor of g, possesses a Π-permutable series of the kind described under (1), then G has at least one soluble subgroup B of order b and all subgroups of order b are congujate in G. Theorem 3. If a group G has a Π-permutable series whose indices are only divisible by prime numbers of Π and each by not more than two, then G is a soluble group. Theorem 4. Let the group G of order $g = a_1\,b_1\,g_1$ contain a normal subgroup of order g_1 and let G/G_1 have at least one subgroup of order b_1. Let Π be the set of all distinct prime divisors of b_1, and let b' be a divisor of $g_1 = a'\,b'$ such that b' is divisible by the largest Π-Sylow divisor of g_1. Then if G_1 contains a subgroup B' of order b' and if all subgroups of G which are conjugate to B' in G are already conjugate in G_1, then G has at least one subgroup of order $b = b_1\,b'$. As special case one obtains (apart from many previous theorems of the author) the well-known theorem of Schur by choosing $a_1 = 1$, $(b_1, g_1) = 1$. This theorem gives sufficient conditions, the following gives necessary conditions for the existence of specified subgroups. Theorem 5. If for each representation of the order g of a group G in form of a product of two co-prime factors $g = m\,n$, where n is a Π-Sylow divisor of the order g of G, there exist subgroups of order m and n in G, then G is a Π-separable group. This theorem generalizes Ph. Hall's well-known converse to his extension of Sylow's theorem in the case of soluble groups. The example of the simple group of order 60 then leads the author to Theorem 6. There exist sets Π for which the class of groups which staisfy the conditions of theorem 5 is precisely the class of Π-separable groups. — The remaining theorems deal with maximal subgroups of Π-soluble groups. Theorem 7. If G is a Π-soluble group, then the index of any maximal subgroup of G is either a power of some prime number of Π or not divisible by any prime number of Π. And if the order $g = a\,b$, where b is the largest Π-Sylow divisor of g, then for $b > 1$ there exist maximal subgroups of the first kind, and for $a > 1$ maximal subgroups of the second kind. Theorem 8. If G is Π-soluble, then for each prime number p which lies in Π and divides the order of G there exist maximal subgroups of G whose index is a power of p. Theorem 9. If the group G of order $g = a\,b$, where $b > 1$ is the largest Π-Sylow divisor of g, is Π-soluble, then all its maximal subgroups whose orders are divisible by a and which „belong" to one and the same normal subgroup N of G (the terminology is that of Ore, this Zbl. **21**, 211) are conjugate. Theorem 10. If G is a group and M_1 and M_2 are maximal subgroups which belong to distinct normal subgroups N_1 and N_2 of G, and if G, M_1 and M_2 satisfy the conditions of theorem 9, then M_1 and M_2 are permutable. The last three theorems generalize results obtained by Ore (loc. cit.) *K. A. Hirsch.*

Clowes, J. S.: On groups of odd order. J. London math. Soc. **27**, 507—510 (1952).

The author proves the following theorem: Let G be a group of odd order and p a prime dividing the order of G. Then the number of p-Sylow subgroups which contain a given subgroup H of p-power order is odd. The proof is by a three-fold induction. In the case of soluble groups the well-known results of P. Hall [J. London math. Soc. **3**, 98—105 (1928)] lead to the more general theorem: In a soluble group G of odd order $m\,n$ with $(m, n) = 1$ the number of subgroups of order m which contain a given subgroup H whose order divides m is odd. In both theorems it is not even required that G be of odd order: it is sufficient that the index of H in G be odd.

The rev. had recently (this Zbl. 38, 164) used a special case of the theorem without proof. *K. A. Hirsch.*

Hall jr., Marshall: A combinatorial problem on Abelian groups. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 584—587 (1952).

Soit A un groupe abélien fini d'ordre n, dont l'opération est l'addition. Dans ce cas si $|a_i, c_i|$, $i = 1, 2, \ldots, n$, est une permutation des n éléments du groupe, les différences $c_i - a_i = b_i$. sont n éléments du groupe, en général non distincts, tels que $\Sigma b_i = \Sigma c_i - \Sigma a_i = 0$, puisque la somme des c_i et la somme des a_i sont chacune la somme de tous les éléments de A. Le problème posé et résolu dans cette note consiste à montrer que inversement, chaque fois que nous prenons n éléments b_i de A, évidemment non distincts en général, tels que $\Sigma b_i = 0$, il existe toujours une permutation $|a_i, c_i|$ des éléments de A dans laquelle $c_i - a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, avec une numérotation des b_i convenablement choisie. *S. Bays.*

Gaschütz, Wolfgang: Zur Erweiterungstheorie der endlichen Gruppen. J. reine angew. Math. **190**, 93—107 (1952).

In dieser Arbeit betrachtet Verf. die Erweiterungen G einer Abelschen Gruppe A und leitet einige Zerfallskriterien her. Dabei verwendet er auch den von P. Hall eingeführten Begriff der Zerspaltung. Eine Erweiterung G von A heißt zerspalten über A, wenn es eine Untergruppe $\bar{G}$ von G gibt derart, daß $G = A\bar{G}$, $A \cap \bar{G} \neq A$. Handelt es sich um die Zerfalls- und Zerspaltungskriterien, so kann man sich auf die Erweiterungen Abelscher p-Gruppen A beschränken. (Erster Reduktionssatz.) Die weitere Reduktion folgt daraus, daß man ein sog. reduziertes Faktorensystem von G über A konstruieren kann, wenn es eine Untergruppe U mit $(G:U, A:1) = 1$ gibt. (Zweiter Reduktionssatz.) Zusammen mit dem ersten Reduktionssatz kann man sich bei der Untersuchung der Zerfalls- und Zerspaltungskriterien auf p-Sylowgruppen beschränken. Mit Hilfe dieses Gedankenganges erhält der Verf. in der Tat gewisse Zerfalls- und Zerspaltungskriterien. *K. Shoda.*

Gaschütz, Wolfgang: Über den Fundamentalsatz von Maschke zur Darstellungstheorie der endlichen Gruppen. Math. Z. **56**, 376—387 (1952).

Ein eigentlicher $\mathfrak{g}$-Ω-Modul $\mathfrak{a}$ in bezug auf eine endliche Gruppe $\mathfrak{g}$ und einen Operatorenbereich Ω wird M-Modul (Maschkescher Modul) genannt, wenn er sich aus jedem ihn als Teil- oder Restklassenmodul enthaltenden $\mathfrak{g}$-Ω-Modul $\mathfrak{b}$ als direkter $\mathfrak{g}$-Ω-Summand abspalten läßt. Satz 1: $\mathfrak{a}$ ist genau dann M-Modul, wenn es einen Ω-Endomorphismus α von $\mathfrak{a}$ gibt mit $\sum_{g \text{ in } \mathfrak{g}} g\,\alpha\,g^{-1} = 1$. Dieser Satz enthält als Spezialfall den Satz von Maschke über die volle Reduzibilität der Darstellungen von $\mathfrak{g}$ über einem Körper K, dessen Charakteristik die Gruppenordnung G nicht teilt; man hat dazu nur $\Omega = \mathsf{K}$ und $\alpha = G^{-1}$ in K zu setzen. Der Beweis von Satz 1 ist eine Ausgestaltung des Schurschen Beweises für den Satz von Maschke, jedenfalls was das Hinreichen der genannten Bedingung für einen M-Modul betrifft (vgl. I. Schur, S.-Ber. Preuß. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. **1905**, 406—432). Zum Beweis ihrer Notwendigkeit wird $\mathfrak{a}$ eingebettet in den zugehörigen regulären $\mathfrak{g}$-Ω-Modul $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ über $\mathfrak{a}$, d. i. der „Gruppenring" von $\mathfrak{g}$ über $\mathfrak{a}$. In $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ gibt es einen Ω-Endomorphismus β mit $\Sigma\, g\,\beta\,g^{-1} = 1$, und daraus wird das Entsprechende auch für $\mathfrak{a}$ selbst gefolgert unter Benutzung der Tatsache, daß $\mathfrak{a}$ als M-Modul direkter $\mathfrak{g}$-Ω-Summand von $\mathfrak{a}_\mathfrak{g}$ ist. Verf. verfeinert die Untersuchung noch, indem er die Begriffe der „unteren Abspaltbarkeit" ($\mathfrak{a}$ läßt sich als Teilmodul aus jedem umfassenderen Modul direkt abspalten) und der „oberen Abspaltbarkeit" ($\mathfrak{a}$ läßt sich als Faktormodul aus jedem umfassenderen Modul direkt abspalten) zunächst voneinander trennt und demgemäß den Beweis für „untere" und „obere" M-Moduln getrennt führt; erst auf Grund des Satzes 1 erweisen sich beide Begriffe als identisch. — Die Bedeutung von Satz 1 ist vor allem darin zu sehen, daß er bei der Ausreduktion von Darstellungen über Körpern, deren Charakteristik die Gruppenordnung teilt, nützlich sein kann. Als Beispiel dafür wählt Verf. die nichtkommutative Gruppe der Ordnung 6: Deren wesentlich einzige, absolute irreduzible, ganzrationale Darstellung vom Grade 2 liefert bei Reduktion der Darstellungskoeffizienten modulo 2 eine „M-Darstellung", d. h. der zugehörige Darstellungsmodul ist dann M-Modul im obigen Sinne; bei Reduktion modulo 3 ist das jedoch nicht mehr der Fall. Ref. bemerkt, daß sogar der folgende viel allgemeinere Satz von R. Brauer aus Satz 1 (mit Hilfe des Schurschen Lemmas) hergeleitet werden kann: Eine absolut-irreduzible ganzalgebraische Darstellung einer beliebigen endlichen Gruppe $\mathfrak{g}$ liefert bei Reduktion modulo einem Primdivisor $\mathfrak{p}$ genau dann eine M-Darstellung, wenn ihr

Grad durch die höchste in der Gruppenordnung G aufgehende Potenz der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primzahl teilbar ist. (Vgl. R. Brauer, dies. Zbl. **27**, 152; insbes. § 11, Theorem 1 und § 19, Theorem 5.) Verf. beweist mit Hilfe von Satz 1 ferner: Ist Ω ein Körper, und ist D eine transitive monomiale Darstellung von $\mathfrak{g}$ über Ω, d. h. wird D im Sinne der Darstellungstheorie induziert durch eine Darstellung ersten Grades einer Untergruppe $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{g}$, dann ist D genau dann M-Darstellung, wenn die Charakteristik von Ω kein Teiler der Ordnung von $\mathfrak{u}$ ist. Nicht behandelt wird die Frage, wann die Induzierte einer Darstellung beliebigen, nicht notwendig ersten Grades von $\mathfrak{u}$ eine M-Darstellung von $\mathfrak{g}$ ist. — Schließlich stellt Verf. noch einen Zusammenhang her zwischen M-Moduln und Artinschen Zerfällungsgruppen, indem er beweist: Ein Maschkescher $\mathfrak{g}$-Modul $\mathfrak{a}$ ist Zerfällungsgruppe für jedes Faktorensystem von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{a}$. Dieser Satz enthält als Spezialfall den Schurschen Satz, daß jedes Faktorensystem zu $\mathfrak{g}$ in einer endlichen Gruppe $\mathfrak{a}$ zerfällt, wenn die Ordnungen von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{a}$ teilerfremd sind. *P. Roquette.*

Berman, S. D.: Zur Darstellungstheorie der endlichen Gruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **86**, 885—888 (1952) [Russisch].

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Aufgabe, die Anzahl der nicht äquivalenten in einem Körper K irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe G zu bestimmen. Von K wird dabei vorausgesetzt, daß seine Charakteristik weder in der Ordnung von G noch in den Graden der absolut irreduziblen Darstellungen aufgeht. Es bezeichne n das kleinste gemeinsame Vielfache der Elementordnungen in G und ε eine primitive n-te Einheitswurzel. Die Anwendung eines Automorphismus φ der Galoisgruppe Γ von $K(\varepsilon)/K$ auf ε liefert $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon^{\nu}$ mit einem von φ abhängigen Exponenten $\nu = \nu(\varphi)$. Zwei Elemente a und b aus G werden K-konjugiert genannt, wenn b ähnlich einer Potenz a^{ν} ist, wobei ν gleich einem $\nu(\varphi)$ mit irgend einem $\varphi \in \Gamma$ ist. Man erhält so eine Einteilung von G in Klassen K-konjugierter Elemente. Es wird bewiesen, daß die Anzahl dieser Klassen gleich der Anzahl der nicht äquivalenten in K irreduziblen Darstellungen von G ist. *R. Kochendörffer.*

Osima, Masaru: On the representations of groups of finite order. Math. J. Okayama Univ. **1**, 33—61 (1952).

If R and S are the right and left regular representations of a finite group $\mathfrak{G}$, $G_s \times G_t \to S(G_s)\, R'(G_t^{-1})$ forms a representation of $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$. Its character ψ is given by $\psi(G_s \times G_t) = n_\nu\, \delta_{\mu\nu}$, where G_s, G_t are in the conjugate classes C_μ, C_ν and n_ν is the number of elements in C_ν. Its „ordinary" decomposition is $\Sigma_i Z_i(G_s) \times Z_{i'}(G_t)$, where Z_i are ordinary irreducible representations of $\mathfrak{G}$, while its „modular" constituents are given by $\Sigma\, c_{\varkappa\lambda} F_\varkappa(G_s) \times F_{\lambda'}(G_t)$, where $F_\varkappa$ and $c_{\varkappa\lambda}$ are the modular irreducible representations and Cartan invariants of $\mathfrak{G}$. These and further properties of the representation $S(G_s)\, R'(G_t^{-1})$ are skilfully used to give a new treatment to fundamental theorems in representation theory of finite groups, including Frobenius-Schur orthogonality of characters, Brauer-Nesbitt theorem on decomposition numbers and Cartan invariants [Univ. Toronto studies no. 4 (1937)], Frobenius' theorem of induced characters, its modular analogy (cf. Rev., this Zbl. **20**, 341) and the author's theorem on Kronecker products of representations [Proc. Imp. Acad. Tokyo **17**, 411—413 (1941)]. „Blocks" are introduced not only with respect to Brauer's modular theory but also with respect to subgroups. Representations by collineations are considered too. *T. Nakayama.*

Osima, Masaru: On some character relations of symmetric groups. Math. J. Okayama Univ. **1**, 63—68 (1952).

Firstly, with a rational prime p, the number of p-regular classes in a symmetric group is expressed in terms of the numbers of certain partitions and p-kernels [in the sense of rev., Japanese J. Math. **17**, 89—108 (1940)]. Then character relations for such p-regular classes are determined by means of the orthogonality and the recursion formula of Murnaghan and the Rev. (loc. cit.); of Chung (this Zbl. **44**, 258). *T. Nakayama.*

Whitehead, J. H. C.: On normalizators of transformation groups. J. London math. Soc. **27**, 374—379 (1952).

Verf. zeigt: Sei T die Gruppe der (1,1)-Abbildungen des reellen projektiven

P_n ($n \geq 1$) und G die Gruppe der Projektivitäten des P_n, dann ist der Normalisator von G in T mit G identisch. — Ähnliche Eigenschaften haben eine elliptische Gruppe im P_n und die orthogonale Drehungsgruppe der reellen Sphäre S_n für $n > 1$. *W. Klingenberg.*

Raševskij, P. K.: Über die Geometrie der homogenen Räume. Trudy Sem. vektor. tensor. Analizu **9**, 49—74 (1952) [Russisch].

Wirkt in der Mannigfaltigkeit K_n eine transitive Liesche Gruppe G_r mit der festgehaltenen Untergruppe H_m, und kann man im Infinitesimalring einen zu H_m komplementären Unterraum E_n ($r + n = m$) finden, der gegenüber H_m invariant ist, so läßt sich in K_n ein affiner Zusammenhang einführen, der gegenüber G_r invariant ist und dessen Parallelismus den Torsions- und den Krümmungstensor in sich überführt. Die geodätischen Kurven des affinen Zusammenhangs entsprechen einparametrigen Untergruppen von E_n. In gewissen Fällen (Halbeinfachheit) kann man weitergehende Aussagen machen. *H. Freudenthal.*

Klee jr., V. L.: Invariant metrics in groups. (Solution of a problem of Banach.) Proc. Amer. math. Soc. **3**, 484—487 (1952).

L'A. résout un problème posé par Banach en démontrant la proposition suivante: soit G un groupe abélien métrisable, $\varrho(x, y)$ une distance invariante sur G définissant la topologie de G; si, pour une autre distance définissant la même topologie, G est un espace métrique complet, alors G est complet pour la distance ϱ. L'idée de la démonstration consiste à considérer le complété $\widehat{G}$ de G pour ϱ; l'hypothèse entraîne que G est une intersection partout dense d'une infinité dénombrable d'ensembles ouvertes dans $\widehat{G}$; le complémentaire de G dans $\widehat{G}$ est donc maigre; mais s'il n'était pas vide, il contiendrait une classe mod. G, donc G serait maigre, et aussi $\widehat{G}$, contrairement au th. de Baire. Le résultat (et sa démonstration) s'étend aux groupes non abéliens munis d'une distance $\varrho(x, y)$ invariante à droite et à gauche, mais non, comme le remarque l'A. en utilisant un exemple du rapporteur, aux groupes non abéliens métrisables quelconques. *J. Dieudonné.*

Verbände. Ringe. Körper:

Sorkin, Ju. I.: Freie Vereinigungen von Verbänden. Mat. Sbornik, n. Ser. **30 (72)**, 677—694 (1952) [Russisch].

