Werk

Titel: Algebra und Zahlentheorie

Ort: Berlin

Jahr: 1951

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0037|log6

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

tische entspricht, weil die Herstellung der ausgesagten Abbildung (im Bereich des Definierbaren) sofort mit sämtlichen Schwierigkeiten des Transfiniten belastet wird, die in Kapitel 2 erörtert wurden. *Neumer* (Mainz).

Schmidt, Arnold: Wie dürfen wir mit dem Unendlichen umgehen? (Die Grundlage des mathematischen Intuitionismus.) Math.-phys. Semesterber., Göttingen **1**, 200—212 (1950).

In diesem vor dem Mathematischen Förderungsverein gehaltenen Vortrag diskutiert der Verf. zunächst an einem Beispiel die Möglichkeit, daß eine Frage über eine unendliche Zahlenfolge an sich offen bleibt, weil eine generelle gesetzmäßige Entscheidung nicht erreichbar ist und die Vorstellung der individuellen Allgemeinheit sich im Unendlichen verliert, weist auf Schwierigkeiten hin, die sich aus der Vorstellung einer unendlichen Menge natürlicher Zahlen als fertiger Gesamtheit ergeben, und entwickelt dann die intuitionistischen Grundideen. Es wird gezeigt, wie Sätze der klassischen Analysis ihre Gültigkeit verlieren, die Einengung des Funktionsbegriffs durch die Forderung der Berechenbarkeit geschildert und zum Schluß auf die Aufhebung eines beweistheoretischen Tertium non datur hingewiesen.

Bachmann (Kiel).

● **Frege, G.: The foundations of arithmetic: A logico-mathematical inquiry into the concept of number. — English translation by J. L. Austin.** Oxford: B. H. Blackwell, Ltd., 1950. XXII, 238 p.; 16 s. net.

Algebra und Zahlentheorie.

Kombinatorik:

Chowla, S. and H. J. Ryser: Combinatorial problems. Canadian J. Math. **2**, 93—99 (1950).

Es seien v, k und λ ganze Zahlen, die den Bedingungen

$$0 < \lambda = k(k-1)/(v-1) < k < v$$

genügen. Verff beschäftigen sich mit v-zeiligen quadratischen Matrizen $M(v, k)$ aus lauter Elementen 0, 1, die einige folgender Eigenschaften haben. α (α'): In jeder Zeile (Spalte) stehen genau k Elemente 1. β (β'): In jedem Paar von Zeilen (Spalten) stehen genau an λ Stellen zwei 1 über- (neben-) einander. γ: Die Matrix ist (symmetrisch und) zyklisch. Die Frage der Existenz von Matrizen $M(v, k)$ mit den Eigenschaften α, β bzw. α, α', β bzw. α, α', β, β' bzw. α, α', β, β', γ wird der Reihe nach als Problem I, II, III, IV bezeichnet. Diese Probleme lassen auch manche anderen interessanten Formulierungen zu, die in der Kombinatorik, in der Theorie der endlichen projektiven Ebenen, der Hadamardschen Matrizen usw. wichtig sind. Problem I ist z. B. mit der Frage äquivalent, ob sich v Elemente derart in v Klassen mit je k Elementen zerlegen lassen, daß jedes Klassenpaar genau λ gemeinsame Elemente besitzt. Ferner ist Problem IV mit der Existenzfrage einer k-gliedrigen Differenzenmenge mod v äquivalent, wobei man unter einer solchen nach Singer [Trans. Amer. math. Soc. **43**, 377—385 (1938); dies. Zbl. **19**, 5] eine Menge $d_1, \ldots, d_k$ von ganzen Zahlen zu verstehen hat, so daß $d_i - d_j \equiv n \pmod{v}$ für jede einzelne Zahl $n = 1, 2, \ldots, v-1$ genau mit λ geordneten Paaren d_i, d_j gilt. Verff. gewinnen folgende Sätze: Die Probleme I, II, III haben dieselben Lösungen $M(v, k)$. Es gibt unendlich viele Zahlenpaare v, k, für welche Problem III lösbar, Problem IV aber unlösbar ist. Besitzt nämlich v einen Primfaktor $p \equiv 3 \pmod 4$ und der quadratfreie Kern von $k-\lambda$ einen ungeraden Primfaktor q mit $\left(\frac{-p}{q}\right) = -1$, so ist v, k ein solches Zahlenpaar. Es gibt auch unendlich viele Paare v, k, die keine Lösung für Problem I gestatten. Dies ist der Fall immer, wenn für eine gerade Zahl v der quadratfreie Kern von $k-\lambda$ verschwindet, oder wenn für $v \equiv (-1)^m \pmod 4$

der quadratfreie Kern von $k-\lambda$ einen ungeraden Primfaktor q mit

$$\left(\frac{(-1)^m \lambda}{q}\right) = -1$$

besitzt. *T. Szele* (Debrecen).

Lineare Algebra. Polynome. Invariantentheorie:

Hua, Loo-Keng: Geometries of matrices. II. Study of involutions in the geometry of symmetric matrices. Trans. Amer. math. Soc. **61**, 193—228 (1947).

A, B, C, D, X, Y, Q désignant des matrices complexes $n \times n$, I, O resp. la matrice-unité et la matrice nulle, la matrice, $n \times 2n$, (X, Y) est dite symétrique si $XY' - YX' = 0$, X' et Y' étant resp. les transposées de X et Y. Deux matrices symétriques (X, Y), (X_1, Y_1) appartiennent à la même classe si $X_1 = QX$, $Y_1 = QY$, Q régulière; une classe définit un point de l'espace projectif des matrices symétriques. La distance arithmétique de deux points (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) est le rang de la matrice $X_1 Y_2' - Y_1 X_2'$. Le centre du groupe des matrices symplectiques $\mathfrak{T}$ d'ordre $2n$:

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{T}\mathfrak{F}\mathfrak{T}' = \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{F} = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix},$$

est formé des deux éléments $\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix}$, $-\mathfrak{J}$; le groupe-quotient est isomorphe au groupe des transformations symplectiques:

$$(X_2, Y_2) = Q(X_1, Y_1)\mathfrak{T} \tag{1}$$

en coordonnées homogènes (X, Y),

$$Z_1 = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \tag{2}$$

en coordonnées non-homogènes $Z = Z'$. — L'A. étudie les involutions et les anti-involutions, leur forme normale, leurs points fixes ainsi que les automorphismes continus du groupe des transformations symplectiques. — La transformation (1) est une involution de première ou de seconde espèce suivant que $\mathfrak{T}^2 = \mathfrak{J}$ ou $\mathfrak{T}^2 = -\mathfrak{J}$; une anti-transformation symplectique

$$Q(X_2, Y_2) = (\bar{X}_1, \bar{Y}_1)\mathfrak{T} \tag{3}$$

est une anti-involution de première ou de seconde espèce suivant que $\mathfrak{T}\bar{\mathfrak{T}} = \mathfrak{J}$ ou $\mathfrak{T}\bar{\mathfrak{T}} = -\mathfrak{J}$. Toute involution de première espèce est symplectiquement équivalente à $Z_1 = HZH$, où H est la matrice diagonale $[+1, +1, \ldots, +1, -1, \ldots, -1]$, p termes $+1$, q termes -1, $p + q = n$, $p \leq q$. Toute involution de seconde espèce est équivalente à $Z = -Z$. Deux transformations anti-symplectiques de matrices $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ sont dites équivalentes s'il existe une matrice symplectique $\mathfrak{P}$ telle que $\bar{\mathfrak{P}}^{-1}\mathfrak{T}_1\mathfrak{P} = \mathfrak{T}_2$. Les anti-involutions de première espèce et de seconde espèce sont resp. équivalentes à $Z = \bar{Z}^{-1}$ et à $Z = -H\bar{Z}^{-1}H$,

$$H = [+1, \ldots, +1; -1, \ldots, -1], \quad p \leq q.$$

— Toute involution est le produit de deux anti-involutions commutatives de première espèce et toute anti-involution de seconde espèce est le produit de trois anti-involutions de première espèce, commutant deux-à-deux. Une transformation symplectique est le produit de deux involutions de seconde espèce. Une involution de seconde espèce possède deux points isolés, c'est-à-dire deux points dont la distance arithmétique vaut n. — L'A. détermine les éléments fixes des involutions de première espèce et des anti-involutions et fait une étude des involutions commutatives. Finalement, il montre que tout automorphisme continu du groupe des transformations symplectiques est soit un automorphisme intérieur soit une transformation anti-symplectique. *Th. Lepage* (Bruxelles).

Richter, H.: Über Matrixfunktionen. Math. Ann., Berlin **122**, 16—34 (1950).

Eine allgemeine stetige Matrixfunktion $B = F(A)$ liegt bekanntlich dann vor, wenn die Komponenten von B eindeutige, stetige Funktionen der Komponenten von A sind und falls für $|C| \neq 0$ $F(CAC^{-1}) = CBC^{-1}$ ist. A habe lauter verschiedene Eigenwerte, dann kann A auf Diagonalform transformiert werden: $(\lambda_r) = CAC^{-1}$, auch die Matrix CBC^{-1} besitzt dann Diagonalform (μ_r): $\mu_r = g_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. g_r ist eine symmetrische Funktion der λ_i $(i \neq r)$. Sind $s_1, \ldots, s_{n-1}$ die $n-1$ ersten Potenzsummen der Eigenwerte, dann gilt offenbar $\mu_r = h(\lambda_r, s_1, \ldots, s_{n-1})$. Für B wird dann als erste Normaldarstellung geschrieben $B = h(A, s_1, \ldots, s_{n-1})$. — Eine Matrixfunktion heißt gewöhnliche Matrixfunktion, falls sie erhalten wird durch Anwendung einer stetigen Funktion $y = f(x)$ auf eine Matrix A: $B = f(A)$, in dem Sinne, daß man sich A und also auch B auf Diagonalform transformiert denkt und $\mu_r = f(\lambda_r)$ setzt entsprechend der ersten Normaldarstellung. Die Abhängigkeit von den s_i entfällt hier. Die gewöhnliche Matrixfunktion $B = f(A)$ heißt speziell analytisch, wenn $f(x)$ an den Stellen der Eigenwerte von A analytisch ist. Die Theorie der analytischen Matrixfunktionen wird auf diejenige der Funktionen von Matrizen mit lauter zusammenfallenden Eigenwerten zurückgeführt, und das Umkehrproblem wird behandelt und durch interessante Beispiele belegt — Für analytische Matrixfunktionen $B = f(A)$ ist die Ableitung $f'(A)$ eindeutig definiert. Unter der „Variation in Richtung der Matrix D" verstehe man $\delta f(A) = f(A + tD) - f(A)$ $(t \ll 1)$. Es gilt $\delta f(A) = t f'(A) D + O(t^2)$, falls $AD = DA$, entsprechend dem Satz, daß nur in einem kommutativen System eine Ableitung im üblichen Sinne existiert Hingegen gilt bei einer beliebigen Matrix D, daß die Spur s der Matrix $G\{\delta f(A) - tf'(A) D\}$ von $O(t^2)$ ist, wo G eine beliebige mit A vertauschbare Matrix bedeutet. *Kriszten* (Zürich).

Parodi, Maurice: Sur une application d'un théorème de M. Müller. Bull. Sci. math., II. S. **73**$_{\text{I}}$, 192—196 (1949).

Es sei $A = \det(a_{ik})$, a_{ik} reell, $s_i = a_{ii} - \sum_{k=1}^{n}{}' |a_{ik}| > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; dann ist nach Hadamard $A \neq 0$ und nach einer früheren Untersuchung des Verf. (dies. Zbl. **33**, 343) genauer $A > 0$. — Wenn für irgendeine Permutation $p_1, \ldots, p_n$ der Zahlen $1, \ldots, n$ alle Zahlen

$$(*) \qquad s_i' = |a_{ip_i}| - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p_i}}^{n} |a_{ik}| > 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

sind, ist nach M. Müller (dies. Zbl. **30**, 291) $A \neq 0$; (A hat dann das Vorzeichen derjenigen Determinante, die aus A dadurch entsteht, daß man $a_{ik} = 0$ setzt für $k \neq p_i$). Verf. gibt für den Fall, daß n Vielfaches von 3 bzw. 4 ist, und für die Permutationen

$$2, 1, 3, 5, 4, 6, \ldots, n-3+2, n-3+1, n \quad \text{bzw.}$$

$$2, 1, 3, 4, 6, 5, 7, 8, \ldots, n-4+2, n-4+1, n-4+3, n$$

schärfere Bedingungen für die Elemente a_{ik} an, unter denen genauer A und sogar alle seine Hauptminoren positiv sind. Dies trifft z B. im ersten Fall zu, wenn außer den Ungleichungen (*) die Ungleichungen $a_{ii} > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $a_{3\lambda+1,3\lambda+2}\, a_{3\lambda+2,3\lambda+1} < 0$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, (n-3)/3)$ gelten und die Hauptdiagonalelemente der Zeilen Nr. 4, 7, 10, $\ldots$, $n-2$ größer sind als die Summe der Beträge der Elemente, die in derselben Zeile links von ihnen stehen. [Beim Verf. sind diese Bedingungen teilweise falsch formuliert, z. B. widersprechen sich seine Bedingungen (3) und (4a)]. — Außerdem benutzt Verf. das Ergebnis des Ref., um in den hier betrachteten Fällen Bereiche abzugrenzen, in denen die charakteristischen Zahlen der Matrix $\|a_{ik}\|$ liegen. *M. Müller* (Tübingen).

Sherman, Jack and Winifried J. Morrison: Adjustment of an inverse matrix corresponding to a change in one element of a given matrix. Ann. math. Statist., Baltimore Md. **21**, 124—127 (1950).

Die quadratische Matrix $\mathfrak{A}' = (a'_{ik})$ unterscheide sich von der Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ nur im Element der R-ten Zeile und S-ten Spalte: $a'_{RS} - a_{RS} = \Delta$. $\mathfrak{B}' = (b'_{ik})$ und $\mathfrak{B} = (b_{ik})$ seien die resp. Inversen von $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}$. Dann gilt:

$$b'_{ik} - b_{ik} = -\Delta \cdot b_{iR}\, b_{Sk}/(1 + \Delta \cdot b_{SR}),$$

wobei der Nenner genau dann verschwindet, wenn $\mathfrak{A}'$ singulär ist. Die angegebene, etwas umständlich bewiesene Formel eignet sich zur numerischen Berechnung der Inversen von Matrizen hoher Ordnung, wenn nach Berechnung der Inversen der Ausgangsmatrix nur wenige Elemente derselben geändert werden. — Durchführung eines numerischen Beispieles. *Hans Richter* (Haltingen/Baden).

Foulkes, H. C.: Differential operators associated with S-functions. J. London math. Soc. **24**, 136—143 (1949).

L'A. poursuit l'étude des fonctions de Schur sur les groupes symétriques [cf. D. E. Littlewood, Theory of group characters and matrix representations of groups of finite order, Oxford (1940); ce Zbl. **25**, 9] en généralisant le produit de deux fonctions de Schur et les résultats de Zia-ud-Din [Proc. Edinburgh math. Soc. **5**, 43—45 (1936); ce Zbl. **15**, 54]. *J. Braconnier* (Lyon).

Mejman, N. N.: Einige Fragen der Lage der Nullstellen von Polynomen. Uspechi mat. Nauk **4**, Nr. 6 (34), 154—188 (1949) [Russisch].

Verf. gibt eine zusammenfassende Darstellung und elementare Herleitung einer Reihe von Sätzen, die etwas über die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms in einem gegebenen Intervall bzw. Gebiet der komplexen Ebene aussagen, und zwar in anderer Form, als es in dem Buch von N. G. Čebotarev und N. N. Mejman „Das Routh-Hurwitzsche Problem für Polynome und ganze Funktionen" (Trudy mat. Inst. Steklov Nr. 26, Moskau 1949) durchgeführt wurde. Er beginnt, von einfachen algebraischen Eigenschaften der Polynome ausgehend, mit der Cartesischen Zeichenregel und der Sturmschen Kette sowie deren verschiedenen, z.T. klassischen Verallgemeinerungen. Sodann wendet er sich dem entsprechenden zweidimensionalen Problem zu und geht dabei von der Hurwitzschen Aufgabe aus, die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms zu ermitteln, die in einer bestimmten Halbebene, etwa der oberen, liegen. Die Ergebnisse sind in zahlreichen Einzelsätzen (im ganzen 19) formuliert. Wieweit diese wenigstens inhaltlich bereits in den einschlägigen Arbeiten von Hurwitz, Routh, Cohn u. a. zu finden sind bzw. welche Verfeinerungen der Verf., dessen Leistung vor allem im Methodischen zu suchen sein dürfte, selbst gefunden hat, ist aus der Arbeit nicht zu ersehen. — Im vorletzten Paragraphen bringt Verf. einen anscheinend neuen Zusammenhang zwischen den Nullstellen eines Polynoms $F(z) = g(z) + i\,h(z)$ und denen seiner „Komponenten" $g(z)$ und $h(z)$, im letzten behandelt er schließlich eine Verallgemeinerung des Schurschen Algorithmus [I. Schur, Math. Z. **1**, 377—402 (1918)] zur Abzählung der Wurzeln eines Polynoms, die im Inneren des Einheitskreises liegen. *W Hahn* (Berlin).

Kuipers, L.: Note on the location of zeros of polynomials. Proc. Akad. Wet., Amsterdam **53**, 482—486; Indag. math., Amsterdam **12**, 134—138 (1950).

Verf. beweist fünf Sätze, vier sind ähnlich den Sätzen des Ref. (dies. Zbl. **32**, 247), der fünfte verallgemeinert einen Satz einer anderen Arbeit des Ref. (dies. Zbl. **33**, 97). — Es gilt z. B. der Satz: Haben die Halbebenen E_1 und E_2 die Grenzgerade l, enthält E_1 bzw. E_2 die Nullstellen des Polynoms

$$f(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n) \quad \text{bzw.} \quad g(z) = (z - b_1)(z - b_2) \cdots (z - b_n)$$

und bezeichnen α und β zwei Punkte von E_1, für die $|\alpha - \beta| > d = \max |\alpha - a_k|$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sind, so ist das Polynom $f(z) + g(z)$ in den gemeinsamen inneren

Punkten einer Parabel P und einer Hyperbel H von Null verschieden. Die Parabel P hat den Brennpunkt bzw. die Leitlinie in α bzw. in l. Die Hyperbel H hat die Brennpunkte α und β und die Hauptachsenlänge d. *Gy. Sz.-Nagy* (Szeged).

Gruppentheorie:

Clifford, A. H.: Extensions of semigroups. Trans. Amer. math. Soc. **68**, 165—175 (1950).

