Werk

Titel: Klassische theoretische Physik

Ort: Berlin

Jahr: 1951

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0039|log19

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

ralized into Theorems 1′, 2′, 3′ for the case where the A_λ are only defined in an open region G of E. Theorem 3′ is used to prove the existence of a closed integral curve for a continuous vector field on the 3-sphere differing sufficiently little from a field of Clifford-parallels and sending through every point exactly one integral curve (Theorem 4). *Christian Pauc.*

Duff, G. F. D.: Limit cycles of systems of the second order. Proc. nat. Acad. Sci. USA **36**, 749—752 (1950).

Soit $X(x, \alpha)$, $(x \in R^2)$, un champ de vecteurs, dépendant du paramètre réel α, défini dans le plan euclidien R^2. On suppose que: $X(x, \alpha + 2\pi) = X(x, \alpha) = -X(x, \alpha + \pi)$, $X(x, 0) = 0 \leftrightarrow X(x, \alpha) = 0$, $\theta(x, \alpha)$ est une fonction croissante de α [$\theta(x, \alpha)$ est l'angle polaire de $X(x, \alpha)$]. — Les trajectoires fermées de $X(x, \alpha_1)$ et $X(x, \alpha_2)$, où $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \pi$, n'ont pas de points communs. Un point singulier simple de $X(x, \alpha)$ absorbe ou engendre exactement une trajectoire fermée lorsque α varie de 0 à π, etc. . . . — L'A. montre comment les résultats précédents permettent de préciser l'étude de l'existence et de la localisation des trajectoires fermées de $X(x, 0)$. *Georges Reeb.*

Radojčić, M.: Sur un problème topologique de la théorie des surfaces de Riemann. Publ. Inst. math., Acad. Serbe Sci. **A 2**, 11—23 u. serb. Zusammenfassg. 24—25 (1948).

Ziemlich triviale Bemerkungen über topologische Abbildungen einfach zusammenhängender unberandeter Riemannscher Flächen auf schlichte Bereiche. *Walter Brödel.*

Kuratowski, Casimir: On a topological problem connected with the Cantor-Bernstein theorem. Fundamenta Math., Warszawa **37**, 213—216 (1950).

Verf. definiert zwei ebene, kompakte, nicht homöomorphe Mengen A und B, deren jede mit einer relativ offenen Teilmenge der anderen homöomorph ist. A besitzt abzählbar viele Komponenten; von diesen ist jede entweder ein Baum, oder die Vereinigung eines Baumes mit einer Kreislinie, die mit dem betreffenden Baum einen einzigen Punkt gemeinsam hat. Durch Weglassen einer bestimmten Komponente aus A entsteht die in A offene Teilmenge B; durch weiteres Weglassen einer bestimmten Komponente aus B entsteht eine in B offene Menge, welche, wie ersichtlich, mit A homöomorph wird. Bei dem weiteren Beweis des Nicht-homöomorph-Seins von A und B wird, unter anderen, der Begriff der Ordnung eines Punktes benützt. Da die Mengen A und B 1-dimensional sind, bleibt, wie Verf. bemerkt, ein von R. Sikorski aufgestelltes Problem [Colloq. Math. **1**, 242 (1948)] offen, nämlich, zwei 0-dimensionale Kompakta A und B zu finden, die sich wie oben erwähnt verhalten. *Tudor Ganea.*

Klassische theoretische Physik.

Mechanik:

Milosavliévitch, D.: Déviation vers l'est dans la chute libre d'un corps pesant. Vesnik Društva Mat. Fis. Srbije **1**, 60—69 u. russ. u. franz. Zusammenfassg. 69 (1949) [Serbisch].

Syrový, Antonín: Sur le mouvement asymptotique de la corde de Lagrange. Časopis Mat. Fys., Praha **74**, Nr. 4, 331—334 und französ. Zusammenfassg. 334 (1950) [Tschechisch].

In vorliegender Arbeit werden die Bewegungs- und Energieverhältnisse einer schwingenden Lagrange-Saite untersucht, d. h. einer masselosen Saite, die zwischen zwei festen Punkten eingespannt ist. Diese Saite trägt m Massepunkte von gleicher Masse μ und gleichen Abständen a voneinander. Die Saite besitzt eine bestimmte Spannung und kann um ihre Ruhelage Schwingungen ausführen. Diese werden durch elastische Stöße mit einer Kugel von der Masse μ_0 ($\mu_0 < \mu$) erzeugt, wobei die

Kugel vor jedem Stoß stets die gleiche Geschwindigkeit besitzt. Die Stöße wiederholen sich mit einer bestimmten Periode. — Unter diesen Voraussetzungen bestimmt Verf. den Ausschlag und die Energie der schwingenden Saite. Ausgehend von unendlich kleinen Schwingungen kommt er nach vorübergehender Einführung geeigneter Koordinaten zu dem Schluß, daß mit wachsender Anzahl von Stößen sich der Saitenausschlag asymptotisch einem Wert nähert, für den er eine Gleichung angibt. Bei einer sehr großen Anzahl von Stößen schwingt die Saite ständig nach einer Seite von der Ruhelage aus, wofür ebenfalls eine Gleichung angegeben wird. Desgleichen wird für diesen Fall ein Ausdruck für die Energie der s-ten Eigenschwingung angegeben. *Karl Karas.*

Mihailovitch, D.: Les intégrales premières dans le problème d'entrechoc de trois corps. Vesnik Društva Mat. Fis. Srbije **1**, 45—60 u. russ. u. franz. Zusammenfassg. 60—61 (1949) [Serbisch].

Mihailovitch, Dobrivoje: Réduction du système des équations différentielles du mouvement dans un cas spécial du problème des trois corps. Vesnik Društva Mat. Fiz. Srbije **2**, Nr. 1/2, 81—97 und französ. Zusammenfassg. 97 (1950) [Serbisch].

L'A. expose le principe de Block sur la variation des constantes du problème de choc de trois corps, par la méthode d'analyse vectorielle. On considère les équations différentielles du problème

$$k^2 m_i \left\{\tau^2 \frac{d^2 \vec{r}_i}{d\tau^2} + 2\tau \frac{d\vec{r}_i}{d\tau} - 2(\vec{a}_i + \vec{r}_i)\right\} = \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} V \quad (i = 1, 2, 3),$$

et on expose le caractère de déformation de constellation des solutions exactes, en les comparant avec les solutions à l'environ du centre de libration du problème restreint. Puis l'A. a démontré que les vecteurs $\vec{r}_i$ et $\operatorname{grad}_{\vec{r}_i} V$ sont liés par les relations

$$\sum_{i=1}^{3} m_i (\vec{a}_i \times \vec{r}_i) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{3} \vec{a}_i \times \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} V = 0.$$

La première de cettes relations donne une liaison linéaire entre les coordonnées du vecteur $\vec{r}_i$. Par cette relation l'A. réduit le système de Block de quatre équations au système de trois. En même temps on donne la solution du problème en première approximation. (Autoreferat.)

Masket, A. Victor: The measurement of forces resisting armor penetration. J. appl. Phys., Lancaster Pa. **20**, 132—140 (1949).

In vorliegender Arbeit werden die Geschoßbewegungen während des Durchschlagens einer Panzerplatte behandelt sowie die dabei auftretenden Kräfte untersucht. Während man nach Angabe des Verf. noch während des zweiten Weltkrieges bei der Untersuchung dieses Problems fast ausschließlich auf empirische Formeln angewiesen war, gelingt es mit Hilfe des in dieser Arbeit beschriebenen Präzisionschronographen, die Lage, Geschwindigkeit und Verzögerung des Geschosses vor und während der Panzerplatten-Durchdringung anzugeben und die Kräfte zu bestimmen, die auf das nicht deformierbare Geschoß einwirken. Zu diesem Zweck wird eine Zeitlupen-Revolver-Kamera verwendet, welche die Schattenbahn des fliegenden Geschosses auf einem rasch ablaufenden Filmstreifen festhält. Zur Aufnahme des Durchdringungsvorganges, der nur etwa 10^{-4} sec. oder noch kürzer dauert, sind verschiedene Zusatzeinrichtungen notwendig, die vom Verf. im einzelnen beschrieben und in einigen Abbildungen gezeigt werden. In zwei weiteren Abb. stellt er die einzelnen Stadien der Annäherung an die Panzerplatte und das Durchdringen derselben in Schattenphotographie dar, wobei auch der Fall eines abprallenden Geschosses erfaßt wird. Weiter werden noch in einem Schaubild Durchdringungskurven für Geschosse gleicher Art bei Panzerplatten verschiedener Dicke gezeigt. — In einem weiteren Abschnitt werden die beim Durchdringen des Geschosses auftretenden Longitudinalschwingungen unter vereinfachenden Annahmen behandelt. Verf. kommt schließlich zu Gleichungen für den Weg, die Geschwindigkeit und die Verzögerung des Geschosses und findet aus den Verzögerungen eine Funktion für den Kraftverlauf. In einer Abbildung werden Verzögerungskurven gezeigt, während in einer weiteren Abbildung der Einfluß zweier Geschosse gleichen Kalibers aber verschiedener Form auf den Kraftverlauf bei der Durchdringung von zwei Panzerplatten aus verschiedenen Stahlsorten dargestellt wird, wobei der grundsätzlich im allgemeinen gleichartige Kurvenverlauf durch darübergelagerte Wellen verhältnismäßig kleiner Amplitude modifiziert wird, die ihre Entstehung den Longitudinalschwingungen des Geschosses verdanken. *Karl Karas.*

Banks, J. N.: An extended use of velocity-time graphs. Math. Gaz., London **33**, 162—168 (1949).

Vorliegende Arbeit behandelt ein erweitertes Anwendungsgebiet der Darstellung von Bewegungsvorgängen in Geschwindigkeits-Zeit-Diagrammen. Mit ihm können schwierigere Bewegungsprobleme, wie z. B. die Berechnung von Geschoßbahnen und verwandte Aufgaben oder Stoßvorgänge einer einfachen Lösung zugeführt werden. Zu diesem Zwecke werden für die zu untersuchende Bewegung je nachdem, ob es sich um ein ebenes oder räumliches Problem handelt, entweder zwei oder drei Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme in zueinander senkrechten Ebenen (x, y, z-Richtung) entwickelt. Diese Diagramme, die sich aus Dreiecken, Rechtecken oder Trapezen zusammensetzen, liefern mit Hilfe der Ähnlichkeitsbeziehungen untereinander die gesuchten Größen. Während bei Geschoßbahnen auf diese Art leicht die Schußweite, der Bahnerhöhungswinkel und dergleichen mehr bestimmt werden können, gestattet das Verfahren bei Stoßvorgängen die Darstellung des plötzlichen Geschwindigkeitswechsels oder die Bestimmung der Bewegungsumkehr. — Die Anwendung des Verfahrens wird an Hand von sechs Beispielen aus der Bewegungslehre gezeigt, von denen besonders das Beispiel 5 (dreifache Reflektion eines geworfenen Massenpunktes an drei vertikalen Wänden) und Beispiel 6 (Aufprall einer schweren Masse auf eine unelastische Platte und Wiederabheben derselben durch eine kleinere Masse, die mittels eines undehnbaren Fadens über eine Rolle angeschlossen ist) die rasche Bewältigung des vorliegenden Problems erweisen.

Karl Karas.

Elastizität. Plastizität. Akustik:

Zerna, W.: Allgemeine Grundgleichungen der Elastizitätstheorie. Ingenieur-Arch. **18**, 211—220 (1950).

Kurze, jedoch klare Zusammenstellung einiger Definitionen und Formeln der Tensorrechnung in Ricci-Schreibweise. Einführung des Spannungs- und gewöhnlichen Verzerrungstensors in allgemeinen Koordinaten; Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen. Für infinitesimale Verzerrungen wird der lineare Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verzerrungstensor und das daraus folgende Differentialgleichungssystem für den Verschiebungsvektor in allgemeiner Form angegeben. *Hans Richter.*

Aržanych, I. S.: Die Integralgleichungen des Deformationsvektors der Statik eines isotropen elastischen Körpers. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **75**, 783—786 (1950) [Russisch].

Es werden für den Deformationsvektor eines isotropen elastischen Körpers im Falle der ersten und zweiten Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie mit Hilfe der Greenschen bzw. Neumannschen Funktion der Potentialgleichung lineare Integralgleichungen zweiter Art aufgestellt; die Integrale sind bei der ersten über den Körper, bei der zweiten über den Körper und die Berandung erstreckt. Für beide Aufgaben werden Näherungslösungen angegeben. *Karl Maruhn.*

Sekiya, Tuyosi and Atusi Saito: Some applications of Dirac's δ-function on the mathematical theory of elasticity. J. Osaka Inst. Sci. Technology **1**, 99—110 (1949).

Die Dirac-Funktion $\delta(x)$ mit $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1$ mit der Folgerung $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a)$, wobei das Integrationsintervall noch in ein beliebiges endliches, die Stelle $x = a$ enthaltendes Intervall abgeändert werden kann, und die 2- und 3-dimensionale Verallgemeinerung dieser Formel läßt sich formal in der Elastizitätstheorie verwenden zur Behandlung von Belastungen durch Einzelkräfte in den Fällen, wo Spannungen oder Durchbiegungen explicite als bestimmte Integrale erscheinen, die Belastungsfunktionen enthalten. Dies wird erläutert 1. am elastisch-gebetteten endlich langen Balken unter endlichvielen Einzel-

kräften bei Verwendung des Heaviside-Operators; 2. an der unendlichen Halbebene unter endlichvielen Einzelkräften am Rand bei Verwendung der Formeln von Kolossoff [Z. Math. Phys. **62**, 384—409 (1914)] für das ebene Problem; 3. an der eingespannten kreisförmigen Platte unter beliebiger konstanter Belastung und durch Belastung mit beliebig vielen Einzelkräften. *Ruth Moufang.*

Bloch, V. I.: Die Spannungsfunktionen in der Elastizitätstheorie. Priklad. Mat. Mech., Moskva **14**, 415—422 (1950) [Russisch].