This paper deals with free unions of lattices as defined by Dilworth [Trans. Amer. mat. Soc. **57**, 123—154 (1945)]. In Chapter I general properties of such free unions are proved. The author starts by giving Dilworth's definition of the free union $\prod_{\alpha \in m}^{*} S_\alpha$ of the lattices S_α ($\alpha \in m$). He then proves theorem 2: If for each $\alpha \in m$ there exists a lattice homomorphic mapping φ_α of S_α into the lattice M, then there exists a lattice homomorphic mapping of $\prod_{\alpha \in m}^{*} S_\alpha$ into M which, for each $\alpha \in m$, coincides with φ_α on S_α. Theorem 3, which is the principal tool in the later parts of the paper states that the same is true for isotonic mappings, i. e. for mappings φ such that $a \geq b$ implies $\varphi(a) \geq \varphi(b)$. He notes that it is easily proved that the mapping φ of $\prod_{\alpha \in m}^{*} S_\alpha$ into M defined in the proof of theorem 3 is a join (meet) homomorphism if each φ_α is a join (meet) homomorphism. Theorems 4, 5 are concerned with the associativity of free unions and state that $\prod_{\alpha \in m}^{*} \left(\prod_{\beta \in n_\alpha}^{*} S_{\alpha,\beta} \right) \simeq \prod_{\alpha \in m, \beta \in n_\alpha}^{*} S_{\alpha,\beta}$, and that if $m = \sum_{\beta \in n} m_\beta$ where the m_β's are disjoint, then $\prod_{\alpha \in m}^{*} S_\alpha \simeq \prod_{\beta \in n}^{*} \left(\prod_{\alpha \in m_\beta}^{*} S_\alpha \right)$ (where $A \simeq B$ means that A, B are isomorphic). Chapter II deals with free unions of chains. If each chain consists of a single element the free union becomes a free lattice; these have been studied by Whitman [Ann. of Math., II. Ser. **43**, 104—115 (1942)]. The author observes that most of Whitman's theorems can be generalised to the case of a free union of chains but he restricts himself to the following results which are needed in Chapter III: Theorem 6. If, for each $\alpha \in m$, S_α is a chain, and $S = \prod_{\alpha \in m}^{*} S_\alpha$, then $A \geq B$ in S if and only if (a) there exists α such that $A, B \in S_\alpha$ and $A \geq B$ in S_α, or (b) one of the following conditions holds: 1. $A \equiv A_1 \cup A_2$ and $A_1 \geq B$ or $A_2 \geq B$, (2) $A \equiv A_1 \cap A_2$ and $A_1 \geq B$ and $A_2 \geq B$, (3) $B \equiv B_1 \cup B_2$ and $A \geq B_1$ and $A \geq B_2$, (4) $B \equiv B_1 \cap B_2$

and $A \geq B_1$ or $A \geq B_2$. This reduces the problem of deciding whether $A \geq B$ to a similar problem for words of lesser rank; hence it is possible to decide in a finite number of steps whether two arbitrarily given words A, B of S satisfy $A \geq B$ or not, (provided, of course, that the words A, B are „given" in such a way that it is possible to decompose them into their elements, and provided that there is a general method for deciding whether two given elements a, b of one of the S_α's satisfy $a \leq b$ or not). The author suggests that in the general case, (i. e. when the S_α are not all chains) such an algorithm might not exist. — He shows that the conclusion of theorem 6 is false if the S_α are not all chains (In the proof of this, on p. 687, for $S' \cap S''$ read $S' \cup S''$). Theorem 6 has the corollary: If $S = \prod_{\alpha \in m}^{*} S_\alpha$ where each S_α is a chain, and if, for each $\alpha \in m$, S'_α is a sub-chain of S_α then the set of elements of S generated by the elements of the chains S'_α is the free union of these chains. A set M of generators of S is called irredundant if no proper subset M' of M is a set of generators of S. Theorem 7 states: If $S = \prod_{\alpha \in m}^{*} S_\alpha$ where each S_α is a chain, then the set $\bigcup_{\alpha \in m} S_\alpha$ is the sole irredundant set of generators of S. This has the corollaries: 1) A lattice with n generators cannot be the free union of more than n lattices. 2) If $S = \prod_{\alpha \in m}^{*} S_\alpha$ where each S_α is a chain, and $S = \prod_{\beta \in n}^{*} S'_\beta$ then each S_β is a free union of S_α's. Theorem 8 gives an expression for the group of automorphisms of a free union of chains and theorem 9 states that if $S = \prod_{\alpha \in m}^{*} S_\alpha$ where each S_α is a chain then the set of words equal to a given word A of S has an element of minimal rank which is unique to within the re-arrangements permitted by the commutative and associative laws. Chapter III is concerned with the proof that there are only three finite lattices which are expressible as free unions of lattices. If (m, n) denotes the free union of a chain of m elements with one of n elements then these three lattices are $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$. *J. C. Shepherdson.*

Dubreil-Jacotin, Marie-Louise: Théorèmes de décomposition dans certains treillis et demi-groupes réticulés sans condition de chaîne. C. r. Acad. Sci., Paris **234,** 2415—2416 (1952).

On connaît certains théorèmes de décomposition dans les treillis, généralisant les théorèmes classiques de la théorie des idéaux d'un anneau. Ils font intervenir, soit la condition de chaîne ascendante (M. Ward et R. P. Dilworth, ce Zbl. **21**, 108), soit la condition de chaîne descendante (L. Lesieur, C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 2250—2252 (1952)]. L'A. annonce ici, sans démonstrations, certains théorèmes de décomposition obtenus sans condition de chaîne. Ils portent sur les éléments x totalement $\cap$-irréductibles, c. à d. tels que l'ensemble des $z \geq x$ forme une chaîne; l'A. donne des conditions suffisantes pour que tout élément soit d'une manière unique intersection d'un nombre fini d'éléments totalement $\cap$-irréductibles. Dans un treillis multiplicatif, elle obtient également une application à la décomposition en intersection finie d'éléments primaires, avec unicité, moyennant une condition supplémentaire. Toutes ces conditions ne peuvent être reproduites ici.

L. Lesieur.

Schützenberger, Marcel Paul: Construction du treillis modulaire engendré par deux éléments et une chaîne finie discrète. C. r. Acad. Sci., Paris **235,** 926—928 (1952).

Verf. hat in einer früheren Arbeit [C. r. Acad. Sci., Paris **221**, 218—220 (1945)] ein stärkstes Gesetz $\mathfrak{U}$ angegeben, das stärker als das Modulgesetz und schwächer als das distributive Gesetz ist, und bewiesen, daß jeder $\mathfrak{U}$-Verband subdirekte Vereinigung von modularen nicht-distributiven Verbänden aus 5 Elementen mit einem distributiven Verband ist. Hier wird gezeigt, daß der aus einer Kette und zwei Elementen erzeugte freie modulare Verband ein $\mathfrak{U}$-Verband ist. Es wird nur das Prinzip des Beweises dargestellt. *H. Gericke.*

Fuchs, L.: On subdirect unions. I. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **3,** 103—119 und russische Zusammenfassg. 120 (1952).

Sind A, B algebraische Strukturen der gleichen Art, so wird eine Unterstruktur G der aus den Paaren (a, b) $(a \in A,\ b \in B)$ bestehenden direkten Vereinigung von A, B als subdirekte Vereinigung von A und B bezeichnet, wenn zu jedem $a \in A$ ein $b \in B$ und zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ mit $(a, b) \in G$ existiert. Eine solche

wird z. B. durch die Menge der (a, b) mit $f(a) = g(b)$ gegeben, wenn f, g Homomorphismen von A bzw. B auf dieselbe algebraische Struktur sind. Falls A und B bezüglich einer ihrer Verknüpfungen Gruppen sind, so werden alle subdirekten Vereinigungen von A und B, welche ebenfalls bezüglich dieser Verknüpfung Gruppen sind, durch dieses Konstruktionsverfahren gegeben. (Leichte Abänderung des Beweises zeigt, daß statt „Gruppe" auch „Loop" gesetzt werden darf.) Mit Hilfe dieses Ergebnisses werden verschiedene Isomorphiebeziehungen hergeleitet. Gruppentheoretische Beispiele werden angegeben. Eines von diesen zeigt, daß es nichtisomorphe subdirekte Vereinigungen von A und B gibt, die eine mittels der Homomorphismen f_1, g_1, die andere mittels f_2, g_2 gebildet, bei denen f_1 denselben Kern wie f_2 und g_1 denselben Kern wie g_2 hat. Für beliebige algebraische Strukturen wird eine hinreichende Bedingung für Isomorphie subdirekter Vereinigungen hergeleitet. *G. Pickert.*

Eichler, Martin: Note zur Theorie der Kristallgitter. Math. Ann. **125**, 51—55 (1952).

In einem n-dimensionalen Vektorraum R über dem rationalen Zahlkörper sei ein skalares Produkt definiert. Die endlichen Moduln vom Rang m über der Ordnung aller ganzen Zahlen heißen Kristallgitter oder kurz Gitter. In dieser Arbeit werden die direkten Summenzerlegungen des Gitters untersucht, deren Summanden aufeinander senkrecht stehen. Man beweist, daß ein Gitter nur eine einzige direkte Zerlegung in nicht weiter zerlegbare direkte Summanden besitzt. Dasselbe gilt auch noch, wenn der Grundkörper ein endlicher algebraischer Zahlkörper mit einem involutorischen Automorphismus ist. Dabei muß aber die Definition des skalaren Produktes etwas modifiziert werden. *K. Shoda.*

Kleinfeld, Erwin: An extension of the theorem on alternative division rings. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 348—351 (1952).

Im Anschluß und in enger Verbindung mit einer früheren Arbeit (Bruck und Verf., dies. Zbl. **44**, 22) zeigt Verf., daß ein einfacher alternativer Ring ohne nilpotente Elemente und mit von 2 verschiedener Charaktersistik entweder assoziativ oder eine Cayley-Dicksonsche Divisionsalgebra über seinem Zentrum ist. Der Ring heißt dabei einfach, wenn er keine eigentlichen zweiseitigen Ideale besitzt. *E. Trost.*

Johnson, R. E.: On ordered domains of integrity. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 414—416 (1952).

Ein nullteilerfreier und assoziativer Ring R heißt angeordnet, wenn die Menge R^* aller von Null verschiedenen Elemente aus R eine additive und gleichzeitig multiplikative Halbgruppe P mit $R = P \cup (-1) P$ enthält. Wenn R kein Einselement enthält, so existiert der kleinste R enthaltende Integritätsbereich J (J besitzt also das Einselement). Ferner wird R dann und nur dann angeordnet, wenn J angeordnet wird. Ein Element $a \neq 0$ aus einem Integritätsbereich J heißt gerade, wenn es Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aus J gibt, so daß a als ein Produkt aus den $2n$ Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ in einer gewissen Reihenfolge darstellbar ist. Wir bezeichnen mit S die von allen geraden Elementen aus J erzeugte additive Halbgruppe. Dann gilt folgender Satz: Der Integritätsbereich J kann dann und nur dann angeordnet werden, wenn S kein Nullelement enthält. *M. Moriya.*

Szele, T.: On ordered skew fields. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 410—413 (1952).

Ein (nicht notwendig kommutativer) Körper K heißt angeordnet, wenn die multiplikative Gruppe K^* aller von Null verschiedenen Elemente aus K eine Untergruppe vom Index 2 besitzt, welche ihrerseits in bezug auf die Addition eine Halbgruppe bildet. Diese Definition ist, wie leicht zu bestätigen, äquivalent mit der üblichen Definition. Verf. beweist zunächst folgenden Satz: Ein Körper K kann dann und nur dann angeordnet werden, wenn -1 niemals als eine endliche Summe der Produkte aus endlich vielen Quadratelementen aus K darstellbar ist. Zum Beweis des Satzes braucht man nur zu zeigen, daß die Bedingung hinreichend ist, weil die Bedingung offenbar notwendig ist. Es sei S die Gesamtheit aller endlichen Summen der Produkte aus endlich vielen Quadratelementen aus K^*. Dann kann man ohne Schwierigkeit beweisen, daß S eine multiplikative Gruppe und außerdem eine additive Halbgruppe bildet. Nach dem

Zornschen Lemma existiert eine maximale S-enthaltende multiplikative Untergruppe P aus K, welche ihrerseits eine additive Halbgruppe bildet. Dabei gilt: $K = P \cup (-1)P$; d. h. der Index von P in K^* ist gleich 2. Ferner beweist Verf. folgenden Satz, dessen Beweis ebenso wie für den obigen Satz durchgeführt werden kann: L sei eine Erweiterung eines angeordneten Körpers K. Dann kann die Anordnung von K dann und nur dann auf L fortgesetzt werden, wenn -1 niemals als eine Summe von endlich vielen Elementen von der Form $p_1 u_1^2 p_2 u_2^2 \cdots p_k u_k^2$ darstellbar ist, wo die p_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ Elemente aus K mit $p_i > 0$ und die u_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ Elemente aus L sind. *M. Moriya.*

Clarke, F. Marion: Note on quasi-regularity and the Perlis-Jacobson radical. Portugaliae Math. **11**, 89—94 (1952).

Es werden drei Bedingungen P1, P2, P3 angegeben, die es erlauben, in einem Ring R die Theorie des Radikals im Sinne von Perlis, Baer und Jacobson zu entwickeln. P1: Ist y ein quasi-reguläres Element aus einem rechts quasi-regulären Rechtsideal von R und sind x bzw. z links bzw. rechts quasi-inverse Elemente von y, so sei $(x\,y)\,z = x\,(y\,z)$. P2: Die links und rechts quasi-inversen Elemente eines quasi-regulären Elementes y aus einem rechts quasi-regulären Rechtsideal von R seien gleich und eindeutig bestimmt. P3: Die Charakteristik von R sei ungleich 2. $R^{(+)}$ bezeichne den Ring, der aus R entsteht, wenn man darin die Multiplikation $r\,s$ durch $r \cdot s = \frac{r\,s + s\,r}{2}$ ersetzt. Jedes quasi-reguläre Element aus $R^{(+)}$ besitze in $R^{(+)}$ und R das gleiche eindeutig bestimmte rechts quasi-inverse Element. — Bei Baer und Jacobson wird gezeigt, daß P2 aus P1 folgt. Hier wird die Äquivalenz beider Bedingungen bewiesen und gezeigt, daß diese aus P3 folgen. Behauptet wird, daß alle drei Bedingungen äquivalent sind, falls die Charakteristik von R ungleich 2 ist. Ref. sieht dies aber nur ein, wenn man P3 nur für die Elemente y fordert, die in einem rechts quasi-regulären Rechtsideal enthalten sind. — Läßt man in allen drei Bedingungen die Forderung fallen, daß y in einem rechts quasi-regulären Rechtsideal enthalten ist, so gelten entsprechende Äquivalenzaussagen. — Z. B. genügt dann jeder Alternativring der Bedingung P1, doch ist die Umkehrung hiervon nicht richtig, wie an einem Beispiel gezeigt wird. — Auf Seite 91, Zeile 23 muß es $(x\,y)\,z = x\,(y\,z)$ lauten. *F. Kasch.*

Curtis, Charles W.: On additive ideal theory in general rings. Amer. J. Math. **74**, 687—700 (1952).

Es sei R ein assoziativer Ring mit Einselement. Der Idealquotient AB^{-1} $(B^{-1}A)$ von zwei (zweiseitigen) Idealen A und B in R wird als die Vereinigung aller Ideale C in R mit der Eigenschaft $CB \subseteq A$ $(BC \subseteq A)$ definiert. Ist $AB^{-1} = A$, so heißt B (rechts) prim zu A. Ferner heißt ein Ideal A (rechts-) primal, wenn sich die Vereinigung P aller zu A nichtprimen Ideale auch nichtprim zu A erweist. P heißt das adjungierte Ideal des Primalideals A; dieses ist immer ein Primideal. Verf. beweist, daß jedes Ideal in R eine Durchschnittsdarstellung durch primale Ideale zuläßt. Im folgenden sei der Teilerkettensatz für die Ideale von R vorausgesetzt. Dann gibt es für jedes Ideal eine endliche Darstellung als Durchschnitt von Primalidealen, wobei man annehmen darf: keine der Komponenten kann weggelassen oder durch einen echten Teiler ersetzt werden und kein adjungiertes Primideal der Komponenten teilt ein anderes. In diesem Falle sind die Anzahl der Primalkomponenten, sowie die adjungierten Primideale durch das Ideal eindeutig bestimmt. (Für den kommutativen Fall vgl. Ref. dies. Zbl. **41**, 165.) Ein Primideal P heißt maximales Primideal eines beliebigen Ideals $A \neq R$, wenn $AP^{-1} \neq A$, jedoch für jeden echten Teiler Q von P die Relation $QA^{-1} = A$ gilt. Wenn man ferner die Vereinigung S aller Ideale C in R, für welche $A(C + B)^{-1} \neq A$ für jedes B mit der Eigenschaft $AB^{-1} \neq A$ besteht, das adjungierte Ideal von A nennt, so gilt: S ist der Durchschnitt der maximalen Primideale von A. Ein Primideal P wird als ein assoziiertes Primideal von A bezeichnet, wenn $AP^{-1} \neq A$ und für $I(P) = A\,P^{-q} = AP^{-q-1}$ (die Existenz einer solchen ganzen Zahl q wird durch den Teilerkettensatz gesichert) das Enthaltensein $I(P)^{-1}A \subseteq P$ gilt. Verf. zeigt, daß sich ein Primideal P genau dann als ein maximales Primideal von A erweist, wenn es ein maximales Ideal in der Menge aller assoziierten Primideale von A ist. Die Darstellung durch Primärideale wird kurz betrachtet. Der zweite Teil der Arbeit enthält interessante illustrierende Beispiele. *L. Fuchs.*

Rosenberg, Alex: Subrings of simple rings with minimal ideals. Trans. Amer. math. Soc. **73**, 115—138 (1952).