L'A. emploie les locutions suivantes: semigroupe Σ = système muni d'une opération binaire associative notée ab pour laquelle la loi de simplification n'est pas obligatoire; idéal S dans Σ = partie de Σ telle que $a \in S$ et $b \in S$ impliquent $ab \in S$ et $ba \in S$; semigroupe différence $T = \Sigma - S$ = semigroupe obtenu en conservant les éléments de Σ non dans S et en remplaçant par un même élément zéro tout élément de S. Le problème d'une extension de S par T consiste à trouver un semigroupe $\Sigma \supset S$ et tel que le semigroupe différence $\Sigma - S$ soit isomorphe à T. Dans ce problème S est un semigroupe donné et T un semigroupe donné admettant un élément zéro et n'ayant aucun élément commun avec S. L'extension de S par T n'est pas toujours possible; mais lorsque S possède une unité bilatère elle est équivalente (théorème 2) à l'existence d'un homomorphisme ramifié de T dans S, c'est à dire d'une application $A \to \bar{A}$ de $T^* = T - \{0\}$ dans S qui respecte la propriété du produit lorsque celui-ci n'est pas nul ($\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$ quand $AB \neq 0$). Quand la condition (A) est satisfaite, c'est à dire quand les hypothèses $as = bs$ et $sa = sb$ pour tout s entraînent $a = b$, les extensions de S par T s'obtiennent au moyen d'homomorphismes ramifiés et enchaînés de T dans le semigroupe des translations de S à gauche Λ et à droite P. Expliquons ce langage. Une translation de S à gauche (ou à droite) se réduit dans le cas d'une unité bilatère à une application $s \to \lambda s$ (ou $s \to s\varrho$) de S dans lui-même; les deux translations définies par λ et ϱ sont enchaînées lorsque $s\lambda t = s\varrho t$ quels que soient s et t dans S; on considère alors les deux applications $A \to \lambda_A$ et $A \to \varrho_A$, où λ_A et ϱ_A sont constamment enchaînées, qui réalisent deux homomorphismes ramifiés de T dans Λ et P; l'extension de S par T est ensuite obtenue par la réunion des ensembles S et T^* avec un produit approprié (théorème 3). Le cas d'un semigroupe S de Rees, sans zéro et complètement simple [Proc. Cambridge phil. Soc. **36**, 387—400 (1940); ce Zbl. **28**, 4] fait l'objet du dernier paragraphe. Dans ce cas l'existence de l'extension Σ est assurée et sa réalisation obtenue. *L. Lesieur* (Poitiers).

Jaffard, Paul: Applications de la théorie des filets. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1125—1126 (1950).

Dans un groupe abélien réticulé G (ou latticed ordered abelian group) l'A. a introduit précédemment la notion de filet [voir C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1024—1025 (1950)] par l'équivalence suivante entre éléments de G_+: $a \equiv b$ si pour $x \in G_+$ les relations $a \cap x = 0$ et $b \cap x = 0$ s'impliquent mutuellement. Le filet $\bar{a}$ est alors la classe d'équivalence de a. Les applications visées par cette note 2 concernent la décomposition de G en un produit ordonné, ou en une somme ordonnée directe, de groupes totalement ordonnés. Cette décomposition, quand elle existe, est unique, et ne possède qu'un nombre fini de facteurs dans le cas d'une somme directe. La condition d'existence fait intervenir la propriété A: étant donnés deux filets $\bar{a}$ et $\bar{b}$, différents de 0, on peut trouver $x \equiv a$ tel que $x \not\leq b$, et la notion d'éléments indépendants a_i en nombre fini. [Les (a_i) sont indépendants si pour toute partie véritable (a_j) on a: $\bigcap (a_j) > \bigcap (a_i)$.] La condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe réticulé G soit le produit ordonné de n groupes totalement ordonnés (ou encore ait la dimension linéaire n) peut alors s'énoncer ainsi: G doit vérifier la propriété A, et n doit être

le nombre maximal d'éléments indépendants de G. Les démonstrations s'appuient sur les résultats de la note 1; elles sont clairement esquissées. *L. Lesieur.*

Jaffard, Paul: Nouvelles applications de la théorie des filets. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1631—1632 (1950).

Les résultats présentés dans cette troisième note concernent d'abord la décomposition d'un groupe réticulé G en somme directe de groupes totalement ordonnés. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une telle décomposition sont: 1. G vérifie la propriété A (voir l'analyse de la note 2 ci-dessus); 2. L'ensemble F des filets de G vérifie la condition de chaîne descendante; 3. F vérifie la condition de chaîne ascendante. La condition 3. peut d'ailleurs être remplacée par 3': F est relativement complémenté (c'est à dire que dans le treillis ou „lattice" F les relations $a \leq x \leq b$ entraînent l'existence d'un élément y tel que $x \cap y = a$ et $x \cup y = b$). L'A. étudie ensuite les réalisations irréductibles de G comme sous-groupe propre d'un produit Γ de groupes totalement ordonnés. (Sous-groupe propre = sous-groupe invariant par l'opération $\cap$.) La décomposition $\Gamma = \prod_{i \in I} G_i$ est irréductible pour G si G n'est pas sous-groupe propre du produit obtenu en supprimant une partie non vide de I. Le théorème 3 donne alors comme condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une décomposition irréductible Γ pour G: tout filet de G différent de $\bar{O}$ doit être supérieur ou égal à un filet minimal. Le théorème 4, qui termine la note, assure l'unicité d'une décomposition Γ irréductible pour G. Les démonstrations ne seront publiées qu'ultérieurement. *L. Lesieur* (Poitiers).

Tartakovskij, V.: Über den Prozeß des Auslöschens. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **58**, 1605—1608 (1947) [Russisch].

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ sei gegeben durch erzeugende Elemente $S_1, \ldots, S_m$ mit den Relationen

$$S_1^{n_1} = 1, \ldots, S_m^{n_m} = 1; \; f_1(S) = 1, \ldots, f_k(S) = 1.$$

[Die $f_k(S)$ sind dabei irgendwelche Wörter. Die n_μ werden formale Ordnungen genannt, die wirklichen Ordnungen der S_μ als Gruppenelemente können infolge der übrigen Relationen kleiner sein.] Ein Potenzprodukt $S_{i_1}^{\alpha_1} \cdots S_{i_\nu}^{\alpha_\nu}$ heißt gekürztes Wort, wenn $i_\rho \neq i_{\rho+1}$, die Exponenten $\alpha_\rho \neq 0$ sind und dem absolut kleinsten Restsystem mod. n_{i_ρ} angehören. In der Menge aller gekürzten Wörter wird eine lexikographische Ordnung eingeführt. Unter dem Tilgungsgebiet $\pi(\mathfrak{G})$ verstehe man die Gesamtheit aller gekürzten Wörter $\varphi(S)$ mit folgender Eigenschaft: Als Element von $\mathfrak{G}$ betrachtet [d. h. unter Beachtung von $f_\varkappa(S) = 1$, $\varkappa = 1, \ldots, k$] ist $\varphi(S)$ gleich einem Wort $\psi(S)$ mit $\psi(S) < \varphi(S)$ (im Sinne der lexikographischen Anordnung). Das Hauptproblem der vorliegenden Arbeit ist es, eine gewisse Übersicht über $\pi(\mathfrak{G})$ zu gewinnen. Wegen der Fülle der eigens zu diesem Zweck eingeführten Begriffe ist die Formulierung der Resultate recht kompliziert. Deshalb sei auf die Besprechung einer anderen Arbeit des Verf. verwiesen (dies. Zbl. **34**, 15).

R. Kochendörffer (Rostock).

Grün, Otto: Beiträge zur Gruppentheorie. IV. Über eine charakteristische Untergruppe. Math. Nachr., Berlin **3**, 77—94 (1950).

Ist G eine beliebige Gruppe und m eine ganze Zahl größer als 1, so sei G_m die von allen Elementen $(x\,y)^{-m}\, x^m\, y^m$ erzeugte Untergruppe von G. Diese wichtige vollinvariante Untergruppe ist der Durchschnitt aller, und also der kleinste, Normalteiler N von G mit der Eigenschaft: die Abbildung der Elemente von G/N auf ihre m-ten Potenzen ist ein Endomorphismus. [Über Gruppen mit dieser Eigenschaft vgl. z. B. F. Levi: J. Indian math. Soc., II. S. **8**, 1—9 (1944) und **9**, 37—42 (1945)]. G_2 ist die Kommutatorgruppe von G, und es gilt: $G_2 = G_{m-1}\, G_m\, G_{m+1}$. Bezeichnet G^i die von allen i-ten Potenzen von Elementen in G erzeugte Untergruppe von G, so sieht man sofort, daß $G_m \leqq G_2 \cap G^{m-1} \cap G^m$ ist. Gleichheit gilt hier nicht immer;

doch kann man zeigen, daß $G_m = G_2 \cap G^{m-1} \cap G^m$ gilt, wenn G eine freie Gruppe ist. Von den vielen interessanten, in dieser Abhandlung hergeleiteten Relationen zwischen diesen vollinvarianten Untergruppen seien nur die folgenden erwähnt: $G_m G_{m-1} = G_{m-1} G_2^{m-1} = G_2^{m-1} G_m$ und die $m(m-2)$-ten Potenzen der Elemente dieser Untergruppe sind in $G_{m-1} \cap G_m$ enthalten; $[G, G^{m-1}]\,[G, G^m]^{m-1} \leqq G_m$.
Baer (Urbana, Ill.).

Kinosita, Yosihisa: On an enumeration of certain subgroups of a p-group. J. Osaka Inst. Sci. Technology **1**, 13—20 (1949).

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist ein Satz, in welchem Verf. für p-Gruppen ein „Enumeration Principle" herleitet. Dieser Satz ist eine leichte Verallgemeinerung eines bekannten Resultates von P. Hall. Zum Beweis werden zwei vorbereitende Sätze vorangeschickt. Im ersten wird die Anzahl der Untergruppen mit gegebenen Invarianten in einer Abelschen p-Gruppe bestimmt. In dem zweiten vorbereitenden Satz handelt es sich um eine Polynomidentität, in welche die in dem ersten Satz gewonnene Anzahl der Untergruppen eingeht. *Szép* (Szeged).

Mattioli, Ennio: Sopra una particolare proprietà dei gruppi abeliani finiti. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. S. **3**, 59—65 (1950).

Es wird folgender Satz für endliche Abelsche Gruppen bewiesen: Es sei G eine Abelsche Gruppe vom Typ $(p, \ldots, p)$ und von Ordnung p^n mit den Basiselementen $R_1, \ldots, R_n$. Wenn n die Form $n = \frac{p^k - 1}{p - 1}$ hat ($k \geqq 2$, ganz), so hat G eine Untergruppe Γ von der Ordnung p^{n-k} mit folgender Eigenschaft:

$$G = \Gamma + \Gamma R_1 + \cdots + \Gamma R_1^{p-1} + \Gamma R_2 + \Gamma R_2^2 + \cdots + \Gamma R_n^{p-1}.$$

Verf. wendet dieses Resultat auf ein Toto- bzw. Totipspielproblem an. *Szép.*

Graev, M. I.: Freie topologische Gruppen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **12**, 279—324 (1948) [Russisch].

Soit X un espace topologique; on appelle groupe topologique libre de base X tout groupe topologique $F(X)$ tel que: (F_1): X est un sous-espace de F; (F_2): le sous-groupe fermé de F engendré par X est F lui-même; (F_3): toute application continue de X dans un groupe topologique G peut se prolonger en une représentation continue de F dans G. On définit de même le groupe topologique abélien libre de X, soit $A(X)$, en se restreignant dans (F_3) à ne considérer que des groupes abéliens. Ces notions appartiennent évidemment au domaine des „applications universelles" [Bourbaki, Algèbre, Chap. III, appendice III; Actual. sci. industr., No. 1044, Paris 1948] et ont été introduites par A. Markoff [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **8**, 3—64 (1945)]; il faut toutefois observer que, dans l'article plus récent analysé ci-dessous, l'A. renvoie aussi à une Note de S. Kakutani [Proc. Acad. Tokyo **20**, 585—598 (1944)]. — L'espace X étant donné, le groupe F — s'il existe — est évidemment unique à un isomorphisme près; l'A. démontre son existence dans le cas où X est complètement régulier; sa démonstration, inspirée de Markoff, occupe six pages — mais on trouvera dans l'article analysé ci-dessous la démonstration de Kakutani, laquelle, avec la démonstration d'unicité, ne comporte qu'une seule page. L'A. démontre ensuite un certain nombre de propriétés des groupes libres, par exemple: si Y est un sous-espace fermé de l'espace complètement régulier X, alors le sous-groupe de $F(X)$ engendré (algébriquement) par Y est fermé dans $F(X)$; si X est connexe il en est de même de $F(X)$; si X n'est pas discret, $F(X)$ n'est pas séparable. — L'A. examine ensuite le cas où X est compact; dans ce cas, $F(X)$ est évidemment réunion dénombrable d'ensembles compacts, donc est un espace normal (cf. N. Bourbaki, Topologie générale, Chap. IX, p. 67, Exer. 6, Paris 1948; ce Zbl. **31**, 55) de plus, $F(X)$ est complet; si un espace complètement régulier Y est tel que $F(Y)$ soit isomorphe à $F(X)$, où X est compact (resp. compact métrisable) alors Y est compact (resp. compact métrisable), mais n'est pas nécessaire-

ment homéomorphe à X, bien entendu; on a même $\dim(X) = \dim(Y)$ si X est métrisable; l'A. donne ensuite une classification relativement simple des $F(X)$ pour lesquels X est un espace compact dénombrable. Finalement, l'A. montre par un exemple qu'un sous-groupe fermé d'un $A(X)$ n'est pas nécessairement de la forme $A(Y)$, ce qui montre, comme aussi l'une des propriétés énoncées ci-dessus, que l'analogie avec la théorie algébrique des groupes libres n'est pas parfaite.

R. Godement (Nancy).

Graev, M. I.: Theorie der topologischen Gruppen. I.: Normen und Metrik auf Gruppen. Vollständige Gruppen. Freie topologische Gruppen. Uspechi mat. Nauk **5**, Nr. 2 (36), 3—56 (1950) [Russisch].

Le Chap. I de cet article d'exposition montre essentiellement comment la topologie d'un groupe peut être définie au moyen d'une famille d'écarts invariants à gauche (cf. Bourbaki, Topologie générale, Chap. IX, Paris 1948; ce Zbl. **31**, 55) [il est à noter que l'A. appelle „norme" un fonction $N(x)$ qui peut être nulle pour $x \neq e$: c'est regrettable], et, dans le cas où le groupe possède un système fondamental dénombrable de voisinages de e, par une métrique. On montre aussi que la propriété qu'on vient d'énoncer (séparabilité) se conserve par „extension": si H et G/H sont séparables, il en est de même de G. — Le Chap. II expose les résultats bien connus de A. Weil et de D. A. Rajkov sur les groupes complets, ainsi que les résultats connus relatifs aux représentations continues d'un groupe complet séparable sur un autre. — Enfin, le Chap. III concerne les groupes topologiques libres, dont l'A. expose les principales propriétés (cf. l'analyse précédente). — L'article se termine par une bibliographie dans laquelle ne sont cités ni le livre de Weil sur les groupes topologiques, ni ceux de Bourbaki sur la même question (Topologie générale, Chap. III et IX).

R. Godement (Nancy).

Cohen, L. W. and C. Goffman: The topology of ordered abelian groups. Trans. Amer. math. Soc. **67**, 310—319 (1949).

Soit G un groupe abélien totalement ordonné, muni de la topologie dans laquelle un système fondamental de voisinages de 0 est formé par les intervalles ouverts; on suppose G non discret. En étudiant un système fondamental de voisinages de 0, formé par les intervalles $\rangle -x_\xi, x_\xi \langle$ ($\xi < \xi^*$, ξ^* étant un ordinal dépendant de G), les AA. donnent une construction du complété de G, en généralisant les coupures de Dedekind par les „lower segments" de Dedekind (on appelle ainsi une partie A de G telle que, si $x \in A$, A contienne $\rangle \leftarrow, x \langle$ et rencontre $\rangle x, \rightarrow \langle$ et que, pour tout $x > 0$, il existe $y \in A$ tel que $x + y \notin A$). Un groupe abélien totalement ordonné H est appelé une extension archimédienne de G si G est un sous-groupe de H tel que, pour tout $y \in H$ tel que $y > 0$, il existe $x \in G$ et des entiers $m > 0$ et $n > 0$ tels que $y \leq n\,x$ et $x \leq m\,y$; on dit que G est a-complet s'il est identique à toutes ses extensions archimédiennes. Si G est a-complet, il est complet (la réciproque indiquée dans le th. 10 semble être une trivialité). Ce travail est illustré par l'étude des groupes de Hahn [cf. R. Baer, J. reine angew. Math. **160**, 208—226 (1929)].

J. Braconnier (Lyon).

Wang, Hsien-Chung: A problem of P. A. Smith. Proc. Amer. math. Soc. **1**, 18—19 (1950).

L'A. montre qu'un groupe séparable, localement compact, métrique non discret contient un sous-groupe propre non dénombrable partout dense.

Borel (Zurich).

● **Dieudonné, Jean: Sur les groupes classiques.** (Actual sci. industr. Nr. 1040; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg. VI.) Paris: Hermann 1948. 82 p.

