Werk

Titel: Klassische theoretische Physik

Ort: Berlin

Jahr: 1951

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0038|log10

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

schlossen). Im Anschluß an Heawood ordnet Verf. jeder Kante eine Variable x_r zu, faßt für jedes Land die seinen Grenzkanten zugeordneten Variabeln in eine Kongruenz $x_u + x_v + x_w \equiv 1 \pmod 2$ zusammen und vereinigt diese zu einem System (S). Hat (S) 2 verschiedene ganzzahlige Lösungen $(x_1', x_2', \ldots, x_k')$, $(x_1'', x_2'', \ldots, x_k'')$, für welche noch gilt $x_r' x_r'' \equiv 0 \pmod 2$, so kann man die Kanten derart in drei Klassen einteilen, daß in jeder eine Grenzkante eines jeden Landes liegt, was bekanntlich die Gültigkeit des Vierfarbensatzes für die durch G erzeugte Karte nach sich zieht. Die Bedingungen sind auch notwendig. Der Beweis gelingt mühelos durch die Aufstellung der Klasseneinteilung auf Grund der Kongruenzen (gerade — ungerade) und umgekehrt. *Baebler* (Zürich).

Medgyessy, P.: Über nichtprimitive reguläre Graphen dritten Grades. Publ. Math., Debrecen **1**, 183—185 (1950).

Verf. betrachtet unter den zusammenhängenden, regulären, kubischen Graphen (einschließlich solcher mit Schlingen) die nicht primitiven G, d. h. diejenigen, welche in einen Faktor 2. Ordnung (blau gefärbt) und einen 1. Ordnung (rot) zerlegt werden können, und beweist, daß es bezüglich jeder Zerlegung in mindestens einer Weise möglich ist, die Knotenpunkte A_r derart in einer Reihe $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}$ zu ordnen, wobei jeder genau zweimal auftritt, daß G im Sinne dieser Reihenfolge, abwechselnd auf roten und blauen Kanten völlig durchlaufen werden kann. Jede blaue Kante wird ein-, jede rote zweimal durchlaufen. Beweisverfahren: Vollständige Induktion. Existiert eine Zerlegung und eine ihr zugeordnete Reihenfolge, so daß jede rote Kante beide Male im selben Sinn durchlaufen wird, so kann der Graph in 3 Faktoren erster Ordnung zerlegt werden. Die ihm entsprechende Landkarte läßt sich mit vier Farben färben. *Baebler* (Zürich).

Medgyessy, Paul: Sur la structure des réseaux finis, cubiques et coloriés. Mathesis **59**, 173—176 (1950).

Ein regulärer kubischer Graph G heißt mit drei Farben gefärbt, wenn in keine Ecke Kanten mit derselben Farbe münden. Adjunktion einer Kante nennt Verf. das Verbinden von 2 verschiedenen inneren Punkten von einer oder zwei Kanten; als Fundamentalgraphen G_0 bezeichnet er denjenigen mit zwei Ecken. „Jeder färbbare endliche kubische Graph kann aus G_0 durch endlich viele aufeinanderfolgende Adjunktionen einer Kante erzeugt werden". Der Beweis beruht auf zwei Hilfssätzen: 1. Man kann die Färbung so wählen, daß es eine Kante mit der Farbe 3 gibt, welche zwei Ecken eines Kreises verbindet, dessen Kanten abwechselnd die Farben 1 und 2 tragen und (Folgerung) 2. Man kann jeden gefärbten Graphen $\neq G_0$ aus einem anderen, ebenfalls gefärbten durch Adjunktion einer Kante gewinnen. Je zwei Kanten dürfen keine inneren Punkte gemein haben. Wesentliches Beweismittel ist die Tatsache, daß G ein Vieleck mit höchstens fünf Seiten enthält. *Baebler* (Zürich).

Klassische theoretische Physik.

Elastizität. Plastizität:

Truesdell, O.: On the reliability of the membrane theory of shells of revolution. Bull. Amer. math. Soc. **54**, 994—1008 (1948).

Nach verschiedenen kritischen Bemerkungen über die Verläßlichkeit der Membrantheorie axialsymmetrischer Schalen gelangt Verf. mit Hilfe einer von ihm und P. Neményi ausgearbeiteten Methode zum folgenden Ergebnis. Ist die Schale offen oder hat sie in der Apex einen Nabelpunkt, so verursacht eine kleine Änderung in der Meridiankurve eine kleine Störung der Spannungsresultanten. Hat aber die geschlossene Schale in der Apex eine Spitze, so erzeugt eine beliebig kleine Änderung der Meridiankurve beträchtliche Störungen in der ganzen Schale. — Zu diesen Er-

gebnissen gelangt Verf. durch Abschätzung der Variationen der Lösungen einer linearen Differentialgleichung, deren Koeffizienten variiert werden. Am Ende bespricht Verf. verschiedene Ansätze, die geeignet zu sein scheinen, um mit Hilfe der Membrantheorie eine bessere Annäherung an die dreidimensionale Elastizitätstheorie zu erreichen. *E. Egerváry* (Budapest).

Položij, G. N.: Eine neue Methode zur Lösung einiger gemischter Aufgaben der ebenen Elastizitätstheorie. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **66**, 177—180 (1949) [Russisch].

Als gemischte Aufgaben der Elastizitätstheorie werden solche bezeichnet, in denen auf der Begrenzung die normal zur Grenze gerichtete Verschiebung und die tangentiale Spannung gegeben sind. Die Begrenzung selbst soll sich aus einer endlichen Anzahl von Linienstücken mit Eckpunkten und stetiger Krümmung zusammensetzen. Die Methode zur Lösung derartiger Aufgaben ist von Muschelišvili für solche Gebiete angegeben worden, die sich mit Hilfe einer rationalen Funktion konform auf einen Kreis abbilden lassen. In der vorliegenden Arbeit wird die Lösung dieser Aufgabe durch Erweiterung dieser Methode für ein Rechteck angegeben und zwar mit Hilfe von neuen Formeln, die vom Verf. angegeben wurden. *Th. Pöschl.*

Položij, G. N.: Über eine Methode zur Lösung einiger gemischter Aufgaben aus der Theorie der dünnen Platten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **66**, 353—356 (1949) [Russisch].

In weiterer Ausgestaltung der im vorhergehenden Referat genannten Arbeiten handelt es sich um die Bestimmung der Durchbiegungen und der Biege- und Torsionsspannungen in dünnen Platten, deren Begrenzung aus geraden Linienstücken zusammengesetzt ist, längs denen teils die Durchbiegung und teils die Biegemomente gegeben sind. Nach dem Verfahren von Muschelišvili u. a. wird die Lösung durch zwei Funktionen eines komplexen Arguments dargestellt und für den Fall der rechteckigen Platte mit frei aufliegenden Rändern allgemein durchgeführt. Eine explizite Darstellung der Lösung wird nicht gegeben. *Th. Pöschl* (Karlsruhe).

Guzman, Arturo M. und Cesar J. Luisoni: Neue Lösungen für einige spezielle Belastungszustände ebener Platten. Univ. nac. La Plata, Publ. Fac. Ci. fisicomat., Rev. **4**, 268—287 (1949) [Spanisch].

The variational method of Galerkin in its general form leads to an orthogonal condition between the error function and each of the partial solutions in which the function expands. Nevertheless there are cases as for example concentrated or partial loads in rectangular plates where it is impossible to apply the orthogonal condition. The authors analyze these cases and show with a simple energetic consideration that a solution can be obtained without the aforementioned condition. (Autoreferat.)

Prokopov, V. K.: Gleichgewicht eines elastischen, axialsymmetrischen, belasteten, dickwandigen Zylinders. Priklad. Mat. Mech., Moskva **13**, 135—144 (1949) [Russisch].

Die Ermittlung des Spannungs- und Verformungszustandes eines elastischen, achsensymmetrischen, hohlen, dickwandigen Kreiszylinders von endlicher Länge wird mittels der von A. E. H. Love eingeführten Spannungsfunktion ψ, die der Bipotentialgleichung in Zylinderkoordinaten $\Delta\Delta\psi = 0$ genügt, durchgeführt. Die Lösung wird in Form von Doppelreihen nach trigonometrischen und Besselschen Funktionen von komplexen Argumenten eingeführt, deren Koeffizienten durch die Randbedingungen festgelegt werden. Die angegebene Lösungsform gibt die Möglichkeit, Lösungen zu betrachten, bei denen die zylindrischen Seitenflächen von Spannungen frei sind, und den Einfluß der Stirnseiten bei nicht sehr dickwandigen Zylindern zu berücksichtigen, wobei der Verf. Näherungslösungen durch Entwicklung nach einem Parameter verwendet. Als Beispiel wird ein dickwandiger Hohlzylinder betrachtet, dessen Enden mit zwei starren Platten fest verbunden ist. *Th. Pöschl.*

Reissner, H. J. and G. J. Wennagel: Torsion of noncylindrical shafts of circular cross section. J. appl. Mech., New. York **17**, 275—282 (1950).

Behandelt wird die Torsion nichtzylindrischer Stäbe von kreisförmigem Querschnitt, also von Rotationskörpern. Der erstmalig von A. Föppl und J. H. Michell eingeschlagene Weg, das Verdrillungsproblem zu lösen, bestand in der Integration einer partiellen Differentialgleichung für die Kreisdeformation (circumferential displacement) bei gleichzeitiger Berücksichtigung der Oberflächenbedingungen (Freiheit der Oberfläche von Schubspannungen). Da er nicht auf geschlossene Ausdrücke elementarer Funktionen führt, mußte mit Reihenentwicklungen bzw. mit Näherungsverfahren gearbeitet werden. In vorliegender Arbeit wird nun ein — wenigstens teilweise — umgekehrter Weg (nach dem Vorbild von St. Venant) eingeschlagen: Von den Lösungen der Differentialgleichung für das elastische Gleichgewicht werden jene herausgegriffen, die auf besonders einfache Oberflächenbedingungen führen, d. h. es werden Rotationsflächen aufgesucht, für die das Verdrillungsproblem einfach ist und die Darstellung der Spannungen und Verschiebungen durch geschlossene Ausdrücke zuläßt. Da die Untersuchung dieser Rotationsflächen auf erhebliche mathematische Schwierigkeiten stößt, wird auf sie verzichtet. *Hardtwig.*

Klitchieff, J. M.: Über die Verdrehung eines Rohres mit rechteckigem Querschnitt. Publ. Inst. math., Acad. Serbe Sci. A **1**, 58—61 (1947) [Russisch].

In der Arbeit wird die Torsion solcher Rohre untersucht, deren Querschnitt außen durch ein Quadrat und innen durch eine Linie der Hauptschubspannungen eines tordierten prismatischen Vollstabes mit quadratischem Querschnitt begrenzt ist. Da die Lösung des Torsionsproblems für die Vollstäbe mit quadratischem Querschnitt bekannt ist, so läuft die Aufgabe darauf hinaus, aus dieser Lösung die Linien der Hauptschubspannungen, auf denen die Spannungsfunktion einen konstanten Wert hat und die die innere Begrenzung der Rohrquerschnitte bilden sollen, zu bestimmen. Für einen Sonderfall wird die Torsionssteifigkeit eines Rohres berechnet. *A. Kromm* (Berlin).

Mindlin, Raymond D. and Hilda L. Cooper: Thermoelastic stress around a cylindrical inclusion of elliptic cross section. J. appl. Mech., New York **17**, 265—268 (1950).

Ein unendlich langer, elliptischer Zylinder ist in einem unendlich ausgedehnten Medium eingeschlossen. Das als elastisch vorausgesetzte Medium wird gleichförmig erhitzt, seine elastischen Konstanten und sein linearer, thermischer Ausdehnungskoeffizient werden als verschieden von den entsprechenden Größen des eingeschlossenen Zylinders vorausgesetzt. Das damit zusammenhängende Problem der Elastizitätstheorie wird gelöst, insbesondere wird untersucht, in welcher Weise sich die elastischen Spannungen an der Grenzfläche des eingeschlossenen elliptischen Zylinders ändern. Das Problem wird als ein zweidimensionales aufgefaßt, in elliptische Koordinaten hinübergeschrieben und die Gleichungen der Thermoelastizität werden durch geschlossene Ausdrücke integriert. Für die Maximalwerte der verschiedenen Spannungskomponenten an der Grenzfläche werden Formeln und Diagramme angegeben. *Hardtwig* (München).

