Werk

Titel: Geometrie

Ort: Berlin

Jahr: 1950

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0034|log8

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

zu bestimmen. Verf. untersucht den Fall, in welchem die einer Dosis x_s zugeordneten n_s Versuchsobjekte nicht alle genau die gleiche Dosis x_s erhalten, sondern Dosen eines x_s einschließenden Intervalls, also den Fall gruppierter Daten, und gibt für die Schätzung der genannten Parameter auf Grund des Maximum-likelihood-Prinzips Gleichungen für eine iterative Lösung. Im Falle gleicher Klassenbreiten läßt sich das mühsame iterative Verfahren approximativ abkürzen, indem man die Daten zur Schätzung der Parameter Mittelwert und Streuung wie ungruppierte benutzt und lediglich die Streuung mit der üblichen Sheppard-Korrektur verbessert. Die Methoden werden an einem numerischen Beispiel der experimentellen Psychologie illustriert. *M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

Patinkin, Don: Relative prices, Say's law, and the demand for money. Econometrica, Chicago **16**, 135—154 (1948).

Nach der klassischen Geldtheorie geht das Geld nicht in die Nutzenfunktion ein, da die Menschen aus dem Halten von Geldbeständen keinen Nutzen ziehen. Geld ist in dieser Theorie (Walras, Pareto, Divisia) nur eine Rechnungseinheit. Da Geld jedoch eine Rolle im Wirtschaftsleben spielt, muß der Wunsch, Geld zu halten, vom Geldpreis, d. h. dem absoluten Preisniveau, abhängen. — Weiter werden bei der Analyse der klassischen nichtmonetären und Geld-Theorie vollkommener Wettbewerb und das Streben der Individuen nach maximalem Nutzen angenommen. Abgeleitet wird dabei wieder das klassische Resultat, daß die Preise in einer Wirtschaft mit Austausch und Produktion eindeutig bestimmt sind, wenn der Preis des „Geld"-Gutes $= 1$ gesetzt wird. Über das Geld folgt auch, daß sowohl zu Beginn wie zu Ende einer Wirtschaftsperiode vom Individuum keine Geldbestände gehalten werden. Ferner wird die Budgetgleichung des a-ten, der insgesamt mit m angenommenen Zahl der Individuen:

$$\sum_{j=1}^{n-1} p_j \,(Z_{ja} - \bar{Z}_{ja}) \equiv 0.$$

Dabei sind $\bar{Z}_{ja}$ bzw. Z_{ja} seine Güterbestände zu Beginn bzw. zu Ende der Wirtschaftsperiode und p_j die Preise der $n-1$ Güter — das n-te, das Geld, fehlt. — Weiter werden 2 Wirtschaftssysteme A und B betrachtet, die sich nur dadurch unterscheiden, daß in A das Geld in die Nutzenfunktion eingeht, in B nicht. Entweder ist dann A richtig oder B. „Möglichkeit" (consistency) von A oder B bedeutet, daß $X_i(p_1, \ldots, p_{n-1}) \equiv \sum_{a=1}^{m} X_{ia}(p_1, \ldots, p_{n-1}) \equiv \sum_{a=1}^{m} (Z_{ia} - \bar{Z}_{ia}) = 0 \; (i = 1, \ldots, n)$ eine Lösung in den p_j besitzt. — Weiter wird angenommen: 1. Der Grenznutzen eines jeden Gutes ist > 0 und endlich, 2. als hinreichende Bedingung für ein echtes Maximum gilt identisch in den Z_{ia}

$$(-1)^k \begin{vmatrix} 0 & u_1^a & \ldots & u_k^a \\ u_\varkappa^a & u_{\varkappa 1}^a & \ldots & u_{\varkappa k}^a \end{vmatrix}_{\varkappa = 1, \ldots, k} > 0 \quad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

wo u_i^a bzw. u_{ij}^a $(i, j = 1, \ldots, n)$ die ersten bzw. zweiten partiellen Ableitungen der Nutzenfunktion $u^a(Z_{1a}, \ldots, Z_{na})$ des a-ten Individuums sind, 3. die u_i^a und u_{ij}^a sind stetige Funktionen von Z_{ia}. Unter den damit gewonnenen Ergebnissen sind zu nennen: Für die Richtigkeit von B ist $Z_{na} \equiv 0$ in p_i notwendig. Notwendige Bedingungen für die Möglichkeit von B sind, daß $\bar{Z}_{na} \equiv 0$, ferner, daß die Z_{ja} $(j = 1, \ldots, n-1)$ homogen vom Grade 0 in den p_j $(j = 1, \ldots, n-1)$ sind. Für die Auflösbarkeit nach absoluten Preisen ist die Richtigkeit von A notwendige Bedingung. Für die Richtigkeit von A ist notwendig, daß nicht alle Z_{ja} $(j = 1, \ldots, n-1)$ homogen vom Grade 0 in den p_j sind. — Der benutzte mathematische Apparat besteht aus der Theorie der Funktionen mehrerer Variablen, speziell der Maxima und Minima. Eine spezielle Erweiterung des mathematischen Modells wurde nicht vorgenommen. *Rudolf Günther* (Nordhausen).

Geometrie.

Algebraische Geometrie:

Stubban, John Olav: Sur la courbe paracanonique. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. **35**, 191—196 (1949).

La courbe de genre p, d'ordre $2p-2$, dans l'espace à $p-2$ dimensions s'appelle courbe paracanonique. Pour $p > 7$ c'est l'intersection partielle de $p-3$ hyperquadriques (théorème 1). L'A. précise ensuite la génération de la courbe pour

$p \leq 7$ comme intersection complémentaire de certaines hypersurfaces ayant déjà une courbe déterminée commune ($p = 6$ et 7). Pour $p = 5$ il s'agit de surfaces dans S_3 (théorèmes 6 à 9). *L. Lesieur* (Poitiers).

Jongmans, F. et L. Nollet: Classification géométrique des faisceaux de courbes algébriques planes de genre deux. Bull. Sci. Math., II. S. **72$_I$**, 80—96 (1948).

Substituant à la classification de De Franchis basée sur la méthode arithmétique de Noether, une classification géométrique plus complète faisant intervenir l'ordre minimum, le genre et le degré effectif de l'adjoint pur, les AA. résolvent pour chaque type les problèmes d'existence et de construction. La connaissance approfondie des faisceaux de courbes de genre deux leur est utile dans un mémoire sur les systèmes linéaires de courbes algébriques planes de genre quatre (ce Zbl. **33**, 393). *L. Lesieur* (Poitiers).

Jongmans, F. et L. Nollet: Classifcation des systèmes linéaires de courbes algébriques planes de genre trois. Acad. Belgique, Cl. Sci., Mém. Coll. 8°, II. S. **24**, Nr. 1594, 48 p. (1949).

Poursuivant leurs travaux récents sur la classification des systèmes linéaires de courbes algébriques planes (faisceaux de genre deux, systèmes de genre quatre) les auteurs entreprennent ici la classification des systèmes linéaires de courbes algébriques planes de genre trois. Les résultats ne peuvent trouver place dans ce court compte-rendu; ils sont résumés à la fin du mémoire (page 41). Citons seulement le plan d'étude: une classification arithmétique (Chap. I) précède la classification géométrique (Chap. II). Celle-ci est directe pour les systèmes dont l'adjoint est de genre $p_1 < 3$; elle profite de la classification arithmétique lorsque $p_1 \geq 3$. Dans leur préface, les auteurs font une rapide analyse critique des travaux antérieurs sur sette question (De Franchis, Castelnuovo, Max Noether, Defrise, Conforto, Du Val, Todd). *L. Lesieur* (Poitiers).

Nollet, Louis: Recherches sur les systèmes linéaires de courbes algébriques planes. Mém. Soc. Sci. Liége, IV. S. **7**, 469—554 (1947).

L'A. donne la classification des systèmes linéaires de courbes algébriques planes. L'étude des adjoints purs successifs d'un système linéaire donné joue un rôle important dans le présent travail. Nous ne pouvons pas entrer évidemment dans les détails de ce mémoire de grande étendue et riche de contenu. Pour caractériser, nous montrons le théorème final. — Soit $|C|$ un système linéaire de courbes irréductibles de genre effectif p. Désignons par $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_k|$ la suite des adjoints purs successifs de $|C|$, et par $p_1, p_2, \ldots, p_k$ les genres effectifs de ces systèmes linéaires. Alors $p_k = 0$, ou $p_k = 1$ et il existe un premier système irréductible $|C_i|$, qui peut être le système $|C|$ lui-même, donnant lieu à la relation $p_i > p_{i+1}$. La suite finie $p_i, p_{i+1}, \ldots, p_k$ est constamment décroissante. — Si l'un des systèmes $|C_{i+h}|$ est dégénéré, ou bien 1. ce système $|C_{i+h}|$ coïncide avec $|C_k|$ et est composé au moyen d'un faisceau de courbes unicursales, bisécantes aux courbes $|C_{k-1}|$, qui sont alors irréductibles, $p_k = 0$, ou bien 2. $|C_{i+h}|$ est composé au moyen d'un faisceau $|E|$ de courbes elliptiques; dans ce cas, $|C_k|$ coïncide avec $|E|$, $p_k = 1$, et tous les systèmes $|C_{i+h+1}|, |C_{i+h+2}|, \ldots, |C_{k-1}|$ sont composés au moyen du même faisceau $|E|$; en outre, $p_{i+h}, p_{i+h+1}, \ldots, p_k$ forment une progression arithmétique de raison un. — Si l'ensemble $|C_i|, |C_{i+1}|, \ldots, |C_k|$ renferme un système $|C_j|$ non simple de dimension supérieur à 2, tous les systèmes $|C_j|, |C_{j+1}|, \ldots, |C_k|$ sont formés de courbes hyperelliptiques et composés au moyen d'une même involution plane du second ordre. — L'ensemble $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_i|$ renferme tout au plus un système dégénéré, composé au moyen d'un faisceau de courbes de genre 2; ce système coïncide nécessairement avec $|C_1|$; $|C|$ est alors un faisceau de courbes hyperelliptiques et $|C_2|$ est irréductible, composé au moyen d'une involution plane du second ordre et formé de courbes hyperelliptiques, de dimension $2p - 3$.

F. Kárteszi (Budapest).

Gambier, Bertrand: Courbes planes de classe p dont tous les systèmes de tangentes concourantes ont les mêmes directions de p-sectrices. Bull. Sci. math., II. S. 71_{I}, 232—246 (1947).

In einer mit Drehsinn versehenen Ebene werde mit (δ, D) der (bis auf Vielfache von π bestimmte) Winkel bezeichnet, um den man die Richtung δ drehen muß, um sie parallel D zu machen. Sind dann $D_1, D_2, \ldots, D_p$ p verschiedene Richtungen, so bestimmt die Gleichung

$$(\delta D_1) + (\delta D_2) + \cdots + (\delta D_p) = 0$$

p (gegeneinander um Vielfache von π/p verdrehte) Richtungen δ, die Verf. die p-teilenden Richtungen der D_i nennt. Für $p = 2$ ergeben sich die Winkelhalbierenden von D_1, D_2. Einer Anregung von Hadamard gemäß studiert Verf. die ebenen Kurven p-ter Klasse, die für jedes System von p sich in einem Punkte schneidenden Tangenten $D_1, D_2, \ldots, D_p$ dieselben p-teilenden Richtungen haben. Für $p = 2$ ergeben sich als Kurve 2. Klasse zwei Fernpunkte, für $p = 3$ erhält man nach Laguerre lediglich die Steinersche dreispitzige Hypozykloide H_3 (oder das System dreier Fernpunkte). In ausführlicher Untersuchung zeigt Verf., daß allgemein notwendig und hinreichend für die verlangten Kurven p-ter Klasse die Eigenschaft ist, daß die Ferngerade Doppeltangente ist und die Berührungspunkte die absoluten Kreispunkte sind; ihre isotropen Tangenten fallen mit der Ferngeraden zusammen. Es wird bewiesen, daß für die Ordnung n der Kurve $2p - 2 \leq n \leq p^2 - p - 2$ ist und zu jedem Kreispunkt im Sinne Halphens ein Zykel $(p-1)$-ten Grades und erster Klasse gehört. Neben jeder solchen Kurve dieser Art ist auch jede Parallelkurve und jede Evolute (erster oder höherer Ordnung) eine Lösung des Problems (allerdings i. a. mit veränderter Klassenzahl), ebenso alle algebraischen Hypozykloiden, nicht aber die Epizykloiden. Ausführlicher wird der Fall der Klassenzahl $p = 4$ studiert. *K. Strubecker* (Karlsruhe).

Gambier, Bertrand: Courbes algébriques de classe p dont une p-sectrice de chaque système de tangentes concourantes passe par un point fixe. Ann. sci. École norm. sup., III. S. **66**, 1—17 (1949).

Vgl. die vorsteh. besprochene Arbeit. — In der vorliegenden Arbeit werden die ebenen Kurven p-ter Klasse behandelt, die die Eigenschaft haben, daß jedes System in einem Punkte zusammenlaufender Richtungen unter ihren p-teilenden Geraden eine besitzt, die durch einen festen eigentlichen Punkt O hindurchgeht. Es wird gezeigt, daß notwendig und hinreichend für solche Kurven ist, daß die isotropen Geraden des Punktes O die Kurve in den absoluten Kreispunkten I, J berühren und daß dies die einzigen isotropen Tangenten sind (woraus folgt, daß die Ferngerade keine Tangente ist). Neben jeder solchen Kurve C haben auch ihre Parallelkurven die geforderte Eigenschaft (bei gleicher oder veränderter Klasse); die Evolute dagegen nur dann, wenn C rational ist. Die Ordnung der Kurven kann zwischen dem Maximalwert $p(p-1)$ und einem Minimalwert $2(p-1)$ schwanken, der im rationalen Falle erreicht wird, wenn die Doppeltangenten nicht Wendetangenten und die Kreispunkte I, J $(p-1)$-fache Punkte sind. In gewissen Fällen, z. B. für die Epizykloiden, deren algebraische sämtlich Lösungen sind, kann die Ordnung sich noch weiter senken. Ausführlich werden auch die elliptischen Kurven 3. Klasse des Problems studiert. Als Nebenergebnis findet Verf. für sie in dualer Formulierung folgende Verschärfung eines Satzes von Laguerre: Ist (A_1, A_2, A_3), (B_1, B_2, B_3), (C_1, C_2, C_3) irgendeine Verteilung der Wendetangenten einer elliptischen Kubik auf drei Geraden A, B, C, dann berühren die 6 Wendetangenten B_i, C_j und die beiden Geraden B, C denselben Kegelschnitt, wobei B und C die Tangenten in seinen Schnittpunkten mit A sind. [Bem. des. Ref.: Den vom Verf. vervollständigten Satz von Laguerre über die elliptischen Kurven 3. Ordnung hat jedoch früher schon W. Wirtinger in vollem Umfang bewiesen in Mh. Math. Phys. 4, 395—397

(1893); vgl. auch die an diese Arbeit anschließende Note von G. Kohn, ebenda 398, sowie die Arbeit von W. Wirtinger über die Rektifikation algebraischer Kurven bei projektiver Maßbestimmung, ebenda **5**, 92—96 (1894)]. *Strubecker.*

Derwidué, L.: Recherches sur les transformations birationnelles. Mém. Soc. Sci. Liége, IV. S. **7**, 197—366 (1947).

Castelnuovo [Memorie scelte, Bologna 1937, S. 267 und Pompilj, Rend. sem. mat. Univ. Roma IV. S. **2**, 47—87 (1938); dies. Zbl. **18**, 328] haben die Frage nach den Cremona-Transformationen mit Mannigfaltigkeiten von Fixelementen gestellt; das wesentlichste Hilfsmittel, das sie anwandten, waren die Systeme der Adjungierten. Verf. geht von vornherein von Klassen von äquivalenten aus und kommt so zu einer vollständigen Typeneinteilung. Er zeigt zunächst: 1. Wenn eine ebene Cremona-Transformation ein Büschel von Fixkurven hat, so hat sie auch ein solches, das cremona-äquivalent einem Strahlenbüschel oder einem Büschel elliptischer Kurven 3. Ordnung oder einem Halphenschen Büschel ist (ein Halphensches Büschel besteht aus Kurven $3n$-ten Grades; seine 9 Basispunkte sind je n-fach für die Kurven). 2. Wenn eine räumliche Cremona-Transformation eine lineare Kongruenz von Fixkurven hat, hat sie auch eine von rationalen, elliptischen oder hyperelliptischen Fixkurven. 3. Wenn eine räumliche Cremona-Transformation ein Büschel von Fixflächen hat, hat sie auch ein solches von rationalen Flächen, von elliptischen Regelflächen, von hyperelliptischen Flächen oder solchen des Geschlechts 1. 4. Kurven, die punktweise festbleiben, sind entweder rational oder cremona-äquivalent einer elliptischen Kurve 3. Ordnung oder einer Kurve eines Halphenschen Büschels. Ebenso sind Flächen von Fixpunkten einer räumlichen Cremona-Transformation entweder rational oder äquivalent einer Regelfläche, oder alle geometrischen Geschlechter sind höchstens 1. — In allen diesen Fällen untersucht nun Verf. einzeln die Transformationen und ihre Gruppen. Gibt es ein Büschel oder eine Kongruenz von rationalen Fixkurven, so ist die Gruppe isomorph dem Restklassenring nach einem Polynom dreier homogener Veränderlicher. Sind die Fixkurven elliptisch, so ist die Gruppe zyklisch; nur für harmonische oder äquianharmonische elliptische Funktionenkörper erweitern sich die Gruppen. Von den Kurven, die punktweise festbleiben können, untersucht Verf. insbesondere die Geraden, die Kurven 6. Ordnung mit 10 getrennten Doppelpunkten, die zerfallenden Kurven 6. Ordnung mit 11 getrennten Doppelpunkten,die zerfallenden Kurven 9. Ordnung mit 10 getrennten 3-fachen Punkten und konstruiert in allen Fällen dazugehörige Transformationen, womit seit längerer Zeit offene Existenzfragen beantwortet sind. — Entsprechende Aussagen macht Verf. für Transformationen mit Büscheln von Fixflächen. Sind diese vom Geschlecht 1, so ergeben sich eigentümliche Schwierigkeiten, die Transformation zu konstruieren, auf die Verf. zum Schluß hinweist. *O.-H. Keller.*

Derwidué, L.: Sur les transformations birationnelles cycliques. Bull. Soc. Sci. Liége **16**, 31—37 (1947).