Les groupes classiques sont le groupe linéaire général [déjà étudié par l'A., Bull. Soc. math. France **71**, 27—45 (1943); **74**, 59—64 (1946); ce dernier contenant une lacune comblée par Hua, Proc. nat. Acad. Sci. USA **35**, 533—537 (1949); ce Zbl. **35**, 20] et ses sous-groupes laissant invariante une forme bilinéaire symétrique ou anti-

symétrique ou hermitienne, auxquels ce livre est consacré. L'A. étudie leur structure pour des corps de base quelconques, par des méthodes aussi uniformes et géométriques que possible, et en particulier retrouve en les complétant beaucoup de résultats de Dickson. — Groupe symplectique: On sait qu'il n'y a à des équivalences près qu'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée f sur K^n (n pair); soit V un sous-espace de K^n, on appelle conjugué de V l'ensemble V^* des vecteurs tels que $f(V, x) = 0$, V est isotrope si $V \cap V^* \neq 0$, totalement isotrope si $V \subset V^*$. Soit $\mathrm{Sp}_n(K)$ le groupe des transformations linéaires laissant f invariante; l'A. montre que, à 3 exceptions près, le quotient de $\mathrm{Sp}_n(K)$ par son centre (formé de 2 éléments) est simple. La démonstration repose sur une étude des sous-espaces de K^n, des involutions et transvections de $\mathrm{Sp}_n(K)$; il est établi entre autres que (a) 2 sous-espaces V_1 et V_2 sont transformés l'un de l'autre par un élément de $\mathrm{Sp}_n(K)$ si et seulement si les restrictions de f à V_1 et V_2 sont équivalentes, (b) tout élément de $\mathrm{Sp}_n(K)$ est un produit de transvections de $\mathrm{Sp}_n(K)$, une transvection étant une transformation $x \to x + \varrho(x)\, a$ [$\varrho(x)$ forme linéaire sur K^n, nulle en a]. La simplicité du quotient de $\mathrm{Sp}_n(K)$ par son centre s'obtient dans le cas général en montrant qu'un sous-groupe invariant de $\mathrm{Sp}_n(K)$ non contenu dans son centre renferme toutes les transvections laissant invariant un hyperplan, donc $\mathrm{Sp}_n(K)$ vu (a) et (b). — Groupe orthogonal: soit tout d'abord K de caractéristique $\neq 2$ et f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur K^n; son indice ν est d'après E. Witt [J. reine angew. Math. **176**, 31—33 (1936); ce Zbl. **15**, 57] la dimension maxima des sous-espaces totalement isotropes de K^n. $O_n(K, f)$ désigne le groupe des transformations laissant f invariante, $O_n^+(K, f)$ le groupe formé des éléments de $O_n(K, f)$ de déterminant 1 (rotations); l'A. montre entre autres: l'analogue de (a), complétant ainsi un théorème de Witt, loc. cit., sur lequel il s'appuie, que tout élément de $O_n(K, f)$ est un produit d'au plus n symétries, que si $\nu \geq 1$, $O_n^+(K, f)$ est engendré par des rotations hyperboliques; on nomme ainsi une rotation laissant invariant un plan non isotrope sous-tendu par 2 droites isotropes. Soit enfin Z_n, $\Omega_n(K, f)$ le centre, resp. le groupe des commutateurs de $O_n(K, f)$, l'A. montre que $\Omega_n(K, f)/\Omega_n(K, f) \cap Z_n$ est simple pour $n \geq 5$, $\nu \geq 1$. Des résultats de B. L. v. d. Waerden (Gruppen von linearen Transformationen, Berlin 1935, ce Zbl. **11**, 101) concernant les cas $3 \leq n \leq 6$ sont utilisés; par des exemples l'A. montre que ce théorème est inexact pour $\nu = 0$. Si K est de caractéristique 2 l'étude est plus délicate. On trouve que en général $\Omega_n(K, f)$ est simple si $\nu \geq 1$, les théorèmes démontrés devenant inexacts si $\nu = 0$. Dans tout ce qui précède, K est naturellement supposé commutatif. — Groupe unitaire: 1) K commutatif; on suppose que c'est une extension séparable de rang 2 d'un corps K_0, et l'involution du groupe de Galois de K sur K_0 joue le rôle du passage au complexe conjugué dans la définition d'une forme hermitienne. Le quotient par son centre du groupe $U_n^+(K, f)$ des transformations de déterminant 1 laissant invariante une forme hermitienne symétrique non dégénérée sur K^n est simple si $n \geq 2$, $\nu \geq 1$. 2) K non commutatif; il est alors supposé réflexif, c. à d. posséder un antiautomorphisme involutif à l'aide duquel on définit une forme hermitienne sur un espace vectoriel, disons à droite, K^n. L'A. établit que K est une extension de rang 4 de son centre, qu'il décrit, et ensuite que le quotient de $U_n(K, f)$ par son centre est simple si $n \geq 2$, $\nu \geq 1$. Des contre-exemples sont indiqués dans les cas 1) et 2) lorsque $\nu = 0$. *A. Borel* (Zurich).

Mostow, G. D.: A new proof of E. Cartan's theorem on the topology of semi-simple groups. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 969—980 (1949).

L'A. donne une démonstration directe du théorème de E. Cartan: tout groupe de Lie connexe et semi-simple est homéomorphe au produit d'un groupe compact et d'un espace euclidien. Cette démonstration est basée sur le résultat suivant: soient L une algèbre de Lie semi-simple (sur le corps des réels) et L_C l'algèbre de Lie (sur le corps des complexes) obtenue par

extension aux complexes du corps des scalaires de L; alors, il existe, dans L_C, une forme réelle M de L, invariante par l'involution $x + iy \to x - iy$ de L_C et dont la forme fondamentale est définie négative; de plus, L est somme directe de $J = L \cap M$ et $S = L \cap iM$. On applique alors ce résultat à l'algèbre L d'un groupe de Lie connexe et semi-simple G. $\mathrm{ad}(L_C)$ définit un sous-groupe (de Lie) G_C^* de $\mathrm{Aut}(L_C)$ et les images dans $\mathrm{ad}(L_C)$ de L et M définissent de même des sous-groupes G^* et H^* de G_C^*. Soient F^* le sous-groupe de G_C^* défini par J et S^* l'ensemble des $\exp(\mathrm{ad}(x))$ avec $x \in S$. On peut choisir dans L_C une base (sur C) par rapport à laquelle les matrices des $\mathrm{ad}(x)$ $(x \in M)$ soient antisymétriques réelles; F^* est alors l'ensemble des éléments de G^* dont les matrices sont orthogonales réelles. On montre alors que le groupe $\mathrm{Aut}(L_C)$ et ses sous-groupes qui laissent invariants L et M sont algébriques (sur les réels) et que G_C^*, G^* et H^* sont respectivement les composantes connexes de l'identité dans ces groupes. Il en résulte que, si on écrit les éléments de G^* sous la forme $x = f \cdot s$, où f est un élément de matrice orthogonale réelle et $s = \exp(iW)$, la matrice de W étant antisymétrique réelle, on a $f \in F^*$ et $s \in S^*$ et, enfin, G^* est homéomorphe au produit $F^* \times S^*$ (F^* étant compact et S^* euclidien). On remarque alors que G^* est l'adjoint de G: G^* est donc isomorphe à G/D (où D est le centre (discret) de G). On en déduit que G est homéomorphe au produit $F' \times S'$, où F' est le sous-groupe de G défini par J et S' l'ensemble des $\exp(x)$ avec $x \in S$. S' est homéomorphe à S, donc euclidien; F' est produit d'un R^n et d'un sous-groupe distingué compact K, d'où le théorème de E. Cartan.

Jean Braconnier (Lyon).

Gel'fand, I. M. und M. A. Najmark (Neumark): Über den Zusammenhang zwischen den Darstellungen einer komplexen halbeinfachen Lieschen Gruppe und ihrer maximalen kompakten Untergruppe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **63,** 225—228 (1948) [Russisch].

Gel'fand, I. M. und M. A. Najmark (Neumark): Der Zusammenhang zwischen den unitären Darstellungen der komplexen unimodularen Gruppe und einer ihrer unitären Untergruppen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **14,** 239—260 (1950) [Russisch].

On désigne par G le groupe complexe unimodulaire à n variables. Si $n = n_1 + \cdots + n_r$ est une partition de n en entiers > 0, tout $g \in G$ peut se mettre sous la forme d'une matrice à r lignes et colonnes, matrice dont les éléments g_{ij} sont eux-mêmes des matrices (ordinaires) à n_i lignes et n_j colonnes. On note K le sous-groupe de G formé des g „triangulaires" ($g_{ij} = 0$ pour $i > j$); ce sous-groupe dépend naturellement de la partition considérée. On note de même D le sous-groupe de K formé des matrices „diagonales": $g_{ij} \neq 0$ pour $i \neq j$. Si $\mathfrak{U}$ est le sous-groupe de G formé des matrices unitaires, tout $g \in G$ s'écrit $g = ku$ ($k \in K$, $u \in \mathfrak{U}$), u étant déterminé modulo le sous-groupe $\Gamma = D \cap \mathfrak{U}$. On peut donc identifier l'espace homogène G/K à $\mathfrak{U}/\Gamma$, d'où résulte évidemment l'existence dans $\mathfrak{U}/\Gamma$ d'une mesure $d\mu(\tilde{u})$ invariants par $\mathfrak{U}$; les AA. montrent d'abord que la mesure de Haar de G s'exprime par

$$\int x(g)\, d\mu(g) = \int d\mu(\tilde{u}) \int x(ku)\, d\mu_1(k) = \int d\mu(u) \int x(ku)\, d\mu_1(k)$$

où x désigne une fonction sommable sur G et où $d\mu_1(k)$ désigne la mesure invariante à gauche sur K. De là et par des calculs simples résulte une formule qui exprime la façon dont G transforme la mesure $d\mu(\tilde{u})$: si l'on note par $\tilde{u} \to \tilde{u} \cdot \bar{g}$ les transformations définies par G dans $\mathfrak{U}/\Gamma$, on a $d\mu(\tilde{u} \cdot \bar{g})/d\mu(\tilde{u}) = \beta(\tilde{u} \cdot \bar{g})(u\, g)/\beta$; dans cette formule, β est la fonction donnée sur G par

$$\beta(g) = |\Delta_1|^{-2n_2 - 2n_3 - \cdots - 2n_r} \cdot |\Delta_2|^{2n_1 - 2n_3 - \cdots - 2n_r} \cdots |\Delta_r|^{2n_1 + \cdots + 2n_{r-1}}$$

avec $\Delta_i = \det(g_{ii})$; cette fonction vérifie l'identité $\beta(kg) = \beta(k)\beta(g)$ en sorte que, puisque $\beta(\gamma) = 1$ pour $\gamma \in \Gamma$, on peut poser $\beta(u) = \beta(\tilde{u})$ ($\tilde{u}$ désigne la classe de u modulo Γ). — De là résulte la possibilité de définir toute une série de représentations unitaires de G; elles s'effectuent dans l'espace L^2 construit sur la mesure $d\mu(\tilde{u})$; elles sont données explicitement par la formule $U_g f(\tilde{u}) = f(\tilde{u} \cdot \bar{g})\, \alpha(ug)/\alpha(u)$, où la fonction $\alpha(g)$ est assujettie uniquement à vérifier les conditions suivantes: $\alpha(kg) = \alpha(k) \cdot \alpha(g)$; $|\alpha(u)| = 1$; $\alpha(k)$ ne dépend que des éléments „diagonaux" de k; enfin, sur le sous-groupe D, on a $\alpha(\delta) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta) \cdot \chi(\delta)$ où χ est un caractère de module 1 de D. Bien que ces formules puissent paraître compliquées, leur interprétation est extrêmement simple (et n'est pas donnée par les AA.): les représentations de G ainsi obtenues

ne sont autres que les représentations imprimitives engendrées par les représentations unitaires de dimension un du sous-groupe D. — Bien entendu, si l'on remplace $\alpha(g)$ par $\omega(g)\alpha(g)$, où $|\omega(g)| = 1$, $\omega(kg) = \omega(g)$, on obtient une représentation équivalente à celle dont on était parti. — Les représentations ainsi obtenues forment la „série fondamentale" de représentations de G; elles sont irréductibles, ce que les AA. ne démontrent malheureusement pas ici. — Si en particulier $n_1 = n_2 = \cdots = 1$, on obtient la „série fondamentale non dégénérée" de représentations de G, qui a déjà été étudiée par les AA. [Mat. Sbornik, n. S. **21**, 405—434 (1947)]; comme on le sait, ces représentations sont les composantes irréductibles de la représentation „régulière" de G. Tout ce qui suit se rapporte à ces représentations particulières. — Soit U_g une de ces représentations; si le caractère χ correspondant de D est égal à 1 sur Γ — et seulement dans ce cas — il existe dans l'espace L^2 de la représentation un vecteur f_0 non nul invariant par les U_u ($u \in \mathfrak{U}$), et ce vecteur est essentiellement unique; la fonction élémentaire de type positif $\varphi(g) = (U_g f_0, f_0)$ est alors constante sur les classes bilatères modulo $\mathfrak{U}$; une telle fonction est appelée par les AA. fonction „sphérique" associée à la représentation; les AA. procèdent alors au calcul explicite de ces fonctions. Pour celà, on observe tout d'abord que tout revient à calculer $\varphi(\delta)$ ($\delta \in D$); et comme la fonction f_0 n'est évidemment autre que $f_0(\tilde{u}) = 1$, on a la formule $\varphi(\delta) = \int \alpha(u\delta)\, d\mu(u)$: reste à calculer cette intégrale, ce que les AA. font par récurrence sur la dimension n de G et par une méthode très analogue à celle qui permet de calculer les caractères des groupes classiques; le résultat obtenu est du reste du même genre: si $\chi(\delta) = |\Lambda_2|^{i\cdot\varrho_2} \cdots |\Lambda_n|^{i\cdot\varrho_n}$, on trouve en effet, en posant $\varrho_1 = 0$:

$$\varphi(\delta) = \det(\Lambda^{i\varrho_q}) / \prod_{p<q} (\Lambda_p^2 - \Lambda_q^2),$$

à une constante près. Ces calculs prouvent évidemment l'immense virtuosité des AA.; mais on est bien obligé d'avouer que le mécanisme profond de ces phénomènes reste inexpliqué! — Finalement, le problème suivant est résolu (par des considérations très simples, mais qui reposent essentiellement sur le fait qu'on connait explicitement les représentations considérées de G): comment une représentation de la série fondamentale non dégénérée se décompose-t-elle lorsqu'on la restreint à $\mathfrak{U}$? La réponse est fort simple: si la représentation considérée de G est associée au caractère χ de D, les représentations irréductibles de $\mathfrak{U}$ qu'on obtient par décomposition sont celles qui contiennent des vecteurs propres de „poids" $\chi(\gamma)$ ($\gamma \in \Gamma$); si de plus ces vecteurs forment, dans l'espace de la représentation considérée de $\mathfrak{U}$, un sous-espace de dimension d, alors cette représentation est contenue exactement d fois dans la représentation $u \to U_u$ de $\mathfrak{U}$.

R. Godement (Nancy).

Yoshizawa, Hisaaki: Unitary representations of locally compact groups. — Reproduction of Gelfand-Raikov's theorem. Osaka math. J. **1**, 81—89 (1949).

Comme son titre l'indique, cet article démontre le théorème fondamental de Gelfand et Raikov [voir Mat. Sbornik, n. S. **13**, 301—319 (1943)]: existence d'un système complet de représentations unitaires irréductibles pour tout groupe localement compact. Bien que l'A. n'ait pas pu prendre connaissance du mémoire de Gelfand et Raikov, ses démonstrations sont sensiblement les mêmes que celles de ces Auteurs. *R. Godement* (Nancy).

Yoshizawa, Hisaaki: On some types of convergence of positive definite functions. Osaka math. J. **1**, 90—94 (1949).

Démonstration du théorème suivant: soit G un groupe localement compact arbitraire; soit E un ensemble de fonctions continues et de type positif sur G; on peut munir E soit de la topologie faible soit de celle de la convergence uniforme sur tout ensemble compact dans G; ceci étant, si $\varphi(e)$ est constant lorsque φ parcourt E, ces deux topologies coïncident. — Le même résultat, avec sensiblement la même démonstration, a été déjà publié par D. Raikov [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 58, 1279—1282 (1947)]. *R. Godement* (Nancy).

Kaplansky, Irving: Groups with representations of bounded degree. Canadian J. Math. **1**, 105—112 (1949).

On sait qu'un groupe compact dont toutes les représentations irréductibles sont de degré 1 est abélien et réciproquement. L'A. donne une généralisation de ce résultat; pour cela il dit qu'un groupe G vérifie P_n si pour n éléments $a_1, \ldots, a_n$ quelconques de G, l'ensemble des produits obtenus par les permutations paires de $a_1, \ldots, a_n$ est égal à l'ensemble des produits obtenus par les permutations impaires. (P_2 est la commutativité, P_k implique P_{k+1}, et si G est topologique connexe, P_{k+1}

implique P_k.) Il définit ensuite pour un groupe localement compact G une classe de représentations par des opérateurs bornés d'un espace de Banach et montre que si G est localement compact unimodulaire, le fait que ces représentations soient de dimensions finies $\leq n$ est équivalent à: G vérifie $P_{s(n)}$; $s(n)$ est un entier $\leq n^2+1$, dont une connaissance plus précise dépend de la résolution d'un problème posé par l'A. sur les algèbres de matrices. Enfin, des relations entre ce qui précède et une tentative de généralisation d'un théorème de Halmos [Bull. Amer. math. Soc. **49**, 619—624 (1943), Th. 1] sont indiquées. *A. Borel* (Zurich).

Schaerf, Henry M.: Sur l'unicité de la mesure de Haar. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 1112—1113 (1949).

L'A. utilise les résultats qu'il a précédemment annoncés (ce Zbl. **35**, 151) pour démontrer l'unicité de la mesure de Haar dans un groupe localement compact; sa démonstration utilise aussi un article de Kakutani et Kodaira [Proc. Acad. Tokyo **20**, 444—450 (1944)] dont le rapporteur n'a malheureusement pas connaissance. *R. Godement* (Nancy).

Sherman, Seymour: A problem of Raĭkov. Duke math. J. **17**, 21—26 (1950).

Soit G un groupe topologique, $\mathfrak{T}$ la tribu engendrée par les réunions dénombrables A de voisinages de parties de G. Une mesure de Haar-Raĭkov est une mesure m définie sur $\mathfrak{T}$, positive, complétement additive, invariante à gauche, telle que $m(A)>0$ pour tout A non vide et que, si $m(E)$ est fini, il existe $A \supset E$ de mesure finie. L'existence d'une telle mesure entraîne la précompacité locale de G; s'il en est ainsi, m se prolonge aux ensembles boréliens de manière unique; cette dernière mesure est la restriction de la mesure de Haar sur le complété $\bar{G}$ de G et le complémentaire de G est de mesure (de Haar) intérieure nulle. *Braconnier.*

Levi, F. W.: Haar-measure. (Symposium on the theory of measure.) Math. Student, Madras **16**, 87 (1949).

Verbände. Ringe. Körper:

Foster, Alfred L.: On the permutational representation of general sets of operations by partition lattices. Trans. Amer. math. Soc. **66**, 366—388 (1949).