Swida, W.: Über die Restspannungen bei der elastisch-plastischen Biegung des krummen Stabes. Ingenieur-Arch., Berlin **18**, 77—83 (1950).

Eine vorhergehende Arbeit (dies. Zbl. **32**, 89) wird hier weitergeführt, wobei auch die bei der Entlastung des auf Biegung beanspruchten krummen Stabes entstehenden Restspannungen ermittelt und deren Einfluß auf die Spannungsverteilung bei wiederholten Belastungen (wenigstens qualitativ) untersucht wird. Für die Entlastung wird ein idealisiertes Spannungs-Dehnungsdiagramm angenommen. Bei der Durchführung werden zwei Fälle unterschieden, wonach die plastische Zone vor

der Entlastung nur an der konkaven oder auch an der konvexen Oberfläche des Stabes vorhanden sein soll; der Grenzfall, in dem sich die Plastizierung vor der Entlastung auf den ganzen Querschnitt erstreckt, wird besonders betrachtet. Beispiel: der gekrümmte Stab mit Rechteckquerschnitt. *Th. Pöschl* (Karlsruhe).

Stüssi, Fritz: Die Grundlagen der mathematischen Plastizitätstheorie und der Versuch. Z. angew. Math. Phys., Basel **1**, 254—267 (1950).

Entsprechend dem heutigen Stand der Plastizitätstheorie setzt man bei isotropem Werkstoff auch noch nach Eintritt der Plastizierung Isotropie voraus und wendet daher die Grundgleichungen für isotrop-plastische Körper an. Diese Auffassung hält Verf. nicht für physikalisch gesichert und stützt seine Überlegungen durch sorgfältig durchgeführte Versuche an Hohlzylindern unter Innendruck, achsialer Druckbelastung und Torsion. In seinen Schlußfolgerungen benutzt er anisotrope Spannungs-Dehnungs-Gleichungen und gelangt so zu wesentlichen Abweichungen von der sonst üblichen Rechnung, wobei insbesondere die Arbeiten von Bijlaard [Abh. internat. Verein. Brücken- und Hochbau **6** (1940/41), desgl. **8** (1947); Theory and tests on the plastic stability of plates and shells, Inst. Aeron. Sci., New York (1949)] zum Vergleich herangezogen werden. — In den voll plastischen Bereichen könnte die genaue Theorie des ebenen anisotrop-plastischen Körpers des Ref. zur Anwendung kommen (s. dies. Zbl. **30**, 376) (Bem. d. Ref.). *H. Neuber.*

Hill, R.: On the inhomogeneous deformation of a plastic lamina in a compression test. Phil. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VII. S. **41**, 733—744 (1950).

Es wird eine Theorie für die Berechnung der Spannungen und Verschiebungen in einer dünnen Lamelle von beliebiger Form gegeben, die zwischen parallelen starren Platten plastisch komprimiert wird. Die Dicke der Lamelle wird als klein gegenüber deren anderen Abmessungen angenommen. Besonderes Augenmerk wird der inhomogenen Verzerrung zugewendet, die durch die Reibung an den Grenzflächen und durch die Einflüsse der Ecken hervorgerufen werden. Durch eine Transformation wird die Lösung von der eines ebenen elastischen Problems abhängig gemacht. Zur Stützung der Theorie werden experimentelle Angaben für die Kompressionsprüfung langer elastischer Streifen sowohl mit flüssigen als auch mit festen Schmiermitteln herangezogen. Für die Berechnung der Reibungskoeffizienten der Schmiermittel, die sich auch auf Kaltbearbeitungs-Vorgänge beziehen, wird eine neue Methode vorgeschlagen. *Th. Pöschl* (Karlsruhe).

Krall, G.: Dinamica ed aerodinamica dei fili. IV. Problemi non lineari delle vibrazioni acustiche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. **5**, 285—288 (1948).

In una Nota prec. (questo Zbl. **37**, 274) l'A. ha ricercato l'equazione delle oscillazioni finite di un filo, supponendo che questo sia sollecitato da forze periodiche e, schematizzando opportunamente le circostanze complicatrici del fenomeno, ha istituito alcune considerazioni, specialmente importanti ai fini tecnici, relative all'esistenza di una resistenza quadratica nella velocità agente sul filo. — In questa Nota l'A. persegue l'intento di caratterizzare gli aspetti più salienti del fenomeno vibratorio stabilendo una formula particolarmente adatta per le valutazioni numeriche. *G. Lampariello* (Messina).

Charron, Fernand: Frottement et viscosité des corps plastiques. C. r. Acad. Sci., Paris **231**, 646—647 (1950).

In erster Näherung kann man annehmen, daß die Bewegungen der sehr leicht plastisch verformbaren Körper, wie die Schmieröle, auf einen Reibungs- und einen Zähigkeitskoeffizienten führen; aber die Grenzbedingungen sind von den auf die Flüssigkeiten bezüglichen verschieden. *Th. Pöschl* (Karlsruhe).

Hydrodynamik:

Hölder, Ernst: Über die Variationsprinzipe der Mechanik der Kontinua. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl. **97**, Nr. 2, 13 S. (1950).

Es wird sehr allgemein nachgewiesen, daß das Hamiltonsche Prinzip in der Form von Clebsch die Kontinuitätsgleichung und die Eulerschen Impulsgleichungen der Hydrodynamik liefert. Unter dem vierfachen Integral steht die kinetische Energie, das Scheringsche Potential der Coriolisbeschleunigung, das Potential der Schwere und die negative innere Energie, die als irgendeine Funktion der Entropie, der Lagrangeschen Koordinaten und der Ableitungen dieser Koordinaten nach den Eulerschen angenommen werden kann. Es folgt eine Anwendung auf die stationäre Gasströmung, bei der der Impulsvektor, als äußeres Produkt zweier Gradienten angenommen, von selbst die Kontinuitätsgleichung erfüllt. Es steht dann unter dem dreifachen Integral eine Funktion der beiden Stromfunktionen, ihrer Ableitungen nach den Eulerschen Koordinaten und dieser Koordinaten selbst. Steht nicht in Formel (3.9) einmal die Dichte zu viel? *Hamel* (Landshut).

Eisenberg, Phillip: An approximate solution for incompressible flow about an ellipsoid near a plane wall. J. appl. Mech., New York **17**, 154—158 (1950).

Um die inkompressible Strömung um ein Ellipsoid in der Nähe einer festen Wand zu berechnen, wird die Lösung, die nach der Spiegelungsmethode mit Hilfe zugeordneter Kugelfunktionen erster und zweiter Art P_n^m und Q_n^m exakt in mühsamer Arbeit aufgestellt werden könnte, näherungsweise angegeben, indem für die Berechnung des Potentials auf dem Bildellipsoid vereinfachend angenommen wird, daß das Bildellipsoid ganz auf einem Teil der zum wirklichen Ellipsoid konfokalen Ellipsoidfläche liegt, die durch den Mittelpunkt des Bildes hindurchgeht. Die theoretischen Druckverteilungen auf Meridianen senkrecht und parallel zur Wand werden für Modelle des Verhältnisses Länge zu Durchmesser von 4 und 6 mit Messungen in einem Wasserkanal verglichen. *Pretsch* (Bonn).

Coombs, E.: The translation of two bodies under the free surface of a heavy fluid. Proc. Cambridge phil. Soc. **46**, 453—468 (1950).

In einer früheren Arbeit [Quart. J. Math. (Oxford Ser.) **18**, 167 (1947)] hatte Verf. das komplexe Strömungspotential für die zweidimensionale Bewegung hinter einem zylindrischen Körper mit beliebigem Querschnitt abgeleitet. Diese Methode, die auf den Fall mehrerer Zylinder übertragbar ist, wird benutzt, um Auftrieb und Wellenwiderstand eines Paares von gleichen Kreiszylindern der Länge l zu berechnen, wobei der Schwerpunkt des einen im Abstand $4l$ unter der freien Oberfläche und der Schwerpunkt des anderen entweder im Abstand $4l$ darunter oder horizontal daneben liegt. *Pretsch* (Bonn).

Friedman, Bernard: Theory of underwater explosion bubbles. Commun. pure appl. Math., New York **3**, 177—199 (1950).

Das Geschwindigkeitspotential für die Bewegung einer Unterwasserexplosionsblase in Anwesenheit begrenzender Flächen (Meeresgrund, Zielwände, Wasseroberfläche) wird aufgebaut aus dem Potential für eine Kugel mit ortsfestem Mittelpunkt und wachsendem Radius (Quelle) und aus dem Potential für eine starre, von der Wand fortwandernde Kugel (Dipol). Die Randbedingungen werden durch Spiegelungen befriedigt. Die Schwingungszeit stimmt mit Messungen bei einer 300 g Tetryl-Explosion in etwa 7 m Tiefe sehr gut, Druck und Schwingungsweite befriedigend überein, während die starke Energiedissipation noch ungeklärt bleibt. *Pretsch* (Bonn).

Hahnemann, H. W.: Die laminaren Grenzschichtgleichungen. Forsch. Gebiete Ingenieurwes. B **16**, 120—121 (1950).

Für die Hartreesche Differentialgleichung der laminaren Geschwindigkeitsprofile in Keilströmung werden mit Hilfe eines in Wandnähe schnell konvergenten

Reihenansatzes der Formparameter und die Wandschubspannung in einfache Beziehung gesetzt. *Pretsch* (Bonn).

Foote, J. R. and C. C. Lin: Some recent investigations in the theory of hydrodynamic stability. Quart. appl. Math. **8**, 265—280 (1950).

Die Tollmiensche Stabilitätstheorie wird auf die laminaren Grenzschichten bei symmetrischen und unsymmetrischen Strahl- und Nachlaufproblemen angewandt. Im Gegensatz zu Grenzschichten an festen Wänden verschwindet hier das Lösungspaar der „zähen" Lösungen, und die Flüssigkeitsreibung macht sich nur als Korrekturglied der „reibungslosen" Lösungen in der Umgebung der kritischen Schicht bemerkbar, wo Phasengeschwindigkeit der Störung und örtliche Strömungsgeschwindigkeit übereinstimmen. Die asymptotischen Lösungen der Störungsgleichung, deren Gültigkeit von Wasow (1948) für die Umgebung einer einzigen kritischen Schicht untersucht wurde, werden hier für zwei kritische Schichten verallgemeinert. Neutrale oder angefachte Schwingungen sind nur möglich, wenn das Geschwindigkeitsprofil einen Wendepunkt besitzt. In einem Zusatz von Lin wird die Theorie auf die Stabilität zonaler Winde auf der rotierenden Erde angewandt. *Wuest.*

Meksyn, D.: Stability of viscous flow over concave cylindrical surfaces. Proc. R. Soc., London, Ser. A **203**, 253—265 (1950).

Die Instabilität dreidimensionaler Störungen in zäher Strömung entlang konkaven zylindrischen Wänden, die Görtler [Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, N. F. **2**, Nr. 1, 1—26 (1940); dies. Zbl. **24**, 232] näherungsweise durch Reduktion zweier simultaner Integralgleichungen auf ein System simultaner linearer Gleichungen bewiesen hat, wird mit der Methode asymptotischer Entwicklungen hergeleitet, die Verf. im Fall rotierender Zylinder [Proc. R. Soc., London, Ser. A **187**, 115—128 (1946)] benutzt hat. Der tiefste kritische Zustand liegt im Vergleich zu Görtlers Ergebnissen bei höheren Werten von Frequenz und Reynoldszahl. *Pretsch.*

Zerner, Frédéric: Sur le paramètre de similitude régissant les petites oscillations libres d'un liquide pesant et visqueux dans un tube en U. C. r. Acad. Sci., Paris **231**, 110—112 (1950).

Die Flüssigkeitsschwingungen einer schweren zähen Flüssigkeit in einem U-Rohr beliebigen Querschnitts werden von einem einzigen Parameter bestimmt, wenn man annimmt, daß die Reibungsarbeit nur in der Grundschwingung zum Ausdruck kommt und der Meniskus seine Form behält. Dieser Parameter ist eine verallgemeinerte Form des von Valensi [C. r. Acad. Sci., Paris **224**, 893 (1947)] für zylindrische Rohre angegebenen Parameters. *Pretsch* (Bonn).