Soit A un anneau simple possédant des idéaux minimaux. L'A. cherche d'abord à quelle condition un sous-anneau simple B de A possède des idéaux minimaux; il montre qu'il en est ainsi si B est supposé être un anneau de Zorn, c'est-à-dire tel que tout idéal à gauche de B non formé d'éléments tous nilpotents, contient au moins un idempotent. Soit B un tel sous-anneau; alors, ou bien B satisfait à la condition minimale pour les idéaux à gauche, ou bien le commutant $A(B)$ de B dans A est identique à l'annulateur (à gauche et à droite) de B dans A. La structure de $A(B)$ dans le premier cas ne peut être déterminée que moyennant des hypothèses plus restrictives sur A et B. Dans le second cas, la représentation de A comme anneau $\mathfrak{F}(E, E')$ de transformations linéaires de rang fini d'un espace vectoriel E, continues pour la topologie

faible $\sigma(E, E')$ (E' sous-espace partout dense du dual algébrique E^* de E) permet de voir que $A(B)$ admet un radical R tel que $R^3 = 0$, et que $A(B)/R$ est un anneau simple ayant des idéaux minimaux. Dans cette étude intervient le sous-espace $B \cdot E$ et le sous-espace $T(B)$ de E formé des éléments de E annulés par B; on a $T(B) \cap (B \cdot E) = 0$, mais E n'est pas nécessairement somme directe des sous-espaces $T(B)$ et $B \cdot E$, phénomène qui est à l'origine de l'existence possible d'un radical $R \neq 0$ dans $A(B)$; les sous-espaces ${}^tB \cdot E'$ et $T({}^tB)$ (${}^tB$ anneau des transposées des éléments de B) interviennent aussi dans l'étude de $A(B)$. L'A. donne ensuite des conditions moyennant lesquelles un isomorphisme d'un sous-anneau simple B de A sur un sous-anneau simple C de A peut être étendu à un automorphisme de A. Il étudie aussi les idéaux (à gauche) maximaux de A, et, par une adaptation d'un raisonnement de Mackey et Kaplansky, détermine, dans le cas où E et E' ont des bases dénombrables, les conditions pour que deux tels idéaux de A soient transformés l'un de l'autre par un automorphisme de A. *J. Dieudonné.*

Nakayama, Tadasi: Automorphisms of simple, complete primitive, and directly indecomposable rings. Ann. of Math., II. Ser. **55**, 538—551 (1952).

Soit A un anneau simple satisfaisant à la condition minimale, et soit S un sous-anneau simple de A, galoisien dans A, c'est-à-dire (v. le Rapp., ce Zbl. **41**, 163) que, pour un idéal à droite minimal $\mathfrak{r}$ de A, l'anneau des S-endomorphismes de $\mathfrak{r}$ soit engendré (sur le corps K des A-endomorphismes de $\mathfrak{r}$) par des K-endomorphismes semi-linéaires. Soit B un sous-anneau simple de A, contenant S; l'A. montre que $\mathfrak{r}$ est complètement réductible en tant que KB-module (KB sous-anneau de l'anneau des endomorphismes du groupe additif $\mathfrak{r}$, engendré par la réunion de K et de B). Cela lui permet d'améliorer un résultat du rapporteur (loc. cit.): si B' est un second sous-anneau simple de A contenant S, et s'il existe un isomorphisme de B sur B', laissant invariants les éléments de S, alors cet isomorphisme peut être prolongé en un automorphisme de A lorsqu'on sait que les commutants $V_A(B)$, $V_A(B')$ de B et B' dans A sont tous deux simples (ou seulement indécomposables en tant qu'anneaux). Il montre que ce résultat peut s'étendre aux sous-anneaux galoisiens distingués d'un anneau primitif complet, moyennant une condition de finitude additionnelle. Il prouve aussi que l'on peut supposer seulement sur S que l'anneau des S-endomorphismes de $\mathfrak{r}$ contienne un sous-anneau partout dense engendré (sur K) par des K-endomorphismes semi-linéaires. Enfin, il étend aussi sa théorie au cas où A est seulement supposé indécomposable (et satisfaisant à la condition minimale), et S un sous-anneau de A formé des éléments invariants par un groupe d'automorphismes „extérieurs" de A (l'A., ce Zbl. **38**, 24). *J. Dieudonné.*

Northcott, D. G.: A note on the intersection theorem for ideals. Proc. Cambridge philos. Soc. **48**, 366—367 (1952).

R étant un anneau noethérien commutatif avec élément unité 1, $\mathfrak{A} \neq R$ étant un idéal de R, l'A. démontre très simplement que $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{A}^i = \mathfrak{N}$ si et seulement si existe $a \in \mathfrak{A}$ tel que $x = xa$. C'est une généralisation du théorème de Krull-Chevalley, qui sert d'ailleurs dans la démonstration, suivant lequel $\mathfrak{N} = 0$ si et seulement si aucun diviseur de zéro n'est congru à 1 modulo $\mathfrak{A}$. Comme conséquence, l'A. établit que $\mathfrak{N}$ est toujours une composante isolée de l'idéal (0).

L. Lesieur.

Szekeres, G.: A canonical basis for the ideals of a polynomial domain. Amer. math. Monthly **59**, 379—386 (1952).

Deux pages sont consacrées à un rappel trop détaillé de notions classiques: anneau à factorisation unique, théorème de Gauss, anneau à idéaux principaux, transfert du théorème de la base finie à l'anneau $R[x]$ des polynomes à une variable x, à coefficients dans un anneau d'intégrité (commutatif et avec élément unité). En réalité, le résultat obtenu par l'A. dans les 4 pages suivantes ne concerne qu'un seul cas: celui où R est l'anneau des entiers relatifs. Dans ce cas, tout idéal M dans $R[x]$, tel que $R \cap M = 0$, possède une base canonique $\{g_k(x)\}_{k=1,2,\ldots,m}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

$$g_0 = q_1 q_2 \cdots q_m;\quad q_k g_k(x) = x g_{k-1}(x) + \sum_{i=0}^{k-1} b_{ki} g_i(x);\quad q_k > 0,\ 0 \leq b_{ki} < q_k;\ (0 < k \leq m;\ 0 \leq i < k).$$

Les nombres m, q_k, b_{ki}, et par suite la base $\{g_k(x)\}$, sont univoquement déterminés par M. Chaque

$g_k(x)$ est un polynome minimal de M, c. à. d. que son premier coefficient est positif minimum parmi les polynomes de degré k appartenant à M. Inversement, l'idéal M ayant pour base les polynomes $g_k(x)$ définis par les relations précédentes à partir des entiers arbitraires m, q_k, b_{ki}, possède précisément pour base canonique les polynomes $g_k(x)$. Lorsque $R \cap M = 0$, l'idéal M est le produit d'un idéal principal par un idéal du type précédent. L'A. obtient comme application le nombre des idéaux de degré m contenant une constante c donnée. Il termine en remarquant que sa méthode ne donne rien pour le cas important d'un anneau de polynomes à plusieurs variables. [Il conviendrait pour ce cas de consulter G. Hermann [Math. Ann. **95**, 736—788 (1926)] et, pour le cas d'un idéal premier, W. Gröbner, „Moderne algebraische Geometrie", Wien u. Innsbruck 1949, § 3, 133, ce Zbl. **33**, 127]. *L. Lesieur.*

Šnejdmjuller, V. I.: Algebren unendlichen Ranges mit Minimalbedingung für die Teilalgebren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **86**, 665—668 (1952) [Russisch].

In einer Algebra A über dem Körper P bedeutet die Minimalbedingung für Teilalgebren, daß jede Kette $A \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ von Teilalgebren über P nach endlich vielen Gliedern abbricht. Ist A vollständig primär und keine Divisionsalgebra, so muß der Rang von A endlich sein. Als Hauptsatz ergibt sich: Jede Algebra mit Minimalbedingung für Teilalgebren ist direkte Summe einer endlichen Anzahl direkt unzerlegbarer Algebren, deren jede entweder eine Divisionsalgebra unendlichen Ranges ist oder endlichen Rang besitzt. Diese Zerlegung ist, was die Summanden unendlichen Ranges anbetrifft, bis auf Isomorphie eindeutig. — Unter einer lokal-endlichen Algebra verstehe man eine solche, in der jede endliche Menge ihrer Elemente eine Teilalgebra endlichen Ranges erzeugt. Jede lokal-endliche Divisionsalgebra mit Minimalbedingung für Teilalgebren besitzt endlichen Rang über ihrem Zentrum. *R. Kochendörffer.*

Higman, Graham: Ordering by divisibility in abstract algebras. Proc. London math. Soc., III. Ser. **2**, 326—336 (1952).

An ordered algebra is an algebraic system for whose elements a relation $\leq$ of quasi-order (i. e. a binary reflexive transitive relation) is defined, such that the operations of the algebra are isotone in every variable. If $a \leq b$ and $b \leq a$ implies $a = b$, the quasi-order is called an order; if moreover always $a \leq b$ or $b \leq a$, the order is a linear order; if the result of every operation is greater than or equal to each of the factors, the quasi-order is called a „divisibility order". A quasi-ordered set is said to have the „finite basis property" (abbreviated to f. b. p.), if every subset which contains with x also all $y \geq x$ consists of a finite subset and all elements greater than or equal to some element of this subset. — The main result of the paper is the theorem that under some natural and weak restrictions on the set of operations of the algebra every divisibility order on the algebra has the f. b. p. This conclusion holds in particular if the algebra is generated by a set of elements with the f. b. p,. and there only are a finite number of operations. The proof requires a study of the finite basis property which is of independent interest. A linearly ordered set with f. b. p. is well-ordered. A number of equivalent formulations are given for the f. b. p., and a principle of induction is derived which generalizes transfinite induction. The f. b. p. carries over to subsets, homomorphic images, and cardinal products (of finitely many factors). — A number of diverse applications of the main theorem include several combinatorial results of Erdös and Rado (unpublished); a generalization of known results on the existence of power series division rings over ordered algebraic systems (cf. H. Hahn, S.-Ber. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl. **116**, 601—655 (1907); A. I. Malcev, this Zbl. **34**, 309; B. H. Neumann, this Zbl. **35**, 304; D. Zelinsky, this Zbl. **32**, 390) and a theorem establishing the ascending chain condition for certain large systems of fully invariant subgroups of free groups. *B. H. Neumann.*

Schenkman, Eugene: Infinite Lie algebras. Duke math. J. **19**, 529—535 (1952).

The author extends his tower theorem [Amer. J. math. **73**, 453—474 (1951)] to the case of infinite dimensional Lie algebras satisfying the following conditions: 1) The join N of all nilpotent ideals of L (i. e. the nil radical of L) is nilpotent and such that L/N is finite dimensional. 2') L is uniformly locally finite, i. e. the dimension of any subalgebra generated by n elements has a bound depending only on n. — Denote by $D(L)$ the algebra of derivations of L and define the tower of derivations of L inductively by $D_0 = L$, $D_{k+1} = D(D_k)$. Further put $L^\omega = \bigcap_{i=1}^{\infty} L^i$, then the generalised tower theorem (theorem 7, p. 534) states: If L satisfies 1) and 2') and has zero centre, and Z is the centre of L^ω, then D_k/Z is isomorphic to a subalgebra of $D(L^\omega)$. This is proved by extending some of the author's results on subinvariant Lie algebras to the infinite dimensional case, in particular (th. 5): If A is member of a finite normal series of L, then A^ω

is an ideal of L and (th. 7, p. 533) if further A (but not necessarily L) satisfies 1), 2') and has zero centraliser in L, then the centraliser of A^ω is contained in A^ω. — As in loc. cit. the tower theorem has the corollary (th. 8): Let L satisfy 1), 2') and have zero centre and suppose L is isomorphic to an ideal K of the holomorph of L^ω, where $K \supset L^\omega$. If Z denotes the centre of L^ω then $D(L)/Z \cong D(L^\omega)$, and hence $D(L)$ has only inner derivations. In the enunciation of theorem 8 read L^ω for the last L in line 2 and the first L in line 4. — The theorems of Engel, Lie and Levi are also extended to Lie algebras satisfying 1); for Lies's theorem L also has to satisfy 2') while for Levi's theorem L has to be locally finite. Further it is proved that a locally finite Lie algebra L satisfying 1) is nilpotent if every proper subalgebra can be embedded in a maximal proper subalgebra and in addition either a) every maximal proper subalgebra of L is an ideal or b) the intersection of all proper maximal subalgebras of L contains L^2, the derived algebra of L. (Cf. the characterization of nilpotent groups by K. A. Hirsch, this Zbl. **33**, 149). *Paul M. Cohn.*

Murakami, Shingo: On the automorphisms of a real semi-simple Lie algebra. J. math. Soc. Japan **4**, 103—133 (1952).

Let $\mathfrak{G}$ be a real semi-simple Lie algebra and $\tilde{\mathfrak{G}}$ the complex algebra obtained by extending the groundfield. Choose a Cartan subalgebra $\tilde{\mathfrak{H}}$ of $\tilde{\mathfrak{G}}$ and denote by $\mathfrak{H}$ the space over the real numbers generated by the roots. A rotation of $\mathfrak{H}$ is defined as an orthogonal transformation of $\mathfrak{H}$ which permutes the roots among themselves. It is an inner rotation if it can be generated by reflections in the hyperplanes orthogonal to the roots. Let G be the group of automorphisms of $\mathfrak{G}$ and K a maximal compact subgroup of G, and denote by G^0, K^0 the connected components of the identity in G and K respectively. Then the main result states that G/G^0 is isomorphic to $\mathfrak{T}/\mathfrak{S}$, where $\mathfrak{T}$ and $\mathfrak{S}$ are the groups of rotations of $\mathfrak{H}$ induced by those automorphisms of K, K^0 respectively which leave $\tilde{\mathfrak{H}}$ invariant. While the previous investigators of the structure of G/G^0 [E. Cartan; cf. F. Gantmacher, this Zbl. **22**, 12, 315] had either limited themselves to the complex case or used methods foreign to algebra, the present approach is purely algebraic. The author makes the reduction to compact groups (E. Cartan) by a method following Mostow (this Zbl. **37**, 14) and gives the following characterization of $\mathfrak{T}$ and $\mathfrak{S}$: The real form of $\tilde{\mathfrak{G}}$ which corresponds to a compact Lie group is denoted by $\mathfrak{G}_u$ and is called the unitary restriction of $\tilde{\mathfrak{G}}$. Then an involutary automorphism S of $\mathfrak{G}_u$ can be chosen which leaves $\tilde{\mathfrak{H}}$ invariant and induces in $\mathfrak{H}$ a rotation ϱ leaving invariant the set of vectors in $\mathfrak{H}$ which are positive with respect to a given fundamental basis of roots (Gantmacher l.c.). The roots now fall into three systems. Σ_1: roots α which are left fixed by ϱ and such that e_α (the vector of $\tilde{\mathfrak{G}}$ belonging to the root α) is an eigenvector of S belonging to the eigenvalue 1, Σ_2: roots β which are left fixed by ϱ and such that e_β is an eigenvector of S belonging to the eigenvalue -1, and Σ_3: roots ξ which are not left fixed by ϱ. Write ξ^* for $\varrho(\xi)$ and denote the fundamental bilinear form by $(,)$. Then $\mathfrak{T}$ is the group of rotations τ which commute with ϱ and such that $\varrho(\Sigma_i) = \Sigma_i$, $i = 1, 2, 3$; and $\mathfrak{S}$ is the group generated by the following inner rotations:

$$\sigma_\alpha\,(\alpha \in \Sigma_1), \quad \left.\begin{matrix} \sigma_\beta & \text{where } \beta = \xi + \xi^* \text{ and } (\xi, \xi^*) \neq 0 \\ \sigma_{\xi^*}\sigma_\xi & \text{where } (\xi, \xi^*) = 0 \end{matrix}\right\} (\xi \in \Sigma_3).$$

Here σ_γ denotes the reflection in the hyperplane orthogonal to γ. The roots $\beta = \xi + \xi^*$ such that $(\xi, \xi^*) \neq 0$ are in Σ_2. By way of application the group G/G^0 is determined for the real Lie algebras whose complex form is of type A_n. *Paul M. Cohn.*

Seidenberg, A.: Some basic theorems in differential algebra (characteristic p, arbitrary). Trans. Amer. math. Soc. **73**, 174—190 (1952).