Ergänzungen zu der vorstehend besprochenen Arbeit des Verf. In der Ebene gibt es drei Typen von zyklischen Cremona-Transformationen: 1. solche mit einem Büschel von Fixgeraden oder fixen elliptischen Kurven. 3. Ordnung. 2. Solche mit nur endlich vielen Fixpunkten. 3. Solche, die die Geraden eines Büschels ineinander transformieren (wobei dann eine oder zwei Geraden fest bleiben müssen). Der Hauptteil des Beweises besteht darin, zu zeigen, daß es eine Transformation, die die Kurven eines Büschels elliptischer Kurven 3. Ordnung unter sich vertauscht, nicht geben kann. *Ott-Heinrich Keller* (Dresden).

Derwidué, L.: Sur la génération des transformations birationnelles de l'espace. Bull. Soc. Sci. Liége **16**, 134—144 (1947).

Die Gruppe der räumlichen Cremona-Transformationen kann durch folgende Transformationen erzeugt werden: 1. Quadratische Transformationen der beiden

Arten: In denen der ersten Art entsprechen die Ebenen den Quadriken durch einen festen Kegelschnitt und einen festen Punkt. In denen der zweiten Art entsprechen die Ebenen den Quadriken durch eine feste Gerade und drei feste Punkte. 2. Monoidale Transformationen, die die Ebenen in Monoide überführen. 3. Solche Transformationen, die die Ebenen in Flächen übergehen lassen, die nur mehrfache Linien mit getrennten veränderlichen Tangentialebenen haben und durch einfache Basispunkte in veränderlicher Richtung hindurchgehen. Die Basiskurven haben keine Singularitäten und haben mit einander normale Schnitte (im Sinne von Chisini). Da die Mannigfaltigkeit der unter 3. aufgeführten Transformationen nicht von geringerer Dimension ist als die der räumlichen Cremona-Transformationen überhaupt, ist freilich mit dieser Zerlegung weiter kein Einblick in die Struktur der Gruppe gewonnen. *Ott-Heinrich Keller* (Dresden).

Derwidué, L.: Résolution des singularités d'une surface algébrique au moyen de transformations crémoniennes. Bull. Soc. Sci. Liége **16**, 276—289 (1947).

Verf. gibt eine Kette von Cremona-Transformationen, mittels deren eine beliebige algebraische Fläche des Raumes in eine andere transformiert wird, die nur mehrfache Kurven mit im allgemeinen getrennten Tangentialebenen hat, die sich mit getrennten Tangenten in einzelnen Punkten schneiden und sonst nur gewöhnliche Spitzen haben. Verf. benutzt dabei den Satz, daß die erste Polare in einem effektiven oder fiktiven r-fachen Punkt $(r-1)$-fach sei. Dem Ref. scheint der Satz in der beim Beweis benötigten Allgemeinheit nicht richtig zu sein. *O. H. Keller.*

Godeaux, Lucien: Sur une représentation des transformations birationnelles de l'espace. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. **35**, 92—96 (1949).

La transformation birationnelle $P\,T\,P'$ entre deux espaces Σ et Σ' peut être représentée par une variété V_3 dont chaque point est en correspondance birationnelle avec le couple P, P' de points homologues par T; aux plans α de Σ correspondent ainsi sur V_3 des surfaces F, aux plans α' de Σ' des surfaces F'. L'A. se propose d'étudier la représentation de deux courbes Γ et Γ' fondamentales associées de 2ème espèce: P étant fixé sur Γ les couples formés par P et ses homologues, qui décrivent Γ', sont représentés par une courbe γ, dont le lieu, quand P décrit Γ, est une surface M; on définit de même M par un lieu de courbes γ'. Les degrés de V_3, F, F', γ, γ' et M sont aisément déterminés par les caractères projectifs de la transformation. En terminant l'A. amorce l'étude des propriétés des courbes fondamentales de 2ème espèce au moyen de cette surface M. *L. Lesieur* (Poitiers).

Segre, B.: On arithmetical properties of quartic surfaces. Proc. London math. Soc., II. S. **49**, 353—395 (1947).

Verf. sucht nach Punkten mit rationalen Koordinaten auf einer Fläche 4. Ordnung, möglichst nach Mannigfaltigkeiten von solchen, aus denen also durch beliebige rationale Wahl des Wertes eines Parameters ein rationaler Punkt herausgegriffen wird. Verf. hatte sich in früheren Arbeiten [z. B. J. London math. Soc. **18**, 24—31, 226—233 (1943)] dieselbe Frage für Flächen 3. Ordnung gestellt. Verf. beschränkt sich auf solche Flächen, die gerade Linien ganz enthalten; dafür ist das Verschwinden einer gewissen Invariante vom 320. Grad in den Koeffizienten notwendig und hinreichend. Er definiert nun einen R-Prozeß: Es sei C die gerade Linie, P ein rationaler Punkt auf ihr. Die Tangentialebene an die Fläche in P schneidet diese außer in C noch in einer Kurve 3. Ordnung, auf der auch P liegt. Die Tangente daran in P schneidet sie in einem weiteren rationalen Punkt Q. Bewegt sich P längs C, so auch Q längs einer gewissen Kurve, der R-transformierten von C. — Liegen zwei windschiefe gerade Linien C und D ganz auf der Fläche, so definiert Verf. eine T-Transformation: Durch jeden Punkt P der Fläche gibt es genau eine Gerade, die C und D schneidet. Sie schneidet die Fläche in einem weiteren Punkt Q, der rational ist, wenn das Paar C, D und der Punkt P es ist. Wird diese Transformation durch eine Projektivität des Raumes induziert, so nennt Verf. C

und D assoziiert. Verf. untersucht weiter einige Fälle, in denen der R-Prozeß versagt. Es sind dies vor allem Regelflächen, und er gibt für sie vollständige, von zwei Parametern abhängige Lösungen. Verf. untersucht eine große Zahl weiterer Sonderfälle, z. B. Flächen mit mehr als 2 geraden Linien, die Eulersche Fläche $x^4 + y^4 = z^4 + w^4$, ferner ausführlich die Flächen der Form $\varphi(x, y) = \psi(z, w)$. Es seien P_i die Schnittpunkte der Fläche mit $z = w = 0$, Q_i die Schnittpunkte der Fläche mit $x = y = 0$. Dann liegen die Linien $P_i Q_j$ ganz auf der Fläche (Linien I. Art). Jeder Projektivität der Punktreihe P_i mit der Punktreihe Q_j entsprechen 4 gerade Linien, die ganz auf der Fläche liegen (Linien II. Art). Ihre Zahl erhöht sich, wenn die P_i und Q_j harmonisch oder äquianharmonisch liegen. Verf. untersucht alle diese Fälle gesondert. Es sei gestattet, auf die Übersichtlichkeit der Arbeit, das klare und ausführliche Inhaltsverzeichnis und die große Zahl sehr instruktiver Beispiele hinzuweisen. *Ott-Heinrich Keller* (Dresden).

Semple, J. G.: On complete quadrics (I). J. London math. Soc. **23**, 258—267 (1949.).

In Analogie zu den vollständigen Kegelschnitten [v. d. Waerden, Math. Ann. Berlin **115**, 645—655 (1938); dies. Zbl. **19**, 180; F. Severi, Ann. Mat. pura appl., IV. S. **19**, 153—242 (1940); dies. Zbl. **23**, 372; F. Severi, Grundlagen der abzählenden Geometrie, Wolfenbüttel 1949] erklärt Verf. eine „vollständige Quadrik" als ein Gebilde des dreidimensionalen Raumes, das gleichzeitig in Punktkoordinaten durch eine quadratische homogene Gleichung Q_L: $\Sigma a_{rs} x_r x_s = 0$, in Ebenenkoordinaten durch Q_E: $\Sigma b_{rs} u_r u_s = 0$ und in Geradenkoordinaten durch Q_C: $\Sigma c_{rr's s'} p_{rr'} p_{ss'} = 0$ gegeben ist. Bei einer nicht ausgearteten Quadrik ist $|a_{rs}| \neq 0$, (b_{rs}) die zugehörige adjungierte und $(c_{rr's s'})$ die zweite adjungierte Matrix, d. h. Q_E und Q_C sind durch Q_L bis auf einen Proportionalitätsfaktor bestimmt. Bei ausgearteten Q_L müssen die Koeffizienten a, b, c gewissen bilinearen Bedingungsgleichungen genügen. Deren Diskussion liefert 7 verschiedene Fälle von Ausartungen (gegenüber 3 Ausartungen bei den vollständigen Kegelschnitten), welche durch die Symbole φ, ψ, χ und deren Zusammensetzungen bezeichnet werden. (Ausartung φ: Q_L ist eine Doppelebene π^2, Q_E ein Kegelschnitt k in π, Q_C die Sekanten von k; Ausartung ψ: Q_C ist der doppelt gezählte spezielle lineare Komplex aller Geraden, die eine feste Gerade p treffen, Q_E zwei Punkte auf p, Q_L zwei Ebenen durch p; Ausartung χ: Q_E ein doppeltgezählter Punkt P, Q_L ein Kegel K mit Spitze in P, Q_C alle Tangenten von K. Durch Überlagerungen entstehen die höheren Ausartungen $\varphi\,\psi$, $\varphi\,\chi$, $\chi\,\psi$ und $\varphi\,\psi\,\chi$.) — Im Anschluß an die Methode von v. d. Waerden beweist Verf., daß die Bildmannigfaltigkeit der vollständigen Quadriken eine singularitätenfreie M_9 ist, auf welcher die 8-dimensionalen Ausartungsmannigfaltigkeiten φ, ψ, χ durch je eine Form ausgeschnitten werden, deren weitere Durchschnitte die höheren Ausartungen ergeben. — Die interessanten geometrischen Eigenschaften dieser M_9, ihre Charakteristiken sowie Verallgemeinerungen auf höherdimenionale Räume sollen in einer folgenden Arbeit behandelt werden. *Gröbner* (Innsbruck).

Scott, D. B.: A functional basis for the Betti ring of an algebraic surface. J. London math. Soc. **23**, 271—275 (1949).

Die Basen der Homologiegruppen der Dimensionen $0, \ldots, n$ einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit liefern eine Basis für den Homologiering $\mathfrak{R}$ der Mannigfaltigkeit, wenn man diesen Ring als einen linearen Modul über irgendeinem passenden Koeffizientenring betrachtet. Verf. untersucht die Möglichkeit, statt dieser Basis eine sog. funktionale Basis zu wählen, d. h. eine Menge von Elementen aus $\mathfrak{R}$ derart, daß jedes Element von $\mathfrak{R}$ als eine Summe von Produkten (d. h. topologischen Durchschnitten) einer endlichen Anzahl Elemente dieser Basis darzustellen ist, und fragt insbesondere nach einer Minimalbasis. Das Problem wird für den Bettischen Ring $\mathfrak{B}$ über dem Körper der rationalen Zahlen einer algebraischen Fläche F betrachtet (wobei natürlich die Fläche als eine 4-dimensionale topologische Mannig-

faltigkeit aufzufassen ist). — Es mögen $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2q}$ eine Basis für die 1-Zyklen bilden und $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{2q}$ eine Basis fü der 3-Zyklen, wofür also gilt $(\gamma_i, \Gamma_j) = \delta_{ij}$ (Kroneckersymbol). Es seien C, c bzw. algebraische und transzendente Zyklen der (topologischen) Dimension 2. Die Matrizen a und α sind definiert durch

$$\Gamma_i \cdot C \approx a_{ij}\gamma_j, \; \Gamma_i \cdot c \approx \alpha_{ij}\gamma_j, \; (i, j = 1, \ldots, 2q),$$

(Summationskonvention). Mit $C_1, \ldots, C_\varrho$ werden die Elemente einer kanonischen Basis bezeichnet, womit eine Basis gemeint ist, für die die ersten t Glieder linear unabhängige Matrizen $a^{(1)}, \ldots, a^{(t)}$ haben und die übrigen zugehörigen Matrizen Null sind. Die Zyklen $C_{t+1}, \ldots, C_\varrho$ definieren einen Modul $\mathfrak{O}$. Ein zweiter Modul $\mathfrak{Q}$ besteht aus ganzzahligen algebraischen Zyklen, die Summen von Vielfachen der 2-Zyklen $Q_1, \ldots, Q_t$ sind, definiert durch $Q_m \approx y_{mr} C_r$ $(m = 1, \ldots, t; r = 1, \ldots, \varrho)$, mit $(C_r \cdot C_s) = x_{rs}$ und $x\,y = \mathbf{1}_\varrho$. — Beispiele von Flächen, für die $\mathfrak{O} \cap \mathfrak{Q}$ nicht leer ist und doch nicht $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{O}$ gilt, scheinen nicht bekannt zu sein. Die Moduln $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{Q}$ haben intrinseke Bedeutung, d. h. sie sind von den für ihre Definitionen gewählten Basen unabhängig. Ähnlich kann man die transzendenten Moduln $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{q}$ erklären. — Verf. kommt zum folgenden Ergebnis. Unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{Q}$ wenigstens eine Kurve enthält, deren a-Matrix nicht singulär ist, betrachte man die Kurven $D_1, \ldots, D_{\varrho-t}$, von denen aus jeder Nebenklasse von $\mathfrak{Q}$ nach $\mathfrak{A}$ eine einzige genommen ist ($\mathfrak{A}$ ist der Modul der algebraischen Kurven). Zusammen mit $Q_1, \ldots, Q_t$ bilden diese eine Basis für $\mathfrak{B}$. Weiter werden $R_2 - \varrho - u$ (R_2 ist eine Bettische Zahl; u bedeutet für $\mathfrak{q}$ dasselbe wie t für $\mathfrak{Q}$) transzendente 2-Zyklen $d_1, \ldots, d_{R_2-\varrho-u}$ genommen, aus jeder Nebenklasse von $\mathfrak{q}$ im Modul der transzendenten Zyklen eine einzige. Die Zyklen F, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{2q}$, $D_1, \ldots, D_{\varrho-t}$, $d_1, \ldots, d_{R_2-\varrho-u}$ bilden eine funktionale Basis für $\mathfrak{B}$ und zwar eine Minimalbasis. In übertragenem Sinne kann man nun das Problem leicht lösen für den Bettischen Ring $\mathfrak{B}^*$, wobei nur ganze Zahlen als Koeffizienten auftreten. *J. C. H. Gerretsen* (Groningen).

Samuel, Pierre: Multiplicités des composantes excédentaires d'intersection. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 158—159 (1949).

In seiner grundlegenden Monographie „Foundations of algebraic geometry" [Amer. math. Soc. Coll. Publ. **29** (1946)] hat A. Weil gezeigt: Jede irreduzible Komponente des Durchschnitts zweier irreduzibler algebraischer Mannigfaltigkeiten U, V von den Dimensionen u, v im n-dimensionalen affinen Raum hat eine Dimension $m \geqq u + v - n$. Die Weilsche Vielfachheitstheorie beschränkt sich dabei auf die eigentlichen Komponenten, bei denen der Exzeß $e = m - (u+v-n)$ verschwindet. Verf. skizziert eine Ausdehnung auf Komponenten von beliebigem Exzeß (einfachstes Beispiel: Definition der Multiplizität der eventuellen Schnittpunkte zweier eindimensionaler Kurven im dreidimensionalen Raum). Die Vielfachheiten, die für Komponenten von positivem Exzeß eingeführt werden, sind invariant gegenüber birationalen, biregulären Transformationen. Dagegen zeigen zahlreiche einfache Gegenbeispiele, daß die Assoziativitätsformel (Weil, a. a. O., Kap. VI, Satz 5) sich nicht auf den Fall des positiven Exzesses überträgt und daß auch das Prinzip der Erhaltung der Anzahl seine Gültigkeit verliert. Die explizite Angabe der Beispiele sowie die Ausführung der Beweise bleibt einer späteren Veröffentlichung vorbehalten. *Krull* (Bonn).

Differentialgeometrie in euklidischen Räumen:

Gürsan, Feyyaz: Les éléments d'ordre supérieur d'une courbe gauche. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul A **12**, 230—236 (1947).

Verf. stellt sich die Aufgabe, die „Elemente n-ter Ordnung" einer Kurve $\mathfrak{x}(s)$, nämlich die Ableitungen $\mathfrak{x}^{(n)}(s)$, durch geometrische Elemente der Kurven zu bestimmen. Für sphärische Kurven wird das mittels des sphärischen Krümmungs-

radius und des zugehörigen Zentriwinkels durchgeführt. Kurze Angaben über zylindrische und konische Schraubenlinien. *Gericke* (Freiburg i. Br.).

Kasner, Edward and John de Cicco: Physical curves in space of n dimensions. Proc. nat. Acad. Sci. USA **35**, 201—204 (1949).

Verff. dehnen ihre früheren Untersuchungen [Proc. nat. Acad. Sci. USA **33**, 246—251 (1947)] auf den n-dimensionalen Raum aus. Ein System von ∞^{2n-1} physikalischen Kurven S_k liegt in einem Kraftfeld F derart, das F der Schmiegungsebene von S_k angehört; dabei soll die Zentrifugalkraft P eines in S_k bewegten Massenpunktes proportional der Normalkomponente N von F sein, $P = k\,N$ mit $k = \text{const}$. Bei gegebenen F und k werden die Koordinaten von S_k aus einem System von Differentialgleichungen 2. Ordnung bestimmt. Verff. gehen aus von den Frenetschen Formeln von S_k und zeigen, daß für die $n-1$ Krümmungen von S_k einfache Relationen bestehen. Ist die Anfangsgeschwindigkeit des Massenpunktes Null (Ruhe-Bahn), so verhält sich die erste Krümmung der Bahnkurve S_k zur ersten Krümmung der Feldlinie wie $(1+k):(3+k)$. Zum Schluß werden die Schmiegungskugeln der durch den gleichen Raumpunkt gehenden S_k betrachtet. *Haack* (Berlin).