Lighthill, M. J.: Contributions to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer. Proc. R. Soc., London, Ser. A **202**, 359—377 (1950).

Um den Wärmeübergang in einer laminaren inkompressiblen Grenzschicht bei niedriger Machzahl für beliebige Verteilung der Außenstromgeschwindigkeit und Wandtemperatur zu berechnen, wird die Methode von Fage und Falkner unter Benutzung der Energiegleichung in der v. Misesschen Form verallgemeinert. Für hohe Machzahlen wird bei Gleichgewicht zwischen Wärmeübergang und Strahlung die Verteilung der Wandtemperatur längs der umströmten Wand aus einer nichtlinearen Integralgleichung ermittelt, wobei konstante Außenstromgeschwindigkeit vorausgesetzt werden muß. *Pretsch* (Bonn).

Rotta, J.: Das in Wandnähe gültige Geschwindigkeitsgesetz turbulenter Strömungen. Ingenieur-Arch., Berlin **18**, 277—280 (1950).

Die Bedeutung des von L. Prandtl aufgestellten „universellen" Geschwindigkeitsgesetzes beruht darauf, daß sich innerhalb einer sehr dünnen, wandnahen Schicht die gesamte Wechselwirkung zwischen der von der Zähigkeit erzeugten und der durch die turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen bewirkten Schubspannungen abspielt. Mit dem dabei benutzten Mischungsweganssatz kann bei physikalisch sinnvoll gewählten Randbedingungen auch der Übergang in die laminare

Unterschicht erfaßt und die Wirkung der Wandrauhigkeit anschaulich erklärt werden. Das vorliegende Versuchsmaterial reicht aber noch nicht aus, um den Geschwindigkeitsverlauf bis in unmittelbare Wandnähe vergleichen zu können.
Th. Pöschl (Karlsruhe).

Al'tšul', A. D.: Über das Gesetz der turbulenten Bewegung einer Flüssigkeit in glatten Röhren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **75**, 617—620 (1950) [Russisch].

Bowden, K. F.: The effect of eddy viscosity on ocean waves. Phil. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VII. S. **41**, 907—917 (1950).

Um den Einfluß der Turbulenz auf Meereswellen (Wellenlänge λ) zu erklären, wird eine turbulente Zähigkeit eingeführt, die groß gegenüber der kinematischen Zähigkeit, aber klein gegenüber dem turbulenten „Austausch" ist. Im Gegensatz zu dem Vorschlag von Groen und Dorrestein [Nature, London **165**, 445 (1950)], diese Zähigkeit auf Grund der v. Weizsäckerschen Theorie örtlich isotroper Turbulenz zu $\lambda^{4/3}$ anzunehmen, wird sie proportional dem Produkt aus Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Amplitude angesetzt. Dieser Vorschlag läßt sich durch Übertragung der v. Kármánschen Ähnlichkeitshypothese auf die Wellenbewegung ableiten.
Pretsch (Bonn).

Gardner, C.: Time-dependent linearized supersonic flow past planar wings. Commun. pure appl. Math., New York **3**, 33—38 (1950).

Berechnet werden soll das instationäre Störgeschwindigkeitspotential $\varphi(x, y, z, t)$ um einen Rechteckflügel verschwindender Dicke in homogener Überschallparallelströmung der Geschwindigkeit U in x-Richtung. Der Flügel soll zu allen Zeiten t nur wenig von der x, y-Ebene abweichen, sein lokaler Anstellwinkel auf der Kontur sei als Funktion von x, y und t gegeben. — Dies Problem ist von Chang (demnächst erscheinend als N. A. C. A. Techn. Note) und von J. W. Miles [J. aeronaut. Sci., New York **16**, 381 (1949)] mittels der Theorie der Fouriertransformationen gelöst worden. Hier wird es vom Verf. auf eine neue Weise behandelt. — Mit M als Machzahl und c als Schallgeschwindigkeit der Anströmung genügt φ nach der in üblicher Weise vorgenommenen Linearisierung der partiellen Differentialgleichung

$$(M^2-1)\cdot\varphi_{xx}-\varphi_{yy}-\varphi_{zz}+\frac{2M}{c}\varphi_{xt}+\frac{1}{c^2}\varphi_{tt}=0 \quad (M>1)$$

mit der Anfangsbedingung $\varphi\equiv 0$ für $x<0$ und der Randbedingung

$$w=\lim_{z\to+0}\varphi_z=\lim_{z\to-0}\varphi_z=Uf_x(x,y,t)+f_y(x,y,t) \quad \text{für} \quad x, y \text{ in } G,$$

wo G die senkrechte Grundrißprojektion des Flügels auf die Ebene $z=0$ (z = Hochachse) und wo $z=f(x,y,t)$ für x, y in G die Fläche des räumlichen Flügels bedeutet. Wenn nur die Randnähe des Flügels interessiert, kann man mittels der Transformation $x'=x/\beta$, $t'=(Mx-\beta^2 ct)/\beta$ $\left(\beta=\sqrt{M^2-1}\right)$ folgendes äquivalente Problem formulieren (Striche wieder weggelassen!): $\varphi(x, y, z, t)$ als Lösung von $\varphi_{xx}-\varphi_{yy}-\varphi_{zz}-\varphi_{tt}=0$ so zu finden, daß $\varphi\equiv 0$ für $x<0$ und daß $\lim_{z\to\pm 0}\varphi_z=g(x,y,t)$ für $y>0$, wo g eine vorgegebene stetig differenzierbare Funktion mit $g\equiv 0$ für $x<0$ ist. — Zu dessen Lösung wird eine für alle $\xi\leqq 0$ definierte Funktion $\psi(\xi, x, y, z, t)$ gesucht, die dort den Differentialgleichungen

$$\psi_{\xi\xi}-\psi_{yy}-\psi_{zz}=0, \quad \psi_{xx}-\psi_{tt}-\psi_{\xi\xi}=0$$

mit den Bedingungen $\lim_{z\to\pm 0}\psi_z=\chi(\xi,x,y,t)$ und $\psi\equiv 0$ für $x<-\xi$ genügt, wobei χ die Bedingungen $\chi(0, x, y, t)=g(x, y, t)$ erfüllen soll. Aus einem solchen ψ wird dann φ in der Gestalt $\varphi=\psi(0, x, y, z, t)$ gefunden. — Man findet zuerst $\chi(\xi, x, y, t)$ als Lösung von $\chi_{xx}-\chi_{tt}-\chi_{\xi\xi}=0$ für $\xi\leqq 0$ (y Parameter) mit

$\chi = g(x, y, t)$ für $\xi = 0$ und $\chi \equiv 0$ für $x < 0$ in der Gestalt

$$\chi(\xi, x, y, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\sqrt{t_1^2+\xi^2}}^{\infty} \frac{\xi\, x_1}{t_1^2 + x_1^2} \frac{g_x(x - x_1, y, t - t_1)}{\sqrt{x_1^2 - t_1^2 - \xi^2}}\, dx_1\, dt_1,$$

und damit dann

$$\psi(0, x, y, z, t) = \varphi(x, y, z, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{y} \int_{\sqrt{\eta^2+z^2}}^{\zeta-\eta} \frac{\chi(-\xi_1, x, y-\eta, t)}{\sqrt{\xi_1^2 - \eta^2 - z^2}}\, d\xi_1\, d\eta,$$

wo $\zeta = \sqrt{y^2 + z^2} + y$. Nach Ersetzen von χ kann das entstehende vierfache Integral nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge über ξ ausintegriert und somit schließlich die Lösung zu

$$\varphi(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\substack{\eta > 0 \\ -\infty < \tau < \infty}} \frac{g(x - r, \eta, \tau)}{r}\, d\tau\, d\eta$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \iiint\limits_{\substack{\xi < x, \eta > 0 \\ -\infty < \tau < \infty}} \frac{\sqrt{2\zeta\eta}\, g(\xi, \eta, \tau)}{((x-\xi)^2 - r^2)\sqrt{(x-\xi)^2 - (t-\tau)^2 - (\zeta-\eta)^2}}\, d\xi\, d\tau\, d\eta$$

[mit $r^2 = (y-\eta)^2 + (t-\tau)^2 + z^2$] gefunden werden. — Durch Lorentz-Transformationen kann man den Fall des nicht in x-Richtung fallenden Flügelrandes auf den behandelten Fall zurückführen. *Behrbohm* (Waldkirch i. Br.).

Gardner, C.: A relation between time-dependent and steady linearized supersonic flows past conical bodies. Commun. pure appl. Math., New York **3**, 39—43 (1950).

Mit den analogen Methoden wie in der vorstehend referierten Arbeit behandelt Verf. die linearisierte Überschallströmung um einen kegeligen Körper K, der sich stetig in der Zeit verändert (z. B. oszilliert). K liege dabei ganz im Inneren des Machkegels seiner Spitze. Das Geschwindigkeitspotential φ genügt der Differentialgleichung der zeitabhängigen linearisierten Überschallströmung, verschwindet auf dem Machkegel und genügt der Randbedingung, daß auf K seine Normalableitung $\partial\varphi/\partial n = f(\alpha, \beta, t)$ ist, wo α, β Flächenparameter sind und wo f eine durch die gestaltlichen Verhältnisse von K und die Art seiner Bewegung bestimmte Funktion ist. Es wird gezeigt, daß die Werte dieser Lösung φ in gegebenem Punkt und zu gegebener Zeit gleich sind den Werten einer Funktion Φ, die der Gleichung der stationären Überschallströmung genügt mit der Randbedingung, daß ihre Normalableitung auf K gleich ist einem Wert, der sich durch eine gewisse Integraltransformation aus den gegebenen Werten $f(\alpha, \beta, t)$ aufbaut. *Behrbohm* (Waldkirch i. Br.).

Kolodner, I.: On the linearized theory of supersonic flows through axially symmetrical ducts. Commun. pure appl. Math., New York **3**, 133—152 (1950).

Es handelt sich um das Problem der reibungs- und drehungsfreien Überschalldurchströmung eines Kreisrohres von variablem Querschnitt. Die Symmetrieachse sei als x-Achse gewählt, r sei die hierzu senkrechte radiale Koordinate. Für $x \leqq 0$ sei das Rohr ein Zylinder vom Radius d, rechts vom „Einlauf" $x = 0$ sei der Rohrradius durch

$$r = r(x) = d\left(1 - \varepsilon\beta\, g\left(\frac{x}{\beta d}\right)\right) \quad \text{mit} \quad \varepsilon\beta \operatorname{Max} |g(x)| < 1$$

gegeben. Dabei ist $\beta^2 = M^2 - 1$, wo $M > 1$ die Machzahl der Strömung für $x < 0$ bedeutet. Wird der Dickenparameter $\varepsilon > 0$ hinreichend klein gewählt, so sind auch die Störgeschwindigkeiten in achsialer und radialer Richtung klein, und es kann die linearisierte Theorie angewendet werden. In den neuen Koordinaten $X = x/\beta d$, $Y = r/d$ genügt dann das Störpotential $\varphi(X, Y)$ der linearen partiellen