Jeder Zerlegung $\mathfrak{a}=\{\ldots,A,\ldots\}$ einer Grundmenge $U=\{\ldots,x,\ldots\}$ in paarweise fremde Teilmengen (Zellen) $A \subset U$ entspricht eineindeutig eine Kongruenzrelation: $x \equiv y \bmod \mathfrak{a}$, d. h. x, y gehören derselben Zelle $A \in \mathfrak{a}$ an. Die Gesamtheit $\mathfrak{U}$ aller Zerlegungen $\mathfrak{a}$ von U bildet einen Vollverband $(\mathfrak{U}, \subseteq)=(\mathfrak{U}, \cap, \cup)$, wenn man 1. zwei Zerlegungen als gleich betrachtet, falls sie genau dieselben Zellen besitzen und 2. die Relation „$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ ($\mathfrak{a}$ feiner als $\mathfrak{b}$), wenn $AB=A$ oder leer für alle $A \in \mathfrak{a}$, $B \in \mathfrak{b}$" erklärt. Es sei $\Gamma=\{\ldots,\gamma,\ldots\}$ eine Menge von Operationen (= Funktionen) mit einem oder mehreren Argumenten in U. Operationen $\gamma(x)$, $x \in U$ mit einem Argument heißen Monotationen, sie heißen schlicht, wenn $x \neq y \to \gamma(x) \neq \gamma(y)$. Eine schlichte Monotation heißt eine Permutation, wenn $\gamma(x)=y$ für jedes $y \in U$ eine Lösung $x \in U$ hat. Man erklärt dann (U, Γ) als eine allgemeine Algebra. Eine Zerlegung $\mathfrak{a} \in \mathfrak{U}$ heißt eine Γ-Zerlegung, wenn aus $x_1 \equiv y_1$, $x_2 \equiv y_2, \ldots, \bmod \mathfrak{a}$ folgt $\gamma(x_1, x_2, \ldots) \equiv \gamma(y_1, y_2, \ldots) \bmod \mathfrak{a}$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Die Gesamtheit $\mathfrak{U}_\Gamma \subset \mathfrak{U}$ aller Γ-Zerlegungen bildet einen Vollunterverband $(\mathfrak{U}_\Gamma, \cap, \cup)$ von $(\mathfrak{U}, \cap, \cup)$. Jede Operation $\gamma \in \Gamma$ induziert eine Operation γ^* in eine beliebige Zerlegung $\mathfrak{a} \in \mathfrak{U}_\Gamma$, wie folgt: $\gamma^*(X_1, X_2, \ldots)=Y$, wenn $\gamma(x_1, x_2, \ldots)=y$, $x_i \in X_i$, $y \in Y$; X_i und $Y \in \mathfrak{a}$. Dadurch entsteht eine Zellenalgebra $(\mathfrak{a}, \Gamma^*)$. Die Abbildung $x \to X$, $\gamma \to \gamma^*$, $x \in X$, $X \in \mathfrak{a}$ ist eine Homomorphie $(U, \Gamma) \to (\mathfrak{a}, \Gamma^*)$. Man schreibt auch $(\mathfrak{a}, \Gamma^*)=(U, \Gamma)/\mathfrak{A}$. Es sei $\Omega=\{\ldots,\omega,\ldots\}$ eine Menge von Monotationen, $\Omega \subset \Gamma$. Ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{U}_\Gamma$ heißt Ω-schlicht bzw. Ω-permutational, wenn die Bildoperation ω^* von jedem $\omega \in \Omega$ bei der obigen Homomorphie $(U, \Gamma) \to (\mathfrak{A}, \Gamma^*)$ eine schlichte Monotation bzw. eine Permutation der Zellen in $\mathfrak{a}$ ist. Die Gesamtheit $\mathfrak{S}_\Omega$ aller Ω-schlichten Zerlegungen bildet einen $\cap$-Vollverein (eine für $\cap$ voll abgeschlossene teilweise geordnete Menge) $(\mathfrak{S}_\Omega, \cap)$. Die Gesamtheit $\mathfrak{P}_\Omega$ aller Ω-permutationalen Zerlegungen braucht, wie Verf. durch Beispiele belegt, weder ein $\cap$-Verein noch ein $\cup$-Verein zu sein. Ebenso braucht $\mathfrak{S}_\Omega$ nicht immer ein $\cup$-Verein zu sein. Verf. gibt Kriterien für Abgeschlossenheit der Operationen $\cap$ bzw. $\cup$ in $\mathfrak{P}_\Omega$ und $\mathfrak{S}_\Omega$. $\mathfrak{P}_\Omega$ ist dann und nur dann ein Vollverband, wenn $\bigcap \mathfrak{P}_\Omega = \bigcap_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}_\Omega} \mathfrak{a}$ in $\mathfrak{P}_\Omega$ liegt. Bei einer endlichen Grundmenge ist $\mathfrak{P}_\Omega$ immer ein Verband und zwar identisch mit der Menge aller Ω-Zerlegungen, die die Zerlegung

$\mathfrak{p} = \bigcap \mathfrak{P}_\Omega$ als eine Verfeinerung enthalten. Ist Ω eine Menge von Monotationen, so ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn man annimmt, daß Ω abgeschlossen für die Verknüpfung (Produkt) von Monotationen ist, so weit man $\mathfrak{U}_\Omega$, $\mathfrak{S}_\Omega$, $\mathfrak{P}_\Omega$ untersucht. Denn bedeute $\bar{\Omega}$ das kleinste abgeschlossene System über Ω, so gilt $\mathfrak{U}_{\bar{\Omega}} = \mathfrak{U}_\Omega$ bzw. $\mathfrak{S}_{\bar{\Omega}} = \mathfrak{S}_\Omega$ bzw. $\mathfrak{P}_{\bar{\Omega}} = \mathfrak{P}_\Omega$. Es sei Ω bzw. Ω^* eine Menge von Monotationen in U bzw. in einer Zerlegung $\mathfrak{a}$ von U. Ein Homomorphismus (bzw. Isomorphismus) $(U, \Omega) \to (\mathfrak{a}, \Omega^*)$ heißt stark, wenn $\omega_1\, \omega_2(x) \to \omega_1^*\, \omega_2^*(X)$ gilt, wobei $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, $\omega_i \to \omega_i^*$, $i = 1, 2$ und $x \to X$. Besteht hierbei Ω^* aus lauter Permutationen der Zellen von $\mathfrak{a}$, so heißt $(\mathfrak{a}, \Omega^*)$ eine Darstellung der Algebra (U, Γ). Da Ω als abgeschlossen vorausgesetzt werden kann, so ist $(\mathfrak{a}, \Omega^*)$ eine Halbgruppe von Permutationen der Zellen von $\mathfrak{a}$, und, falls U eine endliche Menge ist, sogar eine Gruppe. Jede Zerlegung $\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}_\Omega$ liefert eine Darstellung von (U, Γ). Insbesondere, wenn $\mathfrak{p} = \bigcap \mathfrak{P}_\Omega \in \mathfrak{P}_\Omega$, d. h. wenn $(\mathfrak{P}_\Omega, \bigcap, \bigcup)$ ein Vollverband ist, dann existiert eine feinste Darstellung $(\mathfrak{p}, \Omega)$. In der klassischen Theorie der Imprimitivitäten ist dies trivial wahr, $\mathfrak{p}$ ist die Zerlegung von U in seine Grundelemente. Wenn die feinste Darstellung $(\mathfrak{p}, \Omega)$ existiert, dann ist jede abstrakte Eigenschaft der Halbgruppe $(\mathfrak{p}, \Omega)$ eine Invariante mod Π, wobei Π die Gesamtheit aller Permutationen in U, der dargestellten Algebra (U, Γ) ist. — Verf. gibt schließlich ein Konstruktionsverfahren der feinsten Zerlegung $\mathfrak{p}$, wenn U endlich, Ω erzeugbar von einem Element ω und $\Gamma = \Omega$. *D. A. Kappos* (Erlangen).

Foster, Alfred L.: On *n*-ality theories in rings and their logical algebras, including triality principle in three valued logics. Amer. J. Math. **72**, 101—123 (1950).

Es sei (U, Φ) eine Algebra, d. h. eine Grundmenge $U = \{\ldots, x, \ldots\}$ mit der Menge $\Phi = \{\ldots, \varphi, \ldots\}$ aller Operationen ζ in U (Monotationen, Bitationen, ..., Multitationen) (siehe vorsteh. Referat). Verf. bezeichnet als „punkte" (geschrieben mit kleinem p) bzw. „Punkte" (geschrieben mit großem P) die Elemente $x \in U$ bzw. $\varphi \in \Phi$. Jede p-Permutation $\varrho \in \Phi$ induziert eine durch $\zeta \to \zeta_\varrho = \varrho^{-1}\, \zeta\, (\varrho(x), \varrho(y), \ldots)$ definierte p-Monotation in Φ, die wie Verf. zeigt, ebenfalls eine P-Permutation in Φ ist. Der Punkt $\zeta_\varrho \in \Phi$ heißt Umformung von ζ bei ϱ. Ist $K = \{\ldots, \varrho, \ldots\}$ eine Gruppe von p-Permutationen, so ist die Menge der induzierten P-Permutationen $\zeta \to \zeta_\varrho$ für alle $\varrho \in K$ ebenfalls eine zu K isomorphe Gruppe. Die Gesamtheit aller Punkte $\zeta_\varrho \in K$ bei festem ζ für alle $\varrho \in K$ bildet eine Kongruenzklasse mod K. $\zeta \equiv \zeta'(K)$ bedeutet dann: die Punkte ζ und ζ' gehören derselben Klasse mod K an. Man sagt auch ζ und ζ' sind K-al. Ist die Ordnung n der Gruppe K endlich, $n = 2, 3, \ldots$, so sagt man „dual", „trial", ... Besteht eine Klasse mod K aus nur einem Punkt, so heißt dieser Punkt selbst-K-al. Ist K endlich von der Ordnung n, so ist die Anzahl der Punkte einer Klasse mod K ein Teiler von n. Ist die Gruppe K abelsch, so ist jeder Punkt $\varrho \in K \subset \Phi$ selbst-K-al. Ist insbesondere $U = R$, wobei $(R, +, \times)$ ein Ring, bedeutet $K = \{\xi, \varrho', \varrho'', \ldots\} = \{\ldots, \varrho, \ldots\}$ eine Gruppe von Permutationen in R mit ξ als Identität und ist $\{\times, \times', \times'', \ldots\} = \{\ldots, \times_\varrho, \ldots\}$ die Menge aller Umformungen der Operation des Produktes $\times$ bei allen $\varrho \in K$, so bezeichnet Verf. die Algebra $(R, \times, \times', \times'', \ldots, \xi, \varrho, \varrho', \varrho'')$ als eine K-Logik des Ringes R. Jeder Begriff, der mit Termen aus der K-Logik definierbar ist, heißt K-logisch. Zu den K-logischen Begriffen des Ringes R gehören alle Multitationen, die der Menge $|\times, K|$ gehören, wobei $|\times, K|$ aus allen Multitationen besteht, die aus $\times$ und allen $\varrho \in K$ kompositional erzeugt werden können. — Ein Ring $(R, +, \times)$ heißt K-logisch bzw. equational K-logisch bzw. fest K-logisch definierbar, wenn die Operation $+$ ein K-logischer Begriff ist bzw. $+ \in |\times, K|$, d. h. $a + b \equiv \zeta(a, b) \in |\times, K|$ bzw. $+$ ein K-logischer eindeutig bestimmter Begriff ist, d. h. kein anderer Ring $(R, +_1, \times)$ mit derselben Grundmenge R, demselben $\times$, aber $+_1 \neq +$, wobei $+_1$ ebenfalls K-logisch definierbar ist, existiert. Ist ein Ring Boolesch und bedeutet C die Komplementationsgruppe „$x^* = 1 - x$, $x^{**} = x$", die also von der Ordnung 2 ist, so ist er equational und fest C-logisch. Ein „Boolean-like" Ring [Definition des Verf., s. Trans. Amer. math. Soc. **59**, 166—187 (1946)] ist equational, aber im allgemeinen nicht fest C-logisch definierbar. Ein Körper $(F, +, \times)$ ist fest, jedoch im allgemeinen (insbesondere, wenn seine Charakteristik $\neq 2$ ist), nicht equational C-logisch definierbar. Ebenso kann der Ring der ganzen Zahlen nicht equational C-logisch definiert werden. Ist ein Ring fest bzw. equational K-logisch definierbar, so heißt die Permutationsgruppe K halb- bzw. volladaptiert zum Ring. Ist K volladaptiert zu einem Ring R, so wird R vom Verf. als eine Ringlogik (K) bezeichnet. Während nach Verf. die Frage der Existenz einer zu einem Ring halbadaptierten Gruppe leicht durch Konstruktion beantwortet werden kann, weist die Frage der Existenz einer zu einem Ring volladaptierten Gruppe Schwierigkeiten auf und ist vom Verf. nicht vollständig beantwortet. Verf. zeigt aber, daß neben Booleschen Ringen auch gewisse p-Ringe, d. h. Ringe in welchen gilt: $a^p = a \times a \times \cdots \times a = a$ und $p^a = a + a + \cdots + a = 0$, Ringlogiken sein können. Wie z. B. ein Boolescher Ring (2-Ring) eine Ringlogik (C) ist, so ist ein 3-Ring ein Ringlogik (N), wobei N die zyklische Negationsgruppe „$a^1 = 1 + a$, $a^{11} = 1 + 1 + a = 2 + a$, $a^{111} = a$" bedeutet, denn N ist zu einem 3-Ring volladaptiert. Ein Trialitätsprinzip und eine der De Morganschen Formel entsprechende Formel gilt in dieser Logik. Sie enthält die einfache dreiwertige Logik. Die Frage, ob jeder p-Ring eine Ringlogik ist, beantwortet Verf. in der vorliegenden Arbeit nicht. In einer Bemerkung jedoch, die Verf. während der Drucklegung der Arbeit hinzufügte, erwähnt er, daß er dies inzwischen in einer Arbeit gezeigt hat, die in Acta math. erscheint. *D. A. Kappos* (Erlangen).

Lalan, Victor: Équations fonctionnelles dans un anneau booléien. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 603—605 (1950).

Die Operationen $(\dot{+}, \vee)$ bzw. $(+, \wedge)$, wobei $\dot{+}$ Addition mod 2 bedeutet, führen bekanntlich in einem Booleschen Verband die algebraische Struktur eines Ringes ein. Dies vereinfacht nach Verf. die Auflösung von Funktionalgleichungen in Booleschen Verbänden. Da jede beliebige binäre Operation als ein bilineares Polynom $\alpha p q \dot{+} \beta p \dot{+} \gamma q \dot{+} \delta$ geschrieben werden kann, wobei α, β, γ, δ Konstanten aus dem Körper der zwei Elemente (0, 1) bedeuten, so kann man die Untersuchung eines Systems von Funktionalgleichungen mit n Unbekannten auf die Untersuchung eines Systems von algebraischen Gleichungen mit $4n$ Unbekannten zurückführen. Als Anwendung behandelt Verf. das Scheffersche Problem der Definition der Booleschen Algebra mittles nur einer undefinierten Operation und bestimmt zwei Lösungen, nämlich die Rejektion $p' \cdot q'$ und Exklusion $p' \vee q'$. Die bekannte Nicodsche Ausgangsformel ist wahr, nicht nur, wenn die Strichoperation p/q die Exklusion bedeutet, sondern auch, wenn p/q die Implikation bedeutet. Weiter untersucht Verf. die möglichen Ringstrukturen der Booleschen Algebra.

D. A. Kappos (Erlangen).

Sikorski, Roman: A theorem on extension of homomorphisms. Ann. Soc. Polonaise Math. **21**, 332—335 (1949).

Verf. zeigt: Wenn A_0 ein Boolescher Unterverband von einem Booleschen Verband A ist, so kann jeder Homomorphismus von A_0 in B, wobei B ein Boolescher Vollverband ist, zu einem Homomorphismus von A in B erweitert werden. Daraus folgt unmittelbar: Zu jedem Ideal J_0 eines Booleschen Verbandes A, $J_0 \neq A$, existiert ein Primideal J von A, so daß $J_0 \subset J$ *gilt* [Stone, Trans. Amer. math. Soc. **40**, 37—111 (1936); dies. Zbl. **14**, 340]. Außerdem kann man mit Hilfe des Satzes vom Verf. zeigen: 1. ein Boolescher Vollverband B ist dann und nur dann eine minimale Erweiterung eines Booleschen Verbandes A, wenn ein Boolescher Unterverband B_0 von B existiert, der zu A isomorph ist und außerdem für jedes $b \in B$, $b \neq 0$, ein $b_0 \in B_0$ existiert, so daß $0 \neq b_0 \subseteq b$ *gilt*; 2. alle minimalen Erweiterungen von A sind isomorph. *D. A. Kappos* (Erlangen).

● **Waerden, B. L. van der: Moderne Algebra. Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether, Tl. 1.** 3. verb. Aufl. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Bd. 33.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1950. X, 292 S. Geh. DM 24.—; geb. DM 27.—.

Die vorliegende dritte Auflage des ersten Bandes von diesem überall bekannten Werke ist eine Neubearbeitung der zweiten Auflage (dies. Zbl. **16**, 339), die schon seit dem zweiten Weltkrieg völlig vergriffen war. Verf. hat die Gelegenheit der Notwendigkeit dieser Neuauflage benutzt, um sein Buch nochmals zu modernisieren. Den Bedürfnissen der neuen Zahlentheorie und der algebraischen Geometrie folgend, wurden die bewerteten Körper (X. Kapitel) ganz bedeutend ausführlicher dargelegt; vier ganz neue Paragraphen sind hinzugetreten (mit den Überschriften: Bewertungen von algebraischen Zahlkörpern; Bewertungen des rationalen Funktionenkörpers $\Delta(x)$; Bewertung von algebraischen Funktionenkörpern; Die abstrakte Riemannsche Fläche). Wieder wurden der Wohlordnungssatz (Beweis durch Auswahlpostulat) und, darauf fußend, die transfinite Induktion aufgenommen, wodurch ermöglicht wurde, den Hauptsatz von Steinitz über die Existenz und Eindeutigkeit der algebraisch abgeschlossenen Körpererweiterung in vollem Umfang zu beweisen (wie das auch schon in der ersten Auflage geschah; in der zweiten Auflage wurde nur der Fall eines abzählbaren Grundkörpers betrachtet). Der Paragraph über die Normen und Spuren wurde neubearbeitet. Auch wurde die Frage der algebraischen Abhängigkeit und Unabhängigkeit ausführlicher betrachtet. Dank des Wohlordnungssatzes wird dann auch der Hauptsatz über transzendente Körpererweiterungen in voller Allgemeinheit bewiesen. Dazu treten noch eine Reihe kleinerer Ergänzungen und Verbesserungen (z. B. wurde die Definition des Polynomringes anders gefaßt). Das ohnehin prächtige Aufgabenmaterial ist noch etwas bereichert worden. Es treten auch einige neue Literaturhinweise hinzu, auch ist das „Sachverzeichnis" erweitert. Einige Ausführungen (teils von weniger zentraler Wichtigkeit) sind weggelassen (Ausführung der körpertheoretischen Operationen in endlich vielen Schritten, die metazyklischen Gleichungen von Primzahlgrad, die Formel des Perioden-

produktes von Gauß) oder kürzer gefaßt worden, auch wurden einige Paragraphen und alle Aufgaben klein gedruckt (wodurch das Buch an Übersichtlichkeit gewann). So wurde der Umfang trotz der wesentlichen inhaltlichen Vermehrung nur um 20 Seiten vermehrt. Die Ausstattung des Buches ist die alte, wenn nicht noch etwas ästhetischer geworden. Es ist sehr erfreulich, den ersten Band dieses allgemein beliebten Werkes in neuer, frischer Form wieder in die Hand zu bekommen. *Rédei* (Szeged).