Ist σ der Spannungstensor im elastischen Medium mit der Dichte ϱ, I der Einheitstensor und mögen die Volumkräfte $\mathfrak{B}$ ein Potential haben: $\varrho\,\mathfrak{B} = \nabla F$, so ist die allgemeine Lösung für das Spannungsgleichgewicht (1): $\sigma + FI = -\nabla\times\varphi\times\nabla$ mit beliebigem symmetrischen Tensor φ zweiter Stufe. φ ist bestimmt bis auf einen Summanden $\varphi_0 = \nabla\mathfrak{v} + \mathfrak{v}\nabla$ mit beliebigem Vektorfeld $\mathfrak{v}$. Durch geeignetes $\mathfrak{v}$ können drei der sechs Komponenten von φ zu Null gemacht werden: Es bleiben drei Spannungsfunktionen. In kartesischen Koordinaten gibt es hierfür fünf Möglichkeiten: σ ist Diagonalmatrix (Maxwell), $\sigma_{ii} = 0$ (Morera), $\sigma_{ik} = 0$ für $i = 1$ oder 2 oder 3; in Zylinderkoordinaten gibt es 10 solcher Möglichkeiten, in Polarkoordinaten dagegen nur eine. — Verträglichkeitsbedingung und Hookesches Gesetz führen zu (2):

$$\Delta\varphi - S\,I/(1+\mu) + (1-2\mu)\,F\,I/(1+\mu) = (\nabla\mathfrak{w} + \mathfrak{w}\nabla)/2$$

mit $S = \Delta\varphi_{\mathrm{I}} - \Delta^2\cdot\cdot\,\varphi$ und (3): $\Delta S = 2\,(1-2\mu)\,\Delta F/(1-\mu)$; dabei ist $\mathfrak{w}$ ein Vektorfeld, μ die Poissonsche Konstante, φ_{I} die erste Invariante von φ. $\mathfrak{w}$ ist eindeutig bestimmt bis auf ein $\mathfrak{w}^0 = \mathfrak{a}\times\mathfrak{r} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ konstante Vektoren, $\mathfrak{r}$ = Ortsvektor. Mit $\Delta R = F$ wird dann

(4): $\varphi = (1-2\mu)\,R\,I/(1-\mu) + (\nabla^2\cdot\cdot\,B)\,I + (1-\mu)\,\Delta B + (\nabla\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\nabla)/2$

mit biharmonischem symmetrischen Tensor B; „$\cdot\cdot$“ kennzeichnet doppelt-skalare Multiplikation. Mit $B = z\Phi + \Phi_0$, Φ und Φ_0 harmonisch, entsteht entsprechende Darstellung (4*) durch harmonische Tensoren. — (1) liefert aus (2), (4), (4*) Darstellungen für σ; entsprechend gibt $E\,\mathfrak{u}/(1+\mu) = 2\nabla\cdot\varphi - \nabla\varphi_{\mathrm{I}} - \mathfrak{w}$ angegebene Darstellungen für die Verschiebung $\mathfrak{u}$ durch biharmonische oder harmonische Tensoren. — Die Gestalt der Randbedingungen bezgl. äußerer Kräfte und Momente bei Verwendung obiger Spannungsdarstellungen wird angegeben und diskutiert. *Hans Richter.*

Takeuti, Yoitiro: On a method of solving the two-dimensional stress problems solved only by harmonic function. J. Osaka Inst. Sci. Technology **1**, 111—113 (1949).

Verf. benutzt die von G. Kolossoff [Z. Math. Phys. **62**, 384—409 (1914)] abgeleitete komplexe Darstellung der Grundgleichungen des ebenen Problems bei gegebenen Randkräften zur Lösung spezieller Aufgaben. Die drei Spannungskomponenten sind dabei ausgedrückt durch Real- und Imaginärteil analytischer Funktionen, die auf dem Rand des Bereiches vorgeschriebene, durch die dort gegebenen Werte des Spannungstensors bestimmte Randwerte annehmen. *Ruth Moufang.*

Mineberg (Münzberg), B. L.: Gemischte Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie für eine Ebene mit kreisförmiger Öffnung. Priklad. Mat. Mech., Moskva **12**, 415—422 (1948) [Russisch].

Die von Muschelišvili (Singuläre Integralgleichungen, Moskau-Leningrad 1945) und Karcivadze [Trudy Tbiliss. mat. inst. **12** (1943)] ausgearbeitete Lösungsmethode gemischter Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie für elastische Halbebene und Kreis wird auf die Ebene mit kreisrunder Öffnung ausgedehnt. Es wird die Lösung angegeben für den Fall, daß auf einem Teil L_1 der Berandung die Verschiebungskomponenten, auf dem übrigen Teil L_2 die Spannungen gegeben sind; außerdem müssen die Hauptspannungen im Unendlichen und der Vektor aller an L_1 angreifenden Kräfte bekannt sein. Als Beispiele werden behandelt: die Scheibe

mit kreisrunder Öffnung, die im Unendlichen gleichmäßig gedehnt wird (L_1 fest mit starrer Auflage verbunden, L_2 frei) und die Scheibe mit kreisförmiger Öffnung, die im Unendlichen kräftefrei ist (auf L_1 wird ein mit L_1 starr verbundener Stempel in radialer Richtung mit der Kraft P gedrückt). In Polardiagrammen werden die Spannungsverteilungen auf der Berandung dargestellt. *Joachim Pretsch.*

Filin, A. P.: Über eine Folgerung aus dem Variationsprinzip der Elastizitätstheorie. Priklad. Mat. Mech., Moskva **14**, 451—452 (1950) [Russisch].

Der von P. F. Papkovič (Elastizitätstheorie, 1935) gegebene und auf Medien mit Hookeschem Gesetz beschränkte Beweis für die Variationsprinzipien der Elastizitätstheorie gilt noch für beliebiges Stoffgesetz mit existenter Enthalpie, da die verwendete Umformung der Arbeit der äußeren Kräfte in ein Volumintegral bei Ersetzung der Kräfte und Spannungen durch ihre Variationen in diesem Falle lediglich auf die Cauchy-Gleichungen führt. *Hans Richter.*

Reißner, Eric: On a variational theorem in elasticity. J. Math. Phys., Massachusetts **29**, 90—95 (1950).

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (virt. Arbeit) erlaubt die Gleichgewichtsbedingungen der Elastizitätstheorie durch eine Energieaussage zu ersetzen, die für Näherungsüberlegungen mit Vorteil benutzt werden kann. Das Prinzip der virtuellen Kräfte (virt. Ergänzungsarbeit) erlaubt die Verträglichkeitsaussagen durch eine Energieaussage zu erstzen, hat aber, wenn man die Gleichgewichtsaussagen nicht durch Einführung von Spannungsfunktionen abgelten kann, den Nachteil, daß man diese als Nebenbedingungen mitschleppen muß (Verschiebungen als Lagrangesche Faktoren). Verf. zeigt, daß man diese Unbequemlichkeit des 2. Prinzips umgehen kann, indem man statt seiner eine Extremalforderung

$$\delta\left[\int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \cdots - W)\, dV - \int_{O_1} (\bar{p}_x u + \cdots)\, dO\right] = 0$$

formuliert. Das hintere Integral ist darin über den Teil O_1 der Oberfläche O zu erstrecken, wo die Spannungen $\bar{p}_x \cdots$ vorgeschrieben sind; W ist die Formänderungsenergie ausgedrückt durch die Spannungen. Als Anwendungsbeispiel gibt er eine n+erste, besonders elegante Ableitung seiner die Schubdeformation berücksichtigenden Plattengleichungen (dies. Zbl. **30**, 43). *K. Marguerre.*

Galin, L. A.: Abschätzung der Verschiebungen in räumlichen Kontaktaufgaben der Elastizitätstheorie. Priklad. Mat. Mech., Moskva **12**, 241—250 (1948) [Russisch].

Für Stempel mit elliptischer Grundrißform, aber beliebiger Bodenoberfläche werden für gegebene Kräfte und Momente die Verschiebungen und Drehungen bei innigem Kontakt mit einem elastischen Körper berechnet. Die harmonische Funktion des Problems wird als Reihe in Laméfunktionen dargestellt, die nach dem dritten Gliede abgebrochen wird. Auf Grund einer elektrischen Analogie wird mit Abschätzungen von Pólya-Szegö über die Kapazität von flächeninhaltsgleichen Kondensatorplatten verschiedener Form gezeigt, daß ein Stempel mit ebener Bodenfläche beliebigen Grundrisses bei gegebener Kraft kleinere Verschiebungen erleidet als ein Stempel mit kreisrundem Grundriß gleichen Flächeninhalts. *Joachim Pretsch.*

● **Štaerman, I. Ja.: Das Kontaktproblem der Elastizitätstheorie.** Moskau-Leningrad: Staatsverlag für techn.-theor. Lit. 1949. 270 S. R. 13,20 [Russisch].

Die Begründung der Theorie des örtlichen Druckes geht zwar auf eine bekannte Abhandlung von H. Hertz zurück, ihr weiterer Ausbau ist aber erst in den letzten Jahrzehnten, besonders durch Anwendung von Integralgleichungen intensiv gefördert worden. Verf. gibt nun eine systematische Darstellung seiner eigenen Lösungen auf diesem Gebiet im Zusammenhang mit einigen Ergebnissen anderer Forscher und der Beschreibung der üblichsten einschlägigen Methoden. — Die beiden ersten Abschnitte des Werkes behandeln das ebene Berührungsproblem. Die grundlegende singuläre Integralgleichung für die Druckintensität längs einer vorgegebenen Kontaktkurve wird auf das Randwertproblem einer Potentialfunktion im Einheitskreise zurückgeführt. Lösungsmethoden durch Einführung einer komplexen Funktion bzw. durch direkten Fourieransatz werden erörtert. Als Anwendungsbeispiele bringt Verf. zwei sich ursprünglich in einem Punkt berührende elastische Scheiben bei sehr allgemein gehaltenen

Voraussetzungen hinsichtlich ihrer Konturen, sowie das bekannte Problem eines starren Stempels auf elastischer Halbebene. Der für die Randpressung günstige Einfluß von abgerundeten Kanten an der sonst ebenen Stempelunterfläche wird durch Druckkurven illustriert und ein von N. Muschelišvili herrührendes Ergebnis über den Einfluß einer an der Kontaktfläche mitwirkenden Reibung mitgeteilt. Anschließend wird der Fall von mehreren Kontaktabschnitten, insbesondere eine periodische Berührung zweier Scheiben behandelt. Sodann befaßt sich Verf. mit dem Kontakt zwischen einem kreiszylindrischen Zapfen und einer ebensolchen Schale bei nahezu gleichen Halbmessern. Mit wachsendem Druck erweitert sich rasch der Kontaktwinkel, und die Ergebnisse weichen dann von denen der Hertzschen Theorie erheblich ab. Zum Schluß macht Verf. einen interessanten Versuch, die Rauhigkeit der Kontaktfläche durch eine Art Kombination der Hertzschen Theorie mit der Winklerschen Bettungstheorie zu erfassen. — Abschnitt III enthält eine Theorie des achsensymmetrischen Kontaktes, die wiederum vermittels Integralgleichungen entwickelt wird. Der Sonderfall, in dem die ursprüngliche Kontaktstelle zugleich ein singulärer Punkt einer Begrenzungsfläche (z. B. eine Kegelspitze) ist, erscheint bemerkenswert. Anschließend wird der starre Kreiszylinderstempel mit abgerundeten Kanten ausführlich behandelt und das Problem eines starren elliptischen Stempels unter Heranziehung von Potentialtheorie der Lösung zugeführt. Schließlich gelangt die Hertzsche Lösung des Druckproblems zur Erörterung; Verf. verallgemeinert diese Lösung unter gewissen erweiterten Voraussetzungen für die Form der Kontaktfläche. Im Anhang findet man u. a. Angaben über Auflösung einer Gattung singulärer Integralgleichungen durch Differenzenrechnung. — Der sehr eingehenden Behandlung des Stoffes folgt man überall ohne Schwierigkeit; spezielle Vorkenntnisse werden beim Leser kaum vorausgesetzt. *S. Woinowsky-Krieger.*

Yu, T. M.: Shearing stresses in curved beams. Sci. Record, Acad. Sinica **2**, 401—408 (1949).

Verf. untersucht in vorliegender Arbeit die auftretenden Schubspannungen in stark gekrümmten Balken, die eine Symmetrieebene besitzen. Unter Berücksichtigung der Radialspannungen σ_r und der Radialdehnungen ε_r gelingt es ihm, eine verhältnismäßig einfache Formel für die Schubspannungen zu finden, während die bisher bekannte Theorie von Winkler und Bach, die hauptsächlich bei schwach gekrümmten Balken Anwendung fand, diese Einflüsse vernachlässigte. Die Anwendung dieser Formel zeigt Verf. an Hand von zwei Beispielen und zwar bei einem stark gekrümmten Balken von 90° Öffnung mit konstantem Rechtecksquerschnitt, der an einem Ende mit einer Querkraft belastet ist, sowie bei einem Balken mit Kreisquerschnitt gleicher Belastungsart. Die Ergebnisse wurden in einer Tabelle und in einem Schaubild zusammengestellt und mit Ergebnissen der strengen (mathematischen) Theorie verglichen. Die Übereinstimmung ist eine ausgezeichnete. *Karl Karas.*

Mitra, D. N.: Torsion and flexure of a beam whose cross-section is a sector of a circle. Bull. Calcutta math. Soc. **42**, 131—144 (1950).