Verf. gibt eine kurze, in sich geschlossene Darstellung einiger Hauptsätze der Differentialalgebra für Körper der Charakteristik 0 und schlägt unter Verwendung von Beispielen vor, wie man die benutzten Begriffe zweckmäßig modifizieren sollte, um bei Primzahlcharakteristik zu entsprechenden Aussagen zu kommen. — Es seien F ein D-(Differential-)Körper; U, $U_1, \ldots, U_n$ D-Unbestimmte über F; u, $u_1, \ldots, u_n$, Elemente eines D-Oberkörpers von F; $F\{u_1, \ldots, u_n\}$ bzw. $\langle F\, u_1, \ldots, u_n\rangle$ der kleinste D-Ring bzw. D-Körper, der F und die u_i enthält. Alle vorkommenden Ideale werden stillschweigend als D-Ideale vorausgesetzt. — Char. 0: u heiße D-algebraisch über F, wenn es Nullstelle eines nichttrivialen Polynoms aus $F\{U\}$ ist. Ist u D-algebraisch über F, so ist $F\langle u\rangle$ endlich über F; andernfalls hat $F\langle u\rangle$ unendlichen Transzendenzgrad über F. Der Satz vom primitiven Element (I) ist auch im D-Falle gültig, sobald F nichtkonstante Elemente enthält; denn unter dieser Bedingung gilt der wie im algebraischen Falle zum Beweise benutzte Satz von den nichtverschwindenden Polynomen (II), wonach es zu jedem Polynom $f\{U\}$ aus $F\{U\}$ ein $u \in F$ mit $f\{u\} \neq 0$ gibt. Zur Erleichterung des Überganges zu Char. $p \neq 0$ formuliert Verf. folgende Fassungen des Hilbertschen Nullstellensatzes: Schwache Form (III): Jedes perfekte Ideal des Polynomringes $F\{U_1, \ldots, U_n\}$ ist Durchschnitt von Primidealen. Starke Form (IV): Zu jedem r-dimensionalen Primideal P in $F\{U_1, \ldots, U_n\}$, das ein Element $\alpha \in F\{U_1, \ldots, U_n\}$ nicht enthält, läßt sich ein $(r-1)$-dimensionales Primoberideal von P finden, das α nicht enthält. Schließlich er-

geben sich für $F\{U_1, \ldots, U_n\}$ die beiden Endlichkeitssätze (V): Es gilt der Teilerkettensatz für Primideale, (VI) jedes perfekte Ideal ist Durchschnitt endlich vieler Primideale, aus denen sofort der Teilerkettensatz für perfekte Ideale folgt. — Char. $p \neq 0$: u heiße D-algebraisch über F, wenn $F\langle u\rangle$ eine endliche Erweiterung von F ist. (I) gilt, wenn F keine endliche lineare Basis über seinem Konstantenkörper hat. Denn dann und nur dann ist (II) erfüllt. Ein Primideal P in $S = F\{U_1, \ldots, U_n\}$ heiße zulässig, wenn der Quotientenkörper von S/P separabel über F ist. Es zeigt sich die Gültigkeit von (V) und (VI) für zulässige perfekte Ideale. Eine Diskussion von D-Separabilitätsfragen führt zum Satz von MacLane (VII): Ist $F\langle u_1, \ldots, u_n\rangle$ separabel über F vom D-Transzendenzgrad t, so ist bei geeigneter Umnumerierung der u_i $F\langle u_1, \ldots, u_n\rangle$ separabel über $F\langle u_1, \ldots, u_t\rangle$. Während (III) wörtlich übernommen werden kann, bleibt (IV) nur für zulässige Primideale erhalten. Das folgt aus (IV) unter Benutzung von (VII), jedoch gibt Verf. noch einen zweiten, besonders kurzen Beweis. *A. Jaeger.*

Jaeger, Arno: Gewöhnliche Differentialgleichungen in Körpern von Primzahlcharakteristik. Monatsh. Math. **56**, 181—219 (1952).

Aufbauend auf der von Hasse, F. K. Schmidt und Deuring begründeten Differentiationstheorie für Körper einer Charakteristik $p \neq 0$ (dies. Zbl. **13**, 341; **17**, 101) entwickelt Verf. eine Theorie der Differentialgleichungen über solchen Körpern, die sich von der klassischen Theorie in wesentlichen Punkten unterscheidet. So ist die Auflösung einer Differentialgleichung der Formalordnung n mit $p^{t-1} \leq n < p^t$ gleichwertig mit dem Aufsuchen aller Lösungen eines gewissen Systems von p^t algebraischen Gleichungen in p^t Unbestimmten. Die Koeffizienten dieses Gleichungssystems sind dabei konstant von Ordnungen $\geq t$. Weitere Aussagen werden über Parameteranzahl, Existenz der allgemeinen Lösung usw. gemacht. Es folgt die Behandlung der Differentialgleichungen $D^n y = w$ und der linearen Differentialgleichungen. Abweichend vom klassischen Fall können jetzt jedoch in der allgemeinen Lösung einer linearen Differentialgleichung, die nicht immer zu existieren braucht, mehr unabhängige Parameter auftreten, als die Formalordnung angibt; indes läßt sich für diese Anzahl eine obere Schranke angeben. Die Ergebnisse werden speziell auf die hypergeometrische und die Besselsche Differentialgleichung angewandt. Schließlich werden noch die linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten genauer untersucht. Der hierzu entwickelte Operatorkalkül weicht in seinen Methoden ebenfalls stark vom klassischen Fall ab. Der Begriff „konstante Koeffizienten" wird weiter gefaßt: Die Koeffizienten brauchen nur konstant von Ordnungen $\geq t$ zu sein, wenn $p^{t-1} \leq n < p^t$ und n die Formalordnung der Differentialgleichung ist. — Entsprechend der Iterationsregel für Differentiationen in Körpern der Charakteristik p treten durchgehend umfangreiche Rechnungen mit Binomialkoeffizienten auf. Zur besseren Handhabung und Übersicht werden daher einleitend Hilfssätze über Binomialkoeffizienten und Pascalsche Dreiecke hergeleitet. Grundlegend für die meisten Beweise ist dann ein Satz über gewisse Basisdarstellungen der Elemente des betrachteten Körpers. Es wird gezeigt: Ist $Dx_t = 1$ und $D^n x_t = 0$ für $1 < n < p^t$, so kann jedes Element z des Körpers eindeutig in der Form $z = \sum_{\nu=0}^{p^t-1} z_\nu x_t^\nu$ dargestellt werden. Dabei sind die z_ν Konstante von Ordnungen $\geq t$. Als Lösungen von Differentialgleichungen dürfen natürlich nur solche Elemente zugelassen werden, die in einem Erweiterungskörper liegen, auf den die Differentiation fortgesetzt werden kann. Vorbereitend wird daher schließlich die Frage untersucht, auf welche Körpererweiterungen sich eine gegebene Differentiation fortsetzen läßt. Die hierhin gehörenden Sätze werden sogleich für Multidifferentiationen bewiesen. *H. J. Kowalsky.*

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Varnavides, P.: The Euclidean real quadratic fields. Indagationes math. **14**, 111—122 = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **55**, 111—122 (1952).

Ist ϑ quadratisch irrational über dem rationalen Zahlkörper P, so heißt bekanntlich $\mathsf{P}(\vartheta)$ bez. der Norm $N(\alpha)$, $\alpha \in \mathsf{P}(\vartheta)$, Euklidisch, wenn für jedes Paar (α, β) von ganzen Zahlen aus $\mathsf{P}(\vartheta)$ mit $\beta \neq 0$ ein ganzes $\xi \in \mathsf{P}(\vartheta)$ existiert mit $N(\alpha - \xi\beta) < N(\beta)$. Wählt man $\vartheta = \sqrt{D}$, D quadratfrei und ganzrational, so weiß man (vgl. u. a. Inkeri, dies. Zbl. **29**, 201), daß $\mathsf{P}(\sqrt{D})$ höchstens mit Ausnahme von (1) $D = -11, -7, -3, -2, -1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 57, 73, 97$ niemals Euklidisch, jedoch für $D \neq 97$ aus (1) Euklidisch ist. [Verf. bemerkt, daß $\mathsf{P}(\sqrt{97})$ bislang irrtümlich als Euklidisch galt, was von E. Barnes und H. Swinnerton in einer demnächst erscheinenden Arbeit gezeigt werden würde.] Unter Heranziehung früherer Methoden des Verf. (dies. Zbl. **30**, 343) wird für die reellen quadratischen Körper $\mathsf{P}(\sqrt{D})$, d. h. für die $D > 0$, $D \neq 97$, aus (1) erneut

nachgewiesen, daß sie Euklidische Körper liefern. Der Beweis erfordert zum Teil längere numerische Rechnungen. *H.-H. Ostmann.*

MacKenzie, Robert E.: Class group relations in cyclotomic fields. Amer. J. Math. **74**, 759—763 (1952).

Im Ring aller ganzen rationalen Zahlen sei N ein Repräsentantensystem aller primen Restklassen mod $n(\geqq 3)$. Ferner sei ε eine primitive n-te Einheitswurzel und $k = R(\varepsilon)$ ein Kreisteilungskörper über dem rationalen Zahlkörper R. Dann ist für eine Zahl q aus N ein Automorphismus σ_q von k/R durch die Relation $\sigma_q(\varepsilon^q) = \varepsilon$ eindeutig definiert. Verf. beweist folgenden Satz: Für eine beliebige Idealklasse $\mathfrak{C}$ aus k und für beleibige ganze rationale Zahlen s, t ist die Idealklasse $\prod(\mathfrak{C}) = \prod_{q \in N} \sigma_q(\mathfrak{C})^{[q(s+t)/n] - [qs/n] - [qt/n]}$ stets gleich der Hauptklasse aus k, wo [ ] das Gaußsche Symbol bezeichnet. Da bekanntlich $\mathfrak{C}$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ ersten Grades (über R) mit $(p, n) = 1$ enthält, so braucht man nur zu zeigen, daß $\prod(\mathfrak{p})$ ein Hauptideal aus k ist. Nach dem bekannten Zerlegungsgesetz der rationalen Primzahlen in k ist $\prod_{q \in N} \sigma_q(\mathfrak{p})$ ein von einer Primzahl p erzeugtes Hauptideal aus k. Daraus schließt man ohne Schwierigkeit, daß $\prod(\mathfrak{p})$ ein Hauptideal ist, wenn eines von s und t oder $s + t$ durch n teilbar ist. Daher kann man sich auf den Fall beschränken, daß s, t und $s + t$ durch n unteilbar sind. Nun sei Φ der Restklassenkörper mod $\mathfrak{p}$ in k und Φ^* sei die prime Restklassengruppe mod $\mathfrak{p}$. Dann versteht man unter den Charakteren χ der additiven Gruppe Φ p-te Einheitswurzeln. Setzt man für einen Charakter χ von Φ^* $\varphi_\chi(\lambda) = \sum_\alpha \chi(\alpha)\,\lambda(\alpha)$ $(\alpha \in \Phi^*)$, so kann man beweisen, daß für $\lambda \neq 1$ $\prod_\chi \varphi_\chi(\lambda)|^2 = p^{p-1}$ gilt, wo χ alle Charaktere von Φ^* durchläuft. (Verf. stellt für ein beliebiges, zu n primes Primideal $\mathfrak{p}$ aus k eine noch allgemeinere Formel auf.) Da $\lambda(\alpha)$ eine Zahl aus dem Kreisteilungskörper K der pn-ten Einheitswurzeln über R ist, so gehört jedes $\varphi_\chi(\lambda)$ zu K. Im Falle, wo $\chi(\alpha)$ ein n-ter Potenzrestcharakter $(\alpha/\mathfrak{p})^s$ nach $\mathfrak{p}$ ist, wird $\varphi_\chi(\lambda)$ einfach mit $\varphi_s(\lambda)$ bezeichnet. Im Körper K besitzt $\sigma_q(\mathfrak{p})$ einen einzigen Primteiler $\mathfrak{P}_q$, und es gilt in K: $\sigma_q(\mathfrak{p}) = \mathfrak{P}_q^{p-1}$. Aus der obigen Produktformel schließt man ohne weiteres: $\varphi_s(\lambda) = \prod_{q \in N} \mathfrak{P}_q^{\nu(s,q)}$. Dabei gilt für $\lambda \neq 1$ und $n \nmid s$: $\nu(s, q) = (p-1)(1 - (qs)/n + [qs/n])$. Bezeichnet man mit $g(s, t)$ den Koeffizienten von $\lambda(1)$ in $\varphi_s(\lambda)\,\varphi_t(\lambda)$, so erhält man $\varphi_s(\lambda)\,\varphi_t(\lambda) = g(s, t)\,\varphi_{s+t}(\lambda)$, falls $n \nmid (s + t)$ ist. Ferner ist $g(s, t)$ eine Zahl aus k. Wenn außerdem s, t beide durch n unteilbar sind, so schließt man sofort: $g(s, t) = \varphi_s(\lambda)\,\varphi_t(\lambda)/\varphi_{s+t}(\lambda) = \prod_{q \in N} \mathfrak{P}_q^{\nu(s,q)+\nu(t,q)-\nu(s+t,q)}$. Dabei gilt für $\lambda \neq 1$:

$$\nu(s, q) + \nu(t, q) - \nu(s + t, q) = (p-1)(1 - [q(s + t)/n] + [qs/n] + [qt/n]).$$

Wegen $g(s, t) \in k$ ist also $p\,g(s, t)^{-1} = \prod(\mathfrak{p})$. *M. Moriya.*

Whaples, G.: Generalized local class field theory. I. Reciprocity law. Duke math. J. **19**, 505—517 (1952).

To local class field theory, in its generalized formulation by Moriya, the reviewer and Schilling (The Theory of Valuations, New York 1950, this Zbl. **37**, 307) is given a new treatment. It employs cohomological approach [Hochschild, Ann. of Math. **51**, 331—347 (1950)] and is closely related with Artin's one (Algebraic Numbers and Algebraic Functions, New York 1951). A crucial norm lemma is proved skilfully by Hensel's product expression of π-adic elements and by considering the case of an algebraically closed residue-field, together with traditional trace arguments. Reciprocity law is given by means of pairing of the multiplicative group of the underlying field and the character group of the full Galois group (first into the continuous 2-cohomology group and then) into reals mod. 1. *T. Nakayama.*

Tate, John: The higher dimensional cohomology groups of class field theory. Ann. of Math., II. Ser. **56**, 294—297 (1952).

It is proved that the Galois cohomology group $H^r(G, A)$ $(r > 2)$ in the idèle-class group A of an algebraic number field is isomorphic to the cohomology group $H^{r-2}(G, Z)$ in the additive group Z of rational integers. The proof depends on the equivalence of the following two axioms concerning a 2-cohomology class α on a finite group G in an abelian G-group A and the Artin splitting group $\bar{A}$ for α: I. $H^1(U, A) = 0$ and $H^2(U, A)$ is cyclic of the same order as U, generated by the restriction of α to U, for every subgroup U of G; II. $H^1(U, \bar{A}) = H^2(U, \bar{A}) = 0$

for every subgroup U of G. The equivalence is proved by making use of the exact sequences $H_0(I) \to H^1(A) \to H^1(\bar{A}) \to H^1(I) \to H^2(A) \to H^2(\bar{A}) \to H^2(I)$, $H^0(R) \to H^0(Z) \to H^1(I) \to H^1(R) \to H^1(Z) \to H^2(I) \to H^2(R)$ derived from $\bar{A}/A \simeq I$, $R/I \simeq Z$, where R is the group ring of G over Z and I is its ideal generated by the elements $\sigma - 1$ ($\sigma \in G$). I. is satisfied by the fundamental cohomology class in the class field theory (cf. the following review) while II. entails $H^r(U, \bar{A}) = 0$ for all $r > 0$, by a result due to Serre, Lyndon, Hochschild and the reviewer [cf. Hochschild-Nakayama, l. c.], and they together lead, combined with the higher-dimensional analogues to the above exact sequences, to a desired canonical isomorphism of $H^r(G, A)$ and $H^{r-2}(G, Z)$. A special case is $H^3(G, A) = 0$. A subsequent paper is promised, where negative-dimensional cohomology groups will be discussed. *T. Nakayama.*

Hochschild, G. and T. Nakayama: Cohomology in class field theory. Ann. of Math., II. Ser. **55**, 348—366 (1952).