Daghetto, Adolfo: Über einige Eigenschaften der Kurven auf einer Regelfläche. Math. Notae, Bol. Inst. Mat., Rosario **8**, 134—140 (1948) [Spanisch].

As a solution of a problem proposed in the same journal, some properties of the curves which meet under constant angle the generators of a ruled surface are considered. *Ancochea* (Madrid).

Grove, V. G.: On congruences and conjugate nets. Amer. J. Math. **69**, 58—69 (1947).

Verf. untersucht konjugierte Kurvennetze unter dem Gesichtspunkt der metrischen Geometrie. In willkürlichen Parametern sei g_{ik} der Maßtensor und d_{ik} der zweite Grundtensor einer Fläche S, die das konjugierte Netz N trägt. Die Tangentenvektoren U und V der Netzkurven werden mittels d_{ik} normiert. Entsprechend der geodätischen Krümmung bezüglich g_{ik} erklärt Verf. eine „asymptotische Krümmung k" bezüglich d_{ik} für die Netzkurven. Die Kurven verschwindender asymptotischer Krümmung sind die Extremalen des Integrals $\int \sqrt{e\,d_{ik}\,du^i\,du^k}$; dabei ist $e = \pm 1$, je nachdem S elliptisch oder hyperbolisch gekrümmt ist. Ist k für beide Kurvenscharen von N konstant, so ist N isotherm-konjugiert. Durch elementare Drehungsformeln gelangt Verf. zu Büscheln von Netzen. Die Krümmungen k transformieren sich dabei linear homogen (kontragredient), Extremale gehen in Extremale über. — Im zweiten Teil wird eine Konstruktion für die allgemeinste Strahlenkongruenz angegeben, deren Torsen S in einem konjugierten Netz schneiden. Zum Schluß wird die Analogie zu den Normalenkongruenzen hervorgehoben und eine entsprechende Konstruktion für diese gegeben. *Haack* (Berlin).

Ascoli, Guido: Sopra una proprietà delle normali ad una superficie ed una sua parziale estensione. I. II. Atti Accad. naz Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. **5**, 280—285 (1948), **6**, 3—6 (1949).

Die Arbeit enthält eine Verallgemeinerung eines Satzes von F. Tricomi [Atti Accad. Sci. Torino **81/82**, 10 (1945/47)]. Geht von jedem Punkte einer Fläche eine Gerade einer Kongruenz aus, so kann man auf diese eine beliebige Verbiegung der Fläche so übertragen, daß die Winkel des Kongruenzstrahles mit den Flächenkurven durch den zugehörigen Flächenpunkt erhalten bleiben. Wird nun auf jede Kongruenzgerade vom Flächenpunkt aus nach beiden Seiten die gleiche Strecke $h/2$ abgetragen, so ist das Volumen V des von diesen Strecken ausgefüllten Raumteiles dann und nur dann für genügend kleines h für jedes Flächenstück bei einer beliebigen Verbiegung der Fläche invariant, wenn eine der folgenden gleichwertigen Bedingungen erfüllt ist: 1. Das sphärische Bild der Kongruenzgeraden wird bei jeder Verbiegung der vorgegebenen Fläche flächentreu abgebildet. 2. Projiziert man den Einheits-

vektor jedes Kongruenzstrahles senkrecht auf die zugehörige Tangentenebene der Fläche, so entsteht der Drehriß (G. Darboux, Théorie des surfaces IV, Livre 8, Paris 1896) einer infinitesimalen Verbiegung der Fläche in sich. Eine von der Normalenkongruenz verschiedene Kongruenz kann also nur dann die angegebene Eigenschaft besitzen, wenn die Fläche konstante Krümmung hat oder sich auf eine Drehfläche abwickeln läßt; im ersten Fall gibt es ∞^3, im zweiten ∞^1 derartige Kongruenzen. Für V gilt die einfache Formel $V = h\int \cos\theta\, dA + \frac{1}{12} h^3 A^*$; hier ist θ der Winkel des Kongruenzstrahls mit der Flächennormalen, dA das Oberflächenelement der Fläche, A^* die Oberfläche des sphärischen Bildes der Kongruenz. *Bol.*

Correnti, Salvatore: Sulle forme tipiche del ds^2 delle superficie a curvatura costante. Mat., Catania **3**, 40—48 (1948).

Ausgehend von der Forderung, daß die Flächen mittleren konstanten Krümmungsmaßes $k = c/2$ auf Rotationsflächen abwickelbar sein müssen, also das Quadrat des Bogenelementes die Form $ds^2 = 2\varphi(x-y)\,dx\,dy$ haben muß, wird durch Integration der aus dem Theorema egregium sich ergebenden Differentialgleichung $S = 2n^2/c\,\mathfrak{Sin}\,(n(x-y)/2+m)$ (n, m beliebige Konstante) bestimmt. Daraus werden durch Umformung die bekannten Darstellungen $ds^2 = -4\,du\,dv/\mathfrak{Sin}^2((u-v)/R)$ bzw. $du^2 + \mathfrak{Cos}^2(u/R)\,dv^2$ bzw. $du^2 + \cos^2(u/R)^2\,dv^2$ ($c = \mp 2/R^2$) gewonnen. Für $k = 0$ wird ds^2 in die Liouvillesche Form gebracht. *Volk* (Würzburg).

Hartman, Philip: Systems of total differential equations and Liouville's theorem on conformal mappings. Amer. J. Math. **69**, 327—332 (1947).

Verf. beweist zunächst den einem Satz von P. du Bois Reymond analogen Hilfssatz: Sind $x(u, v)$, $y(u, v)$ in einem gegebenen Bereich $\mathfrak{B}$ Funktionen mit stetigen ersten partiellen Ableitungen (Funktionen der Klasse C') und ist $x_u y_v - x_v y_u \neq 0$ in $\mathfrak{B}$, so ist dafür, daß $\int_C \alpha(u, v)\,dx = 0$, $\int_C \alpha(u, v)\,dy = 0$ für jede beliebige rektifizierbare Jordan-Kurve in $\mathfrak{B}$, wo $\alpha(u, v)$ eine stetige Funktion in $\mathfrak{B}$, notwendig und hinreichend, daß $\alpha(u, v) = \text{const}$. Ausgehend von den Rodriguesschen Differentialgleichungen für die Krümmungslinien einer Fläche wird nun der für Flächen der Klasse C''' bekannte (vgl. z. B. L. Bieberbach, Differentialgeometrie, Leipzig und Berlin 1932, S. 68—69; dies. Zbl. **5**, 261) Satz, daß eine Fläche ein Stück einer Ebene oder einer Kugel darstellt, wenn die Hauptkrümmungen $k_1(u, v)$ und $k_2(u, v)$ in $\mathfrak{B}$ identisch sind, für Flächen der Klasse C'' bewiesen. Daraus läßt sich die Gültigkeit des Liouvilleschen Satzes, daß jede dreidimensionale konforme Abbildung der Klasse C''' eine Möbiustransformation ist, auch für die Klasse C'' folgern. *Volk* (Würzburg).

Pinl, M.: Binäre orthogonale Matrizen und integrallose Darstellungen isotroper Kurven. Math. Ann., Berlin **121**, 1—20 (1949).

In dieser dem Gedächtnis von L. Berwald gewidmeten Arbeit liefert Verf. eine systematische Untersuchung der Methoden und Möglichkeiten, isotrope Kurven $\mathfrak{x}(t)$ euklidischer Räume integrallos darzustellen. Solche integrallose Darstellungen sind besonders in der dualistischen Theorie der isotropen Kurven von Interesse geworden [vgl. M. Pinl, Mh. Math. Phys. **39**, 157—172 (1932), **44**, 1—12 (1936), **49**, 261—278 (1940), Math. Z. **42**, 337—354 (1937); dies. Zbl. **4**, 129, **14**, 179; **23**, 266, **15**, 415]. Im zweiten Teil der Arbeit werden die hauptsächlichen Anwendungen dieser Methode auf die integrallose Darstellung der isotropen Kurven des R_3, R_4 und R_5 und auf die von ihnen erzeugten Flächen (isotrope Torsen und Minimalflächen) gegeben. — Die algebraische Grundlage der Differentialgeometrie solcher isotroper Kurven $\mathfrak{x}(t)$ besteht im wesentlichen in Rangaussagen über die zugeordneten Gramschen Matrizen $\mathfrak{G}$ der abgeleiteten Ortsvektoren $\mathfrak{x}^{(k)}(t)$, denen in der dualistischen Theorie ähnliche Aussagen über die Gramschen Matrizen $\mathfrak{H}$ der zugeordneten Stellungsvektoren $\mathfrak{e}_i$ und ihrer Ableitungen $\mathfrak{e}_i^{(k)}(t)$ entgegentreten.

In manchen Fällen gelingt es dabei, die aus den Matrizen $\mathfrak{G}$ entspringenden Differentialgleichungen durch reinalgebraische Bedingungsgleichungen, die aus den Matrizen $\mathfrak{H}$ hervorgehen, zu ersetzen und diese mit Hilfe orthogonaler Matrizen zu erfüllen, was Verf. insbesondere unter Verwendung binärer orthogonaler Matrizen zeigen kann. Die Bestimmung des Stellungsvektors $e(t)$ einfacher isotroper Hyperebenenscharen des R_n läßt sich zuweilen auf die Bestimmung isotroper Kurven auf Hypersphären zurückführen. Damit ist dann zwar nur eine integrallose Darstellung des Tangentenbildes gewonnen, die aber für differentialgeometrische Zwecke meistens eine integrallose Darstellung der Kurve selbt vollkommen ersetzen kann. — Natürlich sind auch die klassischen integrallosen Darstellungen der isotropen Kurven des R_3 (auf zweifache Art) in der allgemeinen Darstellungstheorie des Verf. mit enthalten. *K. Strubecker* (Karlsruhe).

Pinl, M.: Über Flächen mit isotropem mittlerem Krümmungsvektor. Mh. Math., Wien **52**, 301—310 (1948).

Die Fläche $\mathfrak{x}(u_1, u_2)$ des komplexen euklidischen R_n sei auf isotrope Parameter bezogen, also $g_{11} = g_{22} = 0$, $g_{12} = g_{21} \neq 0$. Ist dann ihr Krümmungsaffinor $\mathfrak{h}_{\alpha\beta} = \mathfrak{x}_{\alpha\beta} - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \mathfrak{x}_\mu$, so wird ihr mittlerer Krümmungsvektor

$$\mathfrak{h} = g^{\alpha\beta}\, \mathfrak{h}_{\alpha\beta} = 2 g^{12}\, \mathfrak{x}_{12}$$

dann und nur dann isotrop, wenn $\mathfrak{x}_{12}$ isotrop ist. Die Theorie der Flächen mit isotropem mittlerem Krümmungsvektor $\mathfrak{h}$ ($\mathfrak{h}^2 \equiv 0$) gründet sich also auf die Identitäten

$$\mathfrak{x}_1^2 \equiv \mathfrak{x}_2^2 \equiv \mathfrak{x}_{12}^2 \equiv 0, \tag{1}$$

(ähnlich wie sich die Theorie der Minimalflächen in isotropen Parametern auf die Identitäten

$$\mathfrak{x}_1^2 \equiv \mathfrak{x}_2^2 \equiv 0, \quad \mathfrak{x}_{12} \equiv 0 \tag{2}$$

gründet). Wegen $\mathfrak{h}_{\alpha\beta}\, \mathfrak{x}_\lambda = 0$, $\mathfrak{h}\, \mathfrak{x}_\lambda = g^{\alpha\beta}\, \mathfrak{h}_{\alpha\beta}\, \mathfrak{x}_\lambda = 0$ liegt der mittlere Krümmungsvektor $\mathfrak{h}$ im $(n-2)$-dimensionalen Normalenraum der Fläche. Im euklidischen R_3 folgt aus (1) $\mathfrak{x}_{12} \equiv 0$, also sind (1) und (2) äquivalent und Flächen mit isotropem mittlerem Krümmungsvektor sind nicht möglich. — Solche Flächen gibt es erst im euklidischen R_4. Da $\mathfrak{x}_{12}$ mit $\mathfrak{h}$ kollinear ist, ist der Trivektor $\mathfrak{e} = [\mathfrak{x}_1\, \mathfrak{x}_2\, \mathfrak{x}_{12}] \neq 0$ wegen $\mathfrak{e}^2 = 0$ isotrop. Der Schmiegraum der Fläche $\mathfrak{x}$, bestimmt durch die Vektoren $\|\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}\|$, ist drei- oder vierdimensional, je nachdem die Matrix $\|\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2\|$ des Trivektors $\mathfrak{e}$ und seiner Ableitungen den Rang $r = 1$ oder $r > 1$ (2 oder 3) hat. Im Fall $r = 1$ liegt die Fläche in einem isotropen R_3; die Theorie dieser Flächen hat Ref. ausführlich entwickelt [Math. Z. **47**, 743—777 (1942), **48**, 369—427 (1942); dies. Zbl. **26**, 263, **27**, 253]. — Im Falle $r = 2$ ist allen Punkten derselben isotropen Parameterkurve $u_2 = \text{const.}$ der gleiche isotrope R_3 zugeordnet, ohne daß die Fläche eine isotrope Torse wäre; der Schmiegraum ist vierdimensional. — Rang $r = 3$ kennzeichnet die allgemeinen Flächen des euklidischen R_4 mit isotropem mittlerem Krümmungsvektor. Es gelingt Verf., diese Flächen als integrallose Lösungen der Mongeschen Gleichung $\mathfrak{h}^2 \equiv 0$ darzustellen. Man kann sie als Gratflächen der zweiparametrigen isotropen R_3-Schar $\mathfrak{e}\, \mathfrak{x} + f(u_1, u_2) = 0$ ($\mathfrak{e}^2 \equiv 0$) gewinnen, wobei $f_{1212} \not\equiv 0$ sein muß. Wenn $f_{1212} = 0$, aber $f_{11} \cdot f_{22} \neq 0$ ist, ergeben sich Minimalflächen in R_4; insbesondere für $f_{12} = 0$ Minimalflächen in einem isotropen R_3 des R_4. Nach einem allgemeinen Satze des Ref. ist dann die Gaußsche Krümmung der Fläche $K \equiv 0$. *K. Strubecker* (Karlsruhe).

Haack, Wolfgang: Strahlenkomplexe mit integrablen Pfaffschen Differentialformen. Math. Z. **52**, 322—341 (1949).

Ein Stück Ψ einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit des vierdimensionalen Studyschen Strahlenraumes heißt bekanntlich ein Strahlenkomplex, wenn die Komponenten der zwei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{a}}$ des dualen Vektors $\mathfrak{A}$ als solche Funktionen dreier Parameter u^1, u^2, u^3 gegeben sind,

die im Gebiet Ψ mindestens dreimal stetig differenzierbar sind und die ferner überall in Ψ die Identitäten $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a} = 1$; $\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}} = 0$ erfüllen, so daß nirgends in Ψ sämtliche dreireihige Determinanten verschwinden, die aus den sechs Vektoren $\partial\mathfrak{a}/\partial u^i$, $\partial\bar{\mathfrak{a}}/\partial u^i$ gebildet werden können. Der Parameterraum der Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe ist dreidimensional, und alle zugeordneten Differentialformen der Theorie sind ternäre Differentialformen. Die Skalarprodukte der ersten Ableitungen $\mathfrak{A}_i = \partial\mathfrak{A}/\partial u^i$ des dualen Vektors $\mathfrak{A}$ bilden die Koeffizienten der dualen quadratischen Differentialform $d\Phi^2 = \mathfrak{A}_i\,\mathfrak{A}_k\,du^i\,du^k = G_{ik}\,du^i\,du^k$. Trennung von Real- und Dualteil führt auf zwei reelle Tensoren zweiter Stufe $g_{ik} = \mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k$, $\bar{g}_{ik} = \mathfrak{a}_i\,\bar{\mathfrak{a}}_k + \bar{\mathfrak{a}}_i\,\mathfrak{a}_k$. Das sphärische Bild $\mathfrak{a}$ des Komplexes ist höchstens zweidimensional. Daher verschwindet die Determinante der ersten Ableitungen $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$ und daher auch $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)^2 = |g_{ik}|$. Deutet man die 3 Komponenten des kontravarianten Vektors u^i als homogene Koordinaten eines Punktes der projektiven Ebene, so bestimmen die beiden quadratischen Differentialformen $g_{ik}\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k = 0$, $\bar{g}_{ik}\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k = 0$ zwei Kegelschnitte, deren erster in ein konjugiert-komplexes Geradenpaar zerfällt, dessen Schnittpunkt mit den Koordinaten l^i auf dem zweiten Kegelschnitt liegt. Einen zweiten Schnittpunkt mit den Koordinaten m^i liefert das Geradenpaar $(g_{ik} - d\,\bar{g}_{ik})\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k = 0$. Dabei ist $d = g_{ik}\,\bar{g}^{ik}$ und $k = 1/2\,d$ der Hauptdrall des Komplexes. Schließlich schneidet die Polare des Punktes m^i in bezug auf den nichtzerfallenden Kegelschnitt diejenige Gerade des Geradenpaares $(g_{ik} - d\,\bar{g}_{ik})\,\dot{u}^i\,\dot{u}^k = 0$, welche nicht die Punkte m^i, l^i verbindet, in einem dritten Punkt mit den Koordinaten n^i. Im Falle linearer Unabhängigkeit lassen sich aus den drei kontravarianten Vektoren m^i, n^i, l^i drei kovariante Vektoren m_i, n_i, l_i gewinnen und damit die drei ternären Pfaffschen Formen $\alpha = l_i\,\dot{u}^i$, $\beta = m_i\,\dot{u}^i$, $\gamma = n_i\,\dot{u}^i$. Kennt man von einer nichtabwickelbaren Regelfläche des Komplexes den Abstand $\bar{\varphi}$ ihres Kehlpunktes vom Zentralpunkt und den Winkel φ, den ihre Kehlpunktnormale $\mathfrak{N}$ mit der Hauptnormalen $\mathfrak{H}$ des Komplexes einschließt, so ist i. a. ihr Drall $1/\delta$ durch die Formel von Koenigs $\bar{\varphi}\,\mathrm{tg}\,\varphi = \delta - k$ bestimmt. Drei Klassen von Regelflächen des Komplexes nehmen eine Ausnahmestellung ein:

$$(1)\ \delta = k,\ \bar{\varphi} = 0, \qquad (2)\ \bar{\varphi} = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad (3)\ \delta = k,\ \varphi = 0.$$