Es wird in dieser Arbeit eine neue funktionentheoretische Methode zur Lösung des Problems der Biegung und Torsion eines Balkens benutzt, dessen Querschnitt einen Kreissektor bildet. Diese Methode ist eine Erweiterung des von S. Ghosh (siehe dies. Zbl. **35**, 252 und frühere Arbeiten aus den Jahren 1947 und 1948 in derselben Serie) entwickelten und von ihm angewandten Verfahrens zur Lösung des Problems der Biegung und Torsion von Balken, deren Querschnitte zum Teil durch gerade Linien begrenzt sind. Durch Anwendung der konformen Abbildung $z = \zeta^n$ wird der Kreissektor auf einen Halbkreis abgebildet und das Problem auf die Ermittlung einer Funktion zurückgeführt, die innerhalb des Halbkreises analytisch ist, deren Imaginärteil auf dem begrenzenden Durchmesser verschwindet und auf dem Umfang des Halbkreises gewisse vorgeschriebene Werte annimmt. Diese Funktion wird durch das Spiegelungsprinzip auf die andere Kreishälfte analytisch fortgesetzt und mit Hilfe der Formeln von H. A. Schwarz ermittelt. Die Ergebnisse dieser Arbeit stimmen mit denjenigen von A. C. Stevenson direkt überein [Phil. Trans. R. Soc. London, A **237**, 161—229 (1938); dies. Zbl. **19**, 239]. *Rolf Gran Olsson.*

Goodier, J. N.: Elastic torsion in the presence of initial axial stress. J. appl. Mech., New York **17**, 383—387 (1950).

Die experimentell bekannte Tatsache, daß die Torsionssteifigkeit eines Balkens durch Anwesenheit von Zug, Druck oder Biegung beeinflußt werden kann, insbesondere bei dünnwandigem, offenem Querschnitt, wird hier theoretisch erfaßt auf Grund der Erfüllung der Gleichgewichts- und Randbedingungen am verformten Element nach der Methode von Trefftz und Kappus. Verf. geht von dem Ansatz aus, daß einem allgemeinen Vorspannungszustand $S_{xx}, S_{xy}, \ldots$ ein Spannungszustand überlagert wird, der mit infinitesimalen Formänderungen nach dem Hookeschen Gesetz verknüpft ist. Der überlagerte Zustand wird spezialisiert zu einem reinen Torsionszustand nach dem de St. Venantschen Ansatz; die Berechnung der Gleichgewichtsbedingungen an den Balkenenden gibt dann infolge der Anwesenheit der Vorspannungen einen von S_{zz} (z-Richtung ist Balkenachse) abhängenden zusätzlichen Summanden in dem de St. Venantschen Ausdruck für das Torsionsmoment und außerdem Schubkräfte in Richtung der drei Koordinatenachsen und Biegemomente in der x- und y-Richtung. Ist der Vorspannungszustand ein reiner konstanter Längszug, so ergibt sich für das Torsionsmoment die bereits von M. A. Biot abgeleitete Formel. Diese Formel und ebenso die für anfängliche reine Biegung des zu verdrehenden Balkens abgeleitete Formel für das Torsionsmoment stehen in guter Übereinstimmung mit Experimenten. *Ruth Moufang.*

Pflanz, E.: Notiz zur Stabbiegung. Z. angew. Math. Mech. **30**, 393—394 (1950).

Es sei $p_{\alpha_1,\alpha_2}(x)$ mit ganzzahligem $\alpha_1, \alpha_2 \geqq 1$ die eindeutig bestimmte Parabel höchstens $(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)$-ter Ordnung in x, welche die Biegelinie $y(x)$ eines an beiden Enden $(x = \pm h)$ gelenkig gelagerten Stabes α_1-punktig bzw. α_2-punktig berührt. Für die Abweichung $y(x) - p_{\alpha_1,\alpha_2}(x)$ im Intervall $-h \leqq x \leqq h$ gilt:

$$y(x) = p_{\alpha_1,\alpha_2}(x) + \frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)!}(x-h)^{\alpha_1}(x-h)^{\alpha_2} y^{\alpha_1+\alpha_2}(z),$$

wo z eine gewisse Zwischenlänge längs des Stabes angibt. Weiter werde die Voraussetzung gemacht, daß die Belastung $q(x)$ überall gleichgerichtet sei. — Folgende einfache Beziehungen lassen sich aufstellen: 1. Der Schnittpunkt der Tangenten der Biegelinie an den Stützen hat die Abzisse $\bar{x}/h = (y'_+ + y'_-)/(y'_+ - y'_-)$ wo y'_+ und y'_- die Neigungen der Tangenten an den Stützen bezeichnen. 2. Mit den Winkeln ω_-, ω_+ definiert durch $\operatorname{tg}\omega_- = y'_-$, $-\operatorname{tg}\omega_+ = y'_+$ und $y(0) = y_0$ ergibt sich die Ungleichung: $\frac{1}{8} l (\operatorname{tg}\omega_- + \operatorname{tg}\omega_+) \leqq y_0 \leqq \frac{3}{8} l \operatorname{Min}(\operatorname{tg}\omega_-, \operatorname{tg}\omega_+)$. Bei einer Belastung, die zu $x = 0$ symmetrisch ist, folgt daraus $l \operatorname{tg}\omega_-/4 \leqq y_0 \leqq 3\, l \operatorname{tg}\omega_-/8$ sowie die Näherung $y_0 \approx 5\, l \operatorname{tg}\omega_-/16$. Sind die Endtangenten zeichnerisch gegeben, so führt die erste der angegebenen Ungleichungen zu einer einfachen Konstruktion zur Eingrenzung von y_0. 3. Die für stetige Belastung $q(x) > 0$ aufgestellten Ungleichungen bleiben auch bei unstetigem $q(x)$ sowie im Falle des Auftretens von Einzellasten gültig, falls sämtliche Lasten vertikal und gleichgerichtet wirken, und die Unstetigkeiten nur in endlicher Zahl auftreten.

Rolf Gran Olsson.

Džanelidze, G. Ju.: Verallgemeinerte Beziehungen in der Theorie der dünnen Stäbe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **66**, 597—600 (1949) [Russisch].

Die Arbeit enthält eine Erörterung des Effekts, hervorgerufen durch Verallgemeinerung der angenäherten Formeln von G. Kirchhoff in der Theorie dünner Stäbe (s. A. E. H. Love, A treatise on the mathematical theory of elasticity, 4th ed. Cambridge 1927, p. 447). Diese Verallgemeinerung wird dadurch erzielt, daß im Ausdruck für das Drillungsmoment der von der zweiten Ableitung des Verdrehungswinkels abhängige Term mitberücksichtigt wird. *Rolf Gran Olsson.*

Takeuti, Yoitiro: Stresses in a plate with a circular hole under concentrated loads solving by delta-function. J. Osaka Inst. Sci. Technology **1**, 123—125 (1949).

Die Arbeit behandelt die Wirkung von Einzellasten am Rande eines kreisförmigen Loches in einer Scheibe mit Hilfe der Diracschen Deltafunktion. Im

Falle eines elliptischen Loches werden elliptische Koordinaten eingeführt, wonach die Rechnung ähnlich wie beim kreisförmigen Loch verläuft. *R. Gran Olsson.*

Galin, L. A.: Über den Druck eines starren Körpers auf eine Platte. Priklad. Mat. Mech., Moskva **12**, 345—348 (1948) [Russisch].

Es wird die Kontaktfläche auf eine kreisrunde eingespannte Scheibe berechnet, auf die von einem starren Körper ein Druck ausgeübt wird. Sie hat ebenso wie beim Druck eines elliptischen Körpers auf einen elastischen Halbraum elliptische Form. *Joachim Pretsch.*

Chandra Das, Sisir: Note on the bending of certain thin elastic plates by concentrated loads. Bull. Calcutta math Soc. **42**, 89—93 (1950).

Im Anschluß an eine Methode von B. Sen [Indian phys.-math. J. **3**, 17—20 (1934); Phil. Mag., London **33**, 294 (1942)] läßt sich die elastische Durchbiegung einer dünnen Platte der Biegesteifigkeit D unter konzentrierter Belastung P in manchen Fällen leicht bestimmen, wenn nämlich die Begrenzung der Platte eine Kurve der Schar $\eta = \text{const.}$ ist, wobei ξ, η als Funktionen von x, y gegeben sind vermöge $x + i\,y = f(\xi + i\,\eta)$ und die Kurven $\eta = \text{const.}$ geschlossene Kurven sind. Dies läuft darauf hinaus, bei gegebenem f eine Lösung von $\Delta\,\Delta\,w = 0$ für die Durchbiegung w der Platte zu finden, die am Rand den Bedingungen $w = 0$ und $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ genügt und in $D\int \frac{\partial}{\partial n}\Delta w\,ds = P$, erstreckt über eine Kurve der Schar $\eta = \text{const.}$, das Integral unabhängig von der Länge der geschlossenen Kurve macht. Die Rechnung wird durchgeführt für $f = \text{const} \cdot \sec(\xi + i\,\eta)$ und für $f = 2\,c\sec^2 \tfrac{1}{2}(\xi + i\,\eta)$. *Ruth Moufang.*

Collatz, L.: Das Mehrstellenverfahren bei Plattenaufgaben. Z. angew. Math. **30**, 385—388 (1950).

Wie bei den anderen Arten von Differenzenverfahren wird beim Mehrstellenverfahren [L. Collatz, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Leipzig 1949, S. 350—355, 361—371; dies. Zbl. **35**, 175] ein etwa quadratisches Gitter von der Maschenweite h mit den Gitterpunkten $x_j = x_0 + j\,h$, $y_k = y_0 + k\,h$ eingeführt und zur Anwendung auf die Gleichung der Durchbiegung u der dünnen Platte $\Delta\Delta u = p(x, y)\,N$ eine Summe gebildet: $B = \sum_{j,k} (a_{jk}\,u_{jk} + A_{jk}\,(\Delta\Delta u)_{jk})$, wo die Summe über eine gewisse Anzahl von Gitterpunkten zu erstrecken ist, bei u und $\Delta\Delta\,u$ die angehängten Indizes j, k die Werte an der Stelle x_j, y_k bezeichnen und die Beiwerte a_{jk}, A_{jk} so zu bestimmen sind, daß bei einer Taylorschen Entwicklung aller Glieder der Summe nach u_{00} und den partiellen Ableitungen an der Stelle (x_0, y_0) die Koeffizienten von $\partial^{(\alpha+\beta)}\,u/\partial x^\alpha\,\partial y^\beta$ bis zu möglichst hohen Werten von α und β verschwinden. Dann soll $\sum_{j,k}\left(a_{jk}\,U_{jk} + A_{jk}\frac{p_{jk}}{N}\right) = 0$ eine Gleichung für die Näherungswerte U_{jk} (Näherung für u_{jk}) sein. — Es werden Beispiele zur Erläuterung der aufgestellten Gleichungen gegeben: 1. Eigenschwingungen einer quadratischen, ringsum frei aufliegenden Platte. 2. Platte mit sechseckigem Grundriß und durch $p = \text{konst.}$ gleichmäßig belastet, wobei die beiden rechtwinklig aufeinander stoßenden Seiten fest eingespannt sind, während die vier anderen ebenfalls rechtwinklig zueinander stehenden Seiten frei gelagert sind. Ferner werden für Dreiecksnetze, wie sie bei Dreiecksplatten vorkommen [z. B. H. Marcus, Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Theorie biegsamer Platten. 2. Aufl. Berlin 1932; sowie H. Göttlicher, Ing.-Arch. **11**, 12—19 (1938); entsprechende Formeln wie bei quadratischen Netzen aufgestellt. Für andere Gleichungen der Durchbiegung der Platte sind die Formeln des Mehrstellenverfahrens durch Taylorsche Entwicklung jeweils neu aufzustellen. Insbesondere, wenn die Steifigkeit der Platte und damit die Beiwerte der Ableitungen veränderlich sind, kann die Rechnung nach dem Mehrstellenverfahren sehr mühsam werden. *Rolf Gran Olsson.*

Luisoni, Cesar J.: Anwendung der Galerkinschen Methode auf die Lösung von Problemen der eingespannten Rechtecksplatten. Ihre Vorteile gegenüber anderen Methoden. Univ. nac. La Plata, Publ. Fac. Ci. fisicomat., Rev. **4**, 89—122 (1947) [Spanisch].

Die Methode von Galerkin setzt die unbekannte Durchbiegung w als lineare Kombination gegebener Funktionen φ_k an, die die Randbedingungen erfüllen, die w erfüllen soll, und gewinnt aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen durch Gleichsetzung der Variation der Arbeit der inneren und der äußeren Kräfte für die unbekannten α_i in $w = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \cdots + \alpha_n \varphi_n$ die Gleichungen

$$\iint_{\mathfrak{F}} \left(\Delta\Delta w - \frac{q}{N} \right) \varphi_k \, dx \, dy = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

[N = Plattensteifigkeit, $q(x, y)$ = Belastung pro Flächeneinheit]. Für die eingespannte Rechteckplatte wird die Rechnung durchgeführt mit dem Ansatz $n = 4$, wobei jedes φ_k Produkt eines passenden Polynoms in x mit einem passenden Polynom in y ist. Die α_1 bis α_4 bestimmen sich aus einem System von vier linearen Gleichungen, die allein vom Seitenverhältnis b/a der Platte abhängen und für verschiedene Werte von b/a leicht einer Tabellierung zugänglich sind. Ist so ein Näherungswert für w ermittelt, ergeben sich Biege- und Torsionsmomente, Schubkräfte und Reaktionskräfte in der bekannten Weise durch Differentiation. Tabellen und Kurven zeigen den Vergleich der so erhaltenen Werte mit den Werten, die die Methoden von Marcus, Lorenz, Nádai und Timoshenko ergeben. Verf. kommt zu dem Schluß, daß die approximative Methode von Galerkin wegen ihrer Einfachheit der sehr mühsamen Berechnung bei der exakten Methode von Timoshenko vorzuziehen ist. Die Lösung von Lorenz ist gut brauchbar für die Berechnung der Durchbiegungen für $b/a \leq 1{,}5$, ist aber ungeeignet zur Berechnung der Normalspannungen. Die Näherungslösung von Nádai kann angewandt werden zur Berechnung des Biegepfeils für $b/a \leq 2$ und zur Berechnung der Normalspannungen für $b/a \leq 1{,}5$. Einschränkungen für b/a existieren in der Anwendungsfähigkeit der Galerkinschen Methode nicht. *Ruth Moufang.*

Il'in, Ja. K.: Bestimmung der Spannungen in einer rotierenden Kreisscheibe mit exzentrischer Rotationsachse. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **67**, 803—806 (1949) [Russisch].