Dubisch, Roy and Sam Perlis: The radical of an alternative algebra. Amer. J. Math. **70**, 540—546 (1948).

Eine alternative Algebra $\mathfrak{A}$ ist durch folgende Abschwächung des assoziativen Gesetzes charakterisiert: Für zwei Elemente $x, y \in \mathfrak{A}$ soll stets gelten $(xx)\,y = x(xy)$, $(xy)\,x = x(yx)$, $(yx)\,x = y(xx)$. Mit Hilfe eines Satzes von Artin lassen sich die alternativen Algebren aber auch in folgender Form definieren: Jede von zwei beliebigen Elementen $x, y \in \mathfrak{A}$ erzeugte Unteralgebra ist assoziativ. Ein Element $x \in \mathfrak{A}$ heißt quasi-rechtsregulär, wenn es ein $y \in \mathfrak{A}$ gibt mit $x + y + xy = 0$. y heißt dann Quasi-Rechtsinverses von x und ist gleichzeitig Quasi-Linksinverses. Verff. betrachten nun vier verschiedene Definitionen des Radikals einer alternativen Algebra $\mathfrak{A}$. Dabei soll $\mathfrak{A}$ zunächst ein Einselement enthalten, und der Skalarenkörper soll nicht der Primkörper der Charakteristik 2 sein. 1. Das $\mathfrak{R}$-Radikal $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{A}$ ist definiert als die Gesamtheit aller Elemente $r \in \mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft, daß mit jedem regulären $g \in \mathfrak{A}$ auch $g + r$ regulär ist. Das $\mathfrak{R}$-Radikal ist ein Ideal, und das $\mathfrak{R}$-Radikal von $\mathfrak{A} - \mathfrak{R}$ ist Null. 2. Das $\mathfrak{N}$-Radikal $\mathfrak{N}$ ist die Gesamtheit aller eigentlich nilpotenten Elemente aus $\mathfrak{A}$, zu der noch 0 hinzugenommen wird. $\mathfrak{N}$ ist Summe aller Nil-Rechts(Links-)Ideale von $\mathfrak{A}$. 3. Das $\mathfrak{Q}$-Radikal $\mathfrak{Q}$ ist Summe aller quasiregulären Rechtsideale von $\mathfrak{A}$ (d. h. derjenigen Rechtsideale, deren sämtliche Elemente quasiregulär sind). 4. Das $\mathfrak{S}$-Radikal $\mathfrak{S}$ ist Durchschnitt aller Ideale $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ direkte Summe von einfachen Algebren ist (Albert). Verff. zeigen: Es ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{N} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{S}$. Die Existenz eines Einselementes wird nur bei den Beweisen für das $\mathfrak{R}$-Radikal benutzt. Das $\mathfrak{N}$-, $\mathfrak{Q}$- und $\mathfrak{S}$-Radikal können auch in Algebren gebildet werden, die diese Forderung nicht erfüllen. Es sei $\mathfrak{A}_0$ eine beliebige alternative Algebra, und es seien ferner $\mathfrak{N}_0$, $\mathfrak{Q}_0$, $\mathfrak{S}_0$ die entsprechenden Radikale. Ist weiter $\mathfrak{A}$ diejenige Algebra, die aus $\mathfrak{A}_0$ durch Adjunktion eines Einselementes hervorgeht, und sind $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{S}$ die entsprechenden Radikale von $\mathfrak{A}$, so wird gezeigt, daß $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_0$ und $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0$ ist. *Kowalsky* (Erlangen).

Hochschild, G.: Note on maximal algebras. Proc. Amer. math. Soc. **1**, 11—14 (1950).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. **32**, 8) gibt Verf. hier eine Anwendung der dort definierten Erweiterungen von Algebren. Eine vollständig primäre Algebra B über dem Körper F mit dem Radikal R heißt quasinormal, wenn B/R normal ist. Es wird gezeigt, daß jede quasinormale Algebra zu einer durch Erweiterung bestimmten sogenannten Polynomalgebra isomorph ist. *Bergström.*

Chevalley, Claude and R. D. Schafer: The exceptional simple Lie algebras F_4 and E_6. Proc. nat. Acad. Sci. USA **36**, 137—141 (1950).

Bei der Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen [B. L. van der Waerden, Math. Z. **37**, 446—462 (1933); dies. Zbl. **7**, 292] treten fünf Ausnahmegruppen auf, die nicht in die unendlichen Folgen der übrigen Gruppen eingeordnet werden können. Für zwei dieser Gruppen, die F_4 von der Dimension 52 und die E_6 von der Dimension 78, werden Darstellungen ihrer Lieschen Algebren angegeben. Dazu wird die einfache Jordansche Algebra $\mathfrak{J}$ von der Dimension 27 über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K von der Charakteristik 0 benutzt, deren Elemente Hermitesche Matrizen (3×3) mit Elementen aus der Cayleyschen Algebra $\mathfrak{C}$ von der Dimension 8 über K sind. Die abgeleitete Algebra $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{J}$ besteht aus allen Endomorphismen D mit $D(X \circ Y) = DX \circ Y + X \circ DY$ und ist eine Liesche Algebra. Schließlich möge unter einer Rechtsmultiplikation R_Y der Endomorphismus $X \to X \circ Y$ für

alle X in $\mathfrak{Z}$ verstanden werden. Dann gilt folgender Satz: Die Liésche Ausnahmealgebra F_4 ist die abgeleitete Algebra $\mathfrak{D}$. Die Algebra E_6 ist die Algebra $\mathfrak{D}+\{R_Y\}$, worin für R_Y alle Rechtsmultiplikationen von Elementen Y zu nehmen sind, deren Spur Null ist. Zum Beweise wird eine dreigliedrige Identität zwischen den Spuren von Elementen aus $\mathfrak{E}$ abgeleitet und benutzt. *Wever* (Mainz).

Fuchs, Ladislaus: Further generalisation of the notion of relatively prime ideals. Bull. Calcutta math. Soc. **39**, 143—146 (1947).

Für einen Integritätsbereich $\mathfrak{R}$ mit Idealen $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{j}, \mathfrak{m}, \ldots$ und Maximalbedingung für die Ideale definiert Verf. in Ausdehnung früherer Begriffsbildungen (dies. Zbl. **30**, 12) ein Ideal $\mathfrak{g}$ relativ-primär zu $\mathfrak{h}$ bez. $\mathfrak{j}$ (Schreibweise: $\{\mathfrak{g}; \mathfrak{h}, \mathfrak{j}\}$), wenn aus $\mathfrak{m}\,\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{h}$ stets $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{j}$ folgt. Dann gilt: 1. Die Bezugsideale $\mathfrak{j}$ müssen stets $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{j}$ erfüllen. 2. Bei $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{j}^*$, $\mathfrak{h}^* \subseteq \mathfrak{h}$ folgt aus $\{\mathfrak{g}; \mathfrak{h}, \mathfrak{j}\}$ stets $\{\mathfrak{g}^*; \mathfrak{h}^*, \mathfrak{j}^*\}$. 3. Bei $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_1 \cap \mathfrak{j}_2$ folgt aus $\{\mathfrak{g}_i; \mathfrak{h}_i, \mathfrak{j}_i\}$ $(i = 1, 2)$ auch $\{\mathfrak{g}; \mathfrak{h}, \mathfrak{j}\}$. Ordnet man nun von vornherein jedem Ideal $\mathfrak{h}$ aus $\mathfrak{R}$ ein Bezugsideal $\mathfrak{j} = f(\mathfrak{h})$ derart zu, daß a) bei $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{j}_i = f(\mathfrak{h}_i)$ $(i = 1, 2)$ stets $\mathfrak{j} = f(\mathfrak{h}) = \mathfrak{j}_1 \cap \mathfrak{j}_2$ wird, b) bei $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{h}_n$ mit $\mathfrak{h}_i \neq \mathfrak{h}_k$ für $i \neq k$ stets $\mathfrak{j}_i = f(\mathfrak{h}_i) \neq \mathfrak{j}_k = f(\mathfrak{h}_k)$ ausfällt und c) bei $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{j}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{j}_{i-1} \cap \mathfrak{j}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{j}_n \subseteq \mathfrak{j}_i$ immer $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{h}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{h}_{i-1} \cap \mathfrak{h}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{h}_n$ relativ-prim zu $\mathfrak{j}_i$, also $\mathfrak{j}_i : \mathfrak{a}_i = \mathfrak{j}_i$ oder $\{\mathfrak{a}_i; \mathfrak{j}_i, \mathfrak{j}_i\}$ gilt, so wird $\mathfrak{j} = f(\mathfrak{h}) = \mathfrak{j}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{j}_n$. Wird diese Darstellung $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{j}_n$ auf eine kürzeste $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{j}_r$ $(r \leq n)$ mit $\mathfrak{j}_i = f(\mathfrak{h}_i)$ $(i = 1, \ldots, r)$ reduziert, so hat man schließlich 4. $\{\mathfrak{g}; \mathfrak{h}, \mathfrak{j}\}$ dann und nur dann, wenn $\{\mathfrak{g}; \mathfrak{h}_i, \mathfrak{j}_i\}$ für $i = 1, \ldots, r$. — Die genannten Voraussetzungen a) bis c) sind in der allgemeinen Idealtheorie durch Auswahl geeigneter Durchschnittsdarstellungen für die Ideale $\mathfrak{h}$ auf verschiedene Weise zu realisieren. Dadurch ergibt die Anwendung von 4. sowohl das Hauptresultat der eingangs zitierten Arbeit des Verf. von neuem wie auch die Aussage, daß dann und nur dann $\mathfrak{g}$ relativ-primär zu $\mathfrak{h}$ bez. $\mathfrak{j} = f(\mathfrak{h}) = (\mathfrak{h}^{-1})^{-1}$ wird, wenn $\mathfrak{g}$ zu $(\mathfrak{h}^{-1})^{-1}$ relativ-prim ausfällt; für ein Ideal $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{R}$ ist dabei $\mathfrak{c}^{-1}$ als der im Quotientenkörper $Q(\mathfrak{R})$ von $\mathfrak{R}$ genommene $\mathfrak{R}$-Modulquotient $\mathfrak{c}^{-1} = \mathfrak{R}/\mathfrak{c}$ definiert. — Vgl. auch dies. Zbl. **34**, 309, wo eine andere Erweiterung des Begriffs „relativ-prim" behandelt wird. *Grell* (Berlin).

Andrunakievič, V.: Halbradikale und radikale Ringe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **55**, 3—5 (1947) [Russisch].

Die Arbeit enthält einen Teil der Resultate, die in einer späteren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **29**, 248) ausführlich begründet werden. *R. Kochendörffer* (Rostock).

Jacobson, N.: A note on division rings. Amer. J. Math. **69**, 27—36 (1947).

Es sei P ein (im allgemeinen nichtkommutativer) Körper, Φ ein Unterkörper von P von endlichem Linksindex. P kann als Linksvektorraum über Φ aufgefaßt werden. Es sei $\mathfrak{L}$ der Ring der linearen Transformationen von P über der Menge Φ_l der Linksprodukte $\xi \to \xi\,\alpha_l \equiv \alpha\,\xi$ $(\xi \in P,\ \alpha \in \Phi)$. $A \in \mathfrak{L}$ bedeutet also, daß A ein Endomorphismus der additiven Gruppe von P ist und $(\alpha\,\xi)\,A = \alpha(\xi\,A)$ für alle $\alpha \in \Phi$, $\xi \in P$ gilt. $\mathfrak{L}$ enthält die Menge P_r der Rechtsprodukte $\xi \to \xi\,\varrho_r \equiv \xi\,\varrho$. Wegen $1 \in P_r$ kann $\mathfrak{L}$ als Rechtsvektorraum über P_r betrachtet werden. Dann ist der Rechtskörpergrad $(\mathfrak{L}:P_r)_r$ gleich dem Linkskörpergrad $(P:\Phi)_l$. — $\mathfrak{A}$ sei ein Endomorphismenring bezüglich der additiven Gruppe von P, welcher P_r enthält und für den $(\mathfrak{A}:P_r)_r = m < \infty$ ist. Ist C ein mit jedem $A \in \mathfrak{A}$ vertauschbarer Endomorphismus von P, so ist C ein Linksprodukt $C = \gamma_l$, und die Gesamtheit der γ bildet den Unterkörper Φ der $\mathfrak{A}$-Invarianten von P. Dann ist auch der Linkskörpergrad $(P:\Phi_l)_l = m$, und $\mathfrak{A}$ ist gleich dem Ring $\mathfrak{L}$ der linearen Transformationen von P über Φ_l. Umgekehrt gilt: Ist Φ ein Unterkörper von P von endlichem Linksindex und $\mathfrak{L}$ der Ring der linearen Transformationen von P über Φ_l, so ist Φ_l die Gesamtheit der Endomorphismen von P, welche mit allen Endomorphismen aus $\mathfrak{L}$ vertauschbar sind. Beide Resultate geben somit eine eineindeutige Zuordnung der

Zwischenkörper $\Psi (P \supseteq \Psi \supseteq \Phi)$ zu den Ringen $\mathfrak{B} (\mathfrak{L} \supseteq \mathfrak{B} \supseteq P_r)$. Die Ergebnisse werden nun auf die Automorphismen von (Schief-)Körpern angewendet und führen so zu einer Erweiterung der gewöhnlichen Galoisschen Theorie. — Es sei G eine Automorphismengruppe von P, H ihr Normalteiler der inneren Automorphismen von G. Ein Element $\varphi \in P$ ist eine G-Invariante, wenn für alle $A \in G$ $\varphi A = \varphi$ gilt. G heißt abgeschlossen, wenn mit den inneren Automorphismen I_1 und I_2 $(\xi I_j = \tau_j \xi \tau_j^{-1})$ auch I $(\xi I = \tau \xi \tau^{-1}$ mit $\tau = \tau_1 \gamma_1 + \tau_2 \gamma_2$; γ_i beliebig im Zentrum Γ von $P)$ zu G gehört. Der Unterkörper A von P werde erzeugt von allen $\alpha \in P$, für die die inneren Automorphismen $\xi \to \alpha \xi \alpha^{-1}$ zu H gehören. Die abgeschlossene Gruppe G heißt von endlicher Ordnung, wenn $(A:\Gamma) = h < \infty$ ist und H von endlichem Index n zu G ist. Das Produkt hn wird reduzierte Ordnung von G genannt. Es gilt dann: 1. G sei eine abgeschlossene Automorphismengruppe von endlicher reduzierter Ordnung im Körper P, Φ sei der Unterkörper der G-Invarianten. Dann ist $(P:\Phi)_l = (P:\Phi)_r = hn$, und jeder Automorphismus von P, welcher Φ invariant läßt, gehört zu G. 2. Jeder abgeschlossenen Untergruppe K von G kann ein Unterkörper $\Psi = P(K)$, dessen Elemente bei jedem $B \in K$ invariant bleiben, zugeordnet werden. Jedem Unterkörper Ψ von P, welcher $\Phi = P(G)$ enthält, läßt sich eine abgeschlossene Untergruppe $K = G(\Psi)$, deren Automorphismen die Elemente von Ψ invariant lassen, zuordnen, und diese Zuordnungen sind eineindeutig. (Man vergleiche mit den Ergebnissen von Henri Cartan, dies. Zbl. **30**, 12, 13.)

Reichel (Tübingen).

Nakayama, T.: Semilinear normal basis for quasifields. Amer. J. Math. **71**, 241—248 (1949).

Es sei L eine endliche, separable und kommutative galoissche Erweiterung des kommutativen Körpers K. F sei ein Unterkörper von L, der K nicht notwendig zu enthalten braucht. Die Frage nach einer Normalbasis von L über F hinsichtlich K ist vom Verf. in einer früheren Arbeit [Proc. Acad. Tokyo **21**, 22 (1945/46)] erschöpfend behandelt worden. Die vorliegende Arbeit untersucht dieselbe Frage im nichtkommutativen Fall. Zu diesem Zweck werden in einem vorbereitenden Paragraphen zunächst einige Hilfssätze über halblineare Gruppenringe über Schiefkörpern und ihre Moduln hergeleitet: (Mit „Körper" ist stets „Schiefkörper" gemeint). Ω sei ein Körper und $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe von Automorphismen von Ω. Ist Φ ein Unterkörper von Ω, der von $\mathfrak{G}$ als Ganzes fest gelassen wird, so bedeute $\mathfrak{H}$ den Normalteiler aus allen $G \in \mathfrak{G}$, die Φ elementweise fest lassen. Die Ordnung von $\mathfrak{G}$ sei g. Verf. betrachtet die halblinearen Gruppenringe $(\mathfrak{G}, \Omega) = G_1 \Omega + \cdots + G_g \Omega$ und $(\mathfrak{G}, \Phi) = G_1 \Phi + \cdots + G_g \Phi$ mit der Multiplikationsregel $\xi G = G \xi^G$ $(\xi \in \Omega, \Phi)$. Die Ordnung von $\mathfrak{H}$ sei h. $(\mathfrak{H}, \Phi) = H_1 \Phi + \cdots + H_h \Phi$ ist dann ein gewöhnlicher Gruppenring, und ist Z das Zentrum von Φ, so gilt $(\mathfrak{H}, \Phi) = (\mathfrak{H}, Z) \times \Phi$. Weiter sei $\mathfrak{n}$ das Radikal von $(\mathfrak{H}, Z)$ und $(\mathfrak{H}, Z)/\mathfrak{n} = \mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_k$ eine Zerlegung des Restklassenringes in einfache Ideale. Dann gilt $(\mathfrak{H}, \Phi)/\mathfrak{n}\Phi = \mathfrak{a}_1 \Phi + \cdots + \mathfrak{a}_k \Phi$, und $\mathfrak{n}\Phi$ ist das Radikal von $(\mathfrak{H}, \Phi)$. Ist $G_1, \ldots, G_t$ ein Repräsentantensystem mod $\mathfrak{H}$, so ist

$$(\mathfrak{G}, \Phi) = G_1 (\mathfrak{H}, \Phi) + \cdots + G_t (\mathfrak{H}, \Phi),$$