Differentialgleichung

$$\varphi_{YY} + \frac{1}{Y}\varphi_Y - \varphi_{XX} = 0 \tag{1}$$

mit der Randbedingung (näherungsweise): $\varphi_Y(X, 1) = -g'(X)$, und der Anfangsbedingung $\varphi(-\infty, Y) = \varphi_X(-\infty, Y) = 0$ für alle $0 \leq Y \leq 1$ (bei geeigneter Normierung der additiven Konstanten von φ). — Die Behandlung dieses Problems ist von H. F. Ludloff und F. Reiche [J. Aeron. Sci. **16**, 5—21 (1949)] durch Belegungen des Grundzylinders $r(x) = d$ für $x \geq 0$ mit Überschallquellen (ohne Rücksicht auf vorgeschriebene Randbedingungen) in Angriff genommen und von Ch. Mack (Dissertation, New York University, 1947) auf gleicher Basis weiter geführt worden. Eine andere Behandlung gab G. N. Ward (Aeronaut. Res. Commit., Rep. Mem., London No. 2183). Auch auf eine verwandte Arbeit von R. K. Tempest (dies. Zbl. **37**, 119) sei vom Ref. hingewiesen. — Verf. gibt unter Erfüllung der genannten Rand- und Anfangsbedingungen die eindeutige Lösung

$$\varphi(X, Y) = -2\int_0^X g(z)\,dz - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\sigma_n Y)}{\sigma_n J_0(\sigma_n)} \int_0^X g'(X - z)\sin \sigma_n z\,dz$$

von (1). Dabei ist J_0 die nullte Besselsche Funktion 1. Art, und σ_n sind die Nullstellen der Besselschen Funktion 1. Art $J_1(s)$. Von der „Rohrfunktion" $g(X)$ ist dabei vorausgesetzt: I. $g'(X)$, $g''(X)$ existieren und sind stetig; II. $g'''(X)$ existiert und ist stetig bis auf eine Punktmenge vom Maß Null, auf der es sprungartige Unstetigkeiten haben kann; III. $g'''(X)$ hat nur endlich viele Extrema. — Es ist für die physikalische Anschauung überraschend, daß hierbei i. a. trotz $\lim_{X\to\infty} g'(X) = 0$ (was aus Obigem folgt) nicht auch $\lim_{X\to\infty} \varphi_Y = 0$ und auch nicht $\lim_{X\to\infty} \varphi_X = \text{const}$ (d. h. von Y frei) folgt, wie vom Verf. bewiesen wird. Nur wenn außerdem die Laplacesche Transformierte $\mathfrak{L}[g''(X)]$ für alle $s = i\sigma_n$ verschwindet, ist $\lim_{X\to\infty} \varphi_Y = 0$ und $\lim_{X\to\infty} \varphi_X = \text{const} = -2\,g(\infty)$ für alle $0 \leq Y \leq 1$. — Mit einigen interessanten Aussagen über die auftretenden Singularitäten der Strömung, wenn diese oder jene der Bedingungen I, II, III von $g(X)$ nicht erfüllt werden, schließt der wesentliche Teil der Arbeit. Das Werkzeug zu dieser letzten Untersuchung ist eine gewisse Stieltjessche Integraldarstellung der Ableitung $g'(X)$ durch die Quellstärken der Zylinderbelegung. *Behrbohm* (Waldkirch i. Br.).

Martin, M. H.: Plane rotational Prandtl-Meyer flows. J. Math. Phys., Massachusetts **29**, 76—89 (1950).

Man kann die Prandtl-Meyersche Strömung (P-M-Strömung) durch den Sachverhalt charakterisieren, daß ihr Hodograph in eine einzige Kurve der Hodographenebene entartet, und diese Definition zwanglos auch auf wirbelige Strömungen übertragen, so daß man in dieser Weise eine direkte Verallgemeinerung der klassischen drehungsfreien P-M-Strömung auf wirbelige P-M-Strömungen erhält. — Es werden Druck p und Stromfunktion ψ als unabhängige Variable eingeführt (wodurch nur triviale Strömungen ausscheiden). Die Bernoullische Funktion $W(p, \psi)$ und die Richtungsfunktion $\theta(p, \psi)$ genügen der Differentialgleichung

$$W\left(\frac{W_{pp} - W\theta_p^2}{\theta_\psi}\right)_\psi + (W^2\theta_p)_p = 0. \tag{1}$$

W ist dabei der Geschwindigkeitsbetrag. Die Zustandsgleichung $\varrho = f(p, S)$ (S = Entropie) und die Entropieverteilungsfunktion $S(\psi)$ führen zur Dichtefunktion $\varrho(p, \psi)$, und die Bernoullische Gleichung lautet mit Hilfe der Energieverteilungsfunktion $C(\psi)$

$$\frac{W^2}{2} = C(\psi) - \int_{p_1(\psi)}^{p} \frac{dp}{\varrho}.$$

Werden über die zur mathematischen Behandlung notwendigen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsforderungen hinaus keine weiteren Bedingungen an f gestellt, so spricht man von einem

abstrakten Medium, wird dagegen von f zusätzlich $f(0,S)\equiv 0$; $0<f(p,S)<\infty$ für $p>0$; $f_S(p,S)<0$; $f_p(p,S)>0$ für $p>0$; $i=\int_0^p f^{-1}(p,S)\,dp<\infty$ für $p>0$ verlangt, so spricht man von einem physikalischen Gas. — Geht man mit der Polargleichung $\theta=\theta(W)$ [$\neq$ const., $W\neq$ const.] in (1), so ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die durch diese Gleichung gegebene Kurve das Hodographenbild einer P-M-Strömung eines abstrakten Mediums mit vorgegebener Bernoullischer Funktion ist, das Bestehen folgender Alternative: Entweder 1) die Ausdrücke

$$a=(W_{pp}/W_p)_\psi\cdot 1/W_{pp},\qquad b=[(W_\psi^2\,W_{pp}-2\,W_p\,W_\psi\,W_{p\psi}+W_p^2\,W_{\psi\psi})\,W+W_p^2\,W_\psi^2]\,W_\psi^{-2}\,W_{pp}^{-1}$$

sind Funktionen allein von W, und $\theta(W)$ ist eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (2) $\theta''-a(W)\,\theta'-b(W)\,\theta'^3=0$, oder aber 2) a und b sind nicht Funktionen von W allein, und es existiert ein $\omega_0(W)\not\equiv 0$ derart, daß $\omega_0'-a(p,\psi)\,\omega_0-b(p,\psi)\,\omega_0^3\equiv 0$ gilt. In diesem Falle ist dann $\theta=\theta_0\pm\int\omega_0(W)\,dW$, $\theta_0=$ const das Hodographenbild. — Im Fall 1) heißt die P-M-Strömung von der Klasse A, im Fall 2) von der Klasse B. — Die einzigen isoenergetischen [$C(\psi)=$ const], anisentropen P-M-Strömungen der Klasse A für ein physikalisches Gas mit separabler Zustandsgleichung [d. h. f von der Gestalt $f=\Sigma(S)\cdot\Pi(p)$] sind Strömungen polytroper Gase mit linearer oder logarithmischer Entropieverteilung $S(\psi)$. Die einzigen isoenergetischen, anisentropen P-M-Strömungen eines polytropen Gases sind von der Klasse A, und ihre Hodographenbilder sind Lösungen von (2) mit

$$a=2\lambda(W-W^{-1})^{-1}-W^{-3}\,(\tfrac{1}{2}\,(1+W^{-2})-l)^{-1},\qquad \left(l=\varkappa/(\varkappa-1);\ \varkappa=c_p/c_v,\text{ wo } c_p,c_v=\text{spezif. Wärmen bei konst. Druck bzw. Volumen}\right).$$

$$b=[\tfrac{1}{2}\,(W-W^{-1})-(\lambda+l)\,W]\,[\tfrac{1}{2}\,(1+W^{-2})-l]^{-1}$$

Dabei ist λ ein Parameter, der die Entropieverteilung $S(\psi)$ festlegt zu

$$S(\psi)=\begin{cases}c_p/\lambda\log|\psi-\psi_0|+\text{const} & \text{für } \lambda\neq 0\\ c(\psi-\psi_0)+\text{const} & \text{für } \lambda=0\end{cases}\qquad(\psi_0,\ c\neq 0 \text{ beliebig reell}).$$

— P-M-Strömungen der Klasse B werden nicht besprochen. — Es gibt auch nicht-isoenergetische, isentrope P-M-Strömungen der Klasse A für ein physikalisches Gas mit separabler Zustandsgleichung. *Behrbohm* (Waldkirch i. Br.).

Tomotika, S. and Z. Hasimoto: On the transonic flow of a compressible fluid through an axially symmetrical nozzle. J. Math. Phys., Massachusetts **29**, 105—117 (1950).

Verff. geben einen Beitrag zur bekannten Frage des Übergangs vom Taylorschen (symmetrischen) zum Meyerschen (unsymmetrischen) Schalldurchgang in einer konvergent-divergenten Düse bei Annahme der Existenz eines Geschwindigkeitspotentials Φ. H. Görtler [Z. angew. Math. Mech. **19**, 325—337 (1939)] behandelte diese Frage approximativ mit abbrechenden Potenzdoppelreihenansätzen für die Lösung der exakten Differentialgleichung für Φ, und zwar sowohl im ebenen als auch im drehsymmetrischen Fall. Tomotika und Tamada (dies. Zbl. **34**, 417) behandelten diese Frage im ebenen Fall mittels exakter Lösungen einer die exakte Differentialgleichung in Schallnähe gut approximierenden vereinfachten Differentialgleichung. Nach dem gleichen Prinzip wird hier der drehsymmetrische Fall untersucht. Seien x, y die Ortskoordinaten in einer Meridianebene (x-Achse = Düsenachse, y senkrecht dazu), u, v die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten, und werde $x=\xi$, $y=\sqrt{2/(\varkappa+1)}\,\eta$ gesetzt. Das durch $f_\xi=u/c_*-1=U$, $f_\eta=\sqrt{2/(\varkappa+1)}\,v/c_*$ definierte Geschwindigkeitspotential $f(\xi,\eta)$ (c_* ist die kritische Schallgeschwindigkeit) genügt dann bei Vernachlässigung von Gliedern, die in den Ableitungen von f von höherem als 2. Grad sind, und wenn zudem $(f_\eta^2)_\xi$ gegen $(f_\xi^2)_\xi$ vernachlässigt wird, der Differentialgleichung $f_{\eta\eta}+\eta^{-1}f_\eta=2f_\xi f_{\xi\xi}$, was sich für U auch in der Gestalt $U_{\eta\eta}+\eta^{-1}U_\eta=(U^2)_{\xi\xi}$ schreibt. — Der Ansatz $U=Z(z)+2\mu^2\eta^2$, $z=\xi+\mu\eta^2$ mit konstantem μ führt für $Z(z)$ zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dz}\left(Z\frac{dZ}{dz}\right)-2\mu\frac{dZ}{dz}-4\mu^2=0. \tag{1}$$

Sie hat mit beliebigem konstanten a die Lösung $(Z-\mu\omega_1 z)^{\omega_1}(Z-\mu\omega_2 z)^{-\omega_2}=a$ ($\omega_1=1+\sqrt{5}$, $\omega_2=1-\sqrt{5}$), d. h. der Punkt $z=Z=0$ ist Sattelpunkt. Von den bei $a\neq 0$ vorhandenen vier hyperbelähnlichen Zweigen dieser Lösung scheiden die mit Z-parallelen Scheiteltangenten für stoßfreie Düsenströmungen aus. Von den beiden Zweigen mit z-parallelen Scheiteltangenten entspricht der in $Z>0$ gelegene einer reinen Überschallströmung, der in $Z<0$ gelegene dagegen einer Strömung mit reiner Unterschallgeschwindigkeit auf der Düsenachse, wobei jedoch bei hinreichend kleinem $|a|$ lokale Überschallgebiete an der Düsenwand in der Nähe der engsten Stelle auftreten. Für $a\to 0$ geht diese allein interessierende Lösungsschar in die beiden in $Z\leqq 0$ gelegenen Halbasymptoten $Z=\mu\omega_1 z$ und $Z=\mu\omega_2 z$ über. Diese Grenzlösung entspricht physikalisch derjenigen (postulierten) Grenzströmung, die auf der Düsen-

achse in genau einem Punkt Schallgeschwindigkeit und sonst auf ihr durchweg Unterschallgeschwindigkeit besitzt. — Den Übergang vom Taylorschen Typ durch diesen Grenzfall zum Meyerschen Typ stellen sich Verff. in quasistationärer Betrachtungsweise dann so vor, daß statt des in $Z < 0$ gelegenen absteigenden Halbasymptotenastes die in $Z > 0$ gelegene geradlinige Verlängerung des in $Z \leq 0$ gelegenen aufsteigenden Halbasymptotenastes genommen wird [die durch $Z = \mu\,\omega\,z$ gegebene volle Asymptote ist ja gleichfalls Lösung von (1)]. — Durch Wahl von a und μ kann die angegebene Lösung gewissen Randbedingungen angepaßt werden. Dies wird von den Verff. für die von T. E. Stanton [Aeronaut. Res. Commit., Rep. Mem., London No. 1388 (1930)] vermessene Düse durchgeführt und qualitativ befriedigende Übereinstimmung gefunden. Daß besonders in Grenzfallnähe diese Übereinstimmung weniger gut ist, läßt sich mit der zu vermutenden Instabilität dieser Strömungsform gegenüber kleinen Einlaufsdruckstörungen erklären. *Behrbohm* (Waldkirch i. Br.).