Diese Note enthält einen Auszug der Lösung des folgenden Problems: Es sind die Spannungen in einer dünnen elastischen Kreisscheibe zu ermitteln, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine Achse senkrecht zur Scheibenebene in einer Entfernung δ vom Scheibenmittelpunkt rotiert: Das Problem ist auf die Lösung eines ebenen Problems der Elastizität nach einem Verfahren von Muschelišvili zurückgeführt. Die vom Verf. gegebene Lösung wird für $\delta = 0$ auf bereits bekannte Resultate zurückgeführt. (Nach Ansicht des Ref. wird man mit Hilfe der bekannten Transformation durch reziproke Radien von J. H. Michell [Proc. London math. Soc. **31**, 100 (1900)] ebenfalls zu einer Lösung des behandelten Problems gelangen.) *Rolf Gran Olsson.*

Vajnberg, D. V.: Örtliche Spannungen in einer ebenen, ringförmigen Scheibe unter zwei Einzelkräften. Prikl. Mat. Mech., Moskva **13**, 151—158 (1949) [Russisch].

Die Arbeit enthält eine eingehende Berechnung der örtlichen Spannungen in einer ebenen, ringförmigen elastischen Scheibe, die durch zwei Einzelkräfte am äußeren und inneren Rand des Ringes belastet wird. Die Lösung geht auf die Ermittlung von zwei analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen hinaus und folgt den Lösungsmethoden ebener Probleme der Elastizität, wie sie von N. I. Muschelišvili entwickelt sind. Als Grenzfall enthält man die bereits bekannte Lösung des entsprechenden Problems für den unendlichen Streifen. Zahlenbeispiele mit graphischer Darstellung der Spannungsverteilung.

Rolf Gran Olsson.

Šaišmelašvili, V. N.: Zur Berechnung einer sehr flachen Kugelschale, die durch Biegemomente belastet ist. Soobščenija Akad. Nauk Gruzinskoj SSR **10**, 397—403 (1949) [Russisch].

Šaišmelašvili, V. N.: Angenäherte Berechnung einer hinreichend flachen Kugelschale bei gegebener Deformation der Kontur. Soobščenija Akad. Nauk Gruzinskoj SSR **10**, 609—614 (1949) [Russisch].

Avram, Constantin N.: La généralisation de la méthode Cross. I. Bull. Sci. Techn. Polytechn. Timişoara **13**, 193—216 (1948).

Der erste Teil eines zusammenfassenden Berichtes über die Crosssche Methode für die statische Berechnung der in ihrer Ebene belasteten Rahmenwerke. Es wird die Berechnungsgrundlage für Rahmen mit unverschieblichen Knotenpunkten in übersichtlicher Form abgeleitet und auf ein Zahlenbeispiel angewendet.

Bekir Dizioğlu.

Avram, Constantin N.: La généralisation de la méthode Cross. II. Bull. Sci. Techn. Polytechn. Timişoara **13**, 305—333 (1948).

In diesem zweiten Teil der Arbeit (s. vorsteh. Referat) gibt Verf. die zur Durchführung der Crossschen Methode erforderlichen Berechnungsgrundlagen für Rahmenwerke mit verschieblichen Knotenpunkten an. Hierbei wird auch die Anwendung der Methode der virtuellen Arbeit bei Rahmenwerken mit und ohne Zugband mitberücksichtigt.

Bekir Dizioğlu.

Kuhelj, Anton: On the determination of internal forces in two-spar wings. Acta techn., Ljubljana, Ser. Math. appl. Mech. **1**, Nr. 1, 1—12 und engl. Zusammenfassg. 13 (1950) [Slovenisch].

Schnadel, Georg: The strength of transversely stiffened decks of ships. Reissner Annivers. Vol., Contr. appl. Mech., Ann Arbor, Mich., 256—267 (1949).

Green, A. E. and R. T. Shield: Finite elastic deformation of incompressible isotropic bodies. Proc. R. Soc., London, A **202**, 407—419 (1950).

Verff. nehmen Bezug auf sieben in neuerer Zeit erschienene Arbeiten von R. S. Rivlin (dies. Zbl. **29**, 326, 327, **31**, 426, **33**, 408, **35**, 415, **36**, 249), die auf Tensorschreibweise verzichten, und geben im Anschluß an eine Arbeit von A. E. Green und W. Zerna (dies. Zbl. **36**, 132) eine zusammenfassende tensorielle Darstellung der Theorie endlicher Formänderungen eines isotropen elastischen Körpers, insbesondere bei Inkompressibilität unter Zugrundelegung eines allgemeinen Koordinatensystems, das während der Deformation mit dem Körper fest verbunden ist. Die Definition des Spannungs- und Verzerrungstensors, die dynamischen Grundgleichungen, die Randbedingungen, die Relationen zwischen den Spannungskomponenten und dem elastischen Potential (falls ein solches existiert) werden zusammengestellt, wobei zugleich die Theorie von Murnaghan ein wenig vereinfacht erscheint. An 3 Beispielen wird der Formelapparat erläutert: 1. Reine Torsion eines Kreiszylinders. 2. Rotation eines Kreiszylinders um seine Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. 3. Biegung einer Kugelschale unter gegebenem Innen- und Außendruck bei Berücksichtigung der Grenzfälle $r_i/r_a = 0$, $r_i/r_a = 1 - \varepsilon$.

Ruth Moufang.

Cicala, Placido: Sulle deformazioni plastiche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. **8**, 583—586 (1950).

In einer Note (A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip. „NACA. tech. Note" **1871**, April 1949) haben S. B. Batdorf und B. Budiansky ein Verformungsgesetz aufgestellt, das anderen Charakter hat als die bisherigen Gesetze vom Fließtypus bzw. vom Deformationstypus, indem die plastische Deformation als Resultierende der Gleitungen aufgefaßt wird, die die Tangentialspannung in allen möglichen Richtungen in jeder der möglichen Schnittrichtungen hervorruft nach einem Gesetz, das von dem Anwachsen dieser Tangentialspannung und von den Materialeigenschaften abhängt. Man gelangt so zu

komplizierten Formeln mit mehrfachen Integralen, die hier in dem Spezialfall ausgewertet werden, daß ein Körper durch einachsigen Zug plastisch verformt und alsdann zusätzlichen infinitesimalen Formänderungen unterworfen wird. Die Resultate gestatten einen Vergleich mit den Theorien von Reuß und Hencky. Insbesondere ergibt sich für den Zug-Torsionsversuch, bei dem nach plastischer Verformung durch Zug gleichzeitig mit der Aufbringung der Torsion die Zugkraft in einem oder anderem Sinne geändert wird, theoretisch nach Batdorf und Budiansky eine unterschiedliche Beeinflussung des Schubmoduls, im Gegensatz zur Theorie von Reuß. *Ruth Moufang.*

Kuskov, A. M.: Erzwungene elastische stationäre Schwingungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **70,** 197—200 (1950) [Russisch].

Das Äußere der geschlossenen Fläche S im dreidimensionalen Raume sei erfüllt von einem homogenen, isotropen elastischen Medium. In den Punkten N von S seien die Spannungen $\vec{f}(N)$ stationär harmonisch mit der Kreisfrequenz ω vorgeschrieben. Zu lösen sind dann die Wellengleichungen $\Delta\varphi + k_1^2\varphi = 0$ und $\Delta\vec{\psi} + k_2^2\vec{\psi} = 0$ für skalares Potential φ und Vektorpotential $\vec{\psi}$ bei $k_1^2 = \omega/c_l$ und $k_2^2 = \omega/c_t$ ($c_l > c_t$ sind die longitudinale und transversale Wellengeschwindigkeit) mit den $\vec{f}$ entsprechenden Randbedingungen. φ und $\vec{\psi}$ werden mit Hilfe der der Ausstrahlungsbedingung genügenden Quellstörungen $\operatorname{grad}(e^{-ik_v r}/r)$ als Integrale über S mit unbekannter vektorieller Quelldichte $\vec{\nu}(N)$ angesetzt. Die Randbedingungen führen zu einem System von drei Fredholmschen Integralgleichungen für die Komponenten von $\vec{\nu}$; die Lösung existiert für alle ω. — Die entsprechende Aufgabe für das Innere von S führt zum gleichen Integralgleichungssystem, das für $\omega \neq \omega_n$ eindeutig lösbar ist, wenn ω_n die Eigenfrequenzen bei vorgegebenen harmonischen Randverschiebungen sind. *Hans Richter.*

Päsler, Max: Die Differentialgleichung für den zeitlichen Verlauf von thermisch gedämpften elastischen Schwingungen. Ann. Phys., Leipzig, VI. F. **4,** 14—24 (1948).

Die Bewegungs- und Wärmeleitungsgleichungen eines elastischen Körpers sind bei Berücksichtigung der thermoelastischen Effekte miteinander gekoppelt. Dies führt zur Dissipation von mechanischer Energie und zur Dämpfung von Eigenschwingungen des Körpers. Aus dem Ansatz, daß bei Eigenschwingungen elastische Verschiebung und Temperaturschwankung ein Produkt aus einer Ortsfunktion und einer Zeitfunktion sind, leitet Verf. durch Elimination der Temperatur eine Differentialgleichung für den zeitlichen Verlauf der Verschiebung von der Form

$$\frac{d^3F}{dt^3} + \gamma\frac{d^2F}{dt^2} + \omega_0^2\left(1 + \frac{\varepsilon}{E}\right)\frac{dF}{dt} + \omega_0^2\gamma F = 0$$

her, wobei die Koeffizienten außer von den Materialkonstanten noch von der speziellen Schwingungsform abhängen. — Vorstehende Differentialgleichung war früher schon von Bennewitz und Rötger [Phys. Z. **37,** 578 (1936)] und dem Verf., jedoch unter spezielleren Voraussetzungen, aufgestellt worden. *Arnold Schoch.*

Zavriev, K. S.: Analyse des Fehlers bei der Untersuchung freier Schwingungen von Balken mit unendlich vielen Freiheitsgraden mit der Methode der sukzessiven Approximationen. Soobščenija Akad. Nauk Gruzinskoj SSR **10,** 103—106 (1949) [Russisch].

Sechniašvili, È. A.: Bestimmung der Frequenzen freier Schwingungen von Balken mit unendlich vielen Freiheitsgraden. Soobščenija Akad. Nauk Gruzinskoj SSR **10,** 405—412 (1949) [Russisch].

● **Trendelenburg, Ferdinand: Einführung in die Akustik.** Zweite, umgearbeitete Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1950. VIII, 378 S. DM. 39,00.

Hydrodynamik:

Bilharz, Herbert: Über eine Anwendung des Dirichletschen Diskontinuitätsfaktors in der Strömungslehre. Arch. Math., Karlsruhe **2**, 27—32 (1949/50).

Zur Lösung der Aufgabe, auf der mit konstanter Geschwindigkeit senkrecht angeströmten y-Achse eines x, y, z-Raumes eine Zirkulationsverteilung $\gamma(y)$ derart zu bestimmen, daß ihr die geometrische Anstellwinkelverteilung

$$\alpha^*(y) = \begin{cases} 2\delta & (0 \leqq |y| < l) \\ \delta & (|y| = l) \\ 0 & (|y| > l) \end{cases} \qquad (\delta \text{ konstant})$$

entspricht, wird in der zugehörigen Prandtlschen Integro-Differentialgleichung α^* durch den Dirichletschen Diskontinuitätsfaktor ausgedrückt und $\gamma(y)$ als Fouriersches Integral angesetzt. Es zeigt sich, daß sich $\gamma(y)$ in einfachster Weise mit Hilfe der Funktionen si und Ci ausdrücken läßt. Ganz analog läßt sich $\gamma(y)$ bestimmen, wenn

$$\alpha^*(y) = \begin{cases} 2\,\delta \operatorname{sgn} y & (l_1 \leqq |y| \leqq l_2) \\ \delta \operatorname{sgn} y & (|y| = l_1 \; |y| = l_2) \\ 0 & (0 \leqq |y| < l_1, \; |y| > l_2) \end{cases}$$

vorgegeben ist. Für eine Reihe von Zahlenbeispielen wurden die Ergebnisse in Diagrammen dargestellt. *Karl Maruhn.*

Pignedoli, Antonio: Sui vortici cilindrici. Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena **3**, 102—124 (1949).

In einer inkompressiblen, homogenen, reibungsfreien Flüssigkeit befinde sich eine unendlich lange, zylindrische Wirbelröhre von endlichem Querschnitt, die gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Achse rotiert. Notwendig und hinreichend dafür, daß die ebene, durch die Wirbelröhre erzeugte Flüssigkeitsbewegung bezüglich eines mit ω mitrotierenden Achsenkreuzes stationär ist, ist bekanntlich, daß die Wirbelstärke ζ der Röhre eine Funktion von $\Psi = \psi + \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2)$ (ψ Stromfunktion der Wirbelbewegung) allein ist. Verf. leitet dies noch einmal her und betrachtet dann speziell ζ als lineare Funktion von Ψ. In diesem Falle läßt sich die Bestimmung von Ψ mittels einer Hilfsfunktion W auf die Lösung der Wellengleichung $\Delta W + \lambda W = 0$ mit der Randbedingung $W = 0$ zurückführen, wobei ja bekanntlich unendlich viele positive Eigenwerte existieren. Die Lösungen sind dann noch daraufhin zu prüfen, ob sie hydrodynamisch sinnvoll sind, d. h. ob die Stetigkeit von Geschwindigkeit und Druck beim Durchgang durch die Berandung der Wirbelröhre gewährleistet ist. Ein Beispiel hierfür bildet die kreiszylindrische Röhre. — Unter der Voraussetzung konstanter Wirbelstärke wird schließlich noch mittels Anwendung einer geeigneten konformen Abbildung der Fall eines von einer Epizykloide begrenzten Röhrenquerschnittes behandelt. *Karl Maruhn.*

Rott, Nikolaus: Flügelschwingungsformen in ebener kompressibler Potentialströmung. Z. angew. Math. Phys., Basel **1**, 380—410 (1950).