Let k be an algebraic number field of a finite degree, K a finite normal extension of k with the Galois group $\mathfrak{G}$. The elements of $\mathfrak{G}$ operate as automorphisms on the following groups: (1) the multiplicative group K^* of regular elements of K, (2) the idèle group J_K of K, (3) the idèle class group C_K of K. So one may consider the n-th cohomology groups $H^n(\mathfrak{G}, K^*)$, $H^n(\mathfrak{G}, J_K)$, $H^n(\mathfrak{G}, C_K)$ of $\mathfrak{G}$ in K^*, J_K, C_K resp. ($n = 1, 2, \ldots$). The main results of the class field theory, or rather of the theory of algebras based on the class field theory are then translated into cohomology language as follows: (1) $H^1(\mathfrak{G}, J_K) = (1)$ (Hilbert-Speiser theorem), (2) The natural homomorphism j of $H^2(\mathfrak{G}, K^*)$ into $H^2(\mathfrak{G}, J_K)$ is an isomorphism (Hasse-Brauer-Noether theorem). (3) One may define the invariants of idèle cohomology classes i. e. of the elements of $H^2(\mathfrak{G}, J_K)$ as functions $\varphi(\mathfrak{p})$ defined on the set of all primes of k and taking values on the additive group of rational numbers mod 1 such that $\varphi(\mathfrak{p}) = 0$ for all but a finite number of $\mathfrak{p}$. The invariants of the elements of $j(H^2(\mathfrak{G}, K^*))$ are then characterized by $\sum_{\mathfrak{p}} \varphi(\mathfrak{p}) = 0$ (Hasse reciprocity theorem), so that $H^2(\mathfrak{G}, J_K)/j(H^2(\mathfrak{G}, K^*))$ is cyclic of order n/g, where $n = [K:k]$ and g is the g. c. d. of the number $g_{\mathfrak{p}}$ of prime divisors of $\mathfrak{p}$ in K for all $\mathfrak{p}$ in k. These are the contents of theorems 2.1, 2.2, 2.4, 2.5 of this paper. They are proved independently from the theory of algebras by the elegant method of exact sequence. The same method allows to go further to obtain the following new results: (4) $H^1(\mathfrak{G}, C_K) = (1)$ (theorem 2.3), (5) $H^2(\mathfrak{G}, C_K)$ is cyclic of order n, and is generated by the „canonical class" $u_{K/k}$, where $u_{K/k}$ is defined first for the case where K/k is cyclic, by use of Nakayama-Akizuki homomorphism (cf. Nakayama, this Zbl. **12**, 390; Akizuki, this Zbl. **13**, 293), and then in the general case by the method of lifting and restriction [cf. Hochschild, Ann. of Math., II. Ser. **51**, 331—347 (1950)]. (Theorem 2.6) (6) The image of $H^2(\mathfrak{G}, C_K)$ in $H^3(\mathfrak{G}, K^*)$ by natural homomorphism is a cyclic group of order g and is generated by the image of $u_{K/k}$. It coincides with the ceilinged group $H_c^3(\mathfrak{G}, K^*)$ (theorems 2. 7, 2. 8). (7) $H_c^3(\mathfrak{G}, J_K) = (1)$, $H_c^3(\mathfrak{G}, C_K) = (1)$. The significance of $u_{K/k}$ is discussed in § 3. It is identified with the class defined arithmetically by A. Weil (cf. this Zbl. **44**, 29) first for the cyclic case, then in the general case in verifying the three characteristic properties of the class of Weil (cf. Weil l. c.). Finally, in the last § 4, it is shown that $H^n(\mathfrak{G}, K^*) = H^n(\mathfrak{G}, J_K) = H^n(\mathfrak{G}, C_K) = (1)$ for all $n \geq 1$, when k is (not an algebraic number field but) a finite extension of transcendence degree 1 of an algebraically closed field and K is a finite normal extension of k with the Galois group $\mathfrak{G}$. The case $n = 2$ follows from Tsen theorem, whence follows further the general case by the method of exact sequence. *S. Iyanaga.*

Lang, Serge and John Tate: On Chevalley's proof of Luroth's theorem. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 621—624 (1952).

Chevalley hat zum Beweis des Satzes von Lüroth die Tatsache benutzt, daß ein rationaler Funktionenkörper über seinem Konstantenkörper separabel erzeugbar und vom Geschlecht Null ist. In Verallgemeinerung dieser Tatsache wird gezeigt (Theorem 1): Ist k ein über dem Konstantenkörper k_0 separabel erzeugbarer Funktionenkörper und k' ein k_0 umfassender Unterkörper von k, so gilt für die Geschlechter g von k bzw. g' von k': $g' \leq g$. Daraus folgt fast unmittelbar der Satz von Lüroth. — Ist k über k_0 nicht separabel erzeugbar, so ist Theorem 1 falsch. Darüber hinaus gilt (Theorem 2): Ein über k_0 nicht separabel erzeugbarer Funktionenkörper k vom Geschlecht Null enthält Unterkörper mit beliebig großem Geschlecht. — Schließlich wird durch ein Beispiel die Existenz von nicht separabel erzeugbaren Funktionenkörpern vom Geschlecht Null nachgewiesen. *F. Kasch.*

Tate, John: Genus change in inseparable extensions of function fields. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 400—406 (1952).

Let k be any field of characteristic $p > 0$, and K be an inseparable extension of k of degree p, and $K = k(\alpha)$ with $\alpha^p = a$ in k. If ξ in K is expressed in the form $\xi = x_0 + x_1\alpha + \cdots + x_{p-1}\alpha^{p-1}$ (x_i in k) in terms of α, we put $S_\alpha(\xi) = x_{p-1}$. S_α can be regarded as a substitute for the trace from K to k. He also introduces a substitute for the different of K over k, by means of above-mentioned new trace. He then derives the relation between the genera G and g of k and K in the form $2G - 2 = p^{1-n}(2g - 2) + (p - 1)a$, p^n being the relative degree between constant fields of K and k. The value of a is precisely given in his paper. Following two consequences are of interest in itself: 1. By totally inseparable extension, genus change $G - g$ is divisible by $(p - 1)/2$, p being the characteristic of the fields. 2. If k has the characteristic $p > 0$ and genus $g < (p - 1)/2$, then the genus of k is invariant under all constant field extensions. *T. Tannaka.*

Kawai, Ryoichiro: A note on the Riemann-Roch-Weil's theorem. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A **27**, 123—131 (1952).

In the A. Weil's paper on the theory of hyperabelian functions (this Zbl. **18**, 63), a certain kind of Riemann-Roch theorem for matrix-divisors was presented. He proved this theorem by a purely transcendental method, using the abelian integrals of the third kind. The present paper shows that we can also deduce it from the E. Witt's Riemann-Roch theorem on the simple algebras over an algebraic function-field of one variable by a purely algebraic method for an arbitrary algebraic function-field with algebraically closed constant-field. But the general case of arbitrary „signatures" for the case of prime number characteristic is not treated in this paper. *J. Igusa.*

Zahlentheorie:

● **Neiß, Fritz: Einführung in die Zahlentheorie.** Leipzig: S. Hirzel Verlag 1952. 113. S.

In this book the author proposes to give those parts of the theory of numbers which belong to the general education of a mathematician. So we find here an introduction into the elementary number theory, although a few pages are devoted to some results of analytic number theory. — The author has chosen from the subjects available the following chapters: I. Divisibility of integers (with Zermelo's and classical proof of the fundamental theorem); II. Finite continued fractions (with applications on the representation by two squares and factorisation of unimodular matrices); III. Residue systems (with definitions of group, ring, field, etc.); IV. Arithmetical functions [$\sigma_k(m)$, $\varphi(m)$, $\mu(m)$ and their applications); V. Theorems of Fermat, Thue and Wilson (with applications); VI. Algebraic congruences (formulated by means of group theory); VII. Quadratic residues (Legendre's symbol, sum of two and four squares); VIII. The law of quadratic reciprocity (two proofs); IX. Quadratic forms (automorphic transformations, Pell's equation, reduction of quadratic forms, finiteness of the number of classes). A number of excercises, partly quoted from I. Schur, completes the work. — In connection with the great significance of the algebra in modern mathematics, the author has not hesitated to formulate the theorems by means of algebraic terminology. *W. Verdenius.*

● **Leman-Schoeneberg: Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie.** 3. Aufl. (Math.-phys. Bibl. I, 19). Leipzig: B. G. Teubner, 1952. 60 S. DM 2,10.

Maccaferri, Eugenio: Alcune proprietà dei numeri interi. Periodico Mat., IV. Ser. **30**, 209—210 (1952).

Rao, U. R. Shankarnarayana: Testing for divisibility. Math. Student **20**, 82—84 (1952).

Kraitchik, Maurice: On the factorization of $2^n \pm 1$. Scripta math. **18**, 39—52 (1952).

This article contains a summary of the knowledge on the factors of $2^n \pm 1$ for several values of n. Hereby special attention is devoted to the Mersenne's and Fermat's numbers, Lucas' test of primality and Aurifeuillian numbers with Lucas'

generalisation (Cf. Dickson, History I, p. 396 and 383). A list of all known results which are definitely settled up to this time completes the work. *W. Verdenius.*

Gloden, A.: Notes on Diophantine equations. Scripta math. **18**, 177—179 (1952).

Gloden, A.: Systèmes multigrades remarquables. Mathesis **61**, 278—280 (1952).

Pietrosanti, Aldo: Sopra un sistema diofanteo. Archimede **4**, 203—205 (1952).

Morgantini, E.: Sulla risoluzione dell'equazione diofantea: $\sum_i a_i x_i^2 = x_0^{2m} \sum_i a_i$. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser., Sez. VII **1**, 93—101 (1952).

Morgantini, Edmondo: Sulla risoluzione dell'equazione diofantea: $\sum_i a_i x_i^2 = \sum_i a_i y^{2m_i}$. Ann. Triestini, Sez. II **21**, 35—45 (1952).

In beiden Fällen kommt der Verf. durch geometrische Überlegungen zu Formeln, durch die die Lösungen der gegebenen diophantischen Gleichungen in Parameterform gegeben werden. Die Bedingungen, denen die Parameter unterworfen sind, sind in beiden Arbeiten nicht einfach angebbar. *N. Hofreiter.*

Skolem, Th.: On the diophantine equation $a x^2 + b y^2 + c z^2 = 0$. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. **11**, 88—100 (1952).

The following theorem of Legendre is proved: Let $a b c$ be square free. Then $a x^2 + b y^2 + c z^2 = 0$ is solvable in integers x, y, z, not all zero, if and only if, a, b, and c have not all the same sign and if $a x^2 + b y^2 + c z^2$ is reducible mod. $a b c$ or if $-b c, -c a, -a b$ are quadratic residues mod. a, b, c. — The proof is made by means of a lemma which in a generalised form is also used by Mordell (this Zbl. **44**, 34) in his proof on the same subject. Here at first is shown that the reducibility includes the solvability and conversely. The quadratic residues are then concluded from the reducibility. Although the proof of Mordell is shorter here the quadratic reciprocity law is not used. Also the same boundaries for $|x|$, $|y|$ and $|z|$ are proved as in the above mentioned article of Mordell. — Afterwards the following generalisation is proved: Let $a(t)$, $b(t)$ and $c(t)$ belong to the domain ϑ of polynomials with rational coefficients of degree resp. n, $n-r$, $n-s$. Then $a(t) x^2(t) + b(t) y^2(t) + c(t) z^2(t) = 0$ is non trivially solvable with $x(t), y(t)$ and $z(t)$ in ϑ, if and only if $-b(t)c(t), -c(t)a(t), -a(t)b(t)$ are quadratic residues mod $a(t)$, $b(t)$ and $c(t)$ in ϑ, provided that when r and s are both pair, a rational number τ exists, such that $a(\tau)\, b(\tau)\, c(\tau) \neq 0$ and $a(\tau) x^2 + b(\tau) y^2 + c(\tau) z^2 = 0$ is solvable in rational integers not all zero. — The proof is elementary, but it seems not so easy to generalise it to higher algebraic number fields. *W. Verdenius.*

Samet, P. A.: An equation in Gaussian integers. Amer. math. Monthly **59**, 448—452 (1952).

Verf. bringt einen Beweis der Behauptung von J. S. Smith [Proc. Roy. Soc. **13**, 278—297 (1864); Collected Works, Bd. 1, 410]: Sei R der rationale Zahlkörper, also $R(i)$ der Gaußsche Zahlkörper. [Die Buchstaben bedeuten ganze Zahlen aus $R(i)$.] Notwendige und hinreichende Bedingung für die nichttriviale Lösbarkeit von $a x^2 + b y^2 + c z^2 = 0$ mit quadratfreien, paarweise primen a, b, c ist, daß $b c$, $c a$, $a b$ bzw. quadratische Reste von a, b, c sind. *L. Holzer.*

Stolt, Bengt: On the diophantine equation $u^2 - Dv^2 = \pm 4N$. Ark. Mat. **2**, 1—23 (1952).

For solving an equation of the type $u^2 - Dv^2 = \pm N$, where D and N are positive integers, one may use either the theory of quadratic forms or the theory of quadratic fields. T. Nagell has shown (this Zbl. **36**, 303) how it is possible to determine all solutions in rational integers u and v independently of these theories. In this paper the author considers the equation (1) $u^2 - D v^2 = \pm 4N$. His method is analoguous to that used by Nagell. One result is that (1), if solvable, has at most 2^n classes of solutions if $N = p_1 p_2 \cdots p_n$, p_i odd primes, $p_i \neq p_j$ and $(N, D) = 1$. Two solutions $\frac{u + v\sqrt{D}}{2}$, $\frac{u_1 + v_1\sqrt{D}}{2}$ are said to belong the same class if $\frac{u_1 + v_1\sqrt{D}}{2} = \frac{u + v\sqrt{D}}{2} \cdot \frac{x + y\sqrt{D}}{2}$, where $\frac{x + y\sqrt{D}}{2}$ is a solution of the diophantine equation $x^2 - Dy^2 = 4$. These investigations will be continued in a second and in a third part. *W. Ljunggren.*

Ljunggren, Wilhelm: Eine elementare Auflösung der Diophantischen Gleichung $x^3 + 1 = 2y^2$. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **3**, 99—101 und russische Zusammenfassg. 101 (1952).

Verf. zeigt mit Hilfe der Pellschen Gleichung, daß die diophantische Gleichung $x^3 + 1 = 2y^2$ nur die Lösungen $x = -1$, $y = 0$; $x = 1$, $y = \pm 1$; $x = 23$, $y = \pm 78$ hat. Druckfehler: In (6') und auf S. 101, Z. 5 soll 4 statt 2 im Nenner stehen. *N. Hofreiter.*

Ljunggren, Wilhelm: New solution of a problem proposed by E. Lucas. Norsk mat. Tidsskr. **34**, 65—72 (1952).

Das von E. Lucas gestellte Problem über die Lagerung von kongruenten Kugeln in einer quadratischen Pyramide führt auf die diophantische Gleichung $x(x+1)(2x+1) = 6y^2$. Wie G. N. Watson [Messenger of Math. **48**, 1—22 (1919)] mit elliptischen Funktionen gezeigt hat, hat die Gleichung nur die positiven Lösungen $x = y = 1$; $x = 24$, $y = 70$. Verf. beweist dies neuerdings, aber nur unter Benutzung von algebraischen und zahlentheoretischen Hilfsmitteln. *N. Hofreiter.*

Le Veque, Wm. J.: On the equation $a^x - b^y = 1$. Amer. J. Math. **74**, 325—331 (1952).

Let a and b denote any fixed integers. The author proves the following theorem: The equation $a^x - b^y = 1$ has just the two solutions (1, 1) and (2, 3) if $a = 3$, $b = 2$. In all other cases it has at most one solution. If a is even and b is odd, the only possible solution is with $x = \beta/\alpha$ if $2^\alpha || a$, $2^\beta || b+1$ and $\alpha > 1$, and with $x = 1$ or β if $\alpha = 1$. The only possible solution if a is odd and b is even is (s_0, s_1, t_0), where $a \to s_0(b)$, $b \to 2t_0(a)$, $a^{s_0} \to s_1(b^{t_0})$, the symbol $h \to f(k)$ meaning that h belongs to f (mod k). — The proof is very simple in the case a even, b odd. If a is odd and b even, the demonstration is more complicated. The reviewer has found a simpler method for determining the possible solution in this case, namely $y = 1$ or γ/δ or $(\gamma+1)/\delta$, where $2^\gamma || a \div (\div 1)^{(a-1)/2}$ and $2^\delta || b$. The author seems to be unaware of a paper of C. Størmer [C. r. Acad. Sci., Paris **127**, 752—754 (1898)], containing a complete solution of the more general equation (1) $a_1^{x_1} \cdot a_2^{x_2} \cdot a_3^{x_3} \cdots a_n^{x_n} - b_1^{y_1} \cdot b_2^{y_2} \cdot b_3^{y_3} \cdots b_m^{y_m} = c$ $(c = 1, 2)$. In the bibliography the rev. also misses a paper due to Th. Skolem (Norsk mat. Tidsskr. **27**, 37—51 (1945)] where he discusses the equation (1) in the case $c \neq 1, 2$. *W. Ljunggren.*

Mordell, L. J.: The congruence $a x^3 + b y^3 + c \equiv 0 \pmod{x y}$, and integer solutions of cubic equations in three variables. Acta math. **88**, 77—83 (1952).

The following theorem is proved: The congruence $a x^3 + b y^3 + c \equiv 0 \pmod{xy}$, where a, b, c are given integers, has an infinite number of solutions for which $(c\,x, y) = 1$, and x, y can be given as polynomials in a, b, c. By means of this theorem is shown that the equation $z^2 - 27^2 a^2 b^2 j^2 = a b^2 x^3 + y^3$, where a, b, j are given integers, has an infinity of integer solutions. In his paper (this Zbl. **46**, 266), the author proposed the conjecture: Let $f(x, y, z)$ be a cubic polynomial in x, y, z with integer coefficients such that $f(x, y, z) - a$ is irreducible for all a. Then if the equation $f(x, y, z) = 0$ does not represent a cone in three dimensional space and has one solution in integers, there exists an infinity of integer solutions. This conjecture has been proved for some equations and in particular for $z^2 - k^2 = l x + m y + A x^3 + B x^2 y + C x y^2 + D y^3$, where the coefficients are integers and $(l, m) = 1$. The equation (1) gives an example with $l = m = 0$. In a postscript the author states that the conjecture is false for the simple nontrivial equation $x^2 + y^2 + z^2 + 4xyz = 1$ with the only integer solutions $x = \pm 1$, $y = 0$, $z = 0$. *W. Ljunggren.*

Ricci, Giovanni: Funzioni aritmetiche. Proprietà asintotiche. Aritmetica analitica. Archimede **4**, 148—155 (1952).