Herbeck, M.: Der Wärmeaustausch zwischen einem geheizten Band und einer Konvektionsströmung. Z. angew. Math. Mech., Berlin **30**, 258—260 (1950).

Das Problem des Wärmeaustausches zwischen einem geheizten Band bzw. einer geheizten Halbebene und einer Konvektionsströmung parallel zur Wandoberfläche ist für die Messung der Wandschubspannung in turbulenten Grenzschichten von Bedeutung. Im Gegensatz zu früheren Untersuchungen von Reichardt, Schuh und Ludwieg wird hier der Wärmeaustausch durch Leitung in Strömungsrichtung nicht vernachlässigt. Man wird dadurch auf eine partielle Differentialgleichung von elliptischem Typus geführt, die für die geheizte Halbebene gelöst wird. Dabei wird das gesuchte Temperaturfeld als ein durch Wärmekonvektion gestörtes Feld eines ursprünglich reinen Wärmeleitungsfeldes betrachtet. Die Lösung wird als Reihenentwicklung in einem Polarkoordinatensystem aufgestellt. Um die geforderten Randbedingungen im Unendlichen zu erfüllen, wird noch eine zweite Form der Lösung unter Benutzung des Fourierintegrales und der Hankelschen Zylinderfunktion aufgestellt und die Koeffizienten der Reihenentwicklung durch Vergleich mit der zweiten Lösung bestimmt. Abschließend wird noch die Nusseltsche Zahl Nu für den Konvektionsanteil des Wärmeüberganges berechnet. Die gemessenen Werte Nu wurden etwas größer als die berechneten gefunden. *Wuest* (Göttingen).

Schrenk, O.: Gasströmung konstanten Querschnitts mit Wärmezufuhr. Ingenieur-Arch., Berlin **18**, 272—276 (1950).

Die Strömung mit Energiezufuhr bei konstantem Querschnitt wurde bereits mehrfach behandelt. Die erste Arbeit stammt von R. Becker [Z. Phys., Berlin **22**, 321 (1921)]. Man begegnet dem Problem beim Studium der Kondensationserscheinungen in Lavaldüsen. Schließlich wird die Aufgabe sehr allgemein von H. Shapiro und W. Hawthorne (dies. Zbl. **30**, 229) behandelt. In vorliegender Arbeit wird die Änderung der Zustandsgrößen bei Unter- und Überschallgeschwindigkeit studiert. In stationärer Strömung kann nur soviel Wärme zugeführt werden, daß die Machzahl 1 erreicht wird, andernfalls treten instationäre Vorgänge auf.

Oswatitsch (Stockholm).

Thomas, T. Y.: The determination of pressure on curved bodies behind shocks. Commun. pure appl. Math., New York **3**, 103—132 (1950).

Diese Arbeit gibt eine umfassende Darstellung der Untersuchungen des Verf. über das Verhalten einer ebenen stationären Strömung hinter der Stoßwelle, die ein Störkörper mit spitzer Nase in homogener Überschallparallelströmung erzeugt. Die Machzahl $M > 1$ der Anströmung und der Öffnungswinkel des die Nase tangierenden Keils seien so gewählt, daß die Stoßfront dem Körper anliegt. Die Neigung ω der Körperkontur gegen die x-Achse (= Anströmrichtung) sei für die Oberseite (resp. Unterseite) eine monoton abnehmende (resp. zunehmende) Funktion der Bogenlänge σ der Kontur. Dann werden die Stromlinien auch in der Nachbarschaft des Körpers diese Eigenschaft haben, und man kann den Druck p als Funktion $p(\omega, S)$ der Neigung ω und der Entropie S darstellen. S ist konstant längs jeder Stromlinie, variiert aber wegen der variablen Krümmung der Stoßfront von Stromlinie zu Stromlinie und kann daher als Stromlinienparameter herangezogen werden.

Die bei S freie additive Konstante werde zur Normierung $S = 0$ für die Kontur benutzt. Wegen der Energiekonstanz beim Durchgang durch die Stoßfront ist die Strömung isoenergetisch, wegen der Anisentropie hinter der Stoßfront aber nach Croccos Satz wirbelig. — Man kann die Funktion $p(\omega, S)$ als Potenzreihe in S ansetzen mit Koeffizienten, die von ω abhängen:

$$(1) \qquad p(\omega, S) = \theta(\omega) + \theta_1(\omega)\, S + \theta_2(\omega)\, S^2 + \cdots + \theta_k(\omega)\, S^k + \cdots.$$

Dabei ist dann $\theta(\omega) = p(\omega, 0)$ die Druckverteilung um die Körperkontur, und man kann zeigen, daß für $k \geqq 1$ die Koeffizienten $\theta_k(\omega)$ dieser Reihe Funktionen sind von $\theta(\omega)$ und dessen k ersten Ableitungen nach ω, wobei überdies noch die $k-1$ ersten Ableitungen der Krümmung $K(\omega)$ der Kontur an der betrachteten lokalen Stelle und an der Profilnase eingehen, natürlich zudem auch die Anströmdaten. Zur Aufstellung dieser funktionalen Abhängigkeit der $\theta_k(\omega)$ ist ein umfangreicher Formelapparat notwendig, der vom Verf. in der vorliegenden Arbeit entwickelt wird, z. T. aber auch schon in früheren Arbeiten bereitgestellt wurde und nun hier verwendet wird. — Die Reihe (1) gibt eine formale Lösung für den Druck im ganzen Feld (mit der gegebenen Kontur als Stromlinie), wenn die Druckverteilung $\theta(\omega)$ auf der Kontur gegeben ist. Ist dagegen $\theta(\omega)$ gesucht, so kann man die Randbedingungen

$$(2) \qquad p_*(\omega) = \theta(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k(\omega)\, S_*^k(\omega)$$

für die Stoßfront zu Hilfe nehmen, in denen $p_*(\omega)$ und $S_*(\omega)$ Druck und Entropie bedeuten in demjenigen Punkt am stromabseitigen Ufer der Stoßfront, in dem die Stromlinie gerade den (gemäß den bekannten Stoßgleichungen durch die dortige Stoßfrontneigung eindeutig bestimmten) Neigungswinkel ω hat. Damit liegt dann in (2) eine gewöhnliche Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung für $\theta(\omega)$ vor. — Außer der trivialen 1. Näherung $\theta(\omega) = p_*(\omega)$ gibt Verf. noch für eine 2. Näherung die Differentialgleichung 1. Ordnung für $\theta(\omega)$ an, die aus $p_*(\omega) = \theta(\omega) + \theta_1(\omega)\, S_*(\omega)$ resultiert, und schließlich für eine 3. Näherung die recht verwickelte Differentialgleichung 2. Ordnung für $\theta(\omega)$, die aus $p_*(\omega) = \theta(\omega) + \theta_1(\omega)\, S_*(\omega) + \theta_2(\omega)\, S_*^2(\omega)$ resultiert. — Zu früheren Arbeiten des Verf. zu diesem Thema siehe dies. Zbl. **36**, 264; **35**, 418, 421; **33**, 121.

Behrbohm (Waldkirch i. Br.).

Robbertse, W. P. and J. M. Burgers: Solutions of the equations for the non-uniform propagation of a very strong shock wave. II. Proc. Akad. Wet., Amsterdam **52**, 1067—1074 (1949).

Die in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **35**, 421) angegebene Lösung einer starken Stoßwelle, die sowohl die Bewegungsgleichung wie die Randbedingung am Ort der Welle befriedigt und das Dichtegesetz $x^{-7/4}$ erfordert, wird an einem Zahlenbeispiel aus der Astrophysik erläutert und auf den Fall konstanter Schwerebeschleunigung erweitert. *Pretsch* (Bonn).

Sauer, R.: Ausbreitungsgesetze schwacher Verdichtungsstöße in Gasen. Ingenieur-Arch., Berlin **18**, 239—241 (1950).

Die zuerst von Hantzsche und Wendt behandelten Ausbreitungsgesetze für instationäre ebene, zylindrische und kugelige Stoßwellen werden in besonderer Kürze für große Entfernungen vom Störzentrum abgeleitet. Es handelt sich dabei um eine über die Linearisierung der Akustik um einen Schritt hinausgehende Näherung. Zahlreiche Zitate geben vorangegangene Arbeiten wieder. *Oswatitsch.*

Lighthill, M. J.: The energy distribution behind decaying shocks. I. Plane waves. Phil. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VII. S. **41**, 1101—1128 (1950).

Um die Genauigkeit der von Friedrichs entwickelten Theorie abklingender ebener Stoßwellen zu prüfen, untersucht Verf. die nur von einer Raumkoordinate

und der Zeit abhängigen Vorgänge bei einem Kolben, der in einem Rohr bewegt wird und dann willkürlich bis zum Stillstand verzögert wird. Bei der Entwicklung der Theorie werden kubische Glieder der Stoßstärke vernachlässigt. Die Energie der einfachen Welle wird mit der vom Kolben geleisteten Arbeit verglichen, wobei die Differenz eine Größe zweiter Ordnung in der anfänglichen Stoßstärke ergibt. Die Untersuchung wird auch auf die sogenannte „N-Welle" ausgedehnt, die dann entsteht, wenn der Kolben nach anfänglicher Vorwärtsbewegung rückwärts bewegt und dann erst zum Stillstand gebracht wird. Man erhält dadurch ein Problem mit zwei abklingenden Stoßwellen. *Wuest* (Göttingen).

Taylor, Geoffrey: The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I. Proc. R. Soc., London, Ser. A **201**, 192—196 (1950).

Wenn zwei übereinanderliegende Flüssigkeitsschichten verschiedener Dichte senkrecht zur Trennungsschicht beschleunigt werden, hängt deren Stabilität von der Richtung der Beschleunigung ab. Die Anfachung einer Störung von der Wellenlänge λ ist, wenn die Vertikalbeschleunigung wesentlich größer als die Erdbeschleunigung ist, durch das Dichteverhältnis und die Anzahl durchlaufener Wellenlängen gegeben. Dasselbe gilt für das Verhalten einer luftdruckbeschleunigten Flüssigkeitsschicht endlicher Dicke $h > \frac{1}{2}\lambda$. In Teil II soll auf Grund von Versuchen beschrieben werden, wie sich die Trennungsschicht bei endlich großen Störungen verhält. *Pretsch* (Bonn).

Heins, Albert E.: Water waves over a channel of finite depth with a submerged plane barrier. Canadian J. Math. **2**, 210—222 (1950).

In Fortführung früherer Studien von Oberflächenwellen an einem Dreieck über einem Kanal endlicher Tiefe (dies. Zbl. **35**, 421) und unendlicher Tiefe (Veröffentlichung in Vorbereitung) wird der Kanal unendlicher Länge, aber endlicher Tiefe mit halbunendlicher, zum Kanalboden paralleler starrer Barriere als zweidimensionales Problem behandelt. Die inhomogene Integralgleichung vom Wiener-Hopf-Typ, auf die sich das Randwertproblem für das Geschwindigkeitspotential zurückführen läßt, kann über Fourier-Transformierte gelöst werden; für die Reflexions- und Durchgangseigenschaften an der Barriere gilt ein einfacher Reziprozitätssatz. *Pretsch.*

Bondi, H.: Waves on the surface of a compressible liquid. Proc. Cambridge phil. Soc. **43**, 75—95 (1947).

Überschallwellen können an der Oberfläche einer kompressiblen reibungslosen Flüssigkeit nur auftreten, wenn zwei Randbedingungen für das Geschwindigkeitspotential und seine Ableitungen erfüllt sind. Schwerewellen befriedigen diese Bedingungen nicht, dagegen schwerefreie Kapillarwellen. Die von einer örtlichen Störung ausgehenden Druck- und Oberflächenschwerewellen werden untersucht. Die hier vernachlässigte Zähigkeit dürfte die obere Grenze der Kapillarwellengeschwindigkeit stark reduzieren. *Pretsch* (Bonn).