Die Energiemethode zur Behandlung des Flatterproblems in ebener Potentialströmung wird für zwei Freiheitsgrade (Schlag- und Drehschwingung) ausführlich dargestellt. Die Ergebnisse werden für den ganzen Machzahlbereich von $M = 0$ bis $M = \infty$ diskutiert und in Schaubildern wiedergegeben, wobei die Luftkraftkoeffizienten der vorhandenen Literatur entnommen werden, mit Ausnahme des Sonderfalls $M = 1$, für den Verf. eigene Formeln beibringt. Insbesondere ergibt sich eine von M abhängige obere Grenze der reduzierten Frequenz, oberhalb deren keine angefachten Schwingungen mit zwei Freiheitsgraden möglich sind. Für reine Drehschwingungen liegt diese Grenze wesentlich niedriger, für $M > \sqrt{2{,}5}$ sind angefachte Schwingungen mit einem Freiheitsgrad unmöglich. Aus den Ergebnissen werden konstruktive Vorschläge zur Flatterverhütung gefolgert.

Johannes Weissinger.

Viguier, Gabriel: Écoulement d'un fluide visqueux incompressible dans un tube mince incliné. Periodicum math.-phys. astron., Zagreb, II. S. **3**, 202—207 und kroatische Zusammenfassg. 208 (1948).

Verf. wendet die von ihm vertretene Anschauung, daß bei starken Geschwindigkeitsgradienten die Schubspannung nicht mehr genau genug proportional der Deformationsgeschwindigkeit ist, auf das Problem des Schrägrohr-Differential-Viskosimeters nach Poncin an. In den Bewegungsgleichungen treten also zusätzliche Zähigkeitsglieder dritten Grades auf. Durch einige Umformungen gelingt es, das Problem auf eine Integro-Differentialgleichung zurückzuführen, deren Lösung ziemlich aussichtslos erscheint, jedoch vom Verf. für eine spätere Veröffentlichung in Aussicht gestellt wird. *Walter Wuest.*

Viguier, Gabriel: Répartition tourbillonnaire d'un fluide visqueux incompressible dans le mouvement à deux dimensions. Periodicum math.-phys. astron., Zagreb, II. S. **3**, 209—212 und kroatische Zusammenfassg. 212 (1948).

Die vom Verf. entwickelten Bewegungsgleichungen zäher Flüssigkeiten, die gegenüber den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen zusätzliche Zähigkeitsglieder dritten Grades im Geschwindigkeitsgradienten enthalten, werden in die Wirbelgleichungsform umgewandelt, die man in bekannter Weise durch Differentiation und geeignete Zusammenfassung der ursprünglichen Gleichungen erhält.
Walter Wuest.

Thiriot, K.-H.: Grenzschichtströmung kurz nach dem plötzlichen Anlauf bzw. Abstoppen eines rotierenden Bodens. Z. angew. Math. Mech. **30**, 390—393 (1950).

Die Beiwertfunktionen der Reihenentwicklungen für die Geschwindigkeitskomponenten der Grenzschichtströmung genügen gewöhnlichen Differentialgleichungen, die in einer früheren Arbeit des Verf. [Z. angew. Math. Mech. **20**, 1—13 (1940)] nicht richtig dargestellt waren. Die richtiggestellten Gleichungen werden in geschlossener Form integriert, die Lösungen in Tabellen- und Diagrammform wiedergegeben und die Richtung der Stromlinien am Boden ausgerechnet.
Johannes Weissinger.

Wecken, Franz: Stoßwellenverzweigung bei Reflexion. Z. angew. Math. Mech. **28**, 338—341 (1948).

Beim Auftreten eines schiefen Verdichtungsstoßes auf eine gerade Wand ist die reguläre Reflexion nur für kleinere Einfallswinkel möglich, während sich bei großem Einfallswinkel eine Stoßwellengabel (Mach-Effekt) bildet. Verf. zeigt, daß die Grenze der regulären Reflexion bei schwachen Stoßwellen (Druckverhältnis $p_1/p_2 < 0{,}44$) durch das Kriterium von Schultz-Grunow, für starke Stoßwellen ($p_1/p_2 > 0{,}44$) dagegen durch dasjenige von Cranz-Schardin gegeben ist. Während im letztgenannten Fall der Übergang zum Macheffekt erfolgt, treten bei schwachen Stoßwellen beim Überschreiten der Grenzkurve sprunghafte Änderungen im Abstromgebiet auf. *Walter Wuest.*

Richter, Hans: Die Stabilität des Verdichtungsstoßes in einer konkaven Ecke. Z. angew. Math. Mech. **28**, 341—345 (1948).

Bei der Berechnung des Verdichtungsstoßes in einer konkaven Ecke oder bei einem Keil von nicht zu großem Öffnungswinkel ist die Lösung im allgemeinen zweideutig („schwache" und „starke" Verdichtungsstöße). Die bisher üblichen Begründungen für die Bevorzugung der schwachen Lösung werden vom Verf. abgelehnt. Statt dessen wird eine instationäre, rein mechanische Stabilitätsbetrachtung durchgeführt, die sich auf die Abhängigkeit der Stromlinienablenkung von der Stoßintensität („Herzkurve" nach Weise) stützt. Eine qualitative Betrachtung über die Wirkung eines Hindernisses im Abstromgebiet hinter der Stoßfront zeigt, daß ein an einer starren Wand ansetzender starker Stoß instabil ist. Diese Überlegung scheint durch einen experimentellen Befund von

Oswatitsch bestätigt zu werden, der bei erzwungenem starken Stoß ein periodisches Hin- und Herpendeln der Stoßfront feststellte. *Walter Wuest.*

Friedrichs, K. O.: Formation and decay of shock waves. Commun. appl. Math., New York **1**, 211—245 (1948).

Verf. hat in dem zusammen mit R. Courant herausgegebenen Buch „Supersonic flow and shock Waves" (New York 1948) ein Näherungsverfahren zur Berechnung eindimensionaler unstetiger und zweidimensionaler stetiger Gasströmungen mit Verdichtungsstößen beschrieben, das darauf beruht, daß nur Glieder bis zum 2. Grade in der Stoßstärke berücksichtigt werden, so daß also die Entropieänderung an der Stoßfront unberücksichtigt bleibt. Vorliegende Abhandlung gibt eine abweichende Darstellung dieses Näherungsverfahrens sowie eine ausführliche Diskussion von Sonderfällen. Diese beziehen sich einmal auf die Bildung einer Stoßwelle bei beschleunigter Bewegung eines Kolbens in einem Rohr, auf das Abklingen der Stoßwelle bei Verzögerung der Kolbenbewegung, sowie auf die Bildung einer „N-Welle" bei erneuter Beschleunigung des Kolbens. Ein weiterer Abschnitt behandelt andrerseits das Auftreten stationärer Stoßfronten an dünnen Profilen. *Walter Wuest.*

Lax, Anneli: Decaying shocks. A comparison of an approximate analytic solution with a finite difference method. Commun. appl. Math., New York **1**, 247—257 (1948).

Um die Genauigkeit des Näherungsverfahrens von Friedrichs (s. vorsteh. Referat) zu überprüfen, wird das entsprechende Wasserwellengleichnis behandelt und zwar einmal nach dem Näherungsverfahren von Friedrichs, zum anderen nach dem Charakteristikenverfahren. Bei einem Verhältnis der Flüssigkeitshöhen vor und hinter dem Wassersprung von $h_1/h_0 = 1{,}8$ liegen die Abweichungen innerhalb der Zeichengenauigkeit, während sie bei $h_1/h_0 = 3$ zwar schon merkbar, aber immerhin noch sehr klein sind. *Walter Wuest.*

Friedrichs, K. O.: On the non-occurrence of a limiting line in transonic flow. Commun. appl. Math., New York **1**, 287—301 (1948).

Verf. zeigt, daß das Auftreten von Verdichtungsstößen bei überkritischer Unterschallströmung an Tragflügeln nicht auf die Bildung von „Grenzlinien" zurückzuführen ist. Der Beweis wird dadurch geführt, daß das Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante $J = y_u\, x_v - y_v\, x_u$ der Transformation der (u, v)-Ebene in die (x, y)-Ebene an der Wand, im Überschallbereich und auf der Schallgrenzlinie bewiesen wird. Für den letztgenannten Fall wird zum Beweis ein von D. A. Flanders gelöstes und im Anhang mitgeteiltes algebraisches Problem herangezogen. *Walter Wuest.*

Oswatitsch, Klaus: Die Geschwindigkeitsverteilung an symmetrischen Profilen beim Auftreten lokaler Überschallgebiete. Acta phys. Austriaca **4**, 228—271 (1950).

Reine Unterschallströmungen um dünne Profile können näherungsweise nach der Prandtlschen Regel berechnet werden, die darauf beruht, daß die Stromdichtefunktion durch eine Gerade ersetzt wird. Im schallnahen Bereich mit örtlichen Überschallgebieten wird dagegen eine parabolische Approximation nahegelegt, weil die Stromdichte nach Erreichen eines Maximums wieder abfällt. Diese parabolische Approximation führt zu einem Ähnlichkeitsgesetz für die schallnahe Strömung, das zuerst von Guderley erwähnt und vom Verf. (1947) ausführlich behandelt wurde. Die Prüfung dieses Ähnlichkeitsgesetzes an Versuchen von Göthert hat gezeigt, daß bereits bei Profildicken von 15—18% die Verdichtungsstöße systematisch weiter stromaufwärts rücken, daß also das Ähnlichkeitsgesetz nur für sehr dünne Profile gilt. Während nach der Prandtlschen Regel die Geschwindigkeitsverteilung auf die Lösung der Randwertaufgabe der inkompressiblen Strömung zurückgeführt und durch eine Quellbelegung der Profilachse erzeugt werden kann, muß bei parabolischer Approximation noch eine zusätzliche Quellverteilung in der ganzen Strö-

mungsebene hinzugenommen werden, um die Abweichungen der Stromdichte von der „Prandtlgeraden" zu berücksichtigen. Bei symmetrischen, nicht angestellten Profilen, auf die sich die weiteren Ausführungen ausschließlich beziehen, ergeben sich durch die Zusatzverteilung keine Schwierigkeiten in den Randbedingungen, während im allgemeinen Fall die Zusatzquellen Normalgeschwindigkeiten auf der Achse induzieren. Die Lösung für die Geschwindigkeitsverteilung wird mit einigen verfügbaren Parametern angesetzt, in die Integralgleichung eingeführt und die Erfüllung der Integralgleichung in einigen besonders wichtigen Punkten gefordert. Daraus ergibt sich die Bestimmung der Parameter und im weiteren Verlauf die Lösung. Diese zeigt die typische Geschwindigkeitsverteilung mit Verdichtungsstoß richtiger Sprunghöhe. Bei wachsender Größe des lokalen Überschallgebietes beginnt der Widerstand in experimentell bekannter Weise plötzlich außerordentlich zu steigen. Die Übereinstimmung mit Versuchen von Göthert an einem 6% dicken NACA-Profil ist völlig zufriedenstellend. *Walter Wuest.*

Bordoni, Piero Giorgio and Wolf Gross: Sound radiation from a finite cylinder. J. Math. Phys., Massachusetts **27**, 241—252 (1948).

Das Schallfeld eines Kreiszylinders von endlicher Länge mit schwingender Oberfläche wird durch eine Reihenentwicklung nach Kugelfunktionen approximiert, wobei die Entwicklungskoeffizienten dadurch bestimmt werden, daß die Randbedingung $\partial\varphi/\partial n = u_n$ (= auf der Oberfläche des Zylinders vorgegebene Normalschnelle) „im Mittel" möglichst gut approximiert wird, d. h. daß man $\int \left|\frac{\partial\varphi}{\partial n} - u_n\right|^2 dS$, erstreckt über die Oberfläche, zum Minimum macht. Diese Bedingung liefert ein System von linearen Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten. — Für den Fall, daß nur eine Grundfläche des Zylinders kolbenartig schwingt und die Höhe des Zylinders gleich dem Radius a ist, sind in dieser Weise numerisch die Richtcharakteristiken berechnet und mit denen einer Kugel von gleichem Volumen und gleichem Schallfluß verglichen worden. *Arnold Schoch.*

Chester, W.: The propagation of sound waves in an open-ended channel. Phil. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VII. S. **41**, 11—33 (1950).

Dem von H. Levine und J. Schwinger in einer vorhergehenden Arbeit (dies. Zbl. **39**, 213) vorgezeichneten Weg folgend, wird das entsprechende zweidimensionale Problem, nämlich das Schallfeld in einem von zwei parallelen, starren Halbebenen begrenzten Kanal behandelt. Die Quadraturen, durch die sich die Wiener-Hopf-Integralgleichung, auf welche das Problem führt, lösen läßt, können hier allgemein ausgeführt werden. Für den Betrag des Reflexionsfaktors am offenen Kanalende ergibt sich die überraschend einfache Beziehung $|R| = e^{-2\pi b/\lambda}$ (λ = Wellenlänge, $2b$ = Kanalbreite). Phase der Reflexion und Richtcharakteristik der Ausstrahlung sind numerisch durch Kurven wiedergegeben. *A. Schoch.*

Chester, W.: The propagation of a sound pulse in the presence of a semi-infinite, open-ended channel. II. Proc. R. Soc., London, A **203**, 33—42 (1950).