Für die erste dieser Klassen verschwindet α, für die zweite β und für die dritte γ. Die so entstehenden Pfaffschen Gleichungen sind i. a. nicht vollständig integrabel. Ist $\alpha = 0$ vollständig integrabel, so bilden ihre Integralregelflächen durch den Komplextrahl $\mathfrak{A}$ Regelflächen gleichen Dralls und gleichen Kehlpunktes, in ihrer Gesamtheit also ein isotropes Strahlensystem. Daraus folgt: der Strahlenkomplex besteht aus einer Schar isotroper Strahlensysteme, und aus diesem Grunde gehört zu jedem Komplex mit integrabler erster Pfaffscher Form eine Schar von Minimalflächen, die unter Umständen in eine einzige Minimalfläche zusammenfällt. Für die andern beiden Klassen gilt: sind die linearen Differentialformen, die die Regelflächen der Klasse (2) bzw. (3) bestimmen, integrabel, so bilden die durch $\mathfrak{A}$ gehenden Regelflächen jeder Klasse ein Strahlensystem. Für die Klasse (2) entstehen zylindrische Strahlensysteme, deren Regelflächen durch denselben Strahl den gleichen Kehlpunkt, aber verschiedenen Drall haben. Für die Klasse (3) entstehen Strahlensysteme, deren Regelflächen umgekehrt im selben Systemstrahl gleichen Drall aber verschiedene Kehlpunkte haben. In beiden Fällen sind die Zylinder der Systeme Ebenen. Sind $\mathfrak{p}(u)$ und $\mathfrak{q}(v)$ die Ortsvektoren zweier isotroper Kurven, so bestimmen die Schnitte ihrer Schmiegebenen nach Ribaucour ein isotropes Strahlensystem. Ist w ein weiterer (reeller!) Parameter, so bestimmen die Vektoren $\mathfrak{p}(u, w)$, $\mathfrak{q}(v, w)$ eine Schar isotroper Strahlensysteme, die den Komplex erzeugen. Für die Studyschen Linienkoordinaten aller Strahlenkomplexe, die eine Schar isotroper Strahlensysteme enthalten, ergibt sich so die (normierte) Darstellung

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{p}_u \times \mathfrak{p}_v)\,\varrho, \quad \bar{\mathfrak{a}} = [\mathfrak{p}_u\,(\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}_v) - \mathfrak{q}_v\,(\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_u)]\,\varrho, \quad \varrho = i\,(\mathfrak{p}_u\,\mathfrak{q}_v), \quad i = \sqrt{-1}.$$

Da sich die isotropen Tangentenvektoren der beiden isotropen Kurven stets in der Form $\mathfrak{p}_u(u, w) = \Phi(u, w)\,\hat{\mathfrak{p}}_u(u)$, $\mathfrak{q}_v(v, w) = \Psi(v, w)\,\hat{\mathfrak{q}}_v(v)$ schreiben lassen, kann diese Darstellung schließlich noch folgendermaßen vereinfacht werden:

$$\mathfrak{a} = \frac{\hat{\mathfrak{p}}_u \times \hat{\mathfrak{q}}_v}{i\,(\hat{\mathfrak{p}}_u\,\hat{\mathfrak{q}}_v)}, \quad \bar{\mathfrak{a}} = \frac{1}{i\,(\hat{\mathfrak{p}}_u\,\hat{\mathfrak{q}}_v)}\,\{[F(u, w) - \mathfrak{W}\,\hat{\mathfrak{p}}_u]\,\hat{\mathfrak{q}}_v - [\bar{F}(v, w) - \bar{\mathfrak{W}}\,\hat{\mathfrak{q}}_v]\,\hat{\mathfrak{p}}_u\}.$$

Dabei sind $F(u, w)$, $\bar{F}(v, w)$ zwei willkürliche konjugiert-komplexe Funktionen der reellen Veränderlichen w und der konjugiert-komplexen Veränderlichen u, v. $\mathfrak{W}(w)$, $\bar{\mathfrak{W}}(w)$ sind willkürliche Vektorfunktionen von w. Die Mittenhüllflächen der isotropen Strahlensysteme $w = \mathrm{const.}$ bilden eine Schar von Minimalflächen

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2}\left\{\int \frac{\partial^3 F}{\partial u^3}\,\hat{\mathfrak{p}}_u(u)\,du + \int \frac{\partial^3 \bar{F}}{\partial v^3}\,\hat{\mathfrak{q}}_v(v)\,dv\right\} + \frac{1}{2}\,(\mathfrak{W} + \bar{\mathfrak{W}}).$$

Da durch $\mathfrak{p} = \int U(u)\,\hat{\mathfrak{p}}_u(u)\,du$ nach Weierstraß eine isotrope Kurve gegeben ist, deren integrallose Darstellung durch die Substitution $U(u) = F'''(u)$ entsteht, kann nunmehr dieser Substitution die bemerkenswerte Deutung gegeben werden: die Funktion F bestimmt die isotropen Strahlensysteme, die zur Minimalfläche mit der Funktion F''' gehören. Die Integrabili-

tätsbedingungen für die zweite und dritte der Pfaffschen Formen sind identisch. Wenn also eine der beiden Formen vollständig integrabel ist, so ist das auch für die andere der Fall. Ein nichtentarteter Strahlenkomplex, dessen drei Pfaffsche Formen vollständig integrabel sind, läßt sich mittels der isotropen Vektoren $\hat{\mathfrak{p}}_u$, $\hat{\mathfrak{q}}_v$ durch die Gleichungen

$$\mathfrak{a} = \frac{\hat{\mathfrak{p}}_u \times \hat{\mathfrak{q}}_v}{i(\hat{\mathfrak{p}}_u\, \hat{\mathfrak{q}}_v)}, \qquad \bar{\mathfrak{a}} = [-(U_1 w + U_2)\, \hat{\mathfrak{q}}_v + (V_1 w + V_2)\, \hat{\mathfrak{p}}_u] \cdot \frac{1}{i(\hat{\mathfrak{p}}_u\, \hat{\mathfrak{q}}_v)}$$

darstellen. Dabei sind U_1, U_2 und V_1, V_2 willkürliche Funktionen der konjugiert-komplexen Veränderlichen u bzw. v. Insbesondere ist ein reeller Strahlenkomplex mit drei integrablen Pfaffschen Formen durch zwei willkürliche Funktionen U_1, U_2 einer komplexen Veränderlichen bestimmt. Ferner gilt: in einem Komplex mit drei integrablen Pfaffschen Formen erzeugen die sphärischen Bilder der zylindrischen Strahlensysteme, die durch das Verschwinden der zweiten und dritten Differentialform bestimmt werden, ein isometrisches Kurvennetz der Einheitskugel. Von besonderem Interesse werden schließlich noch die isotropen Kurven und isotropen Minimalflächen, die zu den Strahlenkomplexen mit drei integrablen Linearformen gehören. So erzeugen die Schmiegungsebenen des Büschels isotroper Kurven $\mathfrak{p}(u, w) = \mathfrak{p}_3(u)\, w + \mathfrak{p}_4(u)$, in dem $\mathfrak{p}_3(u)$, $\mathfrak{p}_4(u)$ zwei beliebige isotrope Kurven sind, im Schnitt mit den Schmiegungsebenen der entsprechenden Kurven des konjugiert-komplexen Büschels $\mathfrak{q}(v, w) = \mathfrak{q}_3(v)\, w + \mathfrak{q}_4(v)$ einen Strahlenkomplex mit drei integrablen Pfaffschen Formen. Die Mittenflächen der in dem Komplex enthaltenen isotropen Strahlensysteme bilden ein Minimalflächenbüschel. Zu einem gegebenen Minimalflächenbüschel gibt es höchstens ∞^6 Strahlenkomplexe, die die Minimalfläche des Büschels als Mittenhüllflächen ihrer isotropen Strahlensysteme besitzen. Fallen die Mittenhüllflächen der Schar isotroper Strahlensysteme des Komplexes $\mathfrak{A}$ in ein und dieselbe Minimalfläche zusammen, so bestimmt die zweite Pfaffsche Form auf der Einheitskugel des sphärischen Bildes eine Schar von Parallelkreisen und die dritte Pfaffsche Form die zugehörige Schar von Meridianen. Ein Beispiel für einen derartigen Komplex erhält man aus einer Kettenlinie, die durch Rotation um die z-Achse ein Katenoid erzeugt. Ist E eine beliebige Evolvente der Kettenlinie, so entsteht aus dieser die Drehfläche E_r. Längs eines Meridians von E_r bilden die Tangenten der Parallelkreise einen Zylinder. Die zu den Erzeugenden senkrechten Tangenten dieses Zylinders sind die Strahlen eines Komplexes mit drei integrablen Pfaffschen Formen, dessen isotrope Strahlensysteme sämtlich das Katenoid als gemeinsame Mittenhüllfläche besitzen. *M. Pinl.*

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Hsiung, Chuan-Chih: Affine invariants of a pair of hypersurfaces. Amer. J. Math. **71**, 879—882 (1949).

Haben in einem affinen Raum R_n zwei Hyperflächen V_{n-1} und W_{n-1} den gemeinsamen Tangentialraum $x_n = 0$ mit den Berührungspunkten V_0 und W_0, wobei die Gerade $V_0 W_0$ eine reguläre Tangente ist, so lassen sich die Gleichungen von V_{n-1} bzw. W_{n-1} in der Umgebung der Berührungspunkte V_0 und W_0 durch Potenzreihen darstellen:

V_{n-1}: $x_n = \Sigma\, v_{ik}\, x_i\, x_k + \cdots$ und W_{n-1}: $x_n = \Sigma\, w_{i1}\, x_i (x_1 - h) + \Sigma\, w_{ik}\, x_i\, x_k + \cdots$.

Aus den Größen v_{ik} und w_{ik} werden zwei affine Differentialinvarianten aufgestellt und für diese eine metrische Deutung gegeben, wobei Resultate von Terracini [Atti. Accad. Sci. Torino **71**, 310—328 (1936); dies. Zbl. **14**, 177] und Santaló (dies. Zbl. **30**, 71) gebraucht werden. *Weitzenböck* (Overveen).

Wu, George: Study of a surface by means of certain associate ruled surfaces in affine space. Amer. J. Math. **69**, 801—814 (1947).

Analog zu E. P. Lane [Projective differential geometry of curves and surfaces, S. 119, Chicago 1932; dies. Zbl. **5**, 25] führt Verf. die mit dem Flächenpunkt P verknüpfte kanonische Quadrik ein: Entsprechend den beiden Scharen von Asymptotenlinien gibt es für jede Flächenkurve C_λ einer Schar $dv = \lambda\, du$ durch P zwei asymptotische Schmieg-F_2. Ihre Schnittkegelschnitte mit den Schmiegebenen aller C_λ mit gleicher Tangente t_λ liegen auf zwei Darboux-F_2, die für $\lambda \to \infty$ bzw. $\lambda \to 0$ in die „kanonische Quadrik" von P zusammenfallen. Diese ist dann und nur dann ein Paraboloid, wenn die Gaußsche Krümmung der quadratischen affinen Grundform verschwindet. Ihr Mittelpunkt ist dann und nur dann fest, wenn sie eine geradlinige Affinsphäre ist. Mit Hilfe der beiden asymptotischen Regel-F_2 R_u und R_v, die einer beliebigen Flächentangente t entsprechen, und der beiden diesen be-

züglich t zugeordneten Moutard-F_2 wird eine Kennzeichnung der Segre-Tangenten in P gewonnen, die Ergebnissen von Čech [Ann. Mat. pura appl., Bologna, III. S. **31**, 191—206 (1922)] und B. Su [Tôhoku Math. J. **33**, 26—38 (1930), 190—198 (1931); Jap. J. Math. **9**, 233—238 (1933); dies. Zbl. **1**, 167, **7**, 131] verwandt ist. Genauere Untersuchung der Konfiguration der verschiedenen genannten F_2 führt zu einer Reihe von Sätzen. Z. B. liegen die Affinnormalen aller ebenen Schnitte durch t mit den Flächen R_u, R_v je in einer Ebene, analog der sog. Transon-Ebene, in der die Affinnormalen der Schnittkurven derselben Ebenen mit der ursprünglichen Fläche selbst gelegen sind. [J. Math. pur. appl. **6**, 191—208 (1841).] *Süss.*

Pa, Chenkuo: A new definition of the Godeaux sequence of quadrics. Amer. J. Math. **69**, 117—120 (1947).

Wie L. Godeaux gezeigt hat [Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci. **16**, 812—826 (1930); **14**, 31—41 (1928); La théorie des surfaces et l'espace réglé, Actual. sci. industr. **138**, Paris 1934; dies. Zbl. **9**, 227], kann man jedem regulären Punkte einer analytischen, nicht abwickelbaren Fläche des projektiven Raumes eine Folge von Quadriken $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ zuordnen, deren erste die Quadrik Φ von Lie ist, und deren zweite, $\Phi_1, \ldots$, auch von B. Su [Tôhoku Math. J. **40**; 433—448 (1935); dies. Zbl. **11**, 324] wiedergefunden wurde, derart, daß je zwei aufeinander folgende Quadriken Φ_{n-1} und Φ_n sich in vier für sie charakteristischen Punkten berühren. L. Godeaux gab durch Abbildung der Schmiegtangenten auf Kleins Φ_4^2 des R_5 eine indirekte Deutung seiner Folge. Verf. zeichnet eine direkte geometrische Deutung der Godeauxschen Folge. Er geht aus von dem oskulierenden linearen Komplex $R_1(u, v)$ einer Asymptotenlinie (= u-Linie) des Flächenpunktes $M(u, v)$. Ist $M(u + du, v + dv)$ ein Punkt der Umgebung 1. Ordnung und $R_1(u + du, v + dv) = R_1 + R_{1u}\,du + R_{1v}\,dv + \cdots$ der entsprechende lineare Schmiegkomplex, so haben die linearen Komplexe $R(u, v)$, $R_{1u}(u, v)$, $R_{1v}(u, v)$ als Schnitt einen Regulus der Lieschen Quadrik Φ. Geht man zu Umgebungen 2. und höherer Ordnung über, so wird $R_1(u, v + dv) = R_1 + R_{1v}\,dv + \frac{1}{2} R_{1vv}\,dv^2 + \frac{1}{6} R_{1vvv}\,dv^3 + \cdots$, und es folgt, daß die linearen Komplexe R_1, R_{1v}, R_{1vv} einen Regulus der Quadrik Φ_1 und zusammen mit R_{1vvv} zwei Geraden g_1, g_2 gemeinsam haben, die zwei Regelflächen G_1 und G_2 erzeugen. Es gibt dann einen linearen Komplex $R_2(u, v)$, der mit G_1 und G_2 längs g_1 und g_2 eine Berührung 3. Ordnung eingeht und mit dessen Hilfe man die Quadriken Φ_2, Φ_3, Φ_4 gewinnt, wenn man wie oben an die Entwicklungen

$$R_2 + R_{2u}\,du + \tfrac{1}{2} R_{2uu}\,du^2,\quad R_2 + R_{2u}\,du + R_{2v}\,dv,\quad R_2 + R_{2v}\,dv + \tfrac{1}{2} R_{2vv}\,dv^2$$

anschließt. Durch Heranziehen der Entwicklung 3. Ordnung

$$R_2 + R_{2v}\,dv + \tfrac{1}{2} R_{2vv}\,dv^2 + \tfrac{1}{6} R_{2vvv}\,dv^3$$

erhält man dann die Geraden g_1, g_2 und deren Regelflächen G_1', G_2' sowie deren Schmiegkomplex $R_3(u, v)$, mit dessen Hilfe man die Fortsetzung der Godeauxschen Kette erhält. — Verf. zeigt, daß man in analoger Art auch, von den die asymptotische u-Linie querenden Schmiegtangenten und linearen Schmiegkomplexen $S_1(u, v)$ ihrer Regelfläche R_u in $M(u, v)$ ausgehend, zu einer gleich einfachen direkten Deutung der Godeauxschen Quadrikenfolge $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots$ gelangen kann. — Schließlich weist er darauf hin, daß man den Begriff der Godeauxschen Quadrikenfolge auch auf W-Kongruenzen übertragen kann, wodurch dann jedem Strahl einer solchen W-Kongruenz eine Folge $\ldots \Phi_{-n} \ldots, \Phi_{-2}, \Phi_{-1}, \Phi, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n, \ldots$ von assoziierten Quadriken zugeordnet ist. [Bemerkung des Referenten: Die zuletzt angedeutete Übertragung der assoziierten Quadrikenfolge auf Strahlen von W-Kongruenzen hat jedoch schon L. Godeaux selbst angegeben. Vgl. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci. **13**, 812—826 (1927); **14**, 31—41 (1928); La théorie des surfaces et l'espace réglé, Actual. sci. industr. **138**, Paris 1934; und dies. Zbl. **34**, 97].

K. Strubecker (Karlsruhe).

Villa, Mario e Guido Vaona: Le trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo. — I. Intorno del 2° ordine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. **6**, 184—188 (1949).

Villa, Mario e Guido Vaona: Le trasformazione puntuali in una coppia a Jacobiano nullo. — II. Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic mat. natur., VIII. S. **6**, 278—282 (1949).