Venkataraman, C. S.: On a problem of Erdös. Math. Student **19**, 127—128 (1952).

Die Gleichung $\Phi(x) = n$ ist für $n = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)$ und $n = 2^k (k+1) \cdot (k+2) \cdots (2k)$ lösbar [$\Phi(x)$ Eulersche Funktion, k bel. nat. Zahl.] *H. L. Schmid.*

Watson, G. L.: Representation of large numbers by cubic forms in seven positive integral variables. Proc. London math. Soc., III. Ser. **2**, 311—325 (1952).

Sei

$$f = a(u_1^3 + u_2^3) + b(v_1^3 + v_2^3) + c(w_1^3 + w_2^3) + dt^3,$$

a, b, c, d ganz. Jede genügend große ganze Zahl ist durch f darstellbar (mit ganzzahligen u, v, w, t), wenn 1. $a = b = c = 1$; oder 2. $a = b = d = 1$; $3 \nmid c$, $5 \nmid c$, $19 \nmid c$; oder 3. $(3, d) = 1$; $(42d, abc) = 1$; wenn p a, b, c teilt, so teilt p^2 keine der Zahlen a, b, c; keine Primzahl $\equiv 1 \pmod 6$ teilt zwei der Zahlen a, b, c. Die Beweismethode schließt an eine frühere Arbeit des Verf. an (dies. Zbl. **42**, 41), wo der Fall $a = b = c = d = 1$ behandelt wurde. Es wird das Resultat von Page und Siegel über Primzahlen in einer arithmetischen Progression benützt, sowie die Darstellbarkeit von ganzen Zahlen gewisser arithmetischer Reihen durch spezielle ternäre quadratische Formen. *K. Prachar.*

Oblàth, R.: Sur le problème de Goldbach. Mathesis **61**, 179—183 (1952).

Verf. gibt in seinem Artikel einen Überblick über den gegenwärtigen Stand des Goldbach-Problems. *H.-H. Ostmann.*

Sprague, Roland: Über additive Zerlegungen in lauter verschiedene Glieder einer Teilfolge der natürlichen Zahlenreihe. Math. Z. **56**, 258—260 (1952).

Verf. beweist mit einer neuen Methode den folgenden Zerfällungssatz: „Es sei $m_1, m_2, \ldots$ eine unendliche Teilfolge der natürlichen Zahlenreihe, $N \geq -1$ eine ganze Zahl. Ferner sei ein $k \geq 0$ vorhanden mit (1) $2m_k - m_{k+1} \leq N < m_{k+1}$ $(m_0 = 0)$, (2) $2m_l - m_{l+1} > N$ für alle $l > k$. Sind dann die Zahlen $N+1$, $N+2, \ldots, N+m_{k+1}$ sämtlich darstellbar in der Form (3) $\sum_\nu a_\nu m_\nu$ mit $a_\nu = 0$ oder 1, so ist jede natürliche Zahl oberhalb N die Summe von paarweise verschiedenen Gliedern der Folge (m_ν)". Ein ähnlicher Satz wurde bereits früher vom Ref. (dies. Zbl. **40**, 308) bewiesen, wo in (3) schärfer $a_\nu = 0$ für $\nu > k$, dagegen statt (1) und (2) nur $2m_l - m_{l+1} \geq 0$ für $l > k$ verlangt wird. Verf. weist darauf hin, daß das von ihm angegebene Verfahren bei den Dreiecks- und Fünfeckszahlen rascher zum Ziele führt, bei den Quadratzahlen hingegen nicht. *H.-E. Richert.*

Hasse, Helmut: Über die Artinsche Vermutung und verwandte Dichtefragen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I **116**, 17 S. (1952).

Die Artinsche Vermutung macht bekanntlich eine Aussage über die Dirichletsche Dichte der Menge der Primzahlen, welche eine vorgegebene ganzrationale Zahl $a \neq 0, \pm 1$ als Primitivwurzel haben. (Vgl. Hasse, Zahlentheorie, Berlin 1950; dies Zbl. **35**, 20). Der Verf. zeigt nun ausführlich, daß die Vermutung gezeigt wäre, wenn folgendes gilt: Ist für jede Primzahl q K_q der galoissche Körper $R(\sqrt[q]{1}, \sqrt[q]{a})$ (R Körper der rationalen Zahlen) mit Grad k_q, $\zeta(s|K_q)$ die Dedekindsche Zetafunktion von K_q, so ist für $1 < s \leq s_0$ (s_0 beliebig) (1) $\sum_q \frac{1}{k_q} \frac{\log \zeta(s|K_q)}{\log \zeta(s)}$ gleichmäßig konvergent. Um diese Vermutung zu zeigen, muß eine für $1 \leq s < s_0$ gleichmäßige Abschätzung von $\log \zeta(s|K_q)$ in Abhängigkeit von q gefunden werden. Wird die Artinsche Vermutung auf den Funktionenkörper über einen endlichen Konstantenkörper übertragen, so ist es H. Bilharz (dies. Zbl. **16**, 343) gelungen, dieses Programm durchzuführen und auf die Riemannsche Vermutung über die Kongruenzzetafunktion zurückzuführen, welche jetzt durch A. Weil bewiesen ist. Verf. berichtet nun über eine noch nicht publizierte Arbeit von H. W. Knobloch, in welcher mit der gleichen Methode die Dirichletsche Dichte der Menge der Primzahlen p untersucht wird, für welche $p-1$ quadratfrei ist. Dies führt nun auf den Körper K_q der q^2-ten Einheitswurzeln, und es führt alles auf den Beweis von (1) für diesen Körper zurück. H. W. Knobloch gelingt es allerdings nicht, (1) für diesen Fall zu beweisen, aber mit einer Modifikation von (1) gelingt es doch, die Dichte zu bestimmen. Diese Methode von Knobloch erscheint dem Verf. von großem Interesse, da sie vielleicht auf (1) im Falle der Artinschen Vermutung verallgemeinerungsfähig ist, obwohl das Problem von Knobloch bereits vorher von L. Mirsky (dies. Zbl. **33**, 162) sogar für die natürliche Dichte gelöst wurde. *E. Hlawka.*

Basu, N. M.: A note on partitions. Bull. Calcutta math. Soc. **44**, 27—30 (1952).

Verf. zeigt folgenden Satz: Ist $B_n^{(s)}$ die Anzahl der Zerlegungen der natürlichen Zahl n in höchstens s Summanden mit Berücksichtigung der Reihenfolge, dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl α mit $\frac{1}{2} < \alpha(s) < 1$, so daß für $n \to \infty$ $B_n^{(s)} \sim \frac{1-\alpha}{\alpha^2[2-(s+1)\alpha^s]} \alpha^{n-1}$. Es ist α einfache Nullstelle der Gleichung $\varphi(z) = \frac{1-2z+z^{s+1}}{1-z} = 0$, deren weitere Nullstellen β_i $(1 \leqq i \leqq s-1)$ dem Betrage nach > 1 und einfach sind. Der Satz folgt dann sofort aus der Partialbruchzerlegung von $1/\varphi(z) = 1 + \sum_1^\infty B_n^{(s)} z^n$. *E. Hlawka.*

Rushforth, J. M.: Congruence properties of the partition function and associated functions. Proc. Cambridge philos. Soc. **48**, 402—413 (1952).

Some time before his death Ramanujan sent to Prof. Hardy, a manuscript entitled „some properties of $P(n)$ and $\tau(n)$ defined by

$$\sum_0^\infty P(n)\, x^n = \prod_1^\infty (1-x^n)^{-1}, \quad \sum_1^\infty \tau(n)\, x^n = x \prod_1^\infty (1-x^n)^{24}.$$

This manuscript, it seems, contained many statements concerning the congruence properties of $P(n)$ and $\tau(n)$. Many of these statements were either without proofs or with incomplete proofs. A few of these with complete proofs were extracted and posthumously published by Hardy [Math. Z. **9**, 147 (1921)]. Recently some others had been rediscovered by Bambah and others. — The author says that in his thesis (Birmingham 1950) he has been able to fill up the gaps in Ramanujan's arguments and furnish proofs of Ramanujan's statements. In the paper, under review, the author proves some statements of Ramanujan. The proofs are elementary and depend on algebrical identities between the familiar functions P, Q, R of Ramanujan. (Reviewer's remark: The author's assertion that the congruences (4. 1) and (4. 2) for $\tau(n)$ are new is not correct, since these congruences are already contained in the work of Bambah [J. London math. Soc. **21**, 91 (1946)].) *K. G. Ramanathan.*

Newman, Morris: Remarks on some modular identities. Trans. Amer. math. Soc. **73**, 313—320 (1952).

Let $P_r(n)$ be defined by $\sum_0^\infty P_r(n)\, x^n = \prod_1^\infty (1-x^n)^r$. Involving $P_r(n)$ the author obtains several identities of which the following is typical.

$$\sum_0^\infty P_2(17n+24)\, x^n = -\prod_n (1-x^{17n})^2.$$

The method of proof depends on the following simple considerations. Let $\Gamma_0(m)$ denote the group of modular substitutions $\tau \to \sigma\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$, a, b, c, d integers satisfying $ad - bc = 1$, $C \equiv 0(m)$. If $m|n$ then $\Gamma_0(n)$ is of finite index in $\Gamma_0(m)$. A function $f(\tau)$ of the complex variable $\tau = x + iy$, $y > 0$ is said to belong to $\Gamma_0(m)$ if i) $f(\tau)$ is regular in the interior of the complex τ half plane, ii) invariant under $\Gamma_0(m)$ iii) behaves like a rational function of the uniformising parameter at the parabolic vertices of the fundamental region of $\Gamma_0(m)$. Let $\eta(\tau) = e^{\pi i\tau/12} \prod_n (1-e^{2n\pi i\tau})$ and p a prime > 3. Then i) $h(\tau) = \eta(p^2\tau)/\eta(\tau)$ belongs to $\Gamma_0(p^2)$. (Wellknown.) ii) $\sum_\sigma \{h(\sigma\tau)\}^r$ belongs to $\Gamma_0(p)$, σ running through a complete system of representatives of right cosets of $\Gamma_0(p^2)$ in $\Gamma_0(p)$, iii) $(\eta(p\tau)/\eta(\tau))^g$ for $g(p-1) \equiv 0(24)$ belongs to $\Gamma_0(p)$ (Wellknown). For special values of r and p the author obtains some wellknown identities of Number Theory. *K. G. Ramanathan.*

Drazin, M. P. and J. Stanley Griffith: On the decimal representation of integers. Proc. Cambridge philos. Soc. **48**, 555—565 (1952).

Es sei $r \geqq 2$ ganz, und es seien die natürlichen Zahlen n im r-adischen System dargestellt. Dann betrachten die Verff. für natürliche Zahlen t die Summe $A_t(r, n)$ der t-ten Potenzen der Ziffern aller natürlichen Zahlen $< n$. Für $t = 1$ wurden diese Summen bereits von L. E. Bush (dies. Zbl. **25**, 106), L. Mirsky (dies. Zbl. **34**, 171) und R. Bellmann und H. N. Shapiro (dies. Zbl. **31**, 254) betrachtet. Ist n eine Potenz von r, so ist $A_t(r, n)$ gleich $F_t(r, n) = \sigma_t(r)\, n \log n/\log r$, wo $\sigma_t(r) = r^{-1} \sum_{p=1}^{n-1} p^t$. Es liegt daher nahe, $\Delta_t(r, n) = (F_t(r, n) - A_t(r, n))/n\, \sigma_t(r)$ zu betrachten. Dann wird zunächst in Verschärfung eines Resultates von Mirsky gezeigt, daß für alle r, t, n $\Delta_t(r, n) \geqq 0$ ist. Weiter ist für alle t, n $\Delta_t(2, n) < 1$, $\Delta_t(r, n) < \frac{r-1}{r-2} \frac{\log(r-1)}{\log r}$, wenn $r \geqq 3$. Die Verff. diskutieren, wie weit sich diese Abschätzung verschärfen läßt, und betrachten dazu $\sup_n \Delta_t(r, n) = D_t(r)$. Sie bestimmen $D_t(2)$, $D_1(3)$ exakt und zeigen $\varliminf_{t \to \infty} D_t(r) \geqq \frac{r}{r-1} - \log \frac{r-1}{r-2} \Big/ \log r$. Die erzielten Ergebnisse werden auf die Theorie der normalen Zahlen angewendet und liefern einen neuen Beweis eines Satzes von Champernowne (dies. Zbl. **7**, 337).

E. Hlawka.

Cassels, J. W. S.: On a paper of Niven and Zuckerman. Pacific J. Math. **2**, 555—557 (1952).

Verf. gibt einen sehr eleganten und durchsichtigen Beweis für den Satz von Niven und Zuckerman (vgl. dies. Zbl. **42**, 269). *E. Hlawka.*

Sklar, Abe: On the factorization of squarefree integers. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 701—705 (1952).

Ist $f(n)$ die Anzahl der Darstellungen der natürlichen Zahl n als geordnetes Produkt aus Faktoren > 1, dann ist, für quadratfreies $n = S_r$, $f(n)$ eine Funktion $h(r)$ der Anzahl r der Primfaktoren von S_r allein. — Durch Anwendung der Euler-McLaurinschen Summenformel auf die Identität von D. N. Sen [Proc. Calcutta Math. Soc. **33**, 1—8 (1941)] $h(r) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n^r 2^{-n}$ (die, wie der Verf. bemerkt, nur ein spezieller Fall der Relation $f(u) = \frac{1}{2} \sum_k d_k(u)\, 2^{-k}$ ist), wird gezeigt

$$h(r) = 2^{-1} r! (\log 2)^{-r+1} \{1 + R_r\} \quad \text{mit} \quad R_r = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\cos \theta_n)^{r+1} \cos\{(r+1)\theta_n\},$$

wo $\cos \theta_n = \frac{\log 2}{2\pi n} \left\{1 + \left(\frac{\log 2}{2\pi n}\right)^2\right\}^{-1/2}$. Es ist $|R_r| \leqq 2\, \zeta(r+1) \left(\frac{\log 2}{2\pi}\right)^{r+1}$.

Der Verf. gibt zwei Anwendungen seines Satzes auf das Wachstum von $\log f(n)$.

E. Hlawka.

Horváth, J.: Primzahlen. I. Revista Mat. element. **1**, 21—33 (1952) [Spanisch].

Nagura, Jitsuro: On the interval containing at least one prime number. Proc. Japan Acad. **28**, 177—181 (1952).

Den Verallgemeinerungen des Bertrandschen Postulates fügt Verf. folgenden Satz hinzu: Zu jedem $x \geqq a_n$ gibt es mindestens eine Primzahl p mit $x < p < (1 + 1/n)\, x$. Dabei kann für (a_n, n) eines der Zahlenpaare (2, 1), (8, 2), (9, 3), (24, 4), (25, 5) gesetzt werden. Der Beweis erfolgt mit Tschebyscheff-Ramanujanschen Mitteln (S. Ramanujan, Collected papers, Cambridge 1927, 208—209). Es sei bemerkt, daß dieses Resultat (sogar in wesentlich allgemeinerer Form) mit bedeutend weniger Rechenaufwand aus den numerischen Abschätzungen für Primzahlfunktionen von B. Rosser (dies. Zbl. **24**, 250) hergeleitet werden kann. *H.-E. Richert.*

Bang, Thøger: Eine Funktion, die alle Primzahlen darstellt. Norsk mat. Tidsskr. **34**, 117—118 (1952) [Norwegisch].

Knödel, Walter: Sätze über Primzahlen. II. Monatsh. Math. **56,** 137—143 (1952).

Es sei $x > 0$, k eine natürliche Zahl und Z die Anzahl der Systeme von ganzen Zahlen y_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, welche den Bedingungen $y_1 = 0$, $0 < y_i < 2k \log x$ genügen und zu denen es mehr als $c_1(k)\, x/\log^k x$ natürliche Zahlen $z < x$ gibt, derart, daß das k-tupel $z + y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ aus lauter Primzahlen besteht. Verf. beweist: $Z > c_2(k) \log^{k-1} x$. Dies ist die wahre Größenordnung, weil Verf. früher (dies. Zbl. **42**, 42) bewiesen hat, daß $Z < c_3(k) \log^{k-1} x$ ist.

H. D. Kloosterman.

Apostol, T. M.: Theorems on generalized Dedekind sums. Pacific J. Math. **2,** 1—9 (1952).