Untersucht wird die Welle, die in einem von zwei parallelen, starren Halbebenen begrenzten Kanal entsteht, wenn entweder von außen oder von innen eine ebene Stoßwelle (kleiner Amplitude) auf die Kanalmündung fällt. Der zeitliche Verlauf der primären Stoßwelle wird durch ein Fourier-Integral dargestellt; die von der Mündung aufgenommene bzw. von ihr reflektierte Welle läßt sich dann ebenfalls durch ein Fourier-Integral darstellen mit Hilfe der vom Verf. früher veröffentlichten Lösung desselben Problems für periodische Wellen (s. vorsteh. Referat). Da das entstehende Fourier-Integral nicht ohne weiteres geschlossen auswertbar ist, wird nur das asymptotische Verhalten der sekundären Wellen für große Abstände von ihrer Front diskutiert; es ergibt sich eine Amplitudenabnahme wie $O(1/s)$ (s = Abstand von der Wellenfront). — Das Ergebnis wird benützt zur Abschätzung des Fehlers einer früher vom gleichen Verf. durchgeführten Berech-

nung der in der reflektierten Welle enthaltenen Energie [Philos. Trans. R. Soc. London A **242**, 527—556 (1950)]. *Arnold Schoch.*

Chochlov, R. V.: Über instationäre Prozesse in einem Wellenleiter. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **61**, 637—640 (1948) [Russisch].

Es wird die nicht stationäre Schwingung (Einschaltvorgang) in einem halbunendlichen akustischen zylindrischen Wellenleiter untersucht, wenn für $t = 0$ ein flacher Strahler bei $z = 0$ Schwingungen nach dem Gesetz $e^{i\omega t}$ auszuführen beginnt. Die Gleichung des Geschwindigkeitspotentials ist

$$\Delta_{\xi,\eta}\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - 2\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0,$$

wo ξ, η die Querschnittskoordinaten, z die Koordinate längs der Achse, α die Dämpfung, c die Phasengeschwindigkeit im freien Raum bedeuten. Als Zusatzbedingungen gelten $(\partial\Phi/\partial n)_\Gamma = 0$ längs des Querschnittsumfangs Γ, und an der Oberfläche des Strahlers:

$$\partial\Phi/\partial z|_{z=0} = F(\xi,\eta)\, e^{i\omega t} \text{ für } t > 0, \quad = 0 \text{ für } t < 0.$$

Für den Beginn der Schwingungen gilt im ganzen Medium $\Phi_{t=0} = 0$ und $\partial\Phi/\partial t|_{t=0} = 0$. Die Lösung erfolgt in der Form

$$\Phi(\xi,\eta,z,t) = e^{-\alpha^2 c^2 t}\sum_m \psi_m(z,t)\, T_m(\xi,\eta),$$

wo $T_m(\xi,\eta)$ die normierten Eigenfunktionen des Querschnitts sind, entsprechend

$$\Delta_{\xi,\eta}T_m(\xi,\eta) + \lambda_m^2\, T_m(\xi,\eta) = 0, \quad \partial T_m/\partial\eta|_\Gamma = 0$$

und

$$\psi_m(z,t) = -\frac{c\, f_m}{2\pi i}\int_{a-i\omega}^{a+i\omega}\frac{\exp\left(p\,t - c^{-1}\,z\sqrt{p^2 + s_m^2 c^2}\right)}{(p - i\chi)\sqrt{p^2 + s_m^2 t^2}}\,dp,$$

$$s_m^2 = \lambda_m^2 - \alpha^2 c^2, \quad f_m = \int_s F(\xi\,\eta)\, T_m(\xi,\eta)\,d\sigma, \quad i\chi = i\omega + \alpha c^2.$$

ψ_m kann durch 2 Lommelsche Funktionen [vgl. P. J. Kusnezov, Angewandte Mathematik und Mechanik, 2. Aufl. 1947 (russisch); G. N. Watson, Theory of Bessel Functions, 2. ed., Cambridge 1944] zweier unabhängiger Variabler dargestellt werden, und es kann abgeleitet werden, daß $\frac{\partial}{\partial z}(e^{-\alpha c^2 t}\psi(z,t))_{t=z/c} = f_m \cdot e^{-\alpha c z}$ ist, d. h. daß an der Front alle Wellen vom Index m in gleicher Weise verkleinert erscheinen, also dasselbe Verteilungsbild auftritt, das zur Zeit $t = 0$ auf dem Strahler $z = 0$ vorhanden ist. — Die Geschwindigkeit längs der z-Achse folgt als

$$\frac{\partial\psi_m}{\partial z} = \frac{f_m}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\exp\left(p\,t - c^{-1}\,z\cdot\sqrt{p^2 + s_m^2 c^2}\right)}{p - i\chi}\,dp.$$

Die Sattelpunkte dieses Integrals für reelles s_m liegen bei

$$t - d\gamma/dp = 0, \quad p_{1,2} = \pm i\,\theta\, s\, c/\sqrt{\theta^2 - 1} = \pm i\, y_0$$

mit $\gamma = \sqrt{(p/c)^2 + s^2}$, $\theta = c\,t/z$, $p = x + i\,y$, mit dem ein Naherungswert des Integrals bestimmt wird. In der Nahe der Wellenfront $\theta = 1$, $p_{1,2} \to \infty$ kann man durch eine Reihenentwicklung des Exponenten nach $1/p$ die Naherung $\frac{\partial\psi_m}{\partial z} \approx f_m J_0\left(s\,c\sqrt{2\frac{z}{c}\left(t - \frac{z}{c}\right)}\right)$ gewinnen. Es läuft ein stoßartiger Impuls mit der Wellenfront, der um so rascher verschwindet, je größer z/c, d. h. die Entfernung von der Quelle ist. Da die Sattelpunkte bei $dp/d\gamma = z/t$ liegen ($dp/d\gamma$ Gruppengeschwindigkeit), treffen in der Hauptsache am Ort z zur Zeit t Wellen derjenigen harmonischen Komponenten der Strahlungsquelle ein, deren Gruppengeschwindigkeit gleich z/t ist. Für θ nur wenig größer als 1, dicht hinter der Wellenfront, sind die Wellenamplituden sehr klein, ihre Frequenzen sehr hoch. Bei wachsenden θ, bei großerem Abstand von der Wellenfront wachsen die Amplituden langsam, und die Frequenz nimmt ab. Bei einem bestimmten Werte $\theta = \theta_s$ überschreitet der Verzweigungspunkt p_1 den Pol des Integrals $p = i\chi$. Es ist nunmehr das Residuum dieses Pols zu berücksichtigen, und die Amplitude erreicht jetzt schnell den stationären Wert. Wie schon von Brillouin gefunden [Ann. Phys., Leipzig **44**, Nr. 10 (1914)] definiert θ_s den Zeitpunkt des Eintreffens des Signals, dessen Geschwindigkeit c/θ_s beträgt. — Über den stationären Zustand lagern sich in diesem Stadium noch die Einschaltvorgänge, herrührend von $p_{1,2}$, so daß die Wellenamplituden auch größer werden können, als dem stationären Zustand entspricht. Der Zusammenhang von Signalgeschwindigkeit und der

Schwingungsfrequenz des Strahlers ergibt sich als

$$V_s = c\sqrt{1 - s^2 c^2/\omega^2} \text{ fur } \omega > s\,c, \qquad V_s = c\sqrt{1 - \omega^2/s^2 c^2} \text{ fur } \omega < s\,c,$$

wenn keine Dämpfung auftritt. Mit Dämpfung geht V_s für $w = s\,c$ nicht auf Null, sondern durchläuft ein Minimum. Der Fall $\omega < s\,c$ entspricht Wellentypen, die sich im Hohlleiter nicht ausbreiten, bei denen die Gruppengeschwindigkeit keinen Sinn hat. V_s gibt das Eintreten des stationären Zustands in diesem Fall an. Für $\omega > s\,c$ (sich ausbreitende Wellen) ist V_s bei geringer Dämpfung nur wenig von der Gruppengeschwindigkeit verschieden. Ohne Dämpfung fällt sie mit ihr zusammen. *W. O. Schumann.*

Eckart, Carl: Vortices and streams caused by sound waves. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **73**, 68—76 (1948).

Zur Erklärung des „Schallwinds", d. h. der Gleichströmungen, die in Schallfeldern hoher Intensität entstehen, leitet Verf. aus den Eulerschen und Navier-Stokesschen Grundgleichungen der Hydrodynamik Differentialgleichungen für die Schallvorgänge in höherer Näherung ab (im Anschluß an ältere Rechnungen von Rayleigh zum selben Gegenstand). Dabei zeigt sich, daß in reibungsfreien Medien keine Gleichströmungen als Folge einer Schallwelle entstehen können und zu deren Erklärung die Viskosität berücksichtigt werden muß. Ist die Schallschnelle $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_1$, als Summe sukzessiver Näherungen, dann genügt $\vec{u}_0$ der bekannten Wellengleichung für Schallwellen in viskosem Medium. Die Differentialgleichungen für $\vec{u}_1$ bringt Verf. auf eine übersichtliche Form durch Einführung von $D_1 = \operatorname{div} \vec{u}_1$ und $\vec{R}_1 = \operatorname{rot} \vec{u}_1$, wobei sich für $\vec{R}_1$ eine Diffusionsgleichung der Form

$$\partial \vec{R}_1/\partial t - \nu_0 \Delta \vec{R}_1 = -\vec{q} \quad (\nu_0 = \text{Koeffizient der kinematischen Zähigkeit})$$

ergibt, deren rechte Seite sich aus der ersten Näherung bestimmt und daher bekannt ist. Ist die erste Näherung bezüglich der Zeitabhängigkeit eine harmonische Schwingung, dann erweist sich $\vec{q}$ überdies als zeitlich konstant, und die stationäre Wirbelströmung ist bestimmt durch die Differentialgleichung $\nu_0 \Delta \vec{R}_1 = \vec{q}$. Dieses stationäre Diffusionsproblem für $\vec{R}_1$ löst Verf. für eine Flüssigkeit, die in ein zylindrisches Gefäß mit Radius r_0 eingeschlossen ist und von einem zylindrischen Schallwellenbündel vom Radius $r_1 < r_0$ achsial durchsetzt wird. Die Geschwindigkeitsverteilung der Gleichströmung wird angegeben. Besonders bemerkenswert ist, daß die Geschwindigkeit proportional zu einer Größe $b = \frac{4}{3} + \frac{\text{Volumviskosität}}{\text{Schubviskosität}}$ ist, womit sich eine Möglichkeit zur Bestimmung der Volumviskosität, einer erst in neuerer Zeit stärker beachteten zweiten Zähigkeitskonstanten, bietet.

Arnold Schoch.

Braumann, Hans: Mediumrückwirkung und akustische Strahlungsdämpfung für ein kreisförmiges Plättchen. Z. Naturforsch., Tübingen **3a**, 340—350 (1948).

In der aus dem Greenschen Satz folgenden quellenmäßigen Darstellung des Geschwindigkeitspotentials

$$\psi(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \iint \psi(\xi = +0, \eta, \zeta) \frac{e^{-ik\varrho}}{\varrho} d\eta\, d\zeta,$$

wo das Integral über die Fläche der Kreisscheibe (in der Ebene $x = 0$) zu erstrecken und $\varrho = (x^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2)^{\frac{1}{2}}$ ist, führt Verf. einen Näherungsansatz für $\psi(+0, \eta, \zeta)$ ein, den er so gewinnt: In dem Problem angepaßten rotationselliptischen Koordinaten σ, τ (die hier abweichend vom Üblichen so definiert sind, daß $\sigma = 1$ die Kreisscheibe darstellt) wird ψ in der separierten Form $\psi = S(\sigma)\, T(\tau)$ angesetzt. Für $S(\sigma)$ und $T(\tau)$ werden Potenzreihenansätze gemacht und deren Koeffizienten so bestimmt, daß den aus der Wellengleichung durch Separation folgenden zugehörigen Differentialgleichungen genügt wird, und die Randbedingung ($\partial\psi/\partial x =$ einem gegebenen Wert auf der Scheibe $\sigma = 1$) mit möglichst kleinem Fehler er-

füllt wird. Man erhält so für die Reaktionskraft des Mediums gerade die ersten Terme einer Reihenentwicklung nach dem Verhältnis Scheibenradius/Wellenlänge.

Arnold Schoch.

Riabouchinsky, D. P.: Hydraulic analogy of the motion and resistance of a compressible fluid as an aid to aeronautical research. Reissner Annivers. Vol., Contr. appl. Mech., Ann Arbor, Mich., 61—88 (1949).

Terracini, Cesare: Filtrazione dell'acqua al di sotto di uno sbarramento fluviale fondato su terreno permeabile. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. I **84**, 139—148 (1950).

Schleusner, A.: On a problem in the theory of earth pressure. Reissner Annivers. Vol., Contr. appl. Mech., Ann Arbor, Mich., 248—255 (1949).

Elektrodynamik:

Baudoux, Pierre: Note sur les courants superficiels. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. **36**, 340—347 (1950).

Für einen Oberflächenstrom wird ein Vektor $\mathfrak{j}$ der Belegungsdichte durch die Gleichung $\mathfrak{j} = \mathfrak{q}_F \times \mathfrak{v}$ definiert. Hierin bedeutet $\mathfrak{v}$ die vektorielle Geschwindigkeit, mit der sich die elektrische Ladungsdichte $q_F = |\mathfrak{q}_F|$ in der Oberfläche verschiebt, während der Vektor $\mathfrak{q}_F$ die Richtung der Flächennormale $\mathfrak{n}$ hat. Das zwischen A und B genommene Linienintegral von $\mathfrak{j} \cdot d\mathfrak{s}$ gibt dann die Größe des Oberflächenstroms zwischen diesen Punkten an. Die Kontinuitätsgleichung läßt sich im vorliegenden Falle in die Form der Gleichung $\mathfrak{n} \cdot \mathrm{rot}\, \mathfrak{j} + \partial q_F/\partial t = 0$ bringen. Ferner ist $\mathfrak{j}$ gleich dem Sprung der vektoriell genommenen Komponenten von $\mathfrak{H}$ in der Tangentialebene zur Oberfläche beim Durchgang durch diese Fläche. Schließlich wird noch gezeigt, daß sich in einem magnetisierten Körper die magnetische Polarisation ebenfalls auf einfache Weise durch den Vektor $\mathfrak{j}$ darstellen läßt.