A point transformation T between two linear spaces S_r, S'_r, at a pair of corresponding points O, O' with Jacobian zero (of characteristic $k > 0$), induces a singular homography Ω of species $r - k$ between corresponding directions; geometrical elements depending on the neighbourhood of 2nd order of O, O' such as the singular spaces of Ω, the characteristic straight lines (analogous to those considered by Villa [this Zbl. **30**, 216 (1949)] in the case of Jacobian $\neq 0$, and the characteristic projectivities inherent in those — are not sufficient to determine completely the essentiel projective local behaviour of T in the two spaces S_r, S'_r. The a.s complete the determination of this local behaviour in part II, with restriction to the case $k = r - 1$, by recurring to the neighbourhoods of 3rd order, in an analogous way to that used by Villa l. c. Recurring to the neighbourhoods of 2nd and 3rd order proves sufficient also for $r = 2$, a case already studied by Bompiani [Mem. Accad. Italia **13**, 11 (1943)], there however with the intervention of elements of 4th order. *P. Buzano* (Torino).

Villa, M. e C. Sangermano: Condizione affinchè una trasformazione puntuale fra due S_3, in una coppia a jacobiano nullo, sia osculabile con una trasformazione cremoniana. Boll. Un. mat. Ital., III. S. **4**, 23—30 (1949).

Consider a point transformation T between two spaces S_3, S'_3 at a pair of corresponding points O, O' with Jacobian zero (of characteristic 2). Is is stated first that a necessary condition, that T may be osculated in O, O' by a Cremona transformation, is that the stationary straight line through O is a common asymptotic tangent of all surfaces corresponding to the planes through O'. Conversely, if this condition is satisfied, the a.s determine the equations of ∞^{12} osculating cubic transformations, whereas osculating quadratic transformations generally do not exist. *P. Buzano* (Torino).

Longo, Carmelo: Trasformazioni puntuali fra due piani proiettivi in una coppia di punti corrispondenti a direzioni inflessionali di specie superiore indeterminate. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. **6**, 68—73 (1949).

The au. considers a point transformation T between two projective planes, at such a pair of corresponding points O, O', that T may be approximated by a projectivity in the neighbourhood of order h. Then the inflexional directions of species $\leq h - 2$ are all indeterminate. But, as the converse of this assertion does not hold either, it does not follow that T may be approximated by a projectivity also in the neighbourhood of order $s > h$, when the inflexional directions of species $\leq s - 2$ are indeterminate. The au. succeeds, however, in approximating T in the neighbourhood of order k ($h \leq k \leq s$) by certain algebraic transformations $(1, k - 1)$, and applies this result to determine the projective invariants of T depending on the neighbourhoods of the single orders (up to $s + 1$). *P. Buzano* (Torino).

Hsiung, Chuan-Chih: A study on the theory of conjugate nets. Amer. J. Math. **69**, 379—390 (1947).

Auf der Fläche S sei ein konjugiertes u, v-Parameter-Netz gegeben. Längs einer Kurve C von S beschreiben die Tangenten der Netzkurven zwei Regelflächen R^u, R^v. Es seien T und $\bar{T}$ zwei Punkte auf den Netztangenten des Punktes P von S. Dann gibt es zwei zueinander duale Geraden: $g_1 = T\bar{T}$ und $g_2 =$ Schnittgerade der Tangentenebenen von R^u in T und R^v in $\bar{T}$. Zwischen den Geraden g_1 und g_2 besteht eine Polarverwandtschaft, wenn C eine ausgezeichnete Richtung hat. —

Verf. bestimmt ferner die Quadrik, die in T mit R^u eine Berührung 2. Ordnung und in $\bar{T}$ mit R^v eine solche 1. Ordnung hat (und umgekehrt). Schließlich wird eine geometrische Kennzeichnung der kanonischen Geraden von Davis und von Green entwickelt. *Haack* (Berlin).

Hsiung, Chuan-Chih: Projective theory of surfaces and conjugate nets in four-dimensional space. Amer. J. Math. **69**, 607—621 (1947).

Verf. entwickelt die projektive Differential-Geometrie einer Fläche $S(x(u, v))$ mit einem konjugierten Netz N. Im I. Abschnitt werden die Ableitungsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen aufgestellt. Der oskulierende lineare S_3 der u-Kurve schneidet den oskulierenden S_2 der v-Kurve in der Geraden g_1, analog gibt es durch Vertauschung von u, v eine Gerade g_2. Auf g_1 und g_2 gibt es je einen invarianten Punkt y, z. Dann bilden x, x_u, x_v, y, z das Bezugssystem. Auf den Geraden $x\,x_u$ und $x\,x_v$ liegen die beiden Laplace-Transformierten x_{+1} und x_{-1}. — Mittels Bompianis quasi-asymptotischer Kurven werden jeder Richtung γ von S zwei S_3 zugeordnet. Dreht sich γ in der Tangentenebene von S um x, so erzeugen die Schnittebenen der S_3 einen kubischen Hyperkegel. — Mittels der Hyperquadriken, die S in x in 3. Ordnung berühren, definiert Verf. kanonische Geraden der Tangentenebene. Diesen werden durch x gehende kanonische Ebenen reziprok zugeordnet, die einen quadratischen Hyperkegel erzeugen. — Die Arbeit schließt mit der Aufstellung von Reihenentwicklungen und einem Studium der Laplace-Transformierten x_{+1} und x_{-1}. *Haack* (Berlin).

Rozet, O.: Sur une surface dont la transformée de Lie est la surface minima d'Enneper. Bull. Soc. Sci. Liége **17**, 208—209 (1948).

Durch Verschwinden von 4 projektiven Invarianten wird eine Klasse von Flächen gekennzeichnet, deren beiden Haupttangenten-Systeme linearen Komplexen angehören, und deren Lie-Quadriken nur zwei charakteristische Punkte haben. Zu dieser Klasse gehört eine Fläche, deren Lie-Transformierte eine Ennepersche Minimalfläche ist. *Haack* (Berlin).

Rozet, O. et F. Thibaut: Sur les surfaces dont les cycliques de Lie n'ont que deux points caractéristiques. Bull. Soc. Sci. Liége **17**, 210—214 (1948).

(M) sei eine auf Krümmungslinien u, v bezogene Fläche des R_3. Da u, v konjugiert sind, gehört (M) einer Laplace-Folge $\mathfrak{M}(M_{-nu}, \ldots, M, \ldots, M_{-nv})$ an. Die Zentramäntel von (M) erzeugen bezüglich u, v eine weitere Laplace-Folge $\mathfrak{m}$; dabei ist $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{m}$ einbeschrieben. Durch Abbildung der Hauptkrümmungskugeln von (M) auf die Liesche Hyperquadrik Q_4 ergeben sich zwei Flächen U, V, die der Laplace-Folge $L(U_n, \ldots, U, V, \ldots, V_n)$ angehören. Nach geeigneter Normierung der Lieschen Kugelkoordinaten U, V folgen aus der Lieschen quadratischen Form (Polarform bezüglich Q_4) zwei Invarianten α, β. — Im allgemeinen hat die Lie-Zyklide von (M) fünf charakteristische Punkte; ist L nach beiden Seiten unendlich und α oder β Null, so gibt es nur drei, ist dagegen γ und β Null, so gibt es nur zwei charakteristische Punkte auf der Lie-Zyklide. In diesem Fall haben die Folgen L, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{m}$ die Periode 6. (Anm. des Ref.: Druckfehler auf S. 211, Zeile 14 M_{-nv} statt M_{-uv}; auf S. 213, Zeile 7 wohl $\beta = 0$ statt $\alpha = 0$. *Haack* (Berlin).

Pa, Chenkuo: Some theorems on rectilinear congruences and transformations of surfaces. Trans. Amer. math. Soc. **65**, 360—371 (1949).

Verf. beweist im wesentlichen die beiden Sätze: 1. Wird ein W-Strahlensystem L von einer Fläche S so geschnitten, daß die Asymptotenlinien der Brennflächen von L denen von S entsprechen, dann ist L ein R-System und S eine R-Fläche, die von den Torsen von S in einem R-Netz geschnitten wird. Zu einer R-Fläche gibt es ∞^4 R-Systeme. — 2. L sei ein zur Transversalfläche S konjugiertes Strahlensystem; S' sei harmonisch konjugiert zu S bezüglich der Brennflächen von L. Entsprechen

sich bei dieser Zuordnung die Asymptotenlinien von S und S', dann sind S und S' Jonas-Flächen, die von den Torsen von L in Jonas-Netzen geschnitten werden. *Haack* (Berlin).

Godeaux, Lucien: Sur une suite de quadriques associée à une congruence W. Amer. J. Math. **69**, 490—492 (1947).

Den Haupttangenten U, V einer Fläche F entsprechen zwei Punktsysteme auf der Kleinschen Hyperquadrik Q_4 im S_5, die einer (bezüglich Q_4 autopolaren) Laplace-Folge $U_n, \ldots U, V, \ldots, V_n$ angehören. Demnach schneiden je zwei konjugierte Ebenen $U_n U_{n+1} U_{n+2}$ und $V_n V_{n+1} V_{n+2}$ die Hyperquadrik Q_4 in zwei Kegelschnitten, die das Kleinsche Bild der beiden Erzeugendenscharen einer Fläche 2. Grades des S_3 sind. So ergibt sich eine Schar von Flächen 2. Grades, die invariant mit F verbunden sind; für $n = 1$ erhält man die Lie-F_2. — In einem W-Strahlensystem entsprechen sich die Asymptotenlinien der Brennflächen. Die Haupttangenten U, V und $\bar{U}$, $\bar{V}$ der Brennflächen erzeugen auf Q_4 zwei Laplace-Folgen. Aus diesen konstruiert Verf. zwei konjugierte Folgen J_i und P_i, die in derselben Weise wie oben zu einer Schar von Flächen 2. Grades führen. *Haack* (Berlin).

Rozet, O.: Sur certaines congruences non W de droites. Bull. Soc. Sci. Liége **17**, 6—9 (1948).

Es sei (x) die eine Brennfläche eines Strahlensystems (j) mit den Asymptotenlinien u, v. Ferner seien U, V die Bilder der Haupttangenten von x auf der Kleinschen Hyperquadrik Q_4. Das Bild J von (j) läßt sich darstellen durch $J = \alpha U - \beta V$. Verf. berechnet Ableitungsgleichungen für die Fläche $J(u, v)$ von Q_4 und stellt Bedingungen dafür auf, daß die Kurven u bzw. v auf J eben sind, ferner, daß die zweite Brennfläche von (j) eine Regelfläche und im besonderen eine Quadrik ist. *Haack.*

Rozet, O.: Sur certaines classes de congruences non W de droites. Bull. Soc. Sci. Liége **17**, 186—188 (1947).

Den Haupttangenten einer Fläche F des projektiven dreidimensionalen Raumes S_3 werden auf der Kleinschen Hyperquadrik Q_4 des S_5 die Flächen U, V zugeordnet. Ein Strahlensystem (j), das F als Brennfläche besitzt, hat das Kleinsche Bild $J = U - \gamma V$. Hat F die Krümmung (-2) nach Fubini-Čech, so läßt sich γ derart bestimmen, daß die Laplace-Transformierten 2. Art J_1, J_{-1} von J mit den Gliedern V_2 bzw. U_2 der durch U, V erzeugten Laplace-Folge 1. Art zusammenfallen. *Haack* (Berlin).

Backes, Fernand: Un cas de congruences doublement stratifiables. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 257—258 (1948).

Als Fortsetzung einer früheren Mitteilung (dies. Zbl. **30**, 268) betrachtet Verf. zunächst einen Sonderfall des Systems der Geraden $P_1 P_2$ und wendet sich dann zu den Diagonalsystemen des Grundtetraeders $N_1 N_3$ und $N_2 N_4$. Sind diese beiden Systeme wechselseitig stratifizierbar, dann gibt es stratifizierende Flächen (P), (Q) mit P auf $N_1 N_3$ und Q auf $N_2 N_4$, so daß u, v Asymptotenlinien auf (P) und (Q) sind und die Invariante k der Laplace-Gleichung der Linienkoordinaten von PQ verschwindet. *Haack* (Berlin).

Doyle, Thomas C.: Tensor theory of invariants for the projective differential geometry of a ruled surface. Duke math. J. **14**, 381—399 (1947).

Die vorliegende Arbeit soll als Vorstudie zu einer Invariantentheorie der Differentialgeometrie von Geradenkomplexen angesehen werden. Verf. geht von dem Differentialgleichungssystem $y_j'' + p_j^r y_r' + q_j^r y_r = 0$ $(j, r = 1, 2)$ aus, wobei die Lösungen $y_j^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ als homogene Punktkoordinaten gedeutet werden und $\lambda^j y_j^{(\alpha)}$ die Geraden einer Regelfläche darstellen. Wegen $|y_1 y_2 y_1' y_2'| \neq 0$ sind Torsen ausgeschlossen. Die Integralregelfläche bleibt bei den Transformationen $y_i = a_i^k(t)\, y_k^*$ und $t^* = \xi(t)$ ungeändert. In geeigneten Variablen und geeignetem Parameter erhält man Wilczynskis kanonische Form $y_j^* + q_j^{*r} y_r^* = 0$ mit

$q_r^{*r} = 0$. Die Größen $q_j^{*r} = -U_j^{*r}$ sind die kanonischen Komponenten eines Tensors $U_j^k \equiv u_j - \frac{1}{2}\delta_j^k u_r^r$ mit $u_j^k = \frac{1}{2} p_j'^k + \frac{1}{4} p_j^r p_r^k - q_j^k$. Mit (k, w) seien die Gewichte der Tensordichten bezeichnet: $T = a^k (\xi')^w T^*$, $a = |a_j^k| \neq 0$; die Dichte $U = -|U_j^k|$ hat das Gewicht $(0, 4)$. Mit ihrer Hilfe läßt sich eine kovariante Ableitung nach dem Parameter erklären, die durch einen tief gesetzten Punkt bezeichnet sei. Für einen kovarianten Vektor vom Gewicht (k, w) gilt z. B.

$$\lambda_{j.} = U \lambda_j' + \tfrac{1}{2} U p_j^r \lambda_r + (1 - 2\omega + 2k) \tfrac{1}{8} U' \lambda_j + \tfrac{1}{2} k U p_r^r \lambda_j$$

und entsprechend

$$\lambda_.^i = U \lambda'^i - \tfrac{1}{2} U \lambda^r p_r^i + (-1 - 2\omega + 2k) \tfrac{1}{8} U' \lambda^i + \tfrac{1}{2} k U p_r^r \lambda^i,$$

oder für eine relative Invariante

$$J_. = U J' + (k - w) \tfrac{1}{4} U' J + \tfrac{1}{2} k U p_r^r J.$$

Durch die Differentiation wird das Gewicht w auf $w + 5$ erhöht. Die kovariante Ableitung von U verschwindet. Die tensorielle Form des Ausgangssystems lautet nunmehr

$$y_{j..} - \left(U^2 U_j^r + \varrho\, \delta_j^r\right) y_r = 0$$

mit $\varrho = \frac{1}{8} U U'' - \frac{9}{64} U'^2 + \frac{1}{2} U^2 u_r^r$. Es werden die Invarianten niedrigster Ordnung aufgesucht und gezeigt, daß das Wilczynskische Theorem gilt, wonach die Größen

$$U,\ \varrho,\ J_{10} = \frac{U_{s.}^r\, U_{r.}^s}{2\,U},\ J_9 = \frac{U_s^r\, U_{t.}^s\, U_{r..}^t}{U^3}$$

und ihre sukzessiven kovarianten Ableitungen ein vollständiges Invariantensystem bilden. Entsprechend erhält man ebenfalls die fünf Wilczynskischen Kovarianten. Der Übergang zum adjungierten System vom dualen Standpunkt findet seinen tensoriellen Ausdruck einfach in der Ersetzung von U_j^k durch $-U_j^k$. — Mit den jetzt bereit gestellten Hilfsmitteln werden unter Verwendung von Reihenentwicklungen in speziellen kanonischen Koordinaten verschiedene geometrische Größen untersucht, wie Tangentialebene, Asymptotenlinie, Schmieghyperboloid, Schmiegkomplex, Fleknodalkurven, Fleknodalfläche, Fleknodalkongruenz, Flächen mit einer ebenen, nicht geradlinigen Fleknodalkurve und die Äquivalenz zweier Regelflächen. *Weise* (Kiel).

Bell, P. O.: Differential geometry of a general motion in the complex projective line. Amer. J. Math. **71**, 427—442 (1949).