und $\mathfrak{m} = G_1 \mathfrak{n} \Phi + \cdots + G_t \mathfrak{n} \Phi$ ist ein zweiseitiges, nilpotentes Ideal in $(\mathfrak{G}, \Phi)$. Bezeichnet nun $\mathfrak{F}_i$ die Gesamtheit aller Elemente $G \in \mathfrak{G}$, die $\mathfrak{a}_i$ auf sich selbst abbilden, so zeigt Verf., daß $\mathfrak{m}$ sogar das Radikal von $(\mathfrak{G}, \Phi)$ ist, unter der folgenden Voraussetzung: „(I_0) Alle Restklassen von $\mathfrak{F}_i/\mathfrak{H}$ (ausgenommen die 1-Klasse) erzeugen äußere Automorphismen von Φ". Für Moduln über $(\mathfrak{G}, \Phi)$ bzw. $(\mathfrak{H}, \Phi)$ ergeben sich anschließend folgende Resultate: $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{r}$ seien zwei $(\mathfrak{G}, \Phi)$-Rechtsmoduln; $\mathfrak{s}$ sei direkte Summe von $(\mathfrak{H}, \Phi)$-Untermoduln, die $(\mathfrak{H}, \Phi)$-isomorph sind zu direkt-unzerlegbaren Rechtsidealkomponenten einer direkten Zerlegung von $(\mathfrak{G}, \Phi)$. Dann gilt: Sind $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{r}$ $(\mathfrak{H}, \Phi)$-isomorph, so sind sie auch $(\mathfrak{G}, \Phi)$-isomorph. Ist $\mathfrak{r}$ direkter Summand von $\mathfrak{s}$ als $(\mathfrak{H}, \Phi)$-Modul, so auch als $(\mathfrak{G}, \Phi)$-Modul. Die Anwendung dieser Ergebnisse führt im nächsten Paragraphen unmittelbar zum Ziel. Neben der Voraussetzung (I_0) oder der stärkeren Voraussetzung (I) „Die Restklassen von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ (ausgenommen die 1-Klasse) erzeugen äußere Automorphismen von Φ" wird noch die Voraussetzung (II) „Die Automorphismen aus $\mathfrak{H}$ (ausgenommen $1 \in \mathfrak{H}$) sind äußere Automorphismen von Ω" gemacht. Dann gilt der folgende Hauptsatz: Ist $g \leq (\Omega:\Phi)_r$, so gibt es ein $\xi \in \Omega$, so daß die Elemente $\xi^{G_1}, \ldots, \xi^{G_g}$ rechts-linear unabhängig sind über Φ. Ist andererseits $g \geq (\Omega:\Phi)_r$, so gibt es ein $\xi \in \Omega$ derart, daß geeignete $(\Omega:\Phi)_r$ Elemente aus dem System $\xi^{G_1}, \ldots, \xi^{G_g}$ eine Rechtsbasis von Ω über Φ bilden. Ist $(\Omega:\Phi)_r$ endlich und gleich $qg + v$ $(0 \leq v < g)$, so gilt genauer: Es gibt q Elemente $\xi_i \in \Omega$ $(i = 1, \ldots, q)$ und ein $\eta \in \Omega$, so daß die Elemente $\xi_i^{G_j}$ $(i = 1, \ldots, q; j = 1, \ldots, g)$ und ge-

eignete v unter den Elementen η^{Gj} $(j = 1, \ldots, g)$ eine Rechtsbasis von Ω über Φ bilden. — Im dritten Paragraphen betrachtet Verf. den speziellen Fall, daß in Ω noch eine Differentiation mit dem bekannten Iterationsgesetz $\binom{\nu}{\mu} \xi^{(\nu)} = (\xi^{(\mu)})^{(\nu-\mu)}$ gegeben ist. Die Elemente $G \in \mathfrak{G}$ sollen mit der Bildung der Ableitungen vertauschbar sein, und Φ sei der Körper aller absoluten Konstanten. Zunächst gilt: Sind $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \Omega$ rechts-linear unabhängig über Φ, so gibt es unter den Vektoren $(\xi_1^{(\nu)}, \ldots, \xi_n^{(\nu)})$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ genau n, die links-linear unabhängig über Ω sind. Ist weiter Λ das Invarianzsystem von $\mathfrak{G}$ in Ω, und macht man wiederum die Voraussetzungen (I) und (II), so gibt es ein $\xi \in \Omega$, unter dessen Ableitungen $k = \mathrm{Max}\,(g, (\Omega : \Phi)_r)$ so gewählt werden können, daß $\xi^{(\nu_1)}, \ldots, \xi^{(\nu_k)}$ links-linear unabhängig über Λ sind. Ist $(\Omega : \Phi)_r \geq g$, und besteht sogar $\mathfrak{G}$ (ausgenommen $1 \in \mathfrak{G}$) aus äußeren Automorphismen von Ω, so ist $k = g$, und $\xi^{(\nu_1)}, \ldots, \xi^{(\nu_g)}$ bilden eine Linksbasis von Ω über Λ. *Kowalsky* (Erlangen).

Hochschild, G.: Double vector spaces over division rings. Amer. J. Math. **71**, 443—460 (1949).

Ein (D, E)-Raum ist ein Doppelmodul mit dem Schiefkörper D als Links- und dem Ring E als Rechtsoperatorenbereich. Verf. entwickelt eine Theorie solcher Doppelmoduln im Hinblick auf die Galoissche Theorie für Schiefkörper, wie sie von N. Jacobson und H. Cartan entwickelt wurde. Ist F ein kommutativer Körper, so führt die Untersuchung der (F, F)-Räume auf die von N. Jacobson gegebene Erweiterung der Galoisschen Theorie für nicht-normale und inseparable kommutative Körpererweiterungen. Verf. behandelt die Ausdehnung der dort gewonnenen Ergebnisse auf den nichtkommutativen Fall, die zu der Einführung von relativ-zyklischen (D, E)-Räumen Anlaß gibt. Die Arbeit gliedert sich in sieben Paragraphen folgenden Inhalts: (Mit „Körper" ist stets „Schiefkörper" gemeint). § 1: D sei ein Körper. Ist M ein D-Rechtsmodul, so kann M auch aufgefaßt werden als D^*-Linksmodul, wobei D^* aus den Elementen von D, aufgefaßt als Rechtsmultiplikatoren, besteht. Für einen D-Linksmodul A und einen D^*-Links- (also D-Rechts-) Modul B wird das Kroneckerprodukt $B \times A$ durch charakteristische Eigenschaften erklärt. Das Kroneckerprodukt eines (D, E)-Raumes mit einem (E, F)-Raum, wobei D und E Körper sind, ist dann ein (D, F)-Raum. — § 2 befaßt sich mit dem Ring H aller additiven Homomorphismen eines Körpers E in einen Unterkörper D. Dieser Ring ist ein (D^*, E^*)-Raum. Ein Unterring $A \subset H$ heißt komplett, wenn $A \neq (0)$ und selbst ein (D^*, E^*)-Raum ist, wenn also $D^* \cdot A \cdot E^* = A$ ist. Als Hauptergebnis wird ein elementarer Beweis für den folgenden Satz von Jacobson-Bourbaki gegeben: Sei A ein kompletter Unterring des Ringes aller additiven Homomorphismen des Körpers E in den Unterkörper D. K bedeute den Unterkörper aller Elemente aus D, die, aufgefaßt als Linksmultiplikatoren, mit den Elementen von A vertauschbar sind. Hat dann E endlichen Rang über K, oder hat A endliche Dimension über D^*, so gilt $[E : K] = [A : D^*]$, und A stimmt überein mit dem Ring aller K-linearen Abbildungen von E in D. — Ein Körper D heißt normal über dem Unterkörper K, wenn jedes Element von D, das bei allen Automorphismen von D über K fest bleibt, zu K gehört. § 3 gibt Anwendungen und Gesichtspunkte für die Galoissche Theorie von D über K. — § 4 untersucht die Doppelmoduln über normalen Körpern. D und E seien zwei Körper, die beide den Körper K enthalten. Ein (D, E)-Raum V heißt dann K-regulär, wenn V eine Teilmenge V_0 enthält mit $D \cdot V_0 \cdot E = V$ und $k \cdot v_0 = v_0 \cdot k$ für alle $k \in K$ und $v_0 \in V_0$. Gilt $D \supset E \supset K$, und ist g ein Isomorphismus von E in D, so kann mit Hilfe von g in einfacher Weise ein K-regulärer (D, E)-Raum $V(g)$ konstruiert werden. Zwei solche Räume $V(g_1)$ und $V(g_2)$ sind dann und nur dann (D, E)-operatorisomorph, wenn es einen inneren Automorphismus a von D gibt, so daß $g_1 = a\, g_2$ ist. Ist D von endlichem Rang und normal über K, und ist E ein Zwischenkörper zwischen D und K, so ist jeder K-reguläre (D, E)-Raum Summe von einfachen K-regulären Unterräumen. Jeder einfache K-reguläre (D, E)-Raum ist (D, E)-operatorisomorph zu einem Raum $V(\bar{g})$, wo g einen Automorphismus von D über K bedeutet und $\bar{g}$ den von g erzeugten Isomorphismus von E. Jeder K-reguläre (D, E)-Raum kann zu einem K-regulären (D, D)-Raum erweitert werden. Ein Körper D von endlichem Rang über K ist dann und nur dann normal über K, wenn jeder unzerlegbare K-reguläre (D, D)-Raum die Dimension 1 über D besitzt. Die Klassen operatorisomorpher, einfacher, K-regulärer (D, D)-Räume bilden hinsichtlich des Kroneckerproduktes eine Gruppe, die isomorph ist zur Gruppe der äußeren Automorphismen von D über K. — § 5 handelt von relativ-zyklischen Moduln. Ein (D, E)-Raum M heißt relativ-zyklisch, wenn es ein $m \in M$ gibt, so daß $M = D \cdot m \cdot E$; als relativ-zyklischer Modul wird M mit (M, m) bezeichnet. Sind (M, m) und (N, n) zwei rel. zykl. (D, E)-Räume, so heißt (N, n) eine Bedeckung von (M, m), wenn es einen (D, E)-Operatorhomomorphismus von N auf M gibt, der n auf m abbildet. (M, m) und (N, n) heißen äquivalent, wenn jeder den anderen deckt. Jedem rel. zykl. (D, E)-Raum (M, m) kann (bis auf Äquivalenz) umkehrbar eindeutig ein Unterraum des (D^*, E^*)-Raumes H aller additiven Homomorphismen von E in D zugeordnet werden. Dieser Raum ist dann selbst ein (D^*, E^*)-Raum, wird mit $R(M, m)$ bezeichnet und heißt Relationsraum von (M, m). Es gilt: Ist (M, m) oder $R(M, m)$ von endlicher Dimension über D bzw. D^*, so ist $[M : D] = [R(M, m) : D^*]$. (M, m) bedeckt (N, n) dann und nur dann, wenn $R(M, m) \supset R(N, n)$. Ist $T \subset H$ ein (D^*, E^*)-Unterraum endlicher

Dimension über D^*, so gibt es einen rel. zykl. (D, E)-Raum (M, m), so daß $R(M, m) = T$ ist. — In § 6 wird für ein beliebiges System rel. zykl. (D, E)-Räume die kleinste gemeinsame Bedekkung definiert und ihre Existenz nachgewiesen. Sind (M, m) und (N, n) rel. zykl. (D, E)-Räume endlicher Dimension über D, und ist (P, p) ihre kleinste gemeinsame Bedeckung, so gilt $R(P, p) = R(M, m) + R(N, n)$. Ist der rel. zykl. (D, E)-Raum (M, m) darstellbar als direkte Summe endlichvieler (D, E)-Unterräume: $M = M_1 + \cdots + M_s$, so ist $m = m_1 + \cdots + m_s$ mit $m_i \in M_i$ und $M_i = D \cdot m_i \cdot E$. Ein endlich dimensionaler rel. zykl. (D, E)-Raum ist dann und nur dann zerlegbar, wenn sein Relationsraum zerlegbar ist. Die Anzahl der unzerlegbaren Komponenten ist in beiden Fällen dieselbe. — In § 7 schließlich wird das Produkt rel. zykl. Moduln behandelt. C und D seien Körper, (M, m) bzw. (N, n) seien rel. zykl. (C, D)- bzw. (D, E)-Räume. Der Teilraum $(L, m \times n) = C \cdot (m \times n) \cdot E$ des Kroneckerprodukts $M \times N$ heißt das Produkt von (M, m) und (N, n). Sind M und N von endlicher Dimension über C bzw. D, so gilt $R(L, m \times n) = R(M, m)\, R(N, n)$. Ist D ein Unterkörper von E, und sind (M, m) und (N, n) zwei rel. zykl. (D, E)-Räume, so bildet man ihr Produkt, indem man den ersten Faktor nur als (D, D)-Raum auffaßt. (M, m) heißt dann abgeschlossen, wenn er sein Produkt mit sich selbst deckt. Ist (M, m) von endlicher Dimension über D, so ist (M, m) dann und nur dann abgeschlossen, wenn $R(M, m)$ ein Ring ist. Bedeutet $K(M, m)$ den Unterkörper von D, der aus allen Elementen $d \in D$ mit $d \cdot m = m \cdot d$ besteht, und ist (M, m) abgeschlossen und von endlicher Dimension über D, so ist $R(M, m)$ der Ring aller $K(M, m)$-linearen Abbildungen von E in D, und es gilt $[E : K(M, m)] = [M : D]$. *Kowalsky* (Erlangen).

Brauer, R.: On a theorem of H. Cartan. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 619—620 (1949).

Der Satz von H. Cartan aus der Galoisschen Theorie für Schiefkörper lautet („Körper" bedeutet stets „Schiefkörper"): Ist K ein Körper von endlichem Rang über seinem Zentrum C, so gibt es keinen echten Zwischenkörper zwischen C und K, der bei allen inneren Automorphismen von K in sich abgebildet wird. Verf. bemerkt, daß sich dieser Satz in folgender Form ohne Voraussetzungen über den Rang von K über C völlig elementar beweisen läßt: H sei ein Unterkörper von K, der bei allen inneren Automorphismen von K in sich abgebildet wird. Dann gilt entweder $H = K$ oder $H \subseteq C$. Der Beweis wird mit Hilfe einer elementaren Rechnung in wenigen Zeilen geführt. Zum Schluß erwähnt Verf. noch, daß Satz und Beweis in viel allgemeineren Fällen gelten. Nämlich in nicht notwendig assoziativen Ringen, die nur gewisse, geeignete Voraussetzungen erfüllen müssen. *Kowalsky* (Erlangen).

Hasse, Helmut: Invariante Kennzeichnung galoisscher Körper mit vorgegebener Galoisgruppe. Arch. Math., Karlsruhe **2**, 281—294 (1950).

Ausführliche Darstellung in J. reine angew. Math. **187**, 14—43 (1950).

Krull, Wolfgang: Die Verzweigungsgruppe in der Galoisschen Theorie der arithmetischen Körper. Arch. Math., Karlsruhe **2**, 295—299 (1950).

Ausführliche Darstellung in Math. Ann. **121**, 446—466 (1950).

Zahlkörper:

Holzer, L.: Zur Klassenzahl in reinen Zahlkörpern von ungeradem Primzahlgrade. Acta math., København **83**, 327—348 (1950).

Sei l eine Primzahl $\neq 2$, m eine ganze rationale Zahl $\not\equiv 1 \pmod{l}$, R der rationale Zahlkörper. — Die Klassenzahl von $R\left(\sqrt[l]{m}\right)$ ist durch l teilbar, wenn m folgende Bedingungen erfüllt: $m^{l-1} \equiv 1 \bmod l^2$ und: zu m gibt es eine ganzrationale Zahl $m' = a^l + l^l b^l$ (a und b ganz-rational, $l \nmid a$) derart, daß die l-Kerne von m und m' dieselben Primteiler haben, und daß mit $m_1 = a + l\,b$ gilt: $\frac{m'}{m_1} \not\equiv 1 \pmod{l}$. — Die Klassengruppe von $R\left(\sqrt[l]{m}\right)$ hat mindestens z durch l teilbare Invarianten, wenn (m als frei von l-ten Potenzen vorausgesetzt) entweder unter den verschiedenen Primteilern p_i von m $\frac{1}{2}(l-1) + z$ Primzahlen mit $p_i \equiv 1 \bmod l$ vorhanden sind oder wenn alle p_i, abgesehen ev. von l, primitive Wurzeln mod. l sind, und i von 1 bis $\frac{1}{2}(l-1) + z$ im Falle $m^{l-1} \not\equiv 1 \bmod l^2$ bzw. von 1 bis $\frac{1}{2}(l+1) + z$ im Falle

$m^{l-1} \equiv 1 \bmod. l^2$ läuft. — Ein Hilfssatz von allgemeinerer Bedeutung: Wenn im l-ten Kreiskörper k_l eine Hauptidealgruppe existiert, welche $N_{k_l(\sqrt[l]{m})/k_l}((A)) \cdot S_f$ [(A) = Gruppe der Hauptideale von $k_l(\sqrt[l]{m})$, S_f = Strahl nach dem Führer f der Idealgruppe für $k_l(\sqrt[l]{m})/k_l$], dagegen nicht alle Ideale $\neq 0$ aus R enthält, dann ist die Klassenzahl von $R(\sqrt[l]{m})$ durch l teilbar. *Grunwald* (Hannover).

Krasner, Marc: Théorie non abélienne des corps de classes pour les extensions galoisiennes des corps de nombres algébriques: bimatrices, représentations bimatricielles des semi-groupes abéliens libres. C. r. Acad. Sci., Paris **225**, 785—787 (1947).

Krasner, Marc: Théorie non abélienne des corps de classes pour les extensions galoisiennes des corps de nombres algébriques: anneau des représentations d'un groupe; représentations associées du groupe de Galois et du semi-groupe des idéaux. C. r. Acad. Sci., Paris **225**, 973—975 (1947).

Krasner, Marc: Théorie non abélienne des corps de classes pour les extensions galoisiennes des corps de nombres algébriques: anneau principal; lois d'unicité, d'ordination, d'existence (forme provisoire) d'isophormisme et de décomposition; loi de monodromie. C. r. Acad. Sci., Paris **225**, 1113—1115 (1947).

Krasner, Marc: Théorie non abélienne des corps de classes pour les extensions galoisiennes des corps de nombres algébriques: conséquences de la loi de monodromie; résumé de la théorie locale. C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 535—537 (1948).

Krasner, Marc: Théorie non abélienne des corps de classes pour les extensions galoisiennes des corps de nombres algébriques: f-extensions; conducteur. C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 1231—1233 (1948).

Krasner, Marc: Théorie non abélienne des corps de classes pour les extensions galoisiennes des corps de nombres algébriques: forme définitive de la loi d'existence. C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 1656—1658 (1948).