Dean, W. R.: Note on waves on the surface of running water. Proc. Cambridge phil. Soc. **43**, 96—99 (1947).

Gegenüber der Lambschen Lösung wird eine einfachere Herleitung für Oberflächenwellen auf strömender Flüssigkeit gegeben. *Pretsch* (Bonn).

Birkhoff, G., M. Plesset and N. Simmons: Wall effects in cavity flow. I. Quart. appl. Math. **8**, 151—168 (1950).

Es wird nachgewiesen, daß beim Studium von Hochgeschwindigkeitskavitationsblasen mit kleiner Kavitationszahl k der Freistrahl einem gewöhnlichen Wasserkanal mit festen Wänden vorzuziehen ist. Es gibt nämlich für jeden Kanal und für jedes Modell eine Sperrkonstante, unter die k nicht fallen kann; zweitens muß an den Widerstandskoeffizienten im Wasserkanal eine große Wandkorrektur angebracht werden. Um unendlich lange Blasen in der Mitte von Kanälen, Freistrahlen und begrenzten Strahlen zu untersuchen, wird in Verallgemeinerung früherer Arbeiten von Réthy,

Cisotti, Valcovici und v. Mises eine Methode zur Bestimmung einer beliebigen Strömung mit freien Stromlinien angegeben, für welche der Hodograph ein Kreissektor ist. Endlich große Hohlräume wurden in Teil II von Simmons (Proc. VII. Internat. Congr. appl. Mech., London 1948, Band 2, S. 601) behandelt.

Pretsch (Bonn).

Elektrodynamik:

Volkov, D. M.: Ein zweites Integral vom Typ eines Erhaltungssatzes für elektromagnetische Felder. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **72**, 259—260 (1950) [Russisch].

Für von leitenden Flächen begrenzte elektromagnetische Felder wird ein Ausdruck angegeben, der in ähnlicher Weise wie das Energieintegral als unabhängige Konstante des Problems betrachtet werden kann. Er besteht aus der Summe eines Volumintegrals über einen in den partiellen Ableitungen der Feldstärken quadratischen Ausdruck und eines Oberflächenintegrals, in dem die Quadrate der Feldstärken selbst auftreten. *Gora* (Rhode Island).

Gans, Ricardo: Das Lechersche System im abschirmenden Rohr. Univ. nac. La Plata, Publ. Fac. Ci. fisicomat., Rev. **4**, 223—250 (1949) [Spanisch].

For precision measurements, Lecher systems are applied in a protecting tube. To obtain the capacity of such a system, we start from the two wires at the potentials ± 1 not taking into account the condition that the potential shall vanish at the enclosure. We then correct this error by the electrical-images method. Thus, the potential function looses the property that its values in the wires be ± 1. We superpose another function that corrects this second error and reflect it by the enclosure so that there it shall vanish. This procedure can be repeated. (Autoreferat.)

Mirimanov, R. G.: Beugung einer elektromagnetischen Kugelwelle an einer dünnen Kegelfläche von endlichen Ausmaßen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **73**, 693—696 (1950). [Russisch]

Hier handelt es sich um die Auswertung des Integrals

$$\varphi(r) = \int_S \frac{\exp[2i k_a |r - r'|]}{|r - r'|^2}\, ds,$$

zu erstrecken über eine kegelförmige Fläche (Kreiskegel). r' ist hierbei der Abstand eines Flächenelementes des Kreiskegels von der Spitze des Kegels, während r der Abstand des auf der Achse des Kreiskegels gelegenen Lichtpunktes von der Spitze des Kegelmantels bedeutet. Verf. entwickelt die durch $|r - r'|$ dividierte Exponentialfunktion in eine unendliche Reihe, die von den Besselschen Funktionen der Ordnungen $n + \frac{1}{2}$, den Hankelschen Funktionen $H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(2k_a r)$ und den Kugelfunktionen $P_n(\cos\gamma)$ abhängt. Er findet so nach mehreren Umformungen einen Ausdruck für $\varphi(r)$, der im wesentlichen nur von den Kugelfunktionen $P^m_n(\cos\vartheta)$ abhängt, wobei noch ϑ der Halbwinkel an der Spitze des Kegelmantels ist. Durch Einführung des Hertzschen Vektors Π, der mit $\varphi(r)$ in dem Zusammenhang $\operatorname{div}\Pi = -\varphi(r)$ steht, findet Verf. eine Lösung für $r^{-2}\int r^2 \varphi(r)\, dr = \Pi_r$. Hieraus leitet er die Ausdrücke für die Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärken ab. *Picht* (Babelsberg).

Frey, Wolfgang und Fritz Lüdi: Zur Theorie der Travelling-Wave-Tube. Z. angew. Math. Phys., Basel **1**, 237—247 (1950).

In der vorliegenden Arbeit wird die Helix durch ein aus Längsinduktivität, Querkapazität und Längskapazität pro Zentimeter definiertes Schema ersetzt und die Wechselwirkung mit dem Elektronenstrahl durch die Längskapazität und einen Koppelungsfaktor α als Influenzproblem dargestellt. Die verzögerte Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle folgt aus dem Ersatzschema. Der unbekannte Koppelungsfaktor α, der den Helixstrom mit dem Elektronenstrom verknüpft, geht so in die berechneten Formeln für Verstärkung und Rauschzahl ein. Seine Elimination gestattet daher die Rauschzahl durch die Verstärkung auszudrücken. Die Berech-

nung erfolgt nach dem Vorgang von Pierce, wobei sich Verff. auf das linearisierte Problem beschränken. Die Methode erlaubt einen Vergleich mit Klystron und Triode, welcher an einem numerischen Beispiel durchgeführt wird. *Glaser.*

Oono, Yosiro: Synthesis of a finite $2n$-terminal network by a group of networks each of which contains only one ohmic resistance. J. Math. Phys., Massachusetts **29**, 13—26 (1950).

Es wird die Theorie einer $2n$-Pol-Schaltung mit vorgeschriebener Impedanzmatrix entwickelt und gezeigt, daß jede $2n$-Pol-Schaltung dargestellt werden kann durch eine reaktive $4n$-Pol-Schaltung (ohne Verluste), die mit n Widerständen an n Paaren von Klemmen abgeschlossen ist. Die Arbeit ist eine Erweiterung der Theorie der elektrischen Wellenfilter. Für 4-Pol-Schaltungen ist die Aufgabe schon von C. M. Gewertz (Network synthesis, Baltimore 1933) gelöst worden. Es werden 6 Sätze über Matrizen von $2n$-Pol-Schaltungen abgeleitet. Alle Bezeichnungen sind aus dem Buch von W. Cauer, „Theorie der linearen Wechselstromschaltungen" (Leipzig 1938) entnommen. In anderer Fassung wird das oben erwähnte Resultat in Theorem 5 angegeben als: Jede $2n$-Pol-Schaltung kann dargestellt werden durch eine Schaltung aus nur reaktiven Elementen (Blindwiderständen) und noch n Widerständen. *W. O. Schumann* (München).

Cohn, R. M.: The resistance of an electrical network. Proc. Amer. math. Soc. **1**, 316—324 (1950).

R sei eine rationale Funktion der Variabeln $r_1, \ldots, r_n$, die in jeder einzelnen dieser Variabeln linear-gebrochen ist. Verf. betrachtet: Eigenschaft A: Die partiellen Ableitungen $\partial R/\partial r_m$ $(m = 1, \ldots, n)$ (oder wenigstens $n-1$ derselben, was sich als damit äquivalent erweist) sind die Quadrate rationaler Funktionen. Eigenschaft B: Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gegebene Zahlen oder ∞, so ändert sich $\lim_{r_1 \to \alpha_1} \cdots \lim_{r_n \to \alpha_n} R(r_1, \ldots, r_n)$ (das ist eine Zahl oder ∞) nicht, wenn man die n sukzessiven Grenzübergänge in einer beliebig permutierten Reihenfolge vornimmt. — Wie Verf. zeigt, sind die Eigenschaften A und B äquivalent. Ist R der Widerstand eines Zweipolnetzwerkes an den Ausgangsklemmen, $r_1, \ldots, r_n$ die (als Unbestimmte betrachteten) Widerstände der einzelnen Zweige des Netzwerks, so ist leicht zu zeigen, daß die Eigenschaft A und infolgedessen auch die tieferliegende Eigenschaft B vorliegt. *Stöhr.*

Blachman, Nelson M.: The demodulation of a frequency-modulated carrier and random noise by a discriminator. J. appl. Phys., Lancaster Pa. **20**, 976—983 (1949).

Beim Empfang eines frequenzmodulierten Signals ist für das Verhältnis von Signalenergie zur Energie des Zufallsgeräusches am Empfängerausgang maßgebend 1. der Frequenzhub D, 2. die Frequenzbreite des Durchlaßgebiets des Zwischenfrequenzverstärkers $2F$ und 3. die Bandbreite des niederfrequenten Tiefpaßfilters f_a, wobei höchstens $D_{\max} \sim F/\sqrt{3}$ sein darf, wenn keine Verzerrungen durch den Zwischenfrequenzverstärker entstehen sollen. — D. Middleton [J. appl. Phys., Lancaster Pa. **20**, 334—351 (1949) und dies. Zbl. **33**, 83] hat für einen „idealen" Discriminator gezeigt, daß eine frequenzmodulierte Trägerwelle für geringere Größe der Trägerwelle verständlich bleibt, wenn mit schmalem Zwischenfrequenzband gearbeitet wird und der Amplitudenbegrenzer weggelassen wird, als wenn mit einem solchen Begrenzer und breitem Zwischenfrequenzband, oder auch nur mit breitem Zwischenfrequenzband F gearbeitet wird. — Die vorliegende Arbeit behandelt den wirklichen Demodulationsprozeß mit Hilfe der abgestimmten Kreise ohne einen Begrenzer und stützt sich auf die Arbeit von S. O. Rice [Bell Syst. Techn. J. **24**, 46 (1945)] über die Wirkung eines nicht linearen Kreises auf die Zusammenwirkung eines statistisch verteilten Rauschspektrums mit einer zugeführten Trägerwelle. Es wird zunächst der Fall quadratischer Gleichrichtung behandelt, und dann der Fall allgemeiner Gleichrichtung, der dann auf lineare Gleichrichtung spezialisiert wird. Es wird die Correlationsfunktion des Ausgangs der beiden einander entgegengeschalteten Gleichrichter, die von den beiden Discriminatorkreisen gespeist werden, berechnet und daraus nach dem Wiener [Acta math. **55**, 118 (1930)] -Khintchine [Math. Ann. **109**, 608 (1934); dies. Zbl. 8, 368] -Theorem die spektrale Leistungsverteilung. — Die Integration über den in Frage kommenden Frequenzbereich, der durch das Filter der geringeren Frequenzbreite bestimmt ist, ergibt die gesamte Ausgangsleistung in Form einer Summe, bestehend aus dem Nutzsignal, den Rauschstörungen unter sich und dem Zusammenwirken von Störung und Signal. Das ursprüngliche Geräuschspek-

trum vor dem Durchgang durch das Zwischenfrequenzfilter wird wie üblich als rechteckig angenommen und das Verhältnis von Signal zu Geräusch sowohl für schmale als auch für breite Frequenzbänder des Zwischenfrequenzverstärkers durchgerechnet ($2F \lessgtr$ bzw. $> f_a$). — In einer Tabelle werden schließlich die Resultate dieser Arbeit für große und für kleine Trägerleistung und schmale und breite Zwischenfrequenzbänder ($f_a > F$ und $f_a < F$) angegeben, und die Resultate für den idealisierten Discriminator ohne Begrenzer [N. M. Bachmann, J. appl. Phys., Lancaster Pa. **20**, 38 (1949)], sowie für 100% amplitudenmodulierte Träger mit rechteckigem Zwischenfrequenzfilter für quadratische und für lineare Gleichrichtung [R. E. Burgess, Rad. Res. Board, C 93, England 1944. J. R. Ragazzini, Proc. I. R. E. 30. 277. 1942. D. Middleton, dies. Zbl. **33**, 82 und Proc. I. R. E. **36**, 1467 (1948)]. Die gleichartigen Fälle geben sehr ähnliche Formen und führen alle zur Forderung eines schmalen Zwischenfrequenzbandes ohne Begrenzer. *W. O. Schumann* (München).