E. Cartan hat in seinen „Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective", Paris 1937, S. 28—42 (dies. Zbl. **16**, 76) die Geometrie der Bewegungen eines Punktes der komplexen Geraden unter dem Einflusse der Gruppe der reellen projektiven Transformationen entwickelt. Bei Deutung in der Gaußschen Zahlenebene handelt es sich dabei um die Entwicklung der Kurventheorie der Poincaréschen Halbebene nach der Methode des „repère mobile", d. h. unter Verwendung eines geeigneten lokalen Bezugssystems, dessen Schicksal unter der genannten Gruppe die differentialgeometrischen Eigenschaften der Kurve zu beschreiben gestattet. Diese Cartansche Behandlungsweise dient Verf. als Vorbild bei seiner vorliegenden Arbeit, die der unter dem Einflusse der allgemeinen Gruppe der komplexen projektiven Transformationen entstehenden „Bewegungstheorie" der komplexen Geraden gewidmet ist, d. h. bei Deutung in der Gaußschen Ebene: der Entwicklung einer Kurventheorie der Möbiusschen Kreisgeometrie. Ist t ein reeller Zeitparameter, so kann die lokale „Bewegung" eines Punktes $z(t)$ durch ihre „projektive Geschwindigkeit", d. h. durch die projektiv invariante Schwarzsche Ableitung von $z(t)$ nach t

$$2r = \{z, t\} = \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 = R(z, t) + i\, J(z, t)$$

gekennzeichnet werden. Diese momentane Bewegung ist 1. für $J \neq 0$ loxodromisch, 2. für $J = 0$, $R < 0$ hyperbolisch, 3. für $J = 0$, $R > 0$ elliptisch, 4. für $J = 0$, $R = 0$ parabolisch. Als Bahnkurven konstanter projektiver Geschwindigkeit entstehen dabei in der Gaußschen Ebene Loxodromen (= logarithmische Doppelspiralen und logarithmische Spiralen) oder Kreisbüschel der drei verschiedenen Arten. — Will man eine der Gruppe angepaßte Metrik und Krümmungstheorie für die Kurven $z(t)$ einführen, so stünde der Inversionsbogen p und die Inversionskrümmung zur Verfügung, die (im Gegensatz zur Angabe des Autors) schon 1914 G. Pick (Rend. Circ. mat. Palermo **37**, 341) und nicht erstmalig Mullins (Columbia Diss. 1917) entdeckt hat: Ist $\{z, p\} = R(p) + i\,J(p)$, und p der Inversionsbogen, so ist $J(p) \equiv 1$, und $R(p)$ ist die Inversionskrümmung. Da dieser Bogen aber für Kreise identisch verschwindet und daher in den Scheiteln der Kurve versagt, führt Verf. eine neue Metrik ein, deren Bogenelement nirgends, außer in parabolischen Kurvenpunkten, verschwindet. Dieser „Projektivbogen" (= „homographic" arc length) stimmt auf den Geraden der Poincaréschen Halbebene (Halbkreisen über der reellen Achse) mit dem Poincaréschen nichteuklidischen Bogen überein. Man kann ihn so erklären: Es sei $\omega(t)$ die (der Differentialgleichung $\omega'' + r \cdot \omega = 0$ genügende) Normalkoordinate des auf der Kurve C bewegten Punktes und

$$\zeta = \omega + i\,\omega'/\sqrt{r}, \quad \eta = \omega - i\,\omega'/\sqrt{r}$$

das Paar der Fixpunkte jener Kurve $r = \text{const.}$ (Loxodrome, Kreis), die C in ω berührt. Dann lautet das „Projektivbogenelement" der Kurve C im Punkte $\omega(t)$

$$d\sigma = 2\sqrt{|r|}\,dt = |\log \mathrm{DV}\,(\zeta, \eta, \omega(t), \omega(t + dt))|.$$

Die geometrische Deutung dieses Linienelements benutzt einen einfach definierten Winkel. Allgemein ist der „Projektivabstand" für zwei Punkte P, Q nach Wahl zweier absoluter Punkte ζ, η: $\overline{PQ} = |\log \mathrm{DV}\,(\zeta, \eta, P, Q)|$. Als gerade Linien („$s$-Linien") dieser Metrik erhält man dann die Loxodromen und Kreise (oder deren Orthogonalkurven) durch die absoluten Punkte ζ, η. Man kann ihre Punkte ω darstellen durch $\omega = \zeta + e^{w}\,\eta$, wobei $w = \tau + i\,\vartheta$ eine komplexe Verbindung der Normalkoordinaten (τ, ϑ) ist. Als projektiver Abstand zweier Punkte ω, ω_0 ergibt sich dann $|\log(\zeta, \eta, \omega_0, \omega)| = [(\tau - \tau_0)^2 + (\vartheta - \vartheta_0)^2]^{\frac{1}{2}}$. Die Punkte ζ, η sind daher Fernpunkte der Metrik und die Abbildung zwischen den Ebenen w und z ist konform, wobei der geraden Linie der w-Ebene die s-Linien der z-Ebene entsprechen. Nach der letzten Formel wird dabei die z-Ebene mit ihrer Geometrie in die euklidische Geometrie der w-Ebene umgesetzt. *Strubecker.*

Backès, F.: Sur des couples de surface applicables en géométrie cayleyenne. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. **35**, 417—423 (1949).

Es handelt sich um nichteuklidische Verallgemeinerungen von Sätzen, die Verf. in Mathesis **57**, 393—396 (1948) veröffentlicht hat. Der formale Apparat benutzt die Methode des selbstpolaren begleitenden Tetraeders (O_1, O_2, O_3, O_4), wie es nach Demoulin [C. r. Acad. Sci., Paris **139**, 393—396 (1904)] Verf. schon in seiner Arbeit Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. **17**, 683—691 (1931) verwendet hat. Die Koordinaten (x, y, z, t) der Punkte der nichteuklidischen Räume werden durch die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$ normiert. Beschreibt O_4 eine Fläche und O_3 die Polarfläche, sind ferner O_4O_1, O_4O_2 die Hauptkrümmungsrichtungen von O_4 und O_3O_1, O_3O_2 jene von O_3, so sei $N = (x, y, 0, t)$ ein beliebiger Punkt der Tangentenebene in O_4. Sind dann Q, Q' zwei Punkte, deren Strecke O_3 und N als Mittelpunkte hat, so werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt, daß die von Q und Q' beschriebene Flächen aufeinander abwickelbar sind. Diese Flächen hängen von einer willkürlichen Funktion ab. — Zu anderen Paaren aufeinander abwickelbarer Flächen kann man auf die folgende Art gelangen. Man

nehme wie oben in der Tangentenebene von O_3 einen Punkt H $(x, y, 0, t)$ und lege durch ihn eine Cliffordsche Parallele d (einer bestimmten Art) zu $O_3 O_4$. Sind dann P, P' zwei Punkte auf d, die H als eine ihrer Mitten haben, und hat die Strecke PP' konstante Länge, so kann die Forderung, daß die von P und P' beschriebenen Flächen aufeinander abwickelbar sind, stets dann erfüllt werden, wenn die Fläche der Punkte O_4 eine nichteuklidische Minimalfläche ist. Die Geraden $d = PP'$ beschreiben dabei eine isotrope Kongruenz (deren Fokalebenen Minimalebenen sind). Man erhält damit eine nichteuklidische Verallgemeinerung eines bekannten Satze svon G. Darboux [Leçons sur la théorie des surfaces, IV, Paris 1896, p. 16]. *Strubecker.*

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Sorace, O.: Trasporti rigidi di vettori. Mat. Catania **3,** 59—67 (1948).

Es handelt sich um die Integration des Differentialsystems

$$\frac{dR^i}{dt} + \sum_{h,k=1}^{3} \left\{ \begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix} \right\} R^k \dot{x}_k + \sum_{h=1}^{3} \Gamma^{ih} R_h = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

für die kovarianten Komponenten eines allgemeinen Vektors R längs des Weges $x_i = x_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ in einem dreidimensionalen Riemannschen Raum V_3 mit der Metrik a_{ij}. Γ^{ih} ist dabei ein zweifach kontravarianter schiefsymmetrischer Tensor in V_3. Verf. führt das Integrationsproblem auf die Lösung einer Volterraschen Integralgleichung zweiter Art

$$\beta(t) = k(t) - \int_{t_0}^{t} N(t, s)\, \beta(s)\, ds$$

zurück. Für die Funktionen N, k ergibt sich der folgende Zusammenhang mit der Metrik des Raumes:

$$N(t,s) = \sum_{i=1}^{2} f_i(s) \int_s^t f_i(x)\, dx, \qquad f_1(t) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\, n^i\, n^j},$$

$$k(t) = \beta_0 - \sum_{i=1}^{2} a_{i0} \int_{t_0}^{t} f_i(x)\, dx, \qquad f_2(t) = -\sum_{i,r,s=1}^{3} \varepsilon_{irs}\, (\dot{n}^i)\, n^s\, \dot{x}_r \Big/ \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\, n^i\, n^j.$$

Dabei bedeuten n^i die Komponenten eines gewissen mit der Übertragung verknüpften Vektors. *M. Pinl* (Dacca).

Urban, Alois: Note on the T. Y. Thomas' paper: On the projective theory of two dimensional Riemann spaces. Časopis Mat. Fysiky, Praha **73,** 89—92 und tschechische Zusammenfassg. 92 (1948).

Es bedeute K die Gaußsche Krümmung eines zweidimensionalen Riemannschen Raumes R_2 mit dem Fundamentaltensor $a_{\mu\lambda}$. Ist a die Diskriminante von $a_{\mu\lambda}$ und wird K^μ durch $K^\mu = a^{\mu\lambda}\, \partial K / \partial x^\lambda$ erklärt, dann ist $\mathfrak{K}^\mu = a\, K^\mu$ eine kontravariante Vektordichte vom Gewicht $+2$. T. Y. Thomas bewies, daß $\mathfrak{K}^\mu$ eine projektive Invariante des R_2 ist. (Invariant gegenüber Transformationen, die die Geodätischen wieder in ebensolche überführen.) Verf. zeigt nun, in welcher Weise sich $\mathfrak{K}^\mu$ mit Hilfe des Projektivkrümmungstensors eines zum projektiven Riemannschen Raum gehörigen projektiven Zusammenhanges darstellen läßt. *O. Varga* (Debrecen).

Samuel, P.: Generalization to a space of Weyl of the problem of the tensors with covariant derivatives zero. Ann. Math., Princeton, II. S. **48,** 268—273 (1947).

In einer früheren Arbeit [C. r. Acad. Sci., Paris **220,** 160 (1945)] hat der Verf. diejenigen Riemannschen Räume bestimmt, in denen neben dem metrischen Fundamentaltensor $g_{\alpha\beta}$ weitere quadratische Tensoren mit verschwindender kovarianter Ableitung existieren. Überträgt man diese Frage auf einen Weylschen Raum mit dem Fundamentaltensor $h_{\alpha\beta}$ $(h_{\alpha\beta,\gamma} = a_\gamma\, h_{\alpha\beta})$ und dem kovarianten Tensor $b_{\alpha\beta}$ mit $b_{\alpha\beta,\gamma} = 0$ und führt die Hauptrichtungen des gemischten Tensors b_α^λ $\left(b_{\alpha\beta} = h_{\alpha\lambda}\, b_\beta^\lambda\right)$

als nichtholonome Basis ein, so folgt, daß für verschiedene Hauptwerte $S_\alpha \neq S_\beta$ die Hauptrichtungen stets als holonome Koordinatenrichtungen genommen werden können und $a_\gamma = H_{,\gamma}$ ein Gradient ist. Damit wird aber bei geeigneter Normierung der Weylsche Raum ein Riemannscher Raum: $g_{\alpha\beta} = e^{-H} h_{\alpha\beta}$. Im Fall eines gemischten Tensors b_α^β mit $b_{\alpha,\gamma}^\beta = 0$ läßt sich ebenfalls durch eine Koordinatentransformation die Diagonalgestalt erreichen, wobei die Hauptwerte S_α Konstante werden, und es sind je nach der Anzahl der verschiedenen Hauptwerte verschiedene Fälle zu unterscheiden. Sind alle Hauptwerte gleich, so bleibt nur der triviale Fall $b_\alpha^\beta = c\,\delta_\alpha^\beta$; sind mindestens drei verschiedene Hauptwerte vorhanden, so geht der Weylsche in einen Riemannschen Raum über. Für zwei Hauptwerte $S_\lambda \neq S_a$ hat man im symmetrischen Fall $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$ eine Aufspaltung des Weylschen Raumes in zwei Riemannsche Räume mit verschiedenen Normierungsfunktionen. Es wird schließlich auch noch der Fall konjugiert komplexer Hauptwerte behandelt. *Weise.*

Levine, Jack: Fields of parallel vectors in projectively flat spaces. Duke math. J. **16**, 23—32 (1949).

Für eine projektiv-euklidische Mannigfaltigkeit P_n gibt es bekanntlich stets ein Koordinatensystem, in welchem bei beliebigem kovariantem Vektorfeld ψ_i

$$\Gamma_{jk}^i = -(\delta_j^i \psi_k + \delta_k^i \psi_j)$$

gilt. Unter Verwendung solcher Koordinaten zeigt Verf., daß in einem P_n ($n \geqq 2$), der genau p Felder von parallelen kovarianten Vektoren λ_α^i ($i = 1, \ldots, n; \alpha = 1, \ldots, p$) gestattet, dieselben entweder auf die kanonische Form

$$\lambda_\gamma^i = e^\gamma \delta_\gamma^i \quad (\gamma = 1, \ldots, p-1), \quad \lambda_p^i = x^i e^p, \quad e^p = x^p \Phi\left(\frac{x^{p+1}}{x^p}, \ldots, \frac{x^n}{x^p}\right)$$

oder auf die Gestalt

$$\lambda_\alpha^i = e^\gamma \delta_\alpha^i, \quad e^\gamma = E(x^{p+1}, \ldots, x^n)$$

gebracht werden können. Eine invariante Charakterisierung des P_n anzugeben ist — wie Verf. selbst bemerkt — nicht gelungen. In dieser Hinsicht ergab sich als notwendige Bedingung — von der bei der Herleitung des obigen Ergebnisses übrigens Gebrauch gemacht wurde — daß der, aus dem zu Γ_{ij}^h gehörigen Krümmungsaffinor B_{ijk}^h durch Verjüngung hervorgehende Affinor $B_{ij} \equiv B_{ijh}^h$ symmetrisch sein muß. Verf. behandelt auch die Frage für parallele kovariante Vektorfelder. Es zeigt sich, daß für die Anzahl p der Vektorfelder nur die Fälle $p = 1$ oder $p = n$ möglich sind. Letzter Fall charakterisiert die gewöhnliche Affingeometrie. Falls $p = 1$, ist das Vektorfeld λ_i ein Gradientenfeld $\lambda_i = \partial\lambda/\partial x^i$. Für den Skalar gibt Verf. folgende Deutung: In einem E_{n+1}, in dem $(x^1, x^2, \ldots, x^n, \lambda)$ rechtwinklige Koordinaten bedeuten, stellt die λ definierende Gleichung eine Regelfläche dar, deren $(n-1)$-dimensionale Erzeugende parallel zur Hyperebene $\lambda = 0$ sind. Symmetrie der B_{ij} ist hier nicht notwendig. Ist dies der Fall, so kann λ bei zweckmäßiger Wahl der Koordinaten in einer der beiden Formen $\lambda = H(x^1/x^2)$, $\lambda = J(x^1)$ dargestellt werden. Im ersten Falle wird die Regelfläche ein verallgemeinertes gerades Konoid, im zweiten Falle ein Hyperzylinder. Schließlich wird eine invariante notwendige Bedingung für den P_n für den Fall eines kovarianten Vektorfeldes angegeben. *O. Varga.*

Alardin, Félix: L'autoparallélisme des courbes extrémales dans les espaces métriques fondés sur la notion d'aire. J. Math. pur. appl., Paris, IX. S. **27**, 255—336 (1948).

E. Cartan hat eine metrische Geometrie aufgebaut, die auf dem Inhaltsmaß eines Hyperflächenbereiches beruht [Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire, Actual. sci. industr. Nr. 72, Paris 1933; dies. Zbl. 8, 272]. Das Grundelement der Cartanschen Theorie ist nicht der Punkt, sondern ein orientiertes Hyperflächenelement (H. E.). Wird im n-dimensionalen Punktraum x^i die Stellung eines H. E. durch die homogenen Koordinaten u_i bestimmt, so ist die zugrunde liegende Mannigfaltigkeit $(2n-1)$-dimensional und durch (x, u)

bestimmt. Sämtliche auftretende Größen sind in bezug auf ein (x, u)-H. E. bestimmt und in den u_i von nullter Dimension homogen. Die zu konstruierende Geometrie ordnet sich dann zunächst der Theorie euklidisch zusammenhängender Mannigfaltigkeiten von H. E. unter. Letzteres besagt folgendes: 1.) Für den im (x, u)-H. E. bestimmten infinitesimalen Vektor dx^i ist das Quadrat seiner Länge ds^2 durch die positiv definite Form (1) $ds^2 = g_{ik}(x, u)\, dx^i\, dx^k$ bestimmt. 2.) Das durch

$$D\xi^i = d\xi^i + C_k^{\cdot ih}(x, u)\, \xi^k\, du_h + \Gamma_{kh}^i(x, u)\, \xi^k\, dx^h \tag{2}$$

bestimmte invariante Differential eines Vektorfeldes $\xi^i(x, u)$ ist metrisch, d. h. die durch $D\xi^i = 0$ bestimmte Parallelübertragung erhält die Länge und den Winkel von Vektoren. Dies führt zu

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h} = \Gamma_{ikh} + \Gamma_{kih}, \qquad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h} = C_{ik}^{\cdot\cdot h} + C_{hi}^{\cdot\cdot h}. \tag{3}$$