Herbert Buchholz.

Estrin, Gerald: The effective permeability of an array of thin conducting disks. J. appl. Phys., Lancaster Pa. **21**, 667—670 (1950).

Eine dreidimensionale Anordnung von dünnen, leitenden Scheiben hat neuerdings besondere Anwendung gefunden als ein künstliches, brechendes Medium für UKW-Wellen. — Im ersten Teil der Arbeit wird die stationäre, zirkulare Strömung berechnet, die in einer dünnen, leitenden Kreisscheibe durch ein dazu senkrecht stehendes, pulsierendes Magnetfeld induziert wird, wobei die Annahme gemacht wird, daß die Wellenlänge groß ist gegenüber dem Scheibendurchmesser. Anfangs wird die Kreisscheibe als ein abgeplattetes Rotationsellipsoid aufgefaßt. Das innere und äußere Feld läßt sich in diesem Falle durch ein Hilfspotential darstellen, für das unter Zuhilfenahme der Differentialgleichung und der Grenzbedingungen die lösenden Reihenentwicklungen aufgestellt werden. Zu den Grenzbedingungen zählt u. a. die Forderung, daß die Ausdrücke für die Feldvektoren überall beschränkt sind und daß in großer Entfernung das Magnetfeld der induzierten Strömung verschwinden muß. Geht man danach zum Grenzfall der unendlich dünnen, vollkommen leitenden Kreisscheibe über, so ergibt sich für die induzierte Strömung in azimutaler Richtung der einfache Ausdruck $i_\varphi = -4\, H_a \cdot r/\pi\, (a^2 - r^2)^{1/2}$, worin H_a das äußere Feld, a der Radius der Kreisscheibe und $r \leq a$ die Entfernung des in der Scheibenebene liegenden Aufpunktes vom Mittelpunkt bedeutet. — Hinsichtlich der felderzeugenden Wirkung verhält sich die Strömung in der Scheibe wie ein magnetischer Dipol mit dem Moment $m = -(8/3)\, a^3\, H_a$. Ist die Zahl N der Scheiben in der dreidimensionalen Anordnung genügend klein, um die Vernachlässigung der gegenseitigen Beeinflussung zu rechtfertigen, so ist die Magnetisierung des zusammengesetzten Mediums $\mathfrak{M} = N\, m$, seine relative Permeabilität $k_m = 1 - 8\, N\, a^3/3$. Das Medium verhält sich also diamagnetisch. Da bei einem parallel zu den Scheiben einfallenden Magnetfeld keinerlei Ströme induziert werden, so ist in diesem Falle die relative scheinbare Permeabilität gleich 1. Das Medium ist also magnetisch anisotrop mit $\mu_1 \neq \mu_2 = \mu_3 = \mu_0$. Die elektrische Anisotropie des besprochenen Scheibengitters ist aus älteren Untersuchungen her bekannt. Die Wirkung eines derart zusammengesetzten Mediums auf eine schief auffallende elektromagnetische Welle läßt sich damit auch quantitativ bestimmen.

Herbert Buchholz.

Kelleher, K. S.: Relations concerning wave fronts and reflectors. J. appl. Phys., Lancaster Pa. **21**, 573—576 (1950).

Beim Arbeiten mit UKW-Antennen ist es oft erwünscht, die Charakteristiken

ihrer Wellenfläche zu kennen. Man kann sich darüber in einigen Fällen Kenntnis verschaffen mittels der Methoden der geometrischen Optik, indem man die Bahnen einiger besonderer Strahlen genauer verfolgt. In der vorliegenden Arbeit wird das folgende Problem gelöst: Von den drei Flächen, 1. der Fläche der einfallenden Welle, 2. der Fläche der reflektierten Welle und 3. der Oberfläche des Reflektors, sind zwei gegeben. Es ist der Verlauf der dritten zu finden. Ausführlicher werden z. B. behandelt die beiden Fälle: Es sind 1. und 3. oder 1. und 2. gegeben. Ferner wird u. a. die Aufgabe durchgerechnet, für eine gegebene Wellenfläche die Abweichung von einer ebenen Fläche zu ermitteln. Als letztes Beispiel wird die interessante Aufgabe gelöst, einen Reflektor zu finden, der eine willkürliche Wellenfläche bei einer einfallenden Welle in eine ebene Wellenfläche umwandelt. — Die vom Verf. benutzte Vektor-Symbolik für die Angabe der Wellenfläche geht auf W. Blaschke zurück. *Herbert Buchholz.*

Keller, Joseph B.: Reflection and transmission of electromagnetic waves by thin curved shells. J. appl. Phys., Lancaster Pa. **21**, 896—901 (1950).

Es wird die Streuung untersucht, die ein beliebiges elektromagnetisches Feld an einem leitenden oder nichtleitenden Hindernis erfährt. Die Differentialgleichungen und die Grenzbedingungen, die das Feld befriedigen muß, werden in ein Paar inhomogener linearer Integro-Differentialgleichungen für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ transformiert. Ist das Hindernis eine dünne Schale mit der konstanten Dicke h, so läßt sich die Lösung dieser Gleichungen in Form einer Potenzreihe in h angeben. Der niedrigste Term in der Entwicklung stellt die einfallende Welle dar. Das nächst höhere Entwicklungsglied hat die Form eines Oberflächenintegrals. Dieses Integral wird angenähert nach der Methode der stationären Phase ausgewertet. Die physikalische Aussage der Lösung wird im einzelnen besprochen, und es zeigt sich dabei, daß die gewonnenen Ergebnisse in befriedigender Weise vor allem auch mit den auf anderen Wegen gefundenen Resultaten übereinstimmen. *Herbert Buchholz.*

Severin, Hans: Der Schlitzstrahler, ein magnetischer Dipol für Zentimeterwellen. Z. Phys., Berlin **128**, 108—119 (1950).

An Hand einfacher physikalischer Überlegungen wird verständlich gemacht, daß die zur Abstrahlung von Zentimeterwellen gebräuchlichen Schlitzantennen dem Charakter der von ihr ausgesandten Strahlung nach sich wie magnetische Dipole verhalten. Ihre Wirkungsweise läßt sich am einfachsten mit Hilfe der Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an einer kleinen Öffnung in einem vollkommen leitenden Schirm verstehen. Die auf Grund dieser Vorstellung entwickelten Rechnungen zeigen mit den Messungen eine gute Übereinstimmung, solange die Schlitzlänge kleiner als $\lambda/3$ ist. *Herbert Buchholz.*

Rhodes, D. R.: Theory of axially slitted circular and elliptic cylinder antennas. J. appl. Phys., Lancaster Pa. **21**, 1181—1188 (1950).

Die Arbeit untersucht die Beugung, die eine ebene, einfarbige elektromagnetische Welle beliebiger Richtung und Polarisation an einem unbegrenzt langen, vollkommen leitenden Zylinder von kreisförmigem oder elliptischem Querschnitt erfährt, wenn dessen Mantelfläche parallel zur Zylinderachse an einer oder zwei Stellen aufgeschlitzt ist. Was die Anordnung der Schlitze betrifft, so werden nur die beiden Fälle betrachtet, daß entweder nur ein Schlitz vorhanden ist, der von der Achse aus unter dem Winkel $2\varphi_0$ erscheint, oder aber, daß zwei gleich große, einander gegenüberliegende Schlitze mit diesem Öffnungswinkel vorgesehen sind. — Bei beliebiger Polarisation der einfallenden Welle müssen im allgemeinen für die Beschreibung des Wellenfeldes sowohl der Hertzsche als auch der Fitzgerald-Vektor benutzt werden. Zerlegt man jedoch die einfallende Welle in zwei Komponenten, von denen die eine in der Einfallsebene, die andere dazu senkrecht steht, so lassen sich die Beugungsfelder beider Wellenanteile unabhängig voneinander durch je einen dieser beiden Hilfsvektoren beschreiben. Im vorliegenden Falle haben beide Vektoren nur eine einzige von Null verschiedene Komponente in Richtung der Zylinderachse, die der Wellengleichung genügen muß. — Es ist danach nicht schwierig, einen formalen Lösungsansatz für das Innere und Äußere des Zylinders aufzustellen. Die Berücksichtigung der Grenzbedingungen führt schließlich auf ein System von unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Verf. löst es näherungsweise nach dem von

Sommerfeld im Band 6 seiner Vorlesungen beschriebenen Verfahren auf, wobei er sich im wesentlichen auf den Fall sehr schmaler Schlitze mit kleinen Werten von φ_0 beschränkt. Diese Annahme verwassert freilich die physikalische Aussage der Lösung stark. Sie läßt aber doch so viel erkennen, daß bei gewissen kritischen Einfallswinkeln im Innern des Zylinders TE- oder TM-Wellen großerer Amplitude durch eine Art Resonanzeffekt auftreten konnen. — Zum Schluß wird dasselbe Verfahren auf geschlitzte Zylinder von elliptischem Querschnitt ausgedehnt.
Herbert Buchholz.

Ledinegg, E. und P. Urban: Zur Theorie der Koppelschwingungen elektromagnetischer Hohlräume. Acta phys. Austriaca **2**, 198—213 (1948).

Verff. befassen sich mit zwei Hohlräumen, welche durch einen dritten Hohlraum elektromagnetisch gekoppelt sind. Alle Hohlräume werden verlustfrei angenommen. Im ungestörten Zustand (Wechselwirkung = Null) sollen die Resonatoren mindestens eine gemeinsame Eigenfrequenz aufweisen. Es zeigt sich, daß die Koppelfrequenzen einer Säkulardeterminante genügen, deren Glieder Energieterme darstellen, welche durch die einzelnen Elemente des Hohlraumresonatorsystems bestimmt sind. Diese lassen sich berechnen. Die allgemeinen Überlegungen werden am Beispiel zweier konzentrischer Koaxialleitungen mit koaxialer Koppelleitung illustriert. Zum Schluß werden die Koppelfrequenzen zweier quasi-stationärer Schwingungskreise berechnet, welche mittels eines Zwischenkreises gekoppelt sind.
Max Strutt.

Ruch, Ernst: Der Einfluß einer Blende in Rohren auf das Feld einer einfallenden elektromagnetischen Welle. Ann. Phys., Leipzig, VI. F. **7**, 248—272 (1950).

Die Arbeit greift erneut das in den letzten Jahren von verschiedenen Seiten behandelte Problem an, nach welchen Gesetzen eine durch einen Hohlleiter laufende Welle an einer senkrecht zur Rohrwandung angebrachten ebenen Blende reflektiert und gebrochen wird. Die hier vorgetragene Lösung stützt sich auf den Satz, daß auch die allgemeinste Hohlleiterwelle sich stets durch Überlagerung endlich oder unendlich vieler Eigenwellen des Rohrs vom TE- oder TM-Wellentypus muß darstellen lassen. Wird also die Anregung des Vorganges durch eine einzelne auf die Blende zulaufende Eigenwelle des Rohrs bewirkt, so wird sich sowohl der reflektierte als auch der hindurchgelassene Wellenzug hinter der Blende im allgemeinsten Falle aus unendlich vielen Eigenwellen des Rohrs zusammensetzen, die sowohl dem TE- als auch dem TM-Wellentypus angehören können. Selbstverständlich sind zunächst die Amplituden dieser unendlich vielen Teilwellen unbekannt. Für diese unbekannten Amplituden läßt sich aber aus den Grenzbedingungen, die für die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in der Blendenebene gelten, ein System von demgemäß ebenfalls unendlich vielen Gleichungen aufstellen. Die Schwierigkeit dieses Lösungsverfahrens besteht in der Hauptsache in der Auflösung dieses unendlichen Gleichungssystems. Im vorliegenden Falle gelingt es dem Verf., zu diesem Gleichungssystem die reziproke Matrix zu konstruieren und damit die Lösung explizite anzugeben. — Für den Fall eines rechteckigen Hohlleiters und einer schlitzförmigen Blende wird eine näherungsweise numerische Rechnung durchgeführt, und zwar unter der Voraussetzung, daß die Anregung durch eine TE-Welle erfolgt.
Herbert Buchholz.

Schorr, Marvin G. and Fred J. Beck jr.: Electromagnetic field of the conical horn. J. appl. Phys., Lancaster Pa. **21**, 795—801 (1950).

Es wird in der Arbeit die radial nach außen erfolgende Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im hohlen Innern eines unendlich langen, kegelförmigen Horns mit vollkommen leitender Wandung untersucht. Als Bezugssystem dient ein Kugelkoordinatensystem, dessen Pol in der Kegelspitze liegt und dessen z-Achse mit der Kegelachse zusammenfällt. Die Beziehungen für die Feldkomponenten der beiden Wellentypen werden sogleich für den allgemeinsten Fall angegeben, in dem die Konfiguration der Wellen auch von der Koordinate φ abhängt. Die Abhängigkeit der Wellenamplituden von einer bestimmten Art der Erregung der

Wellen wird rechnerisch nicht zu erfassen versucht. Statt dessen wird eine mehr auf physikalischen Erwägungen beruhende Abschätzung darüber gebracht, wie sich die Speisung des Horns durch einen in der Kegelspitze einmündenden zylindrischen Hohlleiter mit einer TE_{11}-Welle auf das Zustandekommen der verschiedenen Wellentypen im Horn auswirken würde. — Im 2. Teil der Arbeit werden die Beziehungen für die Abstrahlung der elektromagnetischen Wellen von der Mündung eines endlich langen Kegelhorns aufgestellt, wie sie sich auf Grund darüber bestehender allgemeiner Formeln zunächst in Gestalt von Doppelintegralen ergeben. Wie üblich wird dabei angenommen, daß die Feldverteilung in der gedachten, das Horn gegen den Außenraum abgrenzenden Kugelkappe der vordem berechneten idealen Feldverteilung im Innern eines unendlich langen Horns entspricht. Die auftretenden Integrale werden für Horne von kleinem Öffnungswinkel mit mäßiger Länge in Reihen entwickelt und die Ergebnisse mit den Experimenten verglichen. *Herbert Buchholz.*

Graffi, Dario: Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche in un tubo curvo. Mem. Acad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., X. S. **5**, 23—26 (1949).