Optik:

Weinstein, W.: The computation of wave-front aberrations of oblique pencils in a symmetrical optical system. Proc. phys. Soc. London, Sect. B **63**, 709—723 (1950).

In einer vorhergehenden Arbeit (dies. Zbl. **36**, 418) hat Verf. Gleichungen für die Aberrationskoeffizienten von Strahlenbündeln angegeben, deren Hauptstrahl eine endliche Neigung gegen die Achse des optischen Systems hatte. Hierbei waren die Aberrationskoeffizienten Δ von der Öffnung des optischen Systems in 4. bzw. 3. Potenz abhängig. In vorliegender Arbeit werden weitere Gleichungen für die sekundäre achsiale sphärische Aberration hinzugefügt, die eine Näherung der sphärischen Aberrationskoeffizienten 6. Ordnung für schiefe Strahlenbündel darstellen. Die Gesamtheit der erhaltenen Resultate, nämlich die sagittalen und meridionalen Brennpunktabstände, die „schiefen" Aberrationskoeffizienten 3. und 4. Ordnung und die „achsialen" Aberrationskoeffizienten 6. Ordnung geben eine sehr gute Näherung für die Aberration schiefer Bündel. An Hand dieser Formeln werden die Aberrationskoeffizienten einer Anzahl optischer Anordnungen berechnet und graphisch dargestellt und die so gefundenen Wellenflächen-Aberrationen mit den entsprechenden Aberrationen verglichen, die sich durch trigonometrische Strahlendurchrechnung für das System ergeben. Ein Vergleich der graphischen Darstellung dieser theoretisch bzw. trigonometrisch erhaltenen Aberrationsbeträge zeigt, daß eine verhältnismäßig weitgehende Übereinstimmung noch in verhältnismäßig großem Achsenabstand vorhanden ist. Verf. kommt zu dem Schluß, daß die von ihm angegebenen Formeln Eigenschaften des optischen Systems erkennen lassen, die sich auf anderem Wege nur durch eine sehr große Anzahl von Strahlendurchrechnungen finden lassen, die mindestens 4-mal so viel Zeit in Anspruch nehmen würden als die Berechnung der Aberrationskoeffizienten nach den abgeleiteten Formeln. *Picht* (Potsdam-Babelsberg).

Wayman, P. A.: The monocentric Schmidt-Cassegrain cameras. Proc. phys. Soc. London, Sect. B **63**, 553—561 (1950).

Für ein Cassegrain-Reflektor-System, das aus zwei konzentrischen Kugelspiegeln besteht, wird eine Schmidtsche Korrektionsplatte berechnet. Verf. geht hierbei so vor, daß die Schmidtsche Korrektionsplatte für einen mittleren Abstand von der Achse innerhalb eines kleinen Bereiches einer planparallelen Platte entspricht. Die Schmidtsche Korrektionsplatte trifft die Achse im gemeinsamen Krümmungsmittelpunkt der beiden Spiegel. Verf. errechnet den Brennpunkt der Zone des Spiegelsystems, die der neutralen Zone der Korrektionsplatte entspricht. Diesen Brennpunkt bildet er nunmehr rückwärts durch das Spiegelsystem (ohne Korrektionsplatte) ab, wobei das zugehörige Bild in Abhängigkeit von der jeweils gewählten Zone im allgemeinen nicht mehr im Unendlichen liegt. Er bestimmt nun die Korrektionsplatte an den von den einzelnen Zonenstrahlen getroffenen Stellen so, daß sie nach dem Durchgang durch die Platte parallel verlaufen. Die hierfür

erforderlichen Formeln werden abgeleitet. Anschließend werden Ausdrücke für die monochromatischen und chromatischen Aberrationen des allgemeinen monozentrischen Systems abgeleitet. Für ein typisches System wird die Bildqualität, die mit der monozentrischen Schmidt-Cassegrain-Kamera f/3,5 in der Mitte und am Rand eines Bildfeldes von 5° erzielt wurde, durch Zeichnungen veranschaulicht, die die Isophoten in der Umgebung der betreffenden Bildpunkte erkennen lassen. Diese Isophoten sind in verschiedenen Bildern für verschiedene Farben (*F*-, *g*- und *h*-Licht) dargestellt, um so auch einen Eindruck von der chromatischen Korrektion zu geben.

Picht (Babelsberg).

Hopkins, H. H. and P. M. Barham: The influence of the condenser on microscopic resolution. Proc. phys. Soc. London, Sect. B **63**, 737—744 (1950).

Die Objektebene besteht aus einem undurchsichtigen Schirm mit zwei gleichen, ultramikroskopisch kleinen Öffnungen, die den Abstand ϱ_0 voneinander haben. Die Intensitätsverteilung in der Gaußschen Bildebene wird ausgerechnet für 2 Fälle: 1. kritische Beleuchung (Abbildung der Lichtquelle auf das Objekt), 2. Köhlersche Beleuchtung (Abbildung der Lichtquelle in die Eintrittspupille des Objektivs), beidemal bei einer numerischen Apertur des Kondensors, die s-mal größer ist als die numerische Apertur (N. A.) des Objektivs. In beiden Fällen kommt bei der Rechnung die gleiche Intensitätsverteilung heraus. Das Auflösungsvermögen (der Abstand ϱ_0, bei dem die Bild-Intensität in der Mitte auf einen normierten Prozentsatz der Maximalintensität abgesunken ist) ist gleich $K \cdot \lambda/(\text{N. A.})$ gesetzt, und K ist als Funktion von s graphisch dargestellt im Intervall $0 \leqq s < 2$. Bei $s = 1$ hat K den bekannten Wert 0,61; bei $s \approx 1{,}4$ hat $K(s)$ ein Minimum, $K_{\min} = 0{,}57$.

Marx (Gießen).

Franz, Walter: Zur Theorie der Beugung am Schirm. Z. Phys., Berlin **128**, 432—441 (1950).

Im Anschluß an eine eigene frühere Arbeit (dies. Zbl. **31**, 333) sowie im Anschluß an eine Arbeit von W. Braunbek (dies. Zbl. **36**, 419) beschäftigt sich Verf. erneut mit der Theorie der Beugung am Schirm. Er diskutiert zunächst die Verhältnisse, wie sie durch Anwendung der Kirchhoffschen Formel auf die Beugung am Schirm bei Annahme der Werte von u_0 und $\partial u_0/\partial n$ entsprechend den bei ungehinderter Ausbreitung vorhandenen vorliegen. Bezeichnet man die aus der Kirchhoffschen Formel sich ergebende Lösung durch u_1, wobei das Integral der Kirchhoffschen Lösung bekanntlich über die Öffnung zu erstrecken ist, so ist die Funktion u_1 so bestimmt, daß sie beim Durchgang durch die Öffnungsfläche an deren Berandung unstetig um den Betrag u_0 zunimmt. Sie ist an der Kante nicht stetig, vielmehr ist ihr Wert von der Richtung abhängig, aus welcher man sich der Kante nähert. Man muß bei einem vollen Umlauf um die Kante die sprunghafte Änderung in der Öffnung durch eine stetige Änderung des Funktionswertes mit dem Winkel rückgängig machen, wodurch der Gradient von u_1 bei Näherung an die Kante unendlich groß wird, nämlich umgekehrt proportional zu dem Abstand φ von der Kante. In ähnlicher Weise diskutiert Verf. auch den Fall, daß die Beugung nicht an einem „schwarzen", sondern an einem idealreflektierenden ebenen Schirm stattfindet. In diesem Fall ist auch die von der reflektierten Welle erzeugte Beugungswelle hinzuzunehmen. Die Kirchhoffsche Formel läßt sich als 1. Schritt eines sukzessiven Näherungsverfahrens auffassen, wenigstens dann, wenn das von Braunbek angegebene Verfahren benutzt wird, das sich auf eine Berücksichtigung der Sommerfeldschen Lösung der Beugung an einer geraden Kante aufbaut, in dem die krummlinige Begrenzung des Schirmes bzw. der Öffnung durch die (differentiellen) Tangentenelemente ersetzt wird. Verf. betrachtet die Beugung als Sprungwertaufgabe, deren Lösung die bekannte Kirchhoffsche Formel ist. Dabei bestimmen sich die gebeugten Wellen stets daraus, daß sie längs gegebener Flächen vorgegebene Unstetigkeiten der Funktionen und ihrer Normalableitung aufweisen müssen. Die Regularisierung der Kirchhoffschen Näherung geschieht nach Braunbek so, daß man den Integranden in einem schmalen Streifen jenseits der Kante abnehmen läßt. Man benutzt das Integral $u_1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\text{Öffnung}} u_0 \frac{\partial e^{ikr}/r}{\partial n} df$ für die Randbedingung $\partial u/\partial n = 0$ unverändert, fügt ihm jedoch ein analoges Integral über einen schmalen Streifen des Schirmes hinzu, in welchem man den Funktionswert stetig gegen 0 gehen läßt. Die Größe u_1 verletzt dabei nach wie vor die Randbedingung auf dem Schirm, was durch eine zweite Näherung in Ordnung gebracht werden muß. Dies geschieht wieder auf Kosten der Stetigkeit in der Öffnung, die dann in der dritten Näherung hergestellt werden muß usf. —

Entsprechende Überlegungen wendet Verf. auf die Beugung an gekrümmten Schirmen an. In einem Anhang werden diese verhältnismäßig allgemein gehaltenen Überlegungen auf die Beugung an einer unbegrenzten, vollbeleuchteten und vollsichtbaren, idealreflektierenden Kugelfläche im Limes kurzer Wellenlänge mathematisch ausführlich angewandt. *Picht* (Babelsberg).

Copson, E. T.: Diffraction by a plane screen. Proc. R. Soc., London, Ser. A **202,** 277—284 (1950).

Ein Einwand von Bouwkamp [Math. Rev. 8, 179 (1947)] gegen die vom Verf. [Proc. R. Soc., London, Ser. A **186**, 100—118 (1946)] angegebene Integralgleichungsmethode für die Berechnung der Beugung einer elektromagnetischen Welle an einem ebenen vollkommen leitenden Schirm wird durch eine veränderte Herleitung der Integralgleichungen widerlegt. In die Lösung der Integralgleichungen geht eine willkürliche Funktion ein, welche dazu benützt werden muß, um unzulässige Singularitäten an der Schirmkante auszuschließen. Daß es stets möglich ist, dies durch geeignete Wahl der willkürlichen Funktion zu erreichen, vermag Verf. nicht zu beweisen, doch wird zur Illustration das Beispiel der Beugung einer aus beliebiger Richtung einfallenden ebenen elektromagnetischen Welle an einer vollkommen leitenden Halbebene durchgerechnet. *W. Franz* (Münster).

Mirimanov, R. G.: Die Beugung einer elektromagnetischen Welle um eine kreisförmige Scheibe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **61,** 617—620 (1948) [Russisch].

Verf. berechnet die Beugung einer skalaren Welle an einer kreisförmigen Scheibe (Quelle dabei auf der Achse der Scheibe gelegen) nach der Kirchhoffschen Formel, welche zuerst in bekannter Weise in ein Linienintegral über den Rand der Scheibe umgewandelt wird. Anschließend wird angegeben, in welcher Weise das elektromagnetische Problem auf skalare Funktionen zurückgeführt werden kann, wenn die Quelle ein Hertzscher Dipol parallel oder senkrecht zur Achse ist. Zum Schluß wird das Verhalten der gebeugten Welle qualitativ beschrieben. *Franz.*

Wolter, Hans: Die Minimumstrahlkennzeichnung als Mittel zur Genauigkeitssteigerung optischer Messungen und als methodisches Hilfsmittel zum Ersatz des Strahlbegriffs. Ann. Phys., Leipzig, VI. F. **7,** 341—368 (1950).