In den vorliegenden 6 Noten wird eine Verallgemeinerung der Klassenkörpertheorie für den Fall endlicher galoisscher (aber nicht notwendig abelscher) Erweiterungen skizziert. Um seine Resultate formulieren zu können, führt Verf. eine Anzahl neuer Begriffsbildungen ein. — In der Menge S der Matrizen endlichen Grades über dem komplexen Körper wird die Kroneckersche Addition und Multiplikation betrachtet. Es wird das Element O — die einzige Matrix des Grades 0 — und die Menge der Matrizenpaare $\mathfrak{A} = (A, B)$ — die man Bimatrizen nennt — eingeführt. Eine Matrix A wird mit der Bimatrix (A, O) identifiziert, wodurch S zu einer Untermenge der Menge der Bimatrizen wird. Die Kroneckersche Addition und Multiplikation wird auf die Bimatrizen erweitert. Führt man nun in die Menge der Bimatrizen in natürlicher Weise eine Äquivalenz ein, so bildet die Menge W der Klassen äquivalenter Bimatrizen für diese Operationen einen kommutativen Ring. — Eine freie abelsche Halbgruppe ist eine solche Halbgruppe F, in der jedes Element sich eindeutig als ein Potenzprodukt der Elemente einer Untermenge B von F (B heißt die Basis von F) schreiben läßt. Die Menge der ganzen Ideale eines Zahlkörpers k bildet für die Multiplikation eine freie abelsche Halbgruppe U_k, deren Basis die Menge der Primideale ist. Ist K eine endliche Erweiterung von k, so liefert die Normbildung einen Homomorphismus von U_K in U_k. — Verf. definiert bimatrizielle Darstellungen r einer freien abelschen Halbgruppe F. Das sind gewisse Homomorphismen von F in die multiplikative Halbgruppe vollständig reduzierbarer Bimatrizen [d. h. solcher Bimatrizen, die sich auf die Form (A, B), wo A und B Diagonalmatrizen sind, bringen lassen]. Eine solche Darstellung ist vollständig bestimmt, wenn die Bilder der Basis von F bekannt sind. Zwei Darstellungen werden als nicht verschieden betrachtet, wenn sie bis auf eine endliche Anzahl der Basiselemente übereinstimmen. Für die bimatriziellen Darstellungen von F wird die Kroneckersche Addition und Multiplikation eingeführt. — In der Menge

der Bimatrizen wird gleichfalls das durch $(A, B) \cdot (A', B') = (A\,A', B\,B')$ definierte Produkt betrachtet. Dieses heißt das Matrixprodukt. Ist G eine Gruppe, so definiert Verf. die Darstellungen Γ von G als solche Abbildungen von G in die Menge der Bimatrizen, welche Homomorphismen für die Matrixmultiplikation sind. Äquivalente Darstellungen werden als nicht verschieden betrachtet. Für die Kroneckersche Addition und Multiplikation bilden die Klassen äquivalenter Darstellungen einer gegebenen Gruppe einen kommutativen Ring. In natürlicher Weise werden die Begriffe wie charakteristische Funktion, Charakter, Zerfällung einer Darstellung usw. eingeführt und diskutiert. — Sei nun k ein Zahlkörper, K eine endliche galoissche Erweiterung von k, $G_{K/k}$ die Galoisgruppe von K/k und $U_{K/k}$ die freie abelsche Halbgruppe der ganzen Ideale von k, die zu der Diskriminante von K/k teilerfremd sind. Sei $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}}\right)$ das Artinsymbol. Ist Γ eine Darstellung von $G_{K/k}$, so heißt die bimatrizielle Darstellung r_Γ von U_k, für die für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in U_{K/k}$ $r_\Gamma(\mathfrak{p}) = \Gamma\left(\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}}\right)\right)$ ist, die zu Γ assoziierte Darstellung. Durchläuft Γ alle Darstellungen von $G_{K/k}$, so bildet die Menge der assoziierten Darstellungen r_Γ einen Ring, den Verf. den Takagi-Ring $T_{K/k}$ der Erweiterung K/k nennt. Durchläuft K alle endlichen galoisschen Erweiterungen von k, so bilden die Darstellungen von U_k, die allen Darstellungen aller Galoisgruppen $G_{K/k}$ assoziiert sind, ebenfalls einen Ring, den Hauptring R von k. Die Takagischen Unterringe des Hauptringes lassen sich durch innere Eigenschaften kennzeichnen, und sie bestimmen eindeutig die galoisschen Erweiterungen K/k. Die Kenntnis der Struktur eines Takagi-Ringes $T_{K/k}$ gibt weitgehende Auskunft über die Struktur der Galoisgruppe $G_{K/k}$ der entsprechenden Erweiterung. — In den letzten Noten zeigt Verf., wie die Eigenschaften des Hauptringes von k mit den arithmetischen Eigenschaften von k zusammenhängen. Er stützt sich bei diesen Betrachtungen auf eine lokale Körpererweiterungstheorie, die er in den letzten Jahren ausgearbeitet hat. *L. Kaloujnine* (Berlin).

Zahlentheorie:

Venkataraman, C. S.: A generalisation of Euler's φ function. Math. Student, Madras **17**, 34—36 (1950).

The au. proves that $\varphi(M, g)$, defined as the number of positive integers not greater than M and which have a specified divisor g of M as their greatest common divisor with M, is multiplicative in M and obtains its value in terms of the prime factors of M/g. The reviewer remarks that the results obtained follow trivially from the fact that $\varphi(M, g)$, in terms of Euler's totient function, equals $\varphi(M/g)$.
K. G. Ramanathan (Princeton).

Holzer, L.: Minimal solutions of diophantine equations. Canadian J. Math. **2**, 238—244 (1950).

Verf. beweist folgenden Satz: Wenn a, b, c ganze, quadratfreie, paarweise teilerfremde Zahlen sind, und wenn $-ab$ quadratischer Rest von c, ac quadratischer Rest von b und bc quadratischer Rest von a ist, dann hat die diophantische Gleichung $ax^2 + by^2 = cz^2$ nichttriviale Lösungen mit $|x| < \sqrt{bc}$, $|y| < \sqrt{ca}$, $|z| < \sqrt{ab}$. — Der Beweis beruht u. a. auf dem folgenden Resultat von E. Hecke [Math. Z. **1**, 375 (1918) und **6**, 38 (1920); siehe auch H. Hasse, Jber. Deutsche Math.-Verein. **35**, 32 (1926)]: Es sei in einem algebraischen Zahlkörper j ein ganzes Ideal und α eine zu j prime ganze Zahl. Dann gibt es unendlich viele Primideale (π) vom ersten Grade, so daß $\pi \equiv \alpha \pmod{j}$. *Nagell* (Uppsala).

Bell, E. T.: A Pythagorean variation. Scripta math., New York **13**, 163—168 (1947).

Sprach man im älteren Schrifttum von einer parametrischen Lösung (p. L.) einer Diophantischen Gleichung (D. G.) gelegentlich als von einer „allgemeinen", auch wenn sie nicht alle

der D. G. genügenden Wertgesamtheiten umfaßte, so bezeichnet Verf. eine p. L. dann als „vollständig", wenn sie bei unabhängiger Veränderlichkeit der Parameter in gewissen Vorräten ganzer Zahlen alle jene Wertgesamtheiten liefert. Er gibt hier eine solche vollständige Lösung der D. G.

(1) $$(X^2 - W)^2 + (Y^2 - W)^2 = (Z^2 - W)^2,$$

von der vorher W. P. Whitlock [Scripta math., New York **12**, 259—265 (1946)] eine im obigen Sinne allgemeine Lösung angegeben hatte. Verf. zerlegt (1) mit Hilfe der indischen Formeln für Pythagoreische Zahlen in die D. G.

(2) $$W = X^2 - x(y^2 - z^2) = Y^2 - 2xyz = Z^2 - x(y^2 + z^2),$$

(3) $$Z^2 - X^2 = 2xz^2, \qquad (4) \quad Z^2 - Y^2 = x(y - z)^2$$

und löst das Gefüge (3), (4), indem er daraus zunächst unabhängig Z, X, x, z und Z, Y, x, y, z bestimmt und die so für Z, x, z gefundenen Werte einander gleichsetzt. Dies führt zu einem anderen, lösbaren Gefüge $\mathfrak{G}$. Seiner Lösung schickt Verf. Hilfsmittel aus dem Bereiche malwertförmiger Gleichungen wie $xy = zw$ voraus. Bei dem Gefüge

(5) $$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \qquad a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$$

scheiden sich der Fall des Ranges 2 und 1 der Matrix ihrer Vorzahlen als reguläre und singuläre Lösung. — Als Lösung von $\mathfrak{G}$ findet Verf.

$$2X = \delta e\, A\, C, \quad x = e^2\, k\, p\, q\, u, \quad 2Y = \delta e\, B\, D, \quad y = \delta(g\, h\, C + m\, n\, B),$$
$$2Z = \delta e\, B\, C, \quad z = \delta g\, h\, C, \quad 4W = \delta^2 e^2 [A^2\, C^2 - 4 k\, p\, q\, u\, m\, n\, B(2 g\, h\, C + m\, n\, B)],$$

wo $e, g, h, k, p, q, m, n, u$ die neun unabhängigen ganzzahligen Parameter sind. Bedeutung der übrigen Zeichen:

$$C = q\, u\, m^2 + k\, p\, n^2, \quad B = \alpha\, p\, q\, h^2 + \beta\, k\, u\, g^2, \quad E = \alpha\, p^2 h^2 n^2 - \beta\, u^2 g^2 m^2,$$
$$D = q\, u\, m^2 - k\, p\, n^2, \quad A = \alpha\, p\, q\, h^2 - \beta\, k\, u\, g^2.$$

Sind C, B, E nicht sämtlich null, so bedeutet δ ein willkürliches ganzes Vielfaches des Kehrwertes des größten gemeinsamen Teilers von C, B, E; α, β sind ganze Zahlen mit dem Malwerte 2. — Sind C, B, E alle drei gleich null, so hat (1) nur die selbstverständlichen Lösungen

$$X^2 = Y^2 = Z^2 = W \quad \text{oder} \quad X = Z = 0, \; W = Y^2; \; Y = Z = 0, \; W = X^2$$

[lies so in (5. 13) statt $X = W^2$]. Sie sind der einzige Beitrag eines im Laufe des Verfahrens sich einstellenden singulären Gefüges (5). *Koschmieder* (Tucumán).

Cassels, J. W. S.: The rational solutions of the diophantine equation $Y^2 = X^3 - D$. Acta math., København **82**, 243—273 (1950).

Verf. behandelt die diophantische Gleichung $Y^2 = X^3 - D$ mit der Weilschen Methode und operiert im rein-kubischen Körper $\mathsf{P}(\sqrt[3]{D}) = K$. Eine Reihe von notwendigen Bedingungen für die Lösbarkeit der Gleichung werden aufgestellt. Es handelt sich um Kongruenzen nach einem Modul, der eine Potenz von einem Primidealdivisor von (2) oder (3) ist. Von den Resultaten sei erwähnt: „Es sei D eine ungerade oder genau durch 4 teilbare, kubenfreie ganze Zahl, die nicht $\equiv \pm 1 \pmod 9$ ist; es sei ferner die Klassenzahl in K ungerade. Dann haben die beiden Gleichungen $Y^2 = X^3 \pm D$ nicht gleichzeitig nichttriviale Lösungen. Gibt es nichttriviale Lösungen für die eine dieser Gleichungen, so hat die Gruppe der Lösungen genau einen Generator unendlicher Ordnung". Am Ende folgt eine Tafel über die Lösbarkeit aller Gleichungen mit $|D| \leq 50$; in diesen Fällen gibt es höchstens einen Generator unendlicher Ordnung. Eine andere Tafel gibt Klassenzahl und Einheiten für die selben Werte von D. Theorem IV, S. 246, wurde zuerst von Ref. bewiesen [Skr. Norske Vid. Akad. **1935**, No. 1; dies. Zbl. **11**, 147]. *Nagell* (Uppsala).

Zahlen, Jean-Pierre: Sur l'équation diophantienne $X^3 + Y^3 + Z^3 = h\, T^3$. Euclides, Madrid **9**, 139—142 (1949).

Verf. gewinnt für die in der Überschrift genannte Gleichung folgende von drei ganzzahligen Parametern k, m, n abhängige Lösung:

$$\begin{aligned} X &= -27h^3 n^9 + 81h^2 k^3 m^3 n^6 + 27h\, k^6 m^6 n^3 - k^9 m^9, \\ (1) \qquad Y &= 27h^3 n^9 - 81h^2 k^3 m^3 n^6 + 45h\, k^6 m^6 n^3 + k^9 m^9, \\ Z &= 108h^2 k^3 m^3 n^6 - 36h\, k^6 m^6 n^3, \quad T = 6n(3h\, k\, m\, n^3 + k^4 m^4)^2. \end{aligned}$$

Wegen der Art ihrer Herleitung, die klassischen Gedankengängen folgt, sich dabei aber eigener Kunstgriffe bedient, muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. Mit

$m = n = 1$ zieht sich (1) auf die vom Verf. schon früher [Interméd. Rech. math. **3**, 105] gefundene einparametrige Lösung

$$X = -27h^3 + 81h^2k^3 + 27hk^6 - k^9, \quad Y = 27h^3 - 81h^2k^3 + 45hk^6 + k^9,$$
$$Z = 108h^2k^3 - 36hk^6, \quad T = 6(3hk + k^4)^2$$

zurück. — Verf. schließt mit Angabe eines Verfahrens, das aus zwei bekannten Lösungen der vorgelegten Gleichung eine dritte zu finden erlaubt, und eines Weges, auf dem man aus einer bekannten Lösung eine zweite ermittelt. *L. Koschmieder.*

Zahlen, J. P.: Sur les égalités multigrades en nombres tous premiers. Euclides, Madrid **9**, 283—286 (1949).

Verf. beweist zwei neue, auf lauter Primzahlen a_i und b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bezügliche Sätze (und ihre Umkehrungen): I. Wenn „die vielgradige Gleichung n-ten Grades"

(1) $a_1, \ldots, a_k \overset{n}{=} b_1, \ldots, b_k$ (d. h. die n Gleichungen $\sum_{i=1}^{k} a_i^r = \sum_{i=1}^{k} b_i^r$, $1 \leq r \leq n$) mit $k \geq n + 1$ gelten, so bestehen die n Beziehungen

$$\sum_{i=1}^{k} \int a_{(i)}^r = \sum_{i=1}^{k} \int b_{(i)}^r, \quad 1 \leq r \leq n, \tag{2}$$

wo $\int a_{(i)}^r$ die Summe der Teiler von a_i^r bedeutet (wäre nicht $\int (a_i^r)$ vorzuziehen? — Frage des Ref.). — Verf. gewinnt (2), indem er die Gleichungen (1) in geeigneter Weise zusammenzählt und benutzt, daß $\int (a_i^r) = (a_i^{r+1} - 1)/(a_i - 1)$ ist wegen der Primeigenschaft der a_i. (Auf S. 284 ist in Z. 5 wohl „membre à membre" zu lesen.) — II. Aus (1) folgt

$$\int (a_1), \ldots, \int (a_k) \overset{n}{=} \int (b_1), \ldots, \int (b_k) \tag{3}$$

[Verf. schreibt $\left(\int a_1\right)$ usw.]. Er beweist (3) mit Hilfe des Satzes, daß, wenn $A_i = a_i v + u$, $B_j = b_j v + u$ mit beliebigen ganzen u, v $(1 \leq i, j \leq n)$ gesetzt wird, (1) die Beziehung $A_1, \ldots, A_k \overset{n}{=} B_1, \ldots, B_k$ nach sich zieht. — Daß es vielgradige Gleichungen (1) zwischen lauter Primzahlen wirklich gibt, beweisen die vom Verf. herangezogenen Zahlenbeispiele, die A. Moessner (Interméd. Rech. math. **3**, 107; Pythagore **2**, num. 3,2) angegeben hat. — Am Schluß der Arbeit einige offenbleibende Fragen: Sind (1) und (2) [(1) und (3)] dann und nur dann miteinander verträglich, wenn a_i, b_i sämtlich Primzahlen sind? — Gibt es in lauter Primzahlen vielgradige Ketten, und unzählige vielgradige Gleichungen n-ten Grades?

L. Koschmieder (Tucumán).

Segre, Beniamino: Alcune questioni diofantee. Boll. Un. mat. Ital., III. S. **5**, 33—43 (1950).

Wenn eine elliptische Kurve mit rationalzahliger Gleichung genau 4 und nicht mehr rationale Punkte enthält, so ist, wie bereits Hurwitz (Math. Werke, Basel 1933, **2**, 446—468; dies. Zbl. **7**, 195) bemerkt hat, einer dieser Punkte ein Wendepunkt, während die 3 andern gewöhnliche Punkte sind, die entweder auf einer Geraden liegen können oder nicht. Im zweiten Fall liegt der Wendepunkt mit zweien der übrigen auf einer Geraden und ist Tangentialpunkt des dritten. Bei passender Wahl des Koordinatensystems lautet dann die Gleichung der Kurve: $x(x + z)(y + z) + a y^2 z = 0$. Für $a = -1/4$ (Hurwitz) und $a = -1/8$ (B. Levi) enthält die Kurve keine rationalen Punkte außer den Punkten (0, 0, 1), (1, 0, −1), (0, 1, 0) und dem Wendepunkt (1, 0, 0). Verf. beweist, daß dies auch für $a = -1/12$ der Fall ist, indem er durch die Substitution $u = z$, $v = y + z$, $w = (2x + z)(y + z)$ zur Gleichung $uv(u^2 + uv + v^2) = 3w^2$ übergeht und zeigt, daß diese keine ganzzahligen Lösungen $u > 0$, $v > 0$, $uv > 1$, $(u, v) = 1$ besitzt. — Verf. wendet diesen Satz an, um zu zeigen, daß das diophantische Gleichungssystem $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2$, $x_1^3 + y_1^3 = x_2^3 + y_2^3 = x_3^3 + y_3^3$ keine nicht

trivialen Lösungen besitzt. Die durch diese Gleichungen dargestellte Kurve der Ordnung 36 zerfällt nämlich in 4 Geraden, z. B. die Gerade $x_1 = x_2 = x_3$, $y_1 = y_2 = y_3$, welche die trivialen Lösungen enthalten, ferner in 6 Kurven 4. Ordnung, z. B. die Kurve $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 2x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + (x_1 + y_1)(x_2 + y_2)$, $x_1 - x_3 = y_1 - y_3 = 0$, welche auf eine Kubik der oben untersuchten Art projiziert werden kann und daher außer 4 trivialen Punkten keine weiteren rationalen Punkte enthält, und endlich in eine restliche Kurve 8. Ordnung, von der man leicht zeigen kann, daß kein rationaler Punkt auf ihr liegt. *Gröbner* (Innsbruck).