Let $(h, k) = 1$ and $S_p(h, k) = \sum_{\mu=1}^{k-1} \frac{\mu}{k} B_p\left(\left\{\frac{\mu h}{k}\right\}\right)$ where $\left\{\frac{\mu h}{k}\right\}$ is the fractional part of $\mu h/k$ and B_p is the p-th Bernoulli polynomial. The author, in a previous paper (this Zbl. **39**, 38) introduced these sums as a generalisation of the wellknown Dedekind sum and obtained a „reciprocity formula" connecting $S_p(h, k)$ and $S_p(k, h)$. In this paper the author shows that $S_p(h, k)$ are related to certain finite sums involving the Hurwitz zeta-function $\zeta(s, a) = \sum_{n=1}^{\infty} (n + a)^{-s}$, $\mathrm{Re}\, s > 1$, a not a negative integer, and deduces the reciprocity formula from the properties of these finite sums.

K. G. Ramanathan.

Delcourte, M.: Sur les sommes des résidus quadratiques des nombres premiers. Mathesis **61,** 73—79 (1952).

This is an expository paper in which the author derives the known expressions for

$$\sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{x}{p}\right) x, \quad \sum_{x=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \left(\frac{x}{p}\right) x, \quad \sum_{x=\frac{1}{2}(p+1)}^{p-1} \left(\frac{x}{p}\right) x, \text{ and } \sum_{x=1}^{p-1} \left[\frac{x^2}{p}\right]$$

in terms of the so-called quadratic excess $\sum_{x=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \left(\frac{x}{p}\right)$. Here p is a prime number, $p \equiv 3 \pmod 4$, $\left(\frac{x}{p}\right)$ denotes the Legendre symbol, and $[x]$ denotes the greatest integer not exceeding x. Unfortunately no mention is made of Dirichlet's class-number formula or of the fact that the quadratic excess is necessarily positive.

P. T. Bateman.

Rodosskij, K. A.: Über die Anzahl der Nullstellen aller L-Funktionen mit Charakteren nach einem gegebenen Modul. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **84,** 669—671 (1952) [Russisch].

The author sketches a proof of the following result, which has applications to the distribution of primes in arithmetic progressions with relatively large difference. Let $N(\Delta; -T, T; D)$ denote the total number of zeros of all L-functions formed from residue-characters modulo D which lie in the rectangle $\Delta \leq \sigma \leq 1$, $|t| \leq T$. Then if $0.9 \leq \Delta < 1$, $T \geq D^{8/3}$, and $D \geq D_0$, we have $N(\Delta; -T, T; D) < c\,(DT)^{(9/2\Delta)(1-\Delta)} \ln^{12} DT$, where c and D_0 are positive absolute constants.

P. T. Bateman.

Linnik, Ju. V.: Primzahlen und Potenzen ein und derselben Zahl. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **85,** 953—954 (1952) [Russisch].

The author announces the following result. For any given positive integer g greater than unity there exists a positive integer k_0 such that if k is any fixed positive integer greater than k_0, then every sufficiently large integer of the same parity as $k\,g$ can be expressed in the form $p + p' + g^{x_1} + \cdots + g^{x_k}$, where p and p' are odd prime numbers and $x_1, \ldots, x_k$ are positive integers. The author asserts that this result was obtained without using any unproved hypothesis, in contrast to a

similar earlier result [Trudy mat. Inst. Steklov **38**, 152 (1951)], which was based on the extended Riemann hypothesis. *P. T. Bateman.*

Wintner, Aurel: On the non-vanishing of certain Dirichlet series. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. **1**, 35—39 (1952).

Let $f(n)$; $n = 1, 2, \ldots$, be a completely multiplicative number-theoretical function with $f(1) = 1$. Using $\zeta(1 + it) \neq 0$ the author proves the following result: Suppose that $f(p) \geq -1$ for every prime p and that the function $F(s) = \sum_n f(n) n^{-s}$ is absolutely convergent in the half plane $\Re s > 1$. If $F(s)$ is regular also on the line $\Re s = 1$ then $F(1 + it) \neq 0$ follows for every $t \neq 0$. Using special functions $f(n)$ one can see that the restriction $t \neq 0$ can not be omitted. Thus for instance $L(1) \neq 0$ does not follow from the above general theorem. Using a theorem of Landau [Math. Ann. **61**, 527—550 (1905)] the author obtains a precise information about $F(s)$ with $F(1) = 0$: If the conditions are satisfied and $F(1) = 0$ then $\zeta(s) \cdot F(s)$ is regular and $\neq 0$ in a half plane $\Re s > \alpha$, where $\alpha < 1$. [On page 36, lines 1 and 2 read $F(s)$ instead of $f(s)$ whereever it occurs.] *J. S. Gál.*

Erdös, P. and L. Mirsky: The distribution of values of the divisor function $d(n)$. Proc. London math. Soc., III. Ser. **2**, 257—271 (1952).

Sei $d(n)$ die Anzahl der Teiler der natürlichen Zahl n, $D(x)$ die Anzahl der verschiedenen $d(n)$ für $1 \leq n \leq x$. Verff. zeigen

$$\log D(x) \sim \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{(\log x)^{1/2}}{\log\log x}. \tag{1}$$

Sei $B(x)$ die Anzahl derjenigen Zahlen $\leq x$, die von der Form

$$p_1^{q_1 - 1} p_2^{q_2 - 1} \cdots p_k^{q_k - 1}$$

sind, wo p und q Primzahlen bedeuten. Verff. zeigen

$$D(x) - B(x) > c_1 \log\log\log x, \tag{2}$$

$$\frac{D(x)}{B(x)} = 1 + O\left(\frac{(\log\log x)^2}{(\log x)^{1/3}}\right). \tag{3}$$

Sei $F(x)$ die größte Zahl k, für die es ein n gibt mit: $n + k \leq x$ und alle $d(n + 1), \ldots, d(n + k)$ voneinander verschieden. Es wird gezeigt

$$F(x) > c_2 \frac{(\log x)^{1/2}}{\log\log x}$$

und vermutet: $F(x)$ ist von der Ordnung $(\log x)^{c_4}$. Sei $\lambda(x)$ die kleinste ganze Zahl, die nicht $= d(n)$ für ein n mit $1 \leq n \leq x$. Es gilt: Für $x \geq 6$ ist $\lambda(x)$ die kleinste Primzahl q mit $2^{q-1} > x$. Verff. vermuten: Es gibt unendlich viele n mit $d(n) = d(n + 1)$. Bem. d. Ref.: Mit einer Methode von Renyi (dies. Zbl. **38**, 186) folgt: Es gibt ein k und unendlich viele n mit $d(n) = 2$, $d(n + 1) = k$. Wenn es unendlich viele Primzahlzwillinge n, $n + 2$ gibt, so ist für sie $d(n) = d(n + 2) = 2$. *K. Prachar.*

Obláth, Richard: Untere Schranken für Lösungen der Fermatschen Gleichung. Portugaliae Math. **11**, 129—132 (1952).

Bezüglich der Fermat-Gleichung $x^n + y^n = z^n$, x, y, z positiv ganz, $(x, y, z) = 1$, $x < y < z$, $n > 2$ Primzahl, gibt Verfasser untere Schranken für etwa vorhandene Lösungen x, y, z. Nach Inkeri (dies. Zbl. **30**, 113) gilt im „ersten Fall" $(n \nmid x\,y\,z)$ $z > y > x > k_n\, n\,(30\,n^2 + 1)^n$, $k_n > 1$, $\lim_{n\to\infty} k_n = \frac{1}{\log 2}$, und im „zweiten Fall" $(n \mid x\,y\,z)$ die noch bessere Abschätzung $x > 2^{-1}\, n^{3n-4}$. Mit einfacheren Hilfsmitteln beweist Verf. für den ersten Fall die (schwächeren) Abschätzungen

$$z > 2(10\,n^2 + 1),\quad y > 2(4\,n^2 + 1),\quad x > 4\,n^2 + 1 \qquad (n \nmid x\,y\,z).$$

Ist $n \mid x$ so zeigt Verf. $z > n^{3n-1}$, und zwar ergibt sich dies sofort aus der Formel $x^n = \frac{z^n - y^n}{z - y}(z - y)$, da einerseits, wie leicht zu sehen, $\left(\frac{z^n - y^n}{z - y},\ z - y\right) = n$ und

andererseits nach Vandiver (s. Landau, Vorles. Bd. 3) sogar notwendig $n^3 | x$ ist. — Schließlich gibt Verf. noch die numerischen Schranken $x^n > 10^{44 \cdot 10^8}$, $z^n > 10^{45 \cdot 10^8}$ (im 1. Fall) — nach Inkeri gilt: $x > 10^{46 \cdot 10^8}$ — und im 2. Fall: $z^n > 10^{32 \cdot 10^5}$, wenn $n | x$ — nach Inkeri: $x > 10^{5000}$, wenn $n | x\,y\,z$. *H.-H. Ostmann.*

Morishima, Taro: On Fermat's last theorem (13th paper). Trans. Amer. math. Soc. **72**, 67—81 (1952).

Verf. schränkt bekannte notwendige Bedingungen für die Lösbarkeit der Fermatgleichung (1) $x^l + y^l + z^l = 0$, l Primzahl > 2 im sogenannten 1. Fall (d. h. $l \nmid x\,y\,z$) weiter ein, und gibt eine Reihe von Kriterien an. Es seien die folgenden hervorgehoben: Für die Lösbarkeit in ganzen Größen aus $\mathsf{P}(\zeta)$, dem Körper der l-ten Einheitswurzeln über dem rationalen Zahlkörper P, mit zu $1-\zeta$ primen x, y, z ist notwendig, daß mindestens eine der Bernoullischen Zahlen $B_1, \ldots, B_s$, $s = \begin{cases} (l-1)/4, & l \equiv 1\,(4) \\ (l-3)/4, & l \equiv 3\,(4) \end{cases}$, durch l teilbar ist [bei Kummer war $s = (l-3)/2$]. — Ferner: Es müssen mindestens 7 der Bernoulli-Zahlen $B_1, \ldots, B_{(l-3)/2}$ durch l teilbar sein. — Ist h_1 der sogenannte 1. Klassenfaktor bez. $\mathsf{P}(\zeta)$, so ist für die reelle ganzzahlige Lösbarkeit in $\mathsf{P}(\zeta)$ [d. h. in $\mathsf{P}(\zeta + \zeta^{-1})$] notwendig: $l^{13} | h_1$, also erst recht $l^{13} | h$, wenn h die Klassenzahl ist [nach Verf., Proc. Acad. Tokyo 8, 63—66 (1932) und D. H. Lehmer (dies. Zbl. **5**, 345) galt bislang nur $l^{12} | h_1$]. — Die Herleitungen basieren im wesentlichen auf dem folgenden Satz: Ist (1) in $\mathsf{P}(\zeta)$ mit zu $1-\zeta$ primen x, y, z lösbar, so muß (2) $f_{l-n}(t)\, f_n(t) \equiv 0\,(l)$ für $n = 1, 2, \ldots, l-1$ und $-t = \frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}, \frac{a}{c}, \frac{c}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{b}$ gelten, wobei $f_m(t) = \sum_{r=0}^{l-1} r^{m-1} t^r$ ist und a, b, c ganzrational mit $a \equiv x$, $b \equiv y$, $c \equiv z \pmod{1-\zeta}$ sind. — Gleichbedeutend mit (2) ist die Bedingung $b_n f_{l-n}(t) \equiv 0\,(l)$, wobei $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_{2n} = (-1)^{n-1} B_n$, $b_{2n+1} = 0$ ist (B_n Bernoulli-Zahl). — Hinsichtlich weiterer Kriterien sei auf die Arbeit selbst verwiesen. *H.-H. Ostmann.*

Specht, Wilhelm: Zur Zahlentheorie der Polynome. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1951**, 139—146 (1952).

Es sei $I_n(x)$ die Anzahl der irreduziblen Polynome $z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n$ eines festen Grades $n > 1$, deren Koeffizienten der Höhenbedingung $|a_\nu| \leqq x$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ genügen. Verf. beweist, daß $I_2(x) = 4x^2 - 2x \log x + O(x)$ und $I_n(x) = 2^n x^n + O(x^{n-1})$ für $n > 2$. *H. D. Kloosterman.*

Specht, Wilhelm: Zur Zahlentheorie der Polynome. II, III. Math. Nachr. **7**, 105—126, 127—150 (1952).

II. Es sei $R_m(x)$ bzw. $I_m(x)$ die Anzahl der reduziblen bzw. irreduziblen ganzzahligen Polynome $f(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m$ eines festen Grades $m > 1$, deren Koeffizienten der Bedingung $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2 \leqq x^2$ genügen. Es ist also $R_m(x) + I_m(x) = K_m(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte (u) in der m-dimensionalen Kugel $u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_m^2 \leqq x^2$. Verf. beweist, daß

$R_2(x) = 2x \log x + 4\beta_1 x + O(x^{1/2})$, $R_3(x) = \alpha_2 \beta_2 x^2 - \frac{4}{3} x \log^2 x + O(x \log x)$, $R_4(x) = \alpha_3 \beta_3 x^3 + O(x^2 \log x)$, $R_m(x) = \alpha_{m-1} \beta_{m-1} x^{m-1} + O(x^{m-2})$ $(m \geqq 5)$, wo

$$\alpha_m = \pi^{\frac{1}{2}m} / \Gamma(\tfrac{1}{2} m + 1); \qquad \beta_1 = \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{N} (1 + n^2)^{-1/2} - \log N \right);$$

$$\beta_m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 + n^2 + n^4 + \cdots + n^{2m})^{-1/2} \quad (m \geqq 2).$$

Die bekannten Abschätzungen für $K_m(x)$ ergeben dann auch asymptotische Formeln für $I_m(x)$. Für $m \geqq 5$ wird $I_m(x) = \alpha_m x^m - \alpha_{m-1} \beta_{m-1} x^{m-1} + O(x^{m-2})$. Das Restglied gibt hier die wahre Größenordnung, weil $K_m(x) = \alpha_m x^m + \Omega(x^{m-2})$. Für $m = 2$ ist $I_2(x) = \alpha_2 x^2 - 2x \log x - 4\beta_1 x + O(\psi_2(x))$, wo $\psi_2(x)$ eine Funktion ist, für die $K_2(x) = \alpha_2 x^2 + O(\psi_2(x))$ gültig ist. Für $m = 3$ und $m = 4$ sind

die Resultate weniger befriedigend, weil das Restglied in der obigen Formel für $R_3(x)$ über der bisher besten Ω-Abschätzung für $K_3(x) - \alpha_3 x^3 = \Omega(x \log^{1/2} x)$ bleibt, während das Restglied $O(x^2 \log x)$ in der Formel für $R_4(x)$ sogar über der bisher besten O-Abschätzung für $K_4(x) - \alpha_4 x^4 = O\left(x^2 \frac{\log x}{\log\log x}\right)$ bleibt.

III. Verf. verschärft die Abschätzungen für $R_3(x)$ und $R_4(x)$ zu

$$R_3(x) = \alpha_2 \beta_2 x^2 - \tfrac{4}{3} x \log^2 x - \tfrac{4}{3}(1 + 6\beta_1) x \log x + O(x),$$

$$R_4(x) = \alpha_3 \beta_3 x^3 + \alpha_2 \beta_0 x^2 \log x + O(x^2) \text{ mit } \beta_0 = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 1/4 \sin^2 \varphi}}.$$

Dadurch erhält er jetzt auch endgültige Abschätzungen für

$$I_3(x) = \alpha_3 x^3 - \alpha_2 \beta_2 x^2 + \tfrac{4}{3} x \log^2 x + \tfrac{4}{3}(1 + 6\beta_1) x \log x + O(\psi_3(x)),$$

$$I_4(x) = \alpha_4 x^4 - \alpha_3 \beta_3 x^3 - \alpha_2 \beta_0 x^2 \log x + O(\psi_4(x)),$$

wo $\psi_3(x)$ und $\psi_4(x)$ die Restglieder sind in den Gitterpunkts-Abschätzungen $K_m(x) - \alpha_m x^m = O(\psi_m(x))$ $(m = 3, 4)$. *H. D. Kloosterman.*

Brandt, H.: Über Stammfaktoren bei ternären quadratischen Formen. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl. **100**, Nr. 1, 24 S. (1952).

Eine ausführliche Darstellung der vom Verf. schon mehrfach dargestellten Theorie der quadratischen Stammformen [s. etwa dies. Zbl. **17**, 196; Festschr. 60. Geburtstag von Prof. A. Speiser, Zürich 1945, S. 87—104 und Math. Ann. **124**, 334—342 (1952)] unter Beschränkung auf den ternären Fall. Ermittlung der Stammdiskriminante d_0 einer ganzzahligen primitiven Form $f(x) = \frac{1}{2} \sum a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$ $(\frac{1}{2} a_{\mu\mu}, a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ ganz rational und mit g. g. T. $= 1)$. Es bezeichne I_1 den g. g. T. der 2-reihigen Unterdeterminanten der Matrix $(a_{\mu\nu})$, $d = -\frac{1}{2}|a_{\mu\nu}|$ (Diskriminante), $(A_{\mu\nu}) = -2d\, I_1^{-1}(a_{\mu\nu})^{-1}$, $F(x_\nu) = \frac{1}{2} \sum A_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$ und $I_2 = 16\, d\, I_1^{-2}$. Eine ungerade Primzahl p geht in d_0 nicht auf, wenn p nicht in d oder aber in $I_1 \cdot I_2$ in gerader Potenz aufgeht. Geht p in d und nur in I_2 mit gerader Potenz $p^{2\alpha}$ auf, so $p \mid d_0$ dann und nur dann, wenn das quadr. Restsymbol $(p^{-2\alpha} I_1 F(x_\nu)/p) \neq 1$. Geht p in d und nur in I_1 mit gerader Potenz $p^{2\alpha}$ auf, so $p \mid d_0$ dann und nur dann, wenn $(p^{-2\alpha} f(x_\nu)/p) \neq 1$. Die Teilbarkeit von d_0 durch 2 wird nur in Spezialfällen erörtert, da die Gesamtzahl der Teiler von d_0 nach dem quadr. Reziprozitätsgesetz fest liegt. *M. Eichler.*

Ramanathan, K. G.: Units of quadratic forms. Ann. of Math., II. Ser. **56**, 1—10 (1952).