Verf. hat in einer Reihe von Arbeiten besonders eingehend auf die bekannte Tatsache hingewiesen, daß sich die Stellen der Intensitätsminima bei Interferenzversuchen im allgemeinen genauer lokalisieren lassen als die Stellen der Intensitätsmaxima. Er wies darauf hin, daß man durch die Benutzung der Intensitätsminima eine Steigerung der Genauigkeit bei optischen Messungen erzielen kann. In vorliegender Arbeit untersucht er vom theoretischen Standpunkt aus diese Genauigkeitssteigerung unter den verschiedensten Voraussetzungen. Sowohl durch graphische Darstellungen als auch durch Wiedergabe photographischer Aufnahmen werden die aus der Theorie folgenden Vorteile der Minimumstrahlkennzeichnung sehr anschaulich gemacht. Insbesondere geht Verf. auch auf den Einfluß des Störlichtes und der Belichtungszeit auf die Grenzen der Meßgenauigkeit ein. Desgleichen diskutiert er die Kohärenztoleranzen. Die Diskussion einiger praktischer Beispiele für die Anwendbarkeit der Minimumstrahlkennzeichnung zeigt deren Vorteile gegenüber der Benutzung der Intensitätsmaxima. *Picht* (Babelsberg).

Artmann, Kurt: Beugung an einer einbackigen Blende endlicher Dicke und der Zusammenhang mit der Theorie der Seitenversetzung des totalreflektierten Strahles. Ann. Phys., Leipzig, VI. F. **7,** 209—212 (1950).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **36,** 421) hat Verf. eine Erweiterung der bekannten Sommerfeldschen Lösung der Maxwellschen Gleichungen, die sich auf die Beugung an einer unendlich dünnen Halbebene bezogen, vorgenommen. Er betrachtete in der angegebenen Arbeit eine metallische Halbebene endlicher Dicke, die an der beugenden Kante durch einen halben Kreiszylinder begrenzt war. Wird diese Halbebene von einer ebenen Welle beleuchtet, so ergibt sich je nach der Polarisationsrichtung der einfallenden ebenen Wellen eine positive oder negative Seitenverlagerung der Schattengrenze. Verf. diskutiert nun in vorliegender Arbeit den Einfluß dieser Seitenversetzung auf den bekannten Versuch von Goos und Hänchen über die Seitenversetzung des Lichtes bei der Totalreflexion. Er zeigt, daß beide Seitenversetzungen, die durch

die das Bündel begrenzende Blende und die durch die Totalreflexion, von gleicher Größenordnung sind, sofern der Einfallswinkel in unmittelbarer Nähe des Grenzwinkels der Totalreflexion liegt. Ist dies nicht der Fall, weicht z. B. der Einfallswinkel um etwa 10° vom Grenzwinkel der Totalreflexion ab, so ist die Seitenversetzung durch den Schirmrand 10- bis 20mal größer als die von der Totalreflexion herrührende. Im Experiment von Goos und Hänchen ist aber die durch den Schirm bedingte Seitenversetzung von untergeordneter Bedeutung, da der Lichtstrahl 70mal und öfter totalreflektiert wurde, während er nur 1mal die durch die Blende bedingte Seitenversetzung erfuhr. — Es folgen noch einige Bemerkungen zu einer Arbeit von C. v. Fragstein, die sich gleichfalls mit der Theorie der Seitenversetzung des totalreflektierten Strahles beschäftigt.

Picht (Potsdam-Babelsberg).

Abelès, Florin: La théorie générale des couches minces. (Colloque sur les propriétés optiques des lames minces, Marseille 1949.) J. Phys. Radium **11**, 307—309 (1950).

Verf. weist darauf hin, daß sich bei der Behandlung der lichtoptischen Vorgänge beim Durchgang des Lichtes durch hintereinander angeordnete Schichten der neuerdings in der optischen Literatur eingeführte Begriff „Impedanz", der aus der Elektrodynamik elektrischer Schwingungsvorgänge bekannt ist, bewährt hat. Bei einer einzigen, zwei homogene isotrope durchsichtige Medien trennenden Fläche ergibt sich hiermit der Fresnelsche Reflexionskoeffizient r zu $(Z_1 - Z_0)/(Z_1 + Z_0)$, worin die Impedanzen Z_i für eine in der Einfallsebene polarisierte Welle $(E_\parallel)$ den Wert $Z_i = 1/(n_i \cos \varphi_i)$, für eine senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Welle $(E_\perp)$ den Wert $Z_i = \dfrac{\cos \varphi_i}{n_i}$ haben, wobei n_i und φ_i den Brechungsindex bzw. den Einfallswinkel (Brechungswinkel) jedes Mediums bedeuten. Verf. bespricht kurz unter Verweis auf eigene Arbeiten sowie Arbeiten anderer Autoren die Anwendung des Impedanzbegriffes auf verschiedene Fälle dünner Schichten sowohl homogener als auch inhomogener, aber isotroper Medien, wozu also auch die geschichteten Medien als Grenzfall unendlich kleiner Dicke der dünnen Schichten gehören. Man kann beispielsweise eine dünne Schicht durch eine Matrix

$$(M) = \begin{pmatrix} \cos\beta & i Z \sin\beta \\ i Z^{-1} \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

charakterisieren, in der $\beta = 2\pi \lambda^{-1} \sqrt{\varepsilon \mu} \cdot d \cdot \cos\varphi$ mit d = Dicke der Schicht bedeutet und $|(M)| = 1$ ist. Bei mehreren dünnen Schichten hat man die Matrizen in der Reihenfolge der Schichten zu multiplizieren. Man erhält so für die Gesamtheit der Schichten wieder eine Einheitsmatrix. Bei inhomogenen Medien, deren optische Eigenschaften als schwach veränderliche Funktionen einer Variablen $0 \leq z \leq d$ angesprochen werden können, nimmt die Matrix die Form

$$(M) = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{Z_1}{Z_f}} \cos\beta & i\sqrt{Z_1 Z_f} \sin\beta \\ \dfrac{i}{\sqrt{Z_1 Z_f}} \sin\beta & \sqrt{\dfrac{Z_1}{Z_f}} \cos\beta \end{pmatrix}$$

mit $\beta = \dfrac{2\pi}{\lambda} \int_0^d \sqrt{\varepsilon \mu} \cos\varphi \, dz$ an, wo Z_1 und Z_f die beiden Extremwerte der Impedanzen des inhomogenen Mediums der Dicke d sind.

Picht (Babelsberg).

Abelès, F.: La détermination de l'indice et de l'épaisseur des couches minces transparentes. (Colloque sur les propriétés optiques des lames minces, Marseille 1949). J. Phys. Radium **11**, 310—314 (1950).

In dieser Arbeit berichtet Verf. über die verschiedenen Methoden zur Bestimmung des Brechungsindex und der Dicke dünner durchsichtiger Schichten. Hier behandelt er zunächst die spektrophotometrischen Methoden, die mit senkrechtem, sodann diejenigen, die mit schiefem Einfall der ebenen Welle arbeiten. In beiden Fällen wird das Maximum oder Minimum des Reflexionsvorganges experimentell bestimmt, sofern ein solches vorhanden ist. Angenommen wird, daß die Brechungsindizes der Schicht nur wenig mit der Wellenlänge variieren. Die Methoden werden — auch vom mathematischen Standpunkt an Hand der Formeln — eingehend diskutiert. Anschließend werden die photometrischen Methoden gegenüber empfindlicheren polarimetrischen Methoden näher beschrieben und im Anschluß an die hierfür geltenden Formeln diskutiert. Hierbei wird im allgemeinen der Haupteinfallswinkel benutzt, für den aus der linearpolarisiert einfallenden Welle eine elliptisch polarisierte wird, für die also der Phasenunterschied zwischen $\delta_{r_\parallel}$ und $\delta_{r_\perp} = 90°$ ist. *Picht.*

Aggarwal, Ram Ratan: Diffraction of light by ultrasonic waves. (Deduction of the different theories from the generalized theory of Raman and Nath.) Proc. Indian Acad. Sci. A **31**, 417—426 (1950).

Im Anschluß an die bereits früher durchgeführten Behandlungen der Beugung des Lichtes durch Ultraschallwellen (z. B. von Brillouin, Rytov, E. David, und insbesondere von Raman und Nath) behandelt Verf. in vorliegender Arbeit erneut diese Frage. Er geht aus von der Differentialgleichung, die von Nath für die Amplitude der Beugungslinie n-ter Ordnung angegeben worden war. Dabei wird die Annahme gemacht, daß das zentrale Strahlenbündel den Ultraschallbereich ohne Verlust oder Gewinn an Intensität durchsetzt und daß das Beugungsbild keine Linien höherer als erster Ordnung enthält. Für diesen Fall wird die Intensität der Linie erster Ordnung berechnet. — Für einen 2. Fall, bei dem es sich um die Bestimmung der Intensität der Linien zweiter Ordnung handelt, setzt Verf. voraus, daß die Intensität des zentralen Bündels keine Änderung infolge der Beugung erleidet, daß ferner keine Beugungslinien höherer als zweiter Ordnung im Beugungsbild auftreten und daß der für den 1. Fall berechnete Wert für die komplexe Amplitude der Beugungslinien erster Ordnung (bei Abwesenheit der Linien zweiter Ordnung) benutzt werden kann. — Endlich wird noch der 3. Fall behandelt, die Bestimmung der Intensität der Linien erster und zweiter Ordnung, u. zw. unter der Voraussetzung, daß nur diese Linien im Beugungsbild auftreten und daß die Intensität des zentralen Bündels den Wert 1 hat. — Verf. schließt aus seinen Berechnungen, daß die theoretischen Behandlungen der Frage durch Brillouin, durch Rytov sowie durch E. David nur Spezialfälle der allgemeinen Theorie von Raman und Nath sind. *Picht* (Babelsberg).

Linfoot, E. H.: On phase-contrast testing with a slit source. Proc. phys. Soc. London, Sect. B **63**, 527—539 (1950).

Bei dem üblichen Phasenkontrastverfahren wird im allgemeinen eine kreisförmige Phasenplatte benutzt, die das durchgehende Licht — das ja in der Ebene der Phasenplatte seine Konzentrationsstelle besitzt — nur in dem Bereich innerhalb des ersten dunklen Beugungsringes in seiner Phase beeinflussen soll. Die Phasenplatte bzw. ihr wirksamer Teil hat daher nur einen Durchmesser, der innerhalb des Durchmessers des Airyschen Beugungsscheibchens liegt. In der Praxis bedeutet dies in manchen Fällen für die Helligkeit des Bildes einen Nachteil, da auch gleichzeitig die das Objekt beleuchtende Lichtquelle sehr klein sein muß, damit das Bild der Lichtquelle etwa der Größe des Airyschen Beugungsscheibchens entspricht. Diese geringe Helligkeit kann vermieden werden, indem man eine spaltförmige Lichtquelle benutzt und entsprechend als Phasenplatte eine streifenförmige phasenändernde Platte wählt. Die Benutzung einer linearen Lichtquelle und einer streifenförmigen Phasenplatte bedingt indessen gewisse Unterschiede im beobachteten Bild. Verf. weist z. B. darauf hin, daß die Helligkeitsverteilung, die man auf der Oberfläche eines einwandfreien Spiegels sieht, den man mittels der Phasenkontrastmethode prüft, nicht mehr radialsymmetrisch sein wird, wie dies bei einer kreisförmigen Phasenblende und näherungsweise punktförmigen Lichtquelle der Fall ist. — Verf. untersucht nun die Eigenschaften eines solchen Phasenstreifens in Anwendung auf die Prüfung eines optischen Systems, u. zw. für den mathematisch einfachsten Fall, daß die Lichtquelle ein Spalt vernachlässigbarer Breite ist, durch den monochromatisches Licht hindurch geht. Es zeigt sich, daß bei unter diesen Voraussetzungen durchgeführten Prüfungen einer optischen Fläche noch eine Genauigkeit von etwa $\frac{1}{20}$ Streifenbreite erzielt wird. Die mathematischen Ergebnisse werden an einigen zahlenmäßigen Beispielen rechnerisch und graphisch dargestellt. *Picht.*

Glaser, Walter: Berechnung der optischen Konstanten starker magnetischer Elektronenlinsen. Ann. Phys., Leipzig, VI. F. **7**, 213—227 (1950).

Da wegen der angestrebten hohen Vergrößerungen im Übermikroskop das zu