Die Homogenitätsforderung bezüglich u_i ergibt, daß Γ_{ikh} von nullter, $C_k^{\cdot ih}$ von (-1)-ter Dimension homogen in den u_i ist und daß außerdem (a) $C_k^{\cdot ih}\, u_h = 0$ gilt. Die Cartansche Geometrie ordnet sich nun folgendermaßen der Theorie dieser euklidischzusammenhängenden Mannigfaltigkeit von H. E. unter. Gegeben sei eine als hinreichend oft differenzierbar vorausgesetzten Funktion $L = L(x, u)$, die wesentlich positiv ist. Dann werde gefordert, daß das in einem (x, u)-H. E. gelegene Element irgendeiner $(n-1)$-dimensionalen Oberfläche durch $dS = \frac{L(x, u)}{u^n}\, dx^1 \cdots dx^{n-1}$ bestimmt ist. E. Cartan hat nun eine Reihe invarianter Forderungen angegeben, durch welche der euklidischzusammenhängende Raum, d. h. die Größen g_{ik}, $C_{ik}^{\cdot\cdot h}$ und Γ_{ikh}, durch $L(x, u)$ bestimmt ist. In der Cartanschen Theorie zeigt sich, daß die Extremalen des Variationsproblems $\int ds$ und die durch die Parallelübertragung bestimmten autoparallelen Kurven im allgemeinen nicht übereinstimmen. Verf. ist es nun gelungen, solche Forderungen aufzustellen, die den Zusammenhang und die Metrik ebenfalls eindeutig bestimmen und gegenüber der Cartanschen Theorie den Vorteil besitzen, daß autoparallele Kurven und Extremalen stets zusammenfallen. Die Forderungen, die zur Bestimmung der g_{ik} und $C_{ik}^{\cdot\cdot h}$ führen, sind bei Verf. dieselben wie bei E. Cartan. Der Unterschied tritt bei der Bestimmung der n^3 Größen Γ_{ikh} hervor. Cartan kommt zu den $\frac{1}{2} n^2 (n-1)$ Gleichungen, die zusammen mit (3) gerade n^3 Gleichungen für ebensoviel Unbekannte liefern, folgendermaßen: Wegen Gleichungen (a) gibt es eine nur vom Ort abhängige, d. h. von den u_i unabhängige Übertragung des Normaleinheitsvektors eines H. E. Wird nun längs einer Kurve ein solches Feld von H. E. gewählt und bezeichnet Γ_{ikh}^* die zugehörigen Übertragungsparameter, dann stellt E. Cartan die Forderung (4) $T_{kh}^i \equiv \Gamma_{kh}^{*i} - \Gamma_{hk}^{*i} = 0$. Die Bestimmung der Γ_{ikh} ist dann in eindeutiger Weise möglich, falls die Diskriminante eines gewissen Tensors H^{ij} nicht verschwindet. Diese Räume bezeichnet Cartan als regulär. Verf. bestimmt in seiner Theorie den Zusammenhang dadurch, daß er für die Torsion, die einem infinitesimalen Zyklus von H. E. entspricht, wobei noch der Normalvektor der H. E. parallel verschoben ist, eine Vorschrift invarianter Natur trifft. Diese Vorschrift bewirkt, daß nicht der durch (4) bestimmte Affinor T_{kh}^i verschwindet, sondern ein solcher, der aus demselben noch durch Addition eines zusätzlichen Affinors besteht. Diese Beziehungen geben wieder zusammen mit (3) genau n^3 Gleichungen zur Bestimmung der Γ_{ikh}. Auch hier hängt die eindeutige Auflösbarkeit von dem Nichtverschwinden der Diskriminante eines Tensors K^{ij} ab. Die Resultate des Verf. ermöglichen es, E. Cartans Satz über die Äquivalenz der zu mehrfachen Integralen gehörigen Geometrien beträchtlich zu verallgemeinern. Es ergibt sich nämlich: Jedes mehrfache Integral, für welches eine der beiden Diskriminanten $|H^{ij}|$, $|K^{ij}|$ von Null verschieden ist, gestattet eine Gruppe von Punkttransformationen, die höchstens von $\frac{1}{2} n (n+1)$ Parametern abhängt. Verf. entwickelt ferner die Kurven- und Flächentheorie mit Hilfe der Methode des beweglichen n-Beins. Schließlich wird der zum n-fachen Integral

$$\int \cdots \int (p_1^2 + \cdots + p_n^2)\, dx^1 \ldots dx^n;\ p_\alpha = -\frac{u_\alpha}{u_{n+1}}\ (\alpha = 1, \ldots, n)$$

gehörige $n+1$-dimensionale hyperharmonische Raum studiert. *O. Varga* (Debrecen).

Busemann, Herbert: Angular measure and integral curvature. Canadian J. Math. **1**, 279—296 (1949).

Den Ausgangspunkt der Arbeit bildet eine Auseinandersetzung der topologischen und maßtheoretischen Begriffe, die in der klassischen Flächentheorie dem Gauß-Bonnetschen Satz zugrunde liegen. Nach des Verf. Auffassung drückt der Satz eine Beziehung zwischen der inneren Winkelmessung und der Topologie der Fläche aus. Bezeichnet E eine topologische Ebene, dann werden aus den Eigenschaften des Geradensystems in der Euklidischen Ebene folgende abstrahiert: I. Jedes Element G des Systems ist ein offener Jordan-Bogen; d. h. das stetige, eineindeutige Bild der Zahlengeraden $q = q(t)$, $-\infty < t < +\infty$. II. Jedes G ist in E abgeschlossen. III. Durch je zwei verschiedene Punkte in E geht ein und nur ein G. Ein

System, das I, II und III erfüllt, heißt ein S-System — kurz S — in E. In S werden nach euklidischem Muster Halbstrahlen (oder Beine), Zwischenrelation, Strecken, Dreiecke, Winkel, Winkelkonvergenz definiert. Die Winkel sind mit D bezeichnet. Die Axiome für ein Winkelmaß $|D|$ lauten $\mathfrak{W}_1$: $|D| \geqq 0$ (Nichtnegativität); $\mathfrak{W}_2$: $|D| = \pi$, dann und nur dann wenn die Winkelbeine entgegengesetzt sind (Normalität); $\mathfrak{W}_3$: Haben zwei Winkel D_1 und D_2 einen und nur einen Halbstrahl gemeinsam, dann gilt $|D_1 \cup D_2| = |D_1| + |D_2|$ (endliche Additivität); $\mathfrak{W}_4$: Aus $D_\nu \to D$ folgt $|D_\nu| \to |D|$ (Stetigkeit). Allgemeiner legt Verf. eine Fläche (d. h. eine zusammenhängende, zweidimensionale Mannigfaltigkeit) M zugrunde, über welche er folgende Annahme macht: $\mathfrak{G}_1$: Jeder Punkt p auf M besitzt eine mit der euklidischen Ebene homöomorphe Nachbarschaft $U(p)$ (ausgezeichnete Nachbarschaft), die mit einem I, II, III, erfüllenden Kurvensystem S versehen ist. $\mathfrak{G}_2$: Gehören a, b, c dem Durchschnitt $U(p) \cap U(q)$ an, dann liegt b zwischen a und c in bezug auf S_p, wenn dasselbe gilt in bezug auf S_q. $\mathfrak{W}$: Jede ausgezeichnete Nachbarschaft ist mit einem S_p-Winkelmaß versehen, derart, daß alle diese Maße paarweise konsequent sind. (D. h., für je zwei solche Maße S_p, S_q soll gelten: Gehören a, b, c dem Durchschnitt $U(p) \cap U(q)$ an, so ist der Winkel der S_p-Halbstrahlen $a \to b$ und $a \to c$ im S_p-Winkelmaß gleich dem Winkel der S_q-Halbstrahlen $a \to b$ und $a \to c$ im S_q-Winkelmaß.) Die betrachteten Dreiecke beziehen sich auf ein S_p-System; der Exzeß $\varepsilon(abc)$ des Dreiecks abc wird als Differenz zwischen der Summe der Maße der Scheitelwinkel und π definiert. Ist das Vorzeichen des Exzesses des Dreiecks abc in einer Nachbarschaft des Punktes p positiv, nichtnegativ, negativ, nichtpositiv, dann heißt p von positiver, nichtnegativer, negativer, nichtpositiver Gaußscher Krümmung. Mit Hilfe dieser Definition überträgt Verf. klassische Ergebnisse über kompakte Riemannsche Räume, die Topologie und Vorzeichen der Gaußschen Krümmung verknüpfen. Im Falle einer nicht-kompakten Fläche M setzt er eine allgemeine Finslersche Metrik [Local metric geometry, Trans. Amer. math. Soc. **56**, 200—274 (1944); 215] voraus; S_p ist das System der geodätischen Linien auf $U(p)$. Das Winkelmaß bleibt allgemein, eventuell durch eine weitere Uniformitätsbedingung eingeschränkt. Cohn-Vossens Untersuchungen [Compositio math., Groningen **2**, 69—133 (1935); Mat. Sbornik, n. S. **1**, 139—164 (1936); dies. Zbl. **11**, 225, **14**, 276]; werden dementsprechend erweitert, meistens unter Aufrechterhaltung der ursprünglichen Beweisprozesse. Im letzten Abschnitt wird unter Annahmen $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{W}$ die Erweiterung der Exzeßfunktion zu einem Radon-Maß, dem Totalkrümmungsmaß, skizziert. Dieser Prozeß ist das innere Gegenstück zur Oberflächenfunktion von Fenchel und Jessen [Danske Vid. Selsk. mat.-fys. Medd. **16**, Nr. 3 (1938); dies. Zbl. **18**, 424], die ein Radon-Maß auf der Einheitskugel darstellt. Die Gaußsche Krümmung tritt als Dichte auf, falls in M ein Flächenmaß definiert ist. *Chr. Pauc* (Kapstadt).

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde:

Colmez, J.: Sur certains systèmes triples orthogonaux paratingents. Ann. sci. École norm. sup., III. S. **65**, 71—99 (1948).

Ce mémoire constitue une continuation et une extension des recherches de Llensa sur les systèmes triples orthogonaux paratingents du point de vue de la géométrie infinitésimale directe [Thèse, Paris, 1947; publications antérieures: Bull. Sci. math., II. S. **65**, 225—250 (1941); C. r. Acad. Sci., Paris **220**, 297—298 (1945); **222**, 845—847 (1946); ce Zbl. **26**, 79]. Les systèmes triples orthogonaux considérés ici consistent dans les surfaces de niveau de trois fonctions $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ définies sur un domaine borné (ensemble ouvert et simplement connexe) de l'espace euclidien E_3 et possédant des gradients continus, non nuls et orthogonaux deux à deux. L'équation de Darboux-Lamé utilisé par Llensa est remplacée par l'équation plus générale (E): $|\mathrm{grad}\, u| = F(M, u)$, où $F(M, u)$ représente une fonction positive définie sur un domaine R de l'espace (x, y, z, u), continue en u et possédant des dérivées secondes continues en x, y, z. Une solution u de (E) pourvue de dérivées premières continues en x, y, z est appelée intégrale paratingente. Toute section $u = u_0$ d'une intégrale paratingente est de courbure bornée (phénomène de superdérivabilité); inversement toute surface de courbure bornée dans $R(u_0)$ (section de R par $u = u_0$) est une u_0-section d'une intégrale paratingente définie de manière unique. Si les surfaces de niveau Σ_{u_0} (dans E_3) d'une intégrale paratingente peuvent être insérées dans un système triple orthogonal paratingent, elles admettent une normale dérivable vis-à-vis de v et de w. Les résultats de Bouligand sur les trajectoires orthogonales des surfaces d'un système triple orthogonal paratingent lorsque ces dernières sont des plans [Bull. Math. Soc. Roumaine Sci. **35**, 57—67 (1933); ce Zbl. 8, 410] sont étendus à des systèmes „réguliers“,

la régularité s'exprimant par des conditions de dérivabilité. Inversement, des hypothèses de régularité sur les trajectoires orthogonales impliquent que les surfaces correspondantes ont une courbure bornée. Ce mémoire termine sur une nouvelle généralisation du théorème de Dupin. — Dans l'étude de l'équation (E), des méthodes classiques employées dans la théorie de Hamilton-Jacobi sont transposées, dans le cas d'une indicatrice circulaire. Les transversales sont ici trajectoires orthogonales des Σ_u; elles sont caractérisées parmi les courbes à tangente continue par la propriété de minimiser pour $u > u_0$ la solution de l'équation $dT/ds = F(M(s), T)$ prenant sur une Σ_{u_0} fixe la valeur u_0. Les solutions à surfaces de niveau sphériques (au sens de Finsler) dans la théorie de Hamilton-Jacobi sont introduites sous le nom d'intégrales semi-paratingentes; elles constituent une solution complète de (E). — Les définitions, les démonstrations et les hypothèses ont été soigneusement étudiées; elles ont parfois une apparence compliquée, par exemple la condition de régularité signalée plus haut. Les problèmes topologiques dont dépend une étude globale des solutions de (E) ne sont pas abordés. *Chr. Pauc* (Le Cap).

Pepper, Paul M.: A new method in imbedding theorems. Rep. math. Colloqu., Indiana, II. S. **8**, 39—48 (1948).

Les théorèmes 3.6, 3.7 énoncés par B. J. Topel et l'A. [Imbedding theorems under weakened hypotheses, Rep. math. Colloqu., Indiana, II. S. **4**, 31—55 (1943)] sont démontrés ici par une nouvelle méthode qui permet d'obtenir des résultats améliorés et plus précis. Cette méthode „combinatoire" ne fait pas appel à la notion de quasi-congruence, et repose sur le lemme suivant: soit E un espace d'un système congruent Σ tel que tout élément de Σ dont les k-sous-espaces s'appliquent (congrûment) dans E, s'applique lui-même dans E. Il existe alors une fonction $G(N)$, telle qu'il existe un N-point élément de Σ, non applicable dans E, qui possède exactement $G(N)$ k-sous-espaces non applicables dans E. Connaissant une borne inférieure de $G(k)$, on peut en déduire une borne inférieure de $G(k + j)$, construite à l'aide de coefficients binomiaux. Deux théorèmes de structure permettent à l'A. d'obtenir cette borne inférieure dans le cas de R^n et $S^n(d)$, sphère de diamètre d. Par exemple: Si S est un espace semi-métrique d'au moins $n + 4$ points non applicable dans R^n, S contient au moins 3 $(n + 3)$-sous-espaces non applicables dans R. Pour $S^n(d)$, la condition est plus délicate. La formule s'applique alors, et donne les trois théorèmes fondamentaux du Mémoire. Le paragraphe final donne un début d'axiomatisation de la théorie. *Thom* (Pfaffenhofen).

Groot, J. de: Phantasie von Punkt zu Punkt. Euclides, Groningen **24**, 243—253 (1949) [Holländisch].

In dieser populär gehaltenen Antrittsvorlesung behandelt Verf. das sog. „Sandwich"-Problem und die Aufgabe, eine Kreisscheibe in zwei untereinander kongruente und punktfremde Teile zu zerlegen. Das erste Problem lautet im Raume: Ist es möglich, eine Ebene zu konstruieren, die jeden von drei gegebenen Körpern halbiert? Das zweidimensionale Analogon ist leicht zu lösen mit den bekannten Prinzipien der reellen Funktionen. Auf die Schwierigkeit der Aufgabe im dreidimensionalen Raum wird nur hingewiesen. — Die Zerlegungsaufgabe des Kreises wird im verneinenden Sinne beantwortet. Das verwandte Problem für irgendeine Scheibe mit Mittelpunkt scheint außerordentlich schwierig zu sein und ist bis jetzt noch nicht gelöst worden. *J. C. H. Gerretsen* (Groningen).

Horn, Alfred and F. A. Valentine: Some properties of L sets in the plane. Duke math. J. **16**, 131—140 (1949).

Man nennt S einen L_n-Bereich, wenn je zwei Punkte von S durch ein aus höchstens n Strecken bestehendes Polygon verbunden werden können. Verff. untersuchen hauptsächlich die L_2-Bereiche. Von nun an bezeichnet S einen L_2-Bereich. Die beschränkten Komplementärmengen von S sind L_2-Bereiche. Durch jeden Punkt der unbeschränkten Komponente der Komplementärmenge geht eine zu S fremde

Gerade, diese Menge ist also ein L_3-Bereich. Wenn S einfach zusammenhängend ist, so ist es die Vereinigungsmenge von konvexen Bereiche, die sich paarweise schneiden. Betrachten wir einen konvexen Bereich, die flächenhalbierenden Geraden dieses Bereiches, und die Menge S, durch deren Punkte wenigstens zwei flächenhalbierende Gerade gezogen werden können. S ist eine einfach zusammenhängende L_2-Menge. *Fáry* (Paris).

Klee jr., V. L.: A characterization of convex sets. Amer. math. Monthly **56**, 247—249 (1949).

Eine innere Punkte enthaltende abgeschlossene Menge S in E_n (n-dimensionaler euklidischer Raum) ist dann und nur dann konvex, wenn für jedes $p \in E_n - S$ der nächste Punkt q auf S für eine nicht beschränkte Menge von Punkten der nächste Punkt von S ist. *Fáry* (Paris).

Gustin, William: On the interior of the convex hull of an euclidian set. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 299—301 (1947).

Die konvexe Hülle der Punkte $\pm e_i$ ($i = 1, \ldots, n$; Einheitspunkte) im n-dimensionalen euklidischen Raum E_n enthält den Ursprung im Inneren, das gilt aber nicht mehr von einer Teilmenge von $\{\pm e_i\}$. Verf. beweist den Satz: p sei im Inneren der konvexen Hülle einer Menge M. Es gibt eine höchstens $2n$ Punkte enthaltende Teilmenge von M, deren konvexe Hülle p im Inneren enthält. *Fáry* (Paris).

John, Fritz: Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. Studies Essays, pres. to R. Courant, 187— 204 (1948).

$F(x)$ sei definiert auf einer Punktmenge R des Euklidischen R_n, ebenso $G(x, y)$ für jedes y einer kompakten Menge S des metrischen Raumes der Parameter y. R' sei die Menge aller x, für die $G(x, y) \geqq 0$ für alle $y \subset S$. Hat $F(x)$ in dem inneren Punkte x^0 von R, der zu R' gehört, ein relatives Minimum bezüglich R' und besitzen F und G in x^0 für $y \subset S$ partielle Ableitungen nach den x, so gibt es s Punkte y^r ($r = 1, 2, \ldots, s$), $y^r \subset S$, $0 \leqq s \leqq n$ und $s + 1$ Zahlen $\lambda_0 \geqq 0$, $\lambda_r > 0$, so daß die Funktion $\Phi(x) = \lambda_0 F(x) + \sum_{r=1}^{s} \lambda_r G(x, y^r)$ in x^0 verschwindende partielle Ableitungen nach den x hat. — Gibt es umgekehrt für die Stelle x^0 s Punkte y_r und $s + 1$ Zahlen λ_0, λ_r dieser Art und hat die Matrix der partiellen Ableitungen von $F(x)$ und $G(x, y^r)$ nach den x an der Stelle x^0 den Rang n, so hat F in x^0 ein relatives Minimum bezüglich aller Nachbarpunkte, die den Bedingungen $G(x, y^r) \geqq 0$, $r = 1, \ldots, s$, genügen, also um so mehr bezüglich R'. — Als Anwendung dieser Verallgemeinerung der Multiplikatorenregel von Lagrange gibt Verf. eine neue Herleitung der Jungschen Beziehung $D \geqq R\sqrt{2(m+1)/m}$ zwischen dem Durchmesser D und dem Umkugelradius R einer beschränkten Punktmenge im R_m und erörtert den Sonderfall einer Punktmenge auf einer Halbkugelfläche. — Betrachtung des Ellipsoids vom kleinsten Inhalt, daß einer beschränkten Punktmenge M des R_m umbeschrieben ist; verkleinert man es ähnlich vom Mittelpunkt aus im Verhältnis $1/m$, so liegt die neue Fläche in der konvexen Hülle der Menge. Hat die Menge einen Mittelpunkt, so gilt das gleiche beim Verhältnis $1/\sqrt{m}$. Die Schranken sind scharf. — Vermutung (für $m = 2$ bewiesen von F. Behrend): Das Verhältnis zwischen dem Inhalt eines konvexen Körpers und dem Inhalt des kleinsten umbeschriebenen Ellipsoids ist minimal für das Simplex, bei Mittelpunktskörpern für den m-dimensionalen Würfel. *Bol* (Freiburg).