Verf. hat in einer vorhergehenden Arbeit (dies. Zbl. **43**, 50) die Einheiten quadratischer Formen über totalreellen algebraischen Zahlkörpern studiert. Er dehnt nun seine Ergebnisse auf den Fall eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers aus. *E. Hlawka.*

Cohn, Harvey: A periodic algorithm for cubic forms. Amer. J. Math. **74**, 821—833 (1952).

This is the sketch of a new analogue of the continued fraction development for the product of three real homogeneous ternary linear forms. These are assumed not to represent 0, so their values give a homogeneous lattice with no points on the co-ordinate planes. A basis P, Q, R of the lattice is reduced if each of the four points $P, Q, R, S = -P - Q - R$ differs from every other in the sign of precisely two co-ordinates. Such a basis can be obtained from that used by Minkowski for a similar purpose (Gesammelte Abh., Leipzig 1911, pp. 278—292) by affixing suitable signs. The proof consists in considering 1024 special cases and, we are assured, „can be easily accomplished in a few hours" by the manipulation of 36 strips of paper. Two reduced bases are neighbours if they are related by one of the 24 transformations of the type $P \to P$, $Q \to Q$, $R \to R + P$, $S \to S - P$. In particular, when the three forms are conjugates in a totally-real cubic field there are only a finite number of essentially different Cohn-reduced bases and the neighbour-relations between them give the units of the field in familiar fashion. *J. W. S. Cassels.*

Kanagasabapathy, P.: On the product of two linear forms, one homogeneous and one non-homogeneous. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **3**, 197—205 (1952).

Davenport has shown the existence of a constant $\gamma > 4$ with the property that if X, Y are any real homogeneous linear forms in u, v of unit determinant and c is a real constant then $|(X + c)\, Y| \leq \gamma^{-1}$ for suitable integers u, v other than $u = v = 0$ (H. Davenport, this Zbl. **46**, 45). He showed that the upper bound γ_0 of such γ satisfies $4.1 < \gamma_0 < 5.06$. Here the author elaborates Davenport's method to obtain $4.25 \leq \gamma_0 \leq 4.28536\ldots$. He states that he can obtain $4.2575 < \gamma_0 \leq 4.28471\ldots$. *J. W. S. Cassels.*

Cassels, J. W. S.: The product of n inhomogeneous linear forms in n variables. J. London math. Soc. **27**, 485—492 (1952).

Let $a_1, \ldots, a_n$ be different even integers; let $k > 0$ be a very large integer; and let $\theta_1, \ldots, \theta_n$ be the roots of

$$\prod_{j=1}^{n} (\theta - a_j k) = 1$$

numbered such that all $|\theta_j - a_j k|$ are small. Put

$$D = \prod_{i<j} |a_i - a_j|$$

and

$$L_j = x_1 + x_2 \theta_j + \cdots + x_n \theta_j^{n-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

The determinant Δ of these n linear forms satisfies the asymptotic relation

$$|\Delta| \sim D k^{n(n-1)/2} \qquad \text{as } k \to \infty.$$

The author proves that

$$\inf_{x_1 \equiv \cdots \equiv x_n \equiv \frac{1}{2} \pmod 1} |L_1 \cdots L_n| \sim 2^{-n} |\Delta|.$$

Hence the minimum $2^{-n}|\Delta|$ in Minkowski's conjecture on the product of n inhomogeneous linear polynomials is not isolated. — For the case $n = 2$, see H. Davenport, Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **49**, 815—821 (1946). *K. Mahler.*

Macbeath, A. M.: A theorem on non-homogeneous lattices. Ann. of Math., II. Ser. **56**, 269—293 (1952).

Let R be a closed convex body, not nescessarily bounded, in n-dimensional space, which has n tac-planes that intersect in a single point. For every point $x \in R$ the intersection $R(x) = R \cap (2x - R)$ is a bounded convex body symmetrical in x. Let $f(x) = f(R, x)$ be its volume, and let $\delta(x)$ be the lower bound of the determinants $d(\Lambda)$ of all lattices Λ through x that contain no further points of $R(x)$. If $\Lambda \cap R$ is not the empty set, the two important inequalities

$$(1):\ \delta(x) < d(\Lambda), \quad \text{and} \quad (2):\ f(x) < 2^n\, d(\Lambda)$$

are proved to hold for at least one point x of $\Lambda \cap R$. The second inequality follows immediately from the first because $f(x) \leq 2^n\, \delta(x)$ by Minkowski's theorem on lattice points. The condition that $\Lambda \cap R \neq \emptyset$ holds for all Λ if e. g. R does not lie between any pair of parallel hyperplanes. — The proof of (1) is highly ingeneous and makes use of Blaschke's compactness theorem for bounded convex bodies, of the Brunn-Minkowski inquality for the volumes of the section of a convex body, and of the Minkowski-Hlawka inequality $\delta(x) \leq f(x)$. A long chain of lemmas leads to the following final step. Let $u \in R$ be arbitrary. The set of all x for which $f(x) \geq f(u)$ is convex and has u as a boundary point. There is a tac-plane to this set through u, hence a linear form $L(x)$ such that $f(x) \leq f(u)$ if $L(x) \leq L(u)$. Denote by D the half-space of all x for which $L(x) \leq L(u)$, and put $M = D \cap R$ and $M' = \frac{1}{2}(u + M)$. The basic lemma states that there exists a constant λ_n with $0 < \lambda_n < 1$ depending only on the dimension n of space, with the following property: If $x \in M$, but $x \notin M'$, them $f(x) \leq \lambda_n f(u)$. — Assume now that u is any point of $\Lambda \cap R \neq \emptyset$. If $\delta(u) < \delta(\Lambda)$, the assertion (1) is true; let therefore $\delta(u) \geq d(\Lambda)$. One then shows that there exists a point $u_1 \neq u$ belonging to $\Lambda \cap R(u)$ and to M, but not to M'; for this point, $f(u_1) \leq \lambda_n f(u)$. If still $\delta(u_1) \geq d(\Lambda)$, the whole construction can be repeated with u_1 instead of u. After r steps a lattice point u_r is found for which $f(u_r) \leq \lambda_n^r f(u)$. Since $\lambda_n^r \to 0$ as $r \to \infty$, and since $\delta(u_r) \leq f(u_r)$, we finally obtain a point $x = u_r$ as required. — The paper concludes with some interesting examples. (Addition): C. A. Rogers has recently obtained a much simpler proof. *K. Mahler.*

Mordell, L. J.: The minima of some non-homogeneous functions of two variables. Duke math. J. **19**, 519—527 (1952).

Bei gewissen Funktionen $f(x, y)$ gibt es zu beliebigen reellen Zahlen x_0, y_0 mod 1 kongruente Zahlen x, y, so daß

$$|f(x, y)| \leq k \max(|f(1, 0)|, |f(0, 1)|, |f(1, 1)|, |f(1, -1)|).$$

Dies ist mit $k = 1/8$ richtig für binäre kubische Formen $f(x, y)$, wie Bambah (dies. Zbl. **42**, 275) bei positiver Diskriminante von $f(x, y)$ und Chalk (dies. Zbl. **46**, 44, 1. Referat) bei negativer Diskriminante gezeigt haben. Verf. beweist nun den Satz für eine große Klasse von Funktionen $f(x, y)$, die im wesentlichen folgenden Bedingungen genügen: (I) $f(x, y) = -f(-x, -y)$, $|f(x, y)| \leq k\,|f(2x, 2y)|$; (II) Die Kurve C: $f(x, y) = 1$ besteht aus einem Zweig und hat eine Asymptote, der sie sich in beiden Richtungen annähert; (III) C hat in jedem Punkt eine eindeutig bestimmte Tangente, 2 Wendepunkte und einen Scheitelpunkt, in dem die Tangente zur Asymptote parallel ist; (IV) Jede Gerade durch 0 (auf der Asymptote gelegen) schneidet C in genau einem Punkt; (V) Ist (a, b) ein beliebiger Punkt zwischen C und ihrer Asymptote, so schneiden sich C und ihr Spiegelbild an (a, b) in höchstens 4 Punkten. — Zu den zulässigen Funktionen $f(x, y)$ gehören unter anderem: $f(x, y) = X^n + Y^n$ mit $k = 1/2^n$, wobei $X = p\,x + q\,y$, $Y = r\,x + s\,y$, $p\,s - q\,r \neq 0$; ferner $f(x, y) = Y \cdot e^{X^n}$ mit $k = 1/2$ $(1 < n \leq 2)$. Der Beweis ist rein geometrisch und dem von Chalk in manchen Punkten ähnlich. *N. Hofreiter.*

Hlawka, Edmund: Zur Theorie des Figurengitters. Math. Ann. **125**, 183—207 (1952).

The central problem of this paper is the following: Let Γ be a lattice in m-dimensional euclidean space and let A, B be sets in R. Let $\mathfrak{A}(\Gamma)$ be the union of the point sets $A + \gamma$, $\gamma \in \Gamma$. When does $\mathfrak{A}(\Gamma)$ intersect B, and what is the measure of $B \cap \mathfrak{A}(\Gamma)$. The author gives a large number of miscellaneous results relating to this problem: most of them to show that much of the known theory can be carried over to the general situation where R is a topological space and Γ a group of automorphisms of R with bounded fundamental region subject to appropriate restrictions (which vary from theorem to theorem); but some of the results are confined to the euclidean case and improve earlier ones. There is also some discussion of the generalization of the theory of uniform distribution of sequences of points. The treatment is very condensed and demands the acquaintance of many earlier papers. — Generally speaking the proofs for the general topological space results are modifications of the known proofs in the euclidean case and give either the known results or something weaker when specialized to euclidean space. — The most striking new result in the euclidean case is the following: — Let $f(x)$ be the distance function of a symmetrical convex body in m dimensions of volume I and centre O. Let $M_1, \ldots, M_m$ be the successive minima of $f(x)$ with respect to a lattice Γ with a point at O and determinant D. Then for any point g there is a $\gamma \in \Gamma$ such that

$$(*) \qquad f(g - \gamma) \leq \left\{\frac{2^m D}{M_1 \cdots M_m I}\right\} \frac{M_m}{2}$$

where $\{x\}$ denotes the least integer greater than x. The proof uses ideas of H. Weyl (this Zbl. **28**, 349). [The referee opines that (*) can be improved to

$$f(g - \gamma) \leq \frac{2^{m-1} D}{M_1 \cdots M_{m-1} I}$$

by taking $K(X)$ with $X = \dfrac{2^{m-1} D}{(l+1)\, M_1 \cdots M_{m-1} I} \leq \dfrac{M_m}{2}$ instead of $K\left(\dfrac{M_m}{2}\right)$ and using Weyl's result that then $I(y_i) \geq \dfrac{D}{l+1}$ in the notation of the paper.] For ellipsoids the result (*) is improved to

$$f(g - \gamma) \leq \frac{M_1}{2} \left\{\frac{2^{m/2}\,(m+2)\,D}{2\,I\,M_1^m}\right\}.$$

It is also shown that to any star domain A of volume $V(A)$ there is a (homogeneous) lattice Γ of determinant D having less than k lattice points (other than the origin) in A provided that

$$V(A) \leq k\,D\zeta(m)\left(\sum_{j=1}^{k} j^{-m}\right)^{-1}.$$

The case $k = 1$ is the famous statement of Minkowski proved by the author (this Zbl. **28**, 206).
J. W. S. Cassels.

Davenport, H.: The covering of space by spheres. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. **1**, 92—107 (1952).

A system of equal spheres in n-dimensional space is said to form a lattice covering of space if the centres of the spheres form a lattice and every point of space belongs to at least one sphere. The density of the covering is the ratio of the volume of one of the spheres to that of the unit cell of the lattice. The author constructs such a

covering of n-dimensional space with density

$$\left(11\,\pi\, e/54\,\sqrt[4]{3}+o\,(1)\right)^{n/2}=(1.15\ldots+o\,(1))^n$$

as $n\to\infty$. *C. A. Rogers.*

Bambah, R. P. and H. Davenport: The covering of n-dimensional space by spheres. J. London math. Soc. **27**, 224—229 (1952).

Die Verff. geben für die Dichte ϑ der gitterförmigen Überdeckung des n-dimensionalen Raumes die Herleitung: $\vartheta>4/3-\varepsilon_n$, wo $\varepsilon_n\to 0$ für $n\to\infty$. Dazu genügt es zu zeigen (Theorie der Wabenzellen!): Ist P ein konvexes Polyeder mit höchstens $2\,(2^n-1)$ Seitenflächen, einer n-dimensionalen Kugel K mit Mittelpunkt O so eingeschrieben, daß der Fußpunkt jeder Normalen von O auf einer Seitenfläche S von P ins Innere von S fällt, so ist $V(K)/V(P)>4/3-\varepsilon_n$ ($V=$ Volumen). In dem Nachweis dieser Herleitung liegt die Bedeutung der Arbeit. — Anmerkung des Ref.: Die verwendete Methode ist auch auf nicht-gitterförmige Überdeckung durch Kugeln (von gleicher oder verschiedener Größe), allgemeiner auf große Klassen von konvexen Körpern anwendbar. *E. Hlawka.*

Chabauty, Claude: Empilement de sphères égales dans R^n et valeur asymptotique de la constante γ_n d'Hermite. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 529—532 (1952).

In this note the author attempts to obtain a very great improvement of an estimate of Blichfeldt [Trans. Amer. math. Soc. **15**, 227—235 (1914)] for the density of the closest packing of spheres of equal radius in n-dimensional space and to use it (a) to obtain the asymptotic value of Hermite's constant γ_n (i. e. the largest possible arithmetic minimum for a positive definite quadratic form of unit determinant) and (b) to prove the existence of very economical coverings of n-dimensional space by spheres. The method is based on a combination of Blichfeldt's method with the following two lemmas. Selection Lemma. If E is a set of h^k points and every subset of E containing h points contains a pair whose distance apart is at least d, then E contains a subset of k points no two of whose distance apart is less than d. Lemma 5. If $n+2$ points lie on the surface of a sphere in n-dimensional space then the ratio of the largest distance between two of the points to the smallest distance between two of them is at least $\sqrt{2}$. — Unfortunately both the author and the rev. have found examples showing that Lemma 5 is false for $n\geq 4$. The proof given in the note is based on the assumption (false for $n\geq 4$) that from any $n+2$ points in n-dimensional space it is possible to choose two such that the segment joining them meets the convex cover of the other points. — The rev. is grateful to Dr. Rado and the author for discussing the note with him. *C. A. Rogers.*

Chabauty, Claude: Nouveaux résultats de géométrie des nombres. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 567—569 (1952).

The results and methods of an earlier note (see the preceding review) are used to obtain results for the densities of the packing and the covering of space with and by convex bodies of the form $|x_1|^\sigma+\cdots+|x_n|^\sigma\leq 1$, where $1\leq\sigma\leq 2$, and also to obtain estimates for the critical determinant of the region $|x_1\cdots x_r|\,(x_{r+1}^2+x_{r+2}^2)\cdots(x_{n-1}^2+x_n^2)\leq 1$. Unfortunately the work is vitiated by an oversight in the note on which it is based. *C. A. Rogers.*

Cassels, J. W. S.: Über einen Perronschen Satz. Arch. der Math. **3**, 10—14 (1952).

O. Perron (this Zbl. 4, 246) proved that if $f(x,y)=a\,x^2+2b\,x\,y+c\,y^2$ is a quadratic form with complex coefficients and determinant $\Delta=b^2-a\,c\neq 0$, then there are pairs of Gaussian integers (x, y) other than $(0, 0)$ for which $|f(x,y)|\leq\sqrt{|A\,\Delta|}$ with $A=\frac{4}{3}$. The author proves that in this result the constant A may be replaced by a smaller positive absolute constant, provided that the case when $f(x, y)$ is equivalent to a multiple of $x^2+x\,y+y^2$ is excluded. *C. A. Rogers.*

Tsuji, Masatsugu: Theorems in the geometry of numbers for Fuchsian groups. J. math. Soc. Japan **4**, 189—193 (1952).

Dans $|z|<1$ on considère la métrique non-euclidienne définie par $ds=2\,|dz|/(1-|z|^2)$. Soit un groupe fuchsien de transformations qui laisse $|z|<1$ invariant et dont le domaine fondamental D_0 a une aire non euclidienne $\sigma(D_0)<\infty$. Si E est un ensemble mesurable de $|z|<1$ tel que $\sigma(E)>\sigma(D_0)$, les domaines E_ν