Gatteschi, L. e L. A. Rosati: Risposta ad una questione proposta da A. Moessner. Boll. Un. mat. Ital., III. S. **5**, 43—48 (1950).

Verff. beweisen, daß das System

$$A_1^2 + B_1^2 = A_2^2 + B_2^2 = A_3^2 + B_3^2, \quad A_1^3 + B_1^3 = A_2^3 + B_2^3 = A_3^3 + B_3^3,$$

wo (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) drei Zahlenpaare sind, deren keines aus dem andern durch Permutation hervorgeht, keine reellen Lösungen hat. Weiter gilt: Das weniger erfordernde System $A_1^2 + B_1^2 = A_2^2 + B_2^2$, $A_1^3 + B_1^3 = A_2^3 + B_2^3$ hat keine Lösungen in ganzen Zahlen. *Holzer* (Graz).

Wright, E. M.: Equal sums of like powers. Proc. Edinburgh math. Soc., II. S. **8**, 138—142 (1949).

Verf. gibt für die von D. H. Lehmer (dies. Zbl. **29**, 110) gefundenen Sätze vereinfachte Beweise. Er zeigt weiter den Aufbau fortlaufender Gleichungen zwischen 2^m mj-dimensionalen Vektoren $a_{1,i} \overset{k}{=} a_{2,i} \overset{k}{=} \cdots \overset{k}{=} a_{2^m,i}$, wenn eine Lösung des Tarry-Escott-Problems $b_i \overset{k}{=} b_i'$ mit b_i und b_i' als j-dimensionalen Vektoren gegeben ist. *Holzer* (Graz).

Lahiri, D. B.: On Ramanujan's function $\tau(n)$ and the divisor function $\sigma_k(n)$. II. Bull. Calcutta math. Soc. **39**, 33—52 (1947).

Vandiver, H. S.: On a generalization of a Jacobi exponential sum associated with cyclotomy. Proc. nat. Acad. Sci. USA **36**, 144—151 (1950).

Es handelt sich um die von A. Weil (dies. Zbl. **32**, 394) eingeführten Charaktersummen $\pi(\chi_1, \ldots, \chi_s) = \sum_{x_1 + \cdots + x_s = 1} \chi_1(x_1) \cdots \chi_s(x_s)$, wo $\chi_1, \ldots, \chi_s$ Charaktere der Multiplikationsgruppe eines endlichen Körpers Ω sind und $x_1, \ldots, x_r$ in Ω laufen [wobei allgemein $\chi(0) = 1$ oder 0 zu verstehen ist, je nachdem $\chi = \varepsilon$ der Hauptcharakter ist oder nicht]. Verf. bevorzugt statt dieser klaren und einfachen Schreibweise die auf die explizite Definition der Charaktere (mittels Primitivwurzel und Indexfunktion) zurückgreifende formal kompliziertere Schreibweise; er rechtfertigt dies durch Hinweis auf ältere Autoren (Cauchy, Kummer, Kronecker, H. Weber, P. Bachmann, Mertens, Landau). Er diskutiert breit triviale Fragen der Schreibweise und Normierung (z. B. Ersetzung von 1 durch -1 in der Summationsbedingung) und beweist durch längere explizite Rechnung die bei der Charakterschreibweise ohne weiteres auf der Hand liegende Tatsache, daß $\pi(\chi_1, \ldots, \chi_s)$ bei den Automorphismen von Ω (Potenzierung mit der Charakteristik) invariant ist. Zum Schluß bemerkt er, daß die von A. Weil bewiesene Betragformel für diese Summen auch in dem etwas allgemeineren Sinne gilt, daß die Werte der Charaktere von Ω stets als $(q-1)$-te Einheitswurzeln als Elemente des Restklassenrings mod. $x^{q-1} + \cdots + x + 1$ verstanden werden (q die Elementanzahl von Ω). *Hasse.*

Chowla, S.: A new proof of a theorem of Siegel. Ann. Math., Princeton, II. S. **51**, 120—122 (1950).

The au. gives a simple proof of Siegel's Theorem, [Acta arithmetica **1**, 83—86 (1935); this Zbl. **11**, 9] that if χ is a real primitive character mod k and $\varepsilon > 0$ then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} > k^{-\varepsilon}$. See also T. Estermann (this Zbl. **34**, 313). *K. G. Ramanathan.*

Bruijn, N. G. de: On the number of uncancelled elements in the sieve of Eratosthenes. Proc. Akad. Wet., Amsterdam **53,** 803—812; Indag. math., Amsterdam **12,** 247—256 (1950).

Let $2 \leq y < x$. Let $\Phi(x, y)$ denote the number of positive integers $\leq x$ which have no prime factors $< y$ and let $\Phi(x, y) = x \prod_{p<y} (1 - 1/p)\, \psi(x, y)$. It was proved by Buchštab (this Zbl. **33**, 163) that, for a fixed u, we have $\lim_{y\to\infty} \psi(y^u, y) = \omega(u)\, e^{\gamma}$, where $\omega(u)$ is defined to be u^{-1} for $1 \leq u \leq 2$ and $d(u\,\omega(u))/du = \omega(u-1)$ for $u \geq 2$. The author proved that $\lim_{u\to\infty} \omega(u) = e^{-\gamma}$ and gave a closer investigation about $Q(y) = \psi(y^u, y) - 1$. He obtained the following uniform bound, namely, there is a positive constant a such that $|Q(y)| < C\, e^{-au}$. For partial ranges, he obtained the following more precise results: (1) for large u, $|Q(y)| < C\, 2^y/y^u \log y$, (2) for small u, $|Q(y)| < C\, \Gamma^{-1}(u) + C\, R(y)$, where $R(y)$ is a positive function satisfying $R(y) \downarrow 0$ for $y \to \infty$, $R(y) > y^{-1}$ and $|\pi(y) - \mathrm{li}\, y| < y\, R(y)/\log y$ and $\int_y^\infty |\pi(t) - \mathrm{li}\, t|\, t^{-2}\, dt < R(y)$; (3) for $1 \leq u \leq 4y^{\frac{1}{2}}/\log y$,

$$|Q(y)| < C \log^3 y\, e^{-u \log u - u \log\log u + Cu},$$

and (4) for $u > 4y^{\frac{1}{2}}/\log y$, $|Q(y)| < C\, e^{-\frac{1}{2} u \log u}$. *L. K. Hua* (Peking).

Selberg, Sigmund: An asymptotic formula for the distribution of the two-factorial integers. 10. Skand. Mat. Kongr. København **1946,** 59—64 (1947).

Es seien p und q beliebige Primzahlen, und es bezeichne $\pi_2(x)$ die Anzahl der Produkte pq mit $pq \leq x$. E. Landau hat die Gaußsche Vermutung $\pi_2(x) \sim \frac{x}{\ln x} \ln\ln x$ bewiesen, und Verf. hat später die folgende Verschärfung dieser Abschätzung gegeben

$$\frac{\pi_2(x)}{x/\ln x} = \ln\ln x + B + O(1),$$

wo B eine näher angegebene Konstante ist. Später hat S. M. Shah die folgende verschärfte Abschätzung gegeben

$$\frac{\pi_2(x)}{x/\ln x} = \ln\ln x + a_1 + \frac{\ln\ln x + a_2}{\ln x} + \frac{2!\ln\ln x + a_3}{(\ln x)^2} + \cdots + \frac{(r-1)!\ln\ln x + a_r}{(\ln x)^{r-1}} + O\left(\frac{\ln\ln x}{(\ln x)^r}\right),$$

wo $a_1, \ldots, a_r$ Konstante sind. Sein Beweis ist aber nicht richtig. Verf. gibt nun unter Benutzung der ζ-Funktion nach einer Landauschen Methode einen korrekten Beweis der letzten Relation. Für die Anzahl der Produkte $p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ nicht größer als x mit festen Exponenten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ kann eine entsprechende Abschätzung nach demselben Verfahren gegeben werden. *Bergström* (Göteborg).

Kuipers, L.: Prime-representing functions. Proc. Akad. Wet., Amsterdam **53,** 309—310; Indag. math., Amsterdam **12,** 57—58 (1950).

Verf. beweist: Falls c ganz ≥ 3 ist, gibt es eine nur von c abhängige reelle Zahl A derart, daß die größte in A^{c^x} enthaltene ganze Zahl für jedes positive ganze x eine Primzahl ist. — Der Spezialfall $c = 3$ dieses Satzes wurde von W. H. Mills bewiesen (dies. Zbl. **33,** 163). *H. D. Kloosterman* (Leiden).

Rankin, R. A.: The difference between consecutive prime numbers. III. J. London math. Soc. **22,** 226—230 (1947).

Ist p_n die n-te Primzahl, $l = \lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n}$, so gilt, unter Benützung der allgemeinen Riemannschen Vermutung, die Abschätzung $l \leq 3/5$ [R. A. Rankin, Proc. Cambridge phil. Soc. **36,** 255—266 (1940); dies. Zbl. **25,** 307]. Erdös [dies. Zbl. **23,** 298] zeigt ohne Benützung der R. V. die Existenz eines c mit $l \leq c < 1$.

Verf. zeigt nun, unter Verwendung von Resultaten von A. Buchstab (vgl. dies. Zbl. **22**, 113 und **24**, 293), ohne Benützung der R. V., daß $l < 57/59$. *Hlawka* (Wien).

Steuerwald, Rudolf: Über die Perioden regelmäßiger Kettenbrüche für Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen. Math. Z., Berlin **52**, 686—697 (1950).

This paper is concerned with a generalization of the considerations on expansions for the square roots of whole numbers (i. e., whole rational numbers) (cf. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1929, pp. 96—115) into continued fractions with culminate and peneculminate periods. Let D be a positive whole number, not a perfect square, and consider the periodic continued fraction expansion

$$\xi_0 = \sqrt{D} = [b_0, \overline{b_1, \ldots, b_{r-1}, b_r, b_{r-1}, \ldots, b_1, 2b_0}]. \tag{1}$$

Let

$$\xi_v = \frac{\sqrt{D} + P_v}{Q_v} = [b_v, b_{v+1}, \ldots] \quad (v = 0, 1, \ldots) \tag{2}$$

be the quotients of the continued fractions (1), $A_{\mu,v}$ and $B_{\mu,v}$ the numerators and denominators of the μ-th approximants of ξ_v, $A_{\mu,0} = A_\mu$, $B_{\mu,0} = B_\mu$. For $v = r$

$$2P_r = b_r Q_r = 2(b_0 - c_r), \quad Q_r \geq 1, \quad 0 \leq c_r \leq Q_r - 1. \tag{3}$$

Conversely, given three whole numbers r, Q, c, which satisfy the conditions (4) $r \geq 1$, $Q \geq 1$, $0 \leq c \leq Q - 1$, the determination of positive whole numbers b_v $(v = 0, 1, \ldots, r)$ and D so that equations (1) to (3) hold with $Q_r = Q$ and $c_r = c$ is considered. The method is a generalization of that for the cases $Q = 1, 2$ considered by Perron (op. cit., pp. 96ff., 110ff.). The partial denominators $b_1, \ldots, b_{r-1}$ of (1) must satisfy the equation

$$c\, A_{r-2,1} + B_{r-2,1} = Q\, A_{r-3,1}, \tag{5}$$

and are called a „solution" of this equation. It is shown that for $r \geq 3$ there always exist solutions if $c = 0$ or is a factor of $Q - 1$. Properties of the solutions are discussed. *Frank* (Chicago, Ill.).

Tietze, Heinrich: Über real — statt formal — festgelegte Kettenalgorithmen zur simultanen Approximation mehrgliedriger reeller Zahlenverhältnisse. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München **1945/46**, 1—43 (1947).

In this study the Euclidean algorithm for the highest common factor of two integers (which also leads to the continued fraction expansion for the ratio of the two integers) is considered both as a successive subtraction process and as a division process. This is geometrically interpreted as successive coordinate transformations in two variables. The generalization for three numbers, due to Poincaré [Sur une généralisation des fractions continues, C. r. Acad. Sci., Paris **99**, 1014—1016 (1884)], is (as suggested by Poincaré) extended to n positive real numbers $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$, $a_1 > a_2 > \cdots > a_n$. From these, a new number system $a_1' = a_1 - a_2, \ldots, a_{n-1}' = a_{n-1} - a_n$, $a_n' = a_n$ is built up, and the process repeated. The case where some of the numbers a_v are equal is also treated. Geometrically, this method leads to a sequence of coordinate transformations in n variables. The process is modified by the successive formation of sets of numbers

$$a_1' = a_1 - q_1 a_2, \ldots, a_{n-1}' = a_{n-1} - q_{n-1} a_n, \quad a_n' = a_n,$$

where q_v is the largest integer less than the quotient a_v/a_{v+1}. Examples are given which illustrate the various methods. *E. Frank* (Chicago, Ill.).

Tietze, Heinrich: Ein Algorithmus von Poincaré und andere Algorithmen zur Approximation mehrgliedriger reeller Zahlenverhältnisse. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München **1945/46**, 185—219 (1947).

It is well known that a real number γ may be expanded (by the Euclidean algorithm) into a continued fraction $q + 1/q_1 + 1/q_2 + \cdots$ which is finite if γ is rational.

If γ is the square root of an integer and not rational, the continued fraction is periodic and the approximants converge to the number γ. The author has discussed the Poincaré algorithm for the simultaneous approximation of the proportion of $n \geq 2$ real numbers $a_1 : \ldots : a_n$ (of which the Euclidean algorithm is a special case for $n = 2$) [preced. rev.]. In the present paper, the author shows in a number of examples that the properties of reduction of the number of terms a_ν, periodicity, and convergence (which is shown by a geometric interpretation of the Poincaré algorithm by a sequence of vectors in n-dimensional space), which hold for $n = 2$, do not always generalize to the cases $n > 2$. *E. Frank* (Chicago, Ill.).

Rédei, L.: Endlich-projektivgeometrisches Analogon des Minkowskischen Fundamentalsatzes. Acta math., København **84**, 155—158 (1950).

Verf. zeigt folgenden Satz 1: Es seien $m_1, \ldots, m_k$ natürliche Zahlen, $L_i = L_i(x) = L_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, k)$ Funktionen, die für ganze rationale x_j $(j = 1, \ldots, n)$ ganz rational sind, welche die Eigenschaft haben, daß aus $L_i(x) \equiv L_i(y)\ (m_i)$ folgt $L_i(x - y) \equiv 0\ (m_i)$. Ist nun K ein konvexer Körper im R_n mit Mittelpunkt 0 und Volumen $V(K) \geq 2^n m_1 \cdots m_k$, dann enthält er einen Gitterpunkt $x \neq 0$, mit $L_i(x) \equiv 0\ (m_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$ (hier bedeutet Gitterpunkt: Punkt mit ganzen rationalen Komponenten, also Punkt des Würfelgitters). Dieser Satz enthält einen Satz von Jarník [Časopis Mat. Fys. **68**, 59—60 (1939)]. Daraus folgt sofort ein weiterer Satz. Wir können, wenn p Primzahl, jedem Gitterpunkt $x = (x_1, \ldots, x_n)$, wo nicht alle $x_i \equiv 0\,(p)$, eindeutig einen Punkt des $(n-1)$-dimensionalen projektiven Raumes P_{n-1} über dem Primkörper $K(p)$ zuordnen. Dann gilt (Satz 2): Ist U_r ein r-dimensionaler linearer Unterraum von P_{n-1}, K wieder ein konvexer Körper des R_n mit Mittelpunkt 0, ist $V(K) \geq 2^n p^{n-r-1}$ und enthält K keinen Gitterpunkt $\neq 0$, dessen Koordinaten alle $\equiv 0\,(p)$ sind, dann enthält K einen Gitterpunkt, dem ein Punkt von U_r zugeordnet ist. Dies folgt daraus, daß ja die Punkte x von U_r durch Kongruenzen $L_i(x) \equiv 0\,(p)$ $(i = 1, \ldots, n-r-1$; L_i homogene Linearformen mit ganzzahligen Koeffizienten) definiert werden können. Dann liefert Satz 1 mit $k = n - r - 1$, $m_1 = \cdots = m_k = p$ das Gewünschte. Für $n = 2$, $r = 0$, K: Quadrat Max $(|x|, |y|) \leq \sqrt{p}$ erhält man einen Satz von Thue (A. Scholz, Einführung in die Zahlentheorie, Berlin 1939, S. 45—46; dies. Zbl. **22**, 112). — Verf. hat vom Satz 2 für $n = 2$, $r = 0$ bereits schöne Anwendungen gemacht (dies. Zbl. **35**, 26). Ich möchte noch auf Satz 1 eingehen und den Grundgedanken in allgemeinerer Fassung, als es der Verf. tut, herausschälen. Es liege ein beliebiges Gitter G [Gitterpunkte g, Determinante $D(G) \neq 0$] und eine endliche Menge A (Elemente a) von t Elementen vor. Es sei nun G in A so abgebildet $(g \to a)$, so daß, wenn $g_1 \to a$, $g_2 \to a$, stets $g_1 - g_2$ auf ein festes Element a_0 von A abgebildet wird (a_0 unabhängig von g_1, g_2). Dann bilden die g mit $g \to a_0$ eine Untergruppe G_0 von G. Der Index von G/G_0 ist $\leq t$, denn g mit gleichem Bild liegen in der gleichen Restklasse von G_0. Also ist G_0 ein Gitter und $D(G_0) \leq t\, D(G)$. Liegt nun eine Aussage $S(G, T)$ über Gitter G vor, abhängig von einem reellen positiven Parameter T, und ist S richtig für alle G mit $D(G) \leq T$, so ist sie bereits richtig für das obige Teilgitter G_0 von G, wenn sogar $D(G) \leq T/t$ ist, denn dann ist $D(G_0) \leq T$. Ist nun z. B. S der Minkowskische Fundamentalsatz: Jeder konvexe Körper K mit Volumen V enthält einen Gitterpunkt $g \neq 0$ von G; wenn $D(G) \leq V/2^n = T$, so folgt sofort, daß er bereits für G_0 gilt, wenn $D(G) \leq V/2^n t$. Liegt das Würfelgitter mit $D(G) = 1$ vor, so folgt sofort Satz 1. In dieser allgemeinen Fassung enthält er auch einen Satz des Ref., der Satz 1 umfaßt („Bemerkungen zu einem Satz von R. Radó", Anzeiger Akad. Wiss. Wien **1950**). So kann man jedem Satz der Geometrie der Zahlen von obiger Gestalt, wie bei Satz 2, einen zahlentheoretischen Satz zuordnen. Damit erscheint ein neues Anwendungsgebiet der Geometrie der Zahlen eröffnet. *Hlawka.*