Verf. untersucht allgemein die Frage, welche Art elektromagnetischer Wellen sich in einem zu einem Torus zusammengebogenen Hohlleiter ausbreiten können. Bezeichnen r, θ und y die Zylinderkoordinaten mit y als Rotationsachse, so wird in leichter Verallgemeinerung gegenüber älteren Arbeiten angenommen, daß die Querschnittskanten des Hohlleiters in der Mantelebene (y, r) zwischen den Werten $r = a$ und $r = b > a$ gemäß den Gleichungen $y = \alpha(r)$ und $y = \beta(r)$ verlaufen. Der Querschnitt hat also nicht einfach rechteckige Gestalt. — Aus den Differentialgleichungen, die nach der Theorie Maxwells zwischen den sechs Feldkomponenten bestehen, läßt sich dann z. B. nachweisen, daß in einem solchen Hohlleiter eine Welle des magnetischen Typus, d. h. eine Welle, für die im ganzen Hohlleiter durchweg $E_\theta = 0$ wäre, nicht für sich allein bestehen kann. *Herbert Buchholz.*

Rinow, Willi: Über eine Anwendung der Störungsrechnung auf das Problem der gekrümmten Leitung. Math. Nachr., Berlin **3**, 176—192 (1950).

Die Arbeit behandelt die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen in kreisbogenförmig gekrümmten Leitungen, deren Querschnitt beliebige, aber im übrigen gleichbleibende Gestalt hat. Es wird die Methode der Störungsrechnung angewendet mit dem reziproken Krümmungsradius $1/R$ als Störungsparameter. Die Lösung besteht also letzten Endes in einer Reihenentwicklung nach zunehmenden Potenzen von $1/R$. Durch eine geeignete Wahl des Koordinatensystems wird erreicht, daß der Störungsparameter in die Koeffizienten der Wellengleichung quadratisch und in die Randbedingungen linear eingeht. Der nach Potenzen von $1/R$ fortschreitende Lösungsansatz führt auf ein rekursives System von inhomogenen, linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, das sich sukzessive auflösen läßt. Das Feld in der gekrümmten Leitung stellt sich als eine unendliche Folge von Eigenfeldern mit ihren zugehörigen Eigenwerten dar. Besondere Beachtung verlangt der Fall der Entartung. — Im zweiten Abschnitt der Arbeit wird die Aufgabe des Zusammenschlusses zweier gerader Leitungen durch ein gekrümmtes Leitungsstück betrachtet, wobei wiederum die Querschnitte aller Leitungsteile beliebig, aber gleichartig gestaltet sind. Das allgemeine Feld in einer solchen Leitung läßt sich durch Superposition der Eigenfelder darstellen. Hinsichtlich der Anregung wird angenommen, daß an dem einen Ende der Leitung eine Welle von vorgegebenem Typus hineinläuft, das andere Ende aber über ihren Wellenwiderstand reflexionsfrei abgeschlossen ist. Die Amplituden der Eigenfelder ergeben sich unter dieser Annahme und aus den Stetigkeitsforderungen an den Übergangsstellen aus einem System von unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Auch dieses Gleichungssystem kann durch einen Potenzreihenansatz nach $1/R$ sukzessive gelöst werden. Auf diese Weise würde dann sogar das Reflexionsverhältnis berechnet werden können. Für den einfachsten Fall der Grundwelle einer Doppelleitung werden die ersten Berechnungsschritte explizite durchgeführt. — Der dritte und letzte Abschnitt bringt die Anwendung der allgemeinen Theorie auf eine wie oben zusammengesetzte konzentrische Leitung. Die numerische Auswertung des Reflexionsverhältnisses, das in der Arbeit nicht gebracht wird, führt auf einen wider Erwarten kleinen Wert von 10^{-3}, wenn das Verhältnis des Außenradius zum Krümmungsradius kleiner als $1/5$ bleibt. — Konvergenzbetrachtungen werden an den aufgestellten Reihen nicht angestellt. *Herbert Buchholz.*

Kuznecov, P. I.: Ausbreitung elektromagnetischer Wellen längs zweier paralleler einfacher, geradliniger Leiter. Priklad. Mat. Mech., Moskva **12**, 141—148 (1948) [Russisch].

Tomiyasu, K.: Unbalanced terminations on a shielded-pair line. J. appl. Phys,. Lancaster Pa. **21**, 552—556 (1950).

Wenn ein Lecher-System, sei es abgeschirmt oder nicht, an seinem einen Ende unsymmetrisch belastet ist, so treten in ihm im allgemeinen sowohl Gleichtakt- als auch Gegentaktwellen auf. Bei jedem dieser beiden Wellentypen kann außerdem in der Regel zwischen einer einfallenden und einer reflektierten Welle unterschieden werden. Die Arbeit zeigt, wie z. B. aus den Messungen des Spannungsverhältnisses der stehenden Wellen die Reflexionskoeffizienten der Gleich- und Gegentaktwellen auf den beiden Leitungssträngen berechnet werden können. *Herbert Buchholz.*

Goubau, Georg: Surface waves and their application to transmission lines. J. appl. Phys., Lancaster Pa. **21**, 1119—1128 (1950).

Die Arbeit behandelt zwei besondere Fälle der in radialer Richtung nichtstrahlenden Oberflächenwellen, wie sie sich bei geeigneter Erregung längs eines einzelnen unbegrenzt langen zylindrischen Leiters ausbreiten können. Der erste Fall ist identisch mit der bekannten Sommerfeldschen Drahtwelle, deren Gesetzmäßigkeiten hier noch einmal aufgestellt und nach besonderen Gesichtspunkten diskutiert werden, um damit auf den zweiten Fall vorzubereiten. Von den an sich bekannten Tatsachen, die für solche Drahtwellen gelten, werden hervorgehoben: Für ihre Existenz ist erforderlich, daß der Leiter eine nur endliche Leitfähigkeit $\varkappa$ besitzt, da sich für $\varkappa \to \infty$ die von der Welle durch jeden endlichen, den Draht umgebenden Querschnitt hindurchbeförderte Leistung bei endlicher Sendeleistung dem Werte Null nähert. Da ferner das elektromagnetische Feld der Welle in radialer Richtung nur relativ langsam an Stärke abnimmt, so ist es sehr schwer, solche Wellen an zylindrischen Leitern zu erregen. Für ihre praktische Anwendung spricht andererseits die nur geringe Dämpfung, die diese Wellen bei der Fortpflanzung längs des Drahtes erfahren. — Das Aufbringen der Wellen würde erleichtert werden, wenn es gelänge, die Energiedichte des Wellenfeldes in der unmittelbaren Umgebung des Drahtes zu vergrößern. Um diese Möglichkeit nachzuprüfen, untersucht Verf. im zweiten Falle die Ausbreitung einer Welle längs eines einzelnen zylindrischen Leiters, wenn er z. B. außerdem noch einen dielektrischen Mantel trägt. Hierin liegt im wesentlichen die Erweiterung gegenüber der Sommerfeldschen Arbeit. Es zeigt sich, daß durch diese Maßnahme in der Tat die seitliche Ausbreitung des Feldes wirksam verändert werden kann. Schließlich wird noch eine Beziehung für die Dämpfung aufgestellt, die die Wellen beim Entlanggleiten an derart behandelten Drähten erfahren. Die durchgeführten Experimente haben die theoretischen Untersuchungen in befriedigender Weise bestätigt. *Herbert Buchholz.*

Pignedoli, Antonio: Sul problema delle aurore polari. Moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico e in prossimità di uno dei poli, essendo l'altro polo molto lontano. Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena **1**, 17—49 (1947).

Verf. befaßt sich mit der Bewegung eines elektrisch geladenen Partikels in der Umgebung eines Poles eines magnetischen Dipols, wobei der andere Pol sehr weit entfernt ist. Er geht von den Bewegungsgleichungen aus und schreibt diese in der Lagrangeform an. Diese Bewegungsgleichungen werden in einer Reihe von Partikularfällen integriert. Es handelt sich darum, die Bewegungsstörung durch den zweiten Magnetpol angenähert zu bestimmen. Diese Bestimmung kann mit Hilfe von Quadraturen erfolgen. *Max Strutt.*

Zeuli, Tino: Condizioni per l'esistenza di un integrale analogo a quello delle aree nel problema del moto di un corpuscolo elettrizzato in un campo elettrico e in un campo magnetico qualsiansi sovrapposti. Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena **2**, 20—36 (1948).

Verf. befaßt sich mit der Frage, unter welchen Bedingungen ein Bewegungsintegral existiert bei der Bewegung eines elektrisch geladenen Partikels in einem elektrischen Felde, dem ein magnetisches Feld superponiert ist. Verf. bedient sich bei der Behandlung dieser Aufgabe der Vektorschreibweise. Er führt ein System von orthogonalen krummlinigen Koordinaten ein und schreibt die Bewegungsgleichungen in einem solchen System an. Er erhält in einigen Sonderfällen Lösungen der angestrebten Art. *Max Strutt.*

Ivanović, Dragiša M.: Über die Bewegungsgleichungen geladener Teilchen im elektromagnetischen Felde. Vesnik Društva Mat. Fiz. Srbije **1**, Nr. 3/4, 59—72 und deutsche Zusammenfassg. 72 (1949) [Serbisch].

Verf. gibt eine Übersicht der Grundgleichungen der Bewegung geladener Teilchen im elektromagnetischen Felde. Die Lösungen der Gleichungen in allgemeinen und in speziellen Fällen werden nur für Teilchen rein korpuskularer Natur gegeben. Um auf dieses Problem die Lagrangeschen Gleichungen anzuwenden, ist es notwendig, die Lagrange-Funktion zu finden, um aus ihr den Ausdruck für die Lorentz-Kraft zu bestimmen, und nicht umgekehrt. In dem Artikel wird die Lagrange-Funktion aus dem Ausdruck für die Energie abgeleitet, wobei auch das Variationsprinzip zur Anwendung kommt. Die Lagrangeschen Gleichungen werden aus dem Satz über die Erhaltung der Energie abgeleitet, unter Anwendung des Eulerschen Satzes über homogene Funktionen. Der Operator für die Lorentz-Kraft wird gewöhnlich durch skalare Operationen abgeleitet. Hier wird er durch Anwendung von vektoriellen Methoden allein bestimmt. (Autoreferat.)

Relativitätstheorie:

Straus, E. G.: Some results in Einstein's unified field theory. Rev. modern Phys., New York **21**, 414—420 (1949).

Der 1. Teil der Arbeit handelt von der Darstellung der Lösung der Gleichungen $g_{ik;l} = 0$, wo g_{ik} der Hermitesche Fundamentaltensor der neuen Einsteinschen Theorie ist, durch die Komponenten Γ^l_{ik} des Hermiteschen Affinzusammenhangs. — Der 2. Teil diskutiert kurz die strengere Bedingung $R^i{}_{klm} = 0$, die in dieser nicht-Riemannschen Geometrie nicht den ebenen Fall charakterisiert. Der 3. und 4. Teil sind dem Problem der Existenz regulärer Lösungen der Feldgleichungen gewidmet. Es scheint, als seien die Feldgleichungen allein noch nicht hinreichend einschränkend, um Lösungen ohne physikalische Bedeutung auszuschließen. Wenn sie aber ergänzt werden durch Bedingungen „im Großen", so scheint die Forderung der Regularität die natürlichste zu sein. Ein wichtiges negatives Resultat lautet: Ein Massenpartikel kann nicht durch eine überall reguläre statische Lösung dargestellt werden. Ebenso gilt, daß keine nicht-triviale, statische und zentralsymmetrische Lösung existiert, die asymptotisch eben ist. *Otto Heckmann.*

Narlikar, V. V. and Ramji Tiwari: A particular case in Einstein's generalized theory of gravitation. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **76**, 868—869 (1949).

Es wird ein spezielles Hermitesches Feld g_{ij} als Lösung der Feldgleichungen der neuen Einsteinschen Gravitationstheorie angegeben, das in das isotrope Gravitationsfeld einer Punktmasse der alten Einsteinschen Gravitationstheorie ausartet, falls das elektromagnetische Feld ausgeschaltet wird, und das in das Feld einer homogenen monochromatischen Welle übergeht, wenn das Gravitationsfeld beseitigt wird. *Otto Heckmann.*

Moshinsky, Marcos: On the interactions of Birkhoff's gravitational field with the electromagnetic and pair fields. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **80**, 514—519 (1950).

Im Rahmen der Birkhoffschen Gravitationstheorie wird die Wechselwirkung eines schwachen Schwerefeldes mit elektromagnetischen Feldern und mit Paarfeldern untersucht mittels geeignet gewählter Lagrangefunktionen. Insbesondere werden die elektromagnetischen Feldgleichungen im Äußeren einer kugelsymmetrischen Masse studiert. Das Schwerefeld wirkt dann auf Lichtstrahlen wie eine inhomogene Materieverteilung. Die Lichtablenkung ergibt den gleichen Wert wie in der allgemeinen Relativitätstheorie. Analog wird ein Wasserstoff-Atom im Schwerefeld studiert. Die Rotverschiebung wird identisch mit derjenigen der allgemeinen Relativitätstheorie. *Otto Heckmann.*

Scherrer, W.: Über den Einfluß des metrischen Feldes auf ein skalares Materiefeld. II. Helvetica phys. Acta **23**, 547—555 (1950).

In einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **34**, 275) wird ein erweitertes Beispiel durchgerechnet, das im wesentlichen dieselben Eigenschaften wie das schon in der ersten Arbeit erläuterte Beispiel zeigt. *Günter Ludwig* (Berlin).