Sz.-Nagy, Gyula: Zentralsymmetrisierung konvexer Körper. Publ. Math., Debrecen **1**, 29—32 (1949).

Erneute Darstellung einiger bekannter Sätze über den Vektorbereich eines konvexen Körpers, durch die Verf. auf eine schon 1932 von ihm in ungarischer Sprache veröffentlichte Arbeit hinweisen will [Math.-naturw. Anz. Ungar. Akad. Wiss. **48**, 832—847 (1932); dies. Zbl. **5**, 113]. *Bol* (Freiburg).

Hadwiger, H.: Über konvexe Körper mit Flachstellen. Math. Z. **52**, 212—216 (1949).

Hat eine Stützebene eines konvexen Körpers mit diesem einen ebenen konvexen Bereich nichtverschwindender Oberfläche gemeinsam, so spricht man von einer Flachstelle; der Flachstellenradius ist der Inkreisradius des ebenen Bereiches. Ein Kalottenkörper einer Kugel entsteht, indem man von der Kugel durch ebene Schnitte Kalotten abtrennt, die sich gegenseitig nicht treffen sollen. Diese Körper entsprechen in gewissem Sinne den Kappenkörpern der Kugel dual. Analog zu einem Satze von Dinghas über Körper mit Ecken beweist Verf.: Ein Kalottenkörper K_0 einer Kugel sei zu einem konvexen Körper K mit Flachstellen volumgleich. Lassen sich die Kalotten von K_0 so eineindeutig gewissen Flachstellen von K zuordnen, daß der entsprechende Flachstellenradius nicht kleiner ist als der von K_0, so ist $F \geqq F_0$, $M \geqq M_0$. F, F_0 stellen hier die Oberflächen, M, M_0 die Integrale der mittleren Krümmung von K und K_0 dar. *Bol* (Freiburg).

Hadwiger, H.: Über Maßzahlen und Ungleichungen bei Mittelpunktseikörpern. Mh. Math., Wien **53**, 132—137 (1949).

Aus einem zentralsymmetrischen konvexen Körper K bilde man den sternförmigen Körper $\bar{K}_\varrho$ wie folgt: Es sei P ein Randpunkt von K, ω die Stützebene in P, ω_ϱ die parallele Ebene im Abstand ϱ von ω, welche auf der dem Körper abgewandten Seite von ω liegt. S_ϱ sei die Strecke, die durch die Ebenen ω, ω_ϱ aus der Geraden OP ausgeschnitten wird (O ist der Mittelpunkt von K). Nun definiert man $\bar{K}_\varrho = K + \Sigma S_\varrho$, wo die Summation auf alle Randpunkte von K auszudehnen ist. (Es gilt $K_\varrho \subseteq \bar{K}_\varrho$, wo K_ϱ den äußeren Parallelkörper bezeichnet.) Man hat dann $\bar{V}_\varrho = V + F\varrho + \bar{M}\varrho^2 + \bar{C}\varrho^3$, wobei V, V_ϱ die Volumina von K, K_ϱ bezeichnen, F ist die Oberfläche von K, und die Konstanten $\bar{M}$, $\bar{C}$ sind durch diese Relation definiert. Es gelten dann Gegenstücke der klassischen Ungleichungen:

$$\bar{M}^2 - 3\bar{C}F \leq 0, \quad F^2 - 3\bar{M}V \leq 0, \quad F^3 - 27\bar{C}V^2 \leq 0$$

(im umgekehrten Sinne, wie im klassischen Falle). Der Beweis ist nicht schwer, da für $\bar{V}_\varrho$ eine einfache Integraldarstellung gilt. *Fáry* (Paris).

Knothe, Herbert: Über Integralidentitäten auf Eiflächen. An. Fac. Ci. Pôrto **33**, 33—39 (1948).

P sei ein fester Punkt im Innern eines regulär gekrümmten konvexen Körpers K des R_n, Q ein beweglicher Punkt des Randes R, $d\sigma$ das Oberflächenelement dieses Randes, ω das sphärische Bild von PQ, $p(\omega)$ die Stützfunktion von K, $s = \overline{PQ}$, $S_k(K_i) = \Sigma K_{i_1} K_{i_2} \cdots K_{i_k}$ die k-te elementarsymmetrische Funktion der Hauptkrümmungen K_i von R, $I_k = \int s^n S_k(K_i)\, d\omega$. Ist $I_k(\varepsilon)$ der Wert von I_k für die Parallelfläche nach außen von K im Abstand ε, so berechnet Verf. $dI_k/d\varepsilon$ für $\varepsilon = 0$ auf zweierlei Art und erhält so die Integralidentität

$$\int \tilde{p} \left|\frac{dS_k}{ds}\right|_{\text{Max}} d\sigma = \frac{1}{n-k-1} \cdot \int p \, \Sigma (K_{i_1} - K_{i_2})^2 K_{i_3} \cdots K_{i_{k+1}}\, d\sigma.$$

$\tilde{p}$ ist hier die mit Vorzeichen versehene Projektion von $\overline{PQ}$ auf die Richtung stärksten Anstiegs von S_k. Konstanz von einem S_k kennzeichnet also die Kugeln, wie zuerst Süss hervorgehoben hat. Das Kriterium läßt sich abschwächen; ist etwa a der Abstand von P zum Rand, A das Maximum von s und gilt für alle Q auf R

$$\left|\frac{dS_k}{ds}\right|_{\text{Max}} \leq \frac{1}{n-k-1} \frac{a}{A} (K_{i_1} - K_{i_2})^2 K_{i_3} \cdots K_{i_{k+1}},$$

so ist K eine Kugel. *Bol* (Freiburg).

Knothe, Herbert: Über eine Vermutung H. Minkowskis. Math. Nachr., Berlin **2**, 380—385 (1949).

Es handelt sich um die vor einigen Jahren [Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **15**, 37—56 (1943)] vom Ref. bestätigte Vermutung, nach der in der für konvexe Körper gültigen Ungleichung $O^2 - 3MV \geqq 0$ das Gleichheitszeichen nur für die Kappenkörper der Kugel steht. Verf. will dies auf den allgemeineren Satz zurückführen: Die volumgleichen konvexen Körper $K(\varepsilon)$ im R_n mögen für $\varepsilon \to 0$ der Grenzlage K zustreben; ist $d(\varepsilon, P)$ der Abstand des Randpunktes P von K zur Randfläche von $K(\varepsilon)$, so sei $d(\varepsilon, P) < A\,\varepsilon$ bei festem A für alle P. Weiter sei

$$\sqrt[n]{V((1-\vartheta)K + \vartheta K(\varepsilon))} = (1-\vartheta)\sqrt[n]{V(K)} + \vartheta\sqrt[n]{V(K(\varepsilon))} + o(\varepsilon^2)$$

für jedes ϑ mit $0 \leqq \vartheta \leqq 1$. Dann läßt sich $K(\varepsilon)$ so parallel verschieben, daß sogar $d(\varepsilon, P) = o(\varepsilon)$ für alle P, die einer Ausnahmemannigfaltigkeit der Dimension $n-3$ auf dem Rande von K nicht angehören. Ref. kann leider in den Ausführungen des Verf. nicht mehr sehen als den Versuch einer Beweisskizze. *Bol* (Freiburg).

Shiffman, Max: On the isoperimetric inequality for saddle surfaces with singularities. Studies Essays, pres. to R. Courant, 383—394 (1948).

Die isoperimetrische Ungleichung $A \leqq L^2/4\pi$ gilt bekanntlich auch für einfach zusammenhängende Bereiche auf Flächen nichtpositiver Gaußscher Krümmung, sofern diese keine Singularitäten (Ecken, Kanten, Flachstellen) aufweisen. Verf. erweitert den Satz zunächst auf Polyederflächen, bei denen die an jeder Ecke im Innern des Bereiches zusammenstoßenden Winkel zusammen mindestens 2π betragen („Sattelpolyeder"). Als Hilfsmittel wird dabei verwendet, daß es auf einer solchen Fläche zwischen je zwei Punkten eine eindeutige kürzeste Verbindung gibt. Verallgemeinerung auf Flächen aus endlichvielen stetig gekrümmten Teilen nichtpositiver Gaußscher Krümmung, wobei an den Ecken die obige Bedingung gelten soll, während die geodätischen Krümmungen jeder Kante auf den beiden angrenzenden Flächen zusammen $\leqq 0$ sein sollen. Die Ungleichung gilt auch auf harmonischen Flächen im R_m, wenn diese Stellen haben, an denen $EG - F^2 = 0$. *Bol.*

Topologie:

Colmez, Jean: Sur les espaces à écarts. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 156—158 (1949).

Ein topologischer Raum E ist mit einer abstrakt geordneten Spanne (écart) erster (bzw. zweiter) Art ausgestattet, wenn es eine Abbildung $\sigma(x_1, x_2)$ von $E \times E$ in eine geordnete Menge S mit einem ersten Element 0 (wobei $S - \{0\}$ ohne erstes Element sein soll) gibt mit folgenden Eigenschaften: 1. $\sigma(x_1, x_2) = 0$ für und nur für $x_1 = x_2$; 2. die Mengen $[\sigma(\hat{x}, a)$ nicht $\geqq \xi]$ (bzw. $[\sigma(\hat{x}, a) \leqq \xi])$ bilden für $\xi \in S - \{0\}$ ein Umgebungssystem von a. Nach Definition verschiedener, den allgemeinen Charakter der Spanne weiter einschränkender Eigenschaften (Symmetrie, Regularität, Metrikeigenschaft) werden ohne Beweise eine Reihe von Sätzen mitgeteilt, welche die spannenmäßige Darstellung von Produkträumen, Charakterisierung der Spannenräume erster Art (spez. auch der halbmetrischen) und zweiter Art betreffen. *Aumann* (Würzburg).

Sitnikov, K.: Bestimmung der Dimension einer abgeschlossenen Menge durch metrische Eigenschaften des Komplementärraumes. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **66**, 1059—1062 (1949) [Russisch].

Φ sei ein Kompaktum des Euklidischen Raumes R_n und $\Gamma = R_n - \Phi$. Umhüllung von Φ wird jeder $n-1$ dimensionale Zyklus in Γ genannt, der mit jedem Punkte von Φ verschlungen ist. Die untere Grenze aller $\varepsilon > 0$ derart, daß eine ε-Verschiebung von Φ in ein Kompaktum der Dimension $\leqq p$ existiert, wird p-dimensionaler Durchmesser $\alpha^p \Phi$ von Φ genannt. Es sei $z = \{z_k\}$ ein Zyklus im R_n. Träger des Zyklus z ist jedes Kompaktum, das die Ecken aller z_k, von einem bestimmten k angefangen, enthält. Wenn der Zyklus z in jedem seiner Träger berandet,

so setzen wir für ihn das Maß der „Wesentlichkeit" gleich 0; wenn jedoch z in einem Kompaktum Φ nicht berandet, so sei das Maß $\mu(z)$ der Wesentlichkeit von z die obere Grenze aller $\varepsilon > 0$, für welche ein solcher Träger Φ des Zyklus z existiert, daß z in einer ε-Umgebung des Kompaktums Φ nicht berandet. Es sei z ein Zyklus in Γ. Die untere Grenze der p-dimensionalen Durchmesser von Trägern solcher Zyklen, die in Γ dem Zyklus z homolog sind, wird p-dimensionaler Homologiedurchmesser des Zyklus z in Γ genannt und mit $\alpha_\Gamma^p z$ bezeichnet. Wir setzen überdies $\alpha_\Gamma^{-1} z = 1$ für jeden Zyklus z. Es wird folgender Satz bewiesen: Wenn die Dimension von Φ gleich r ist, $0 \leqq r \leqq n-1$, so gibt es eine Zahl $\alpha > 0$ derart, daß jede Umhüllung des Kompaktums Φ einen $r-1$ dimensionalen Homologiedurchmesser $> \alpha$ besitzt, während der r-dimensionale Homologiedurchmesser jedes Zyklus in Γ gleich 0 ist. Dann gibt es stets Umhüllungen von Φ mit beliebig kleinem Wesentlichkeitsmaß. Wenn jedoch $\dim \Phi = n$ ist, so gibt es eine Zahl $\alpha > 0$, so daß für jede Umhüllung z^{n-1} von Φ gilt: $\mu z^{n-1} > \alpha$. *Thimm* (Bonn).

Sitnikov, K.: Über einige metrische Eigenschaften der abgeschlossenen Mengen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **67**, 229—232 (1949) [Russisch].

$A = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ sei eine endliche Menge des metrischen Raumes R und x ein Punkt von R. Die Anzahl der Punkte von A, welche die Bedingung $\varrho(x, a_i) = \varrho(x, A)$ (ϱ = Entfernung) erfüllen, heißt Ordnung von x bezüglich A. Die Menge A besitzt im Raum R die Ordnung n, wenn es einen Punkt in R gibt, dessen Ordnung bezüglich A gleich n ist, und wenn kein Punkt von R bezüglich A größere Ordnung als n besitzt. Das n dimensionale Kompaktum Φ heißt metrisch regulär, wenn es bei beliebigem $\varepsilon > 0$ ein ε-Netz, das in Φ die Ordnung $n+1$ hat, enthält. Bewiesen werden die Sätze: 1. Jedes Polyeder ist ein metrisch reguläres Kompaktum. Genauer: Jedes ε-Netz des n-dimensionalen Polyeders P_n, das nicht nur aus isolierten Punkten besteht, kann durch beliebig kleine Verschiebung in ein ε-Netz überführt werden, dessen Ordnung in $P_n \leqq n+1$ ist. — 2. Es gibt im 3-dimensionalen Raum ein Kompaktum, das nicht metrisch regulär ist. — 3. Jedes endlich-dimensionale Kompaktum Φ ist einem metrisch regulären Kompaktum homöomorph. Wenn die Dimension von Φ gleich n ist und Φ im R^{2n+1} liegt, so gibt es eine topologische Abbildung des Kompaktums Φ in den R^{2n+1}, die sich beliebig wenig von der identischen Abbildung unterscheidet und Φ in ein metrisch reguläres Kompaktum überführt. — Die bewiesenen Sätze werden herangezogen, um die Dimension von Kompakta mittels der metrischen Eigenschaften ihrer ε-Netze zu charakterisieren. *Thimm.*

Groot, J. de: Local connectedness and quasiorder. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **51**, 885—890 (1948).

Bezeichne $U(p)$ eine Umgebung von p in M, d. h. eine beliebige Menge, die p im Inneren enthält. Verf. nennt q die Quasiordnung (quasiorder) von p, wo $q = 0, 1, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, \aleph$ ist, wenn es beliebig kleine $U(p)$ gibt, deren Rand $\overline{U}(\overline{M-U})$ aus q Komponenten besteht; die Quasiordnung von p ist ω, wenn q endlich ist, aber $q \to \infty$. Die Quasiordnung von M ist das Maximum der Quasiordnungen seiner Punkte. Sätze: I. Ein Kontinuum ist dann und nur dann im kleinen zusammenhängend, wenn seine Quasiordnung $\leq \omega$ ist. II. Bei stetigen Abbildungen bleiben die Eigenschaften „die Quasiordnung ist $\leq \omega$" bzw. „die Quasiordnung ist $\leq \aleph_0$" erhalten. Verf. definiert das Quasigenus (quasigenus) ähnlich, wie man in der Kurventheorie das Genus definiert [K. Menger, Kurventheorie, Leipzig und Berlin 1932, S. 293; dies. Zbl. 5, 415] und skizziert den Beweis eines ähnlichen Invarianzsatzes. *Fáry* (Paris).

Dantzig, D. van: Divisibilité topologique d'un ensemble compact par un arc simple. Bull. Soc. math. France **75**, 49—55 (1947).

Bezeichne E einen kompakten, separablen metrischen Raum, der durch Bögen gefasert ist: ein beliebiger Punkt von E ist genau in einem Bogen enthalten; durch

die Punkte einer konvergenten Folge gehende Bögen konvergieren gegen einen Bogen der Faserung. Verf. beweist, daß E dann und nur dann mit einem topologischen Produkt $\Omega \times I$ (I: $0 \leq t \leq 1$) homöomorph ist, wenn die Bögen der Faserung kohärent und stetig orientiert werden können. Der Satz stammt aus dem Jahre 1927, kann also als eines der ersten Beispiele eines „topologischen Divisibilitätssatzes" betrachtet werden. *Fáry* (Paris).

Freudenthal, Hans: Sur un théorème topologique de M. van Dantzig. Bull. Soc. math. France **75**, 56—62 (1947).

Verf. gibt eine Verallgemeinerung und einen neuen Beweis des oben besprochenen Satzes von van Dantzig. Der Raum R (oben E) wird metrisch separabel vorausgesetzt (Kompaktheit wird nicht verlangt). Die Hypothese von van Dantzig, daß R gefasert ist, wird durch die Hypothese ersetzt, das in R eine partielle Ordnung gegeben ist, die gewisse Zusammenhangseigenschaften besitzt. Aus diesen Voraussetzungen folgt, daß mit einem Punkte vergleichbare Punkte auf einem Bogen liegen und R mit einem topologischen Produkt homöomorph ist. *Fáry* (Paris).

Kaplan, Samuel: Homology properties of arbitrary subsets of Euclidean spaces. Trans. Amer. math. Soc. **62**, 246—271 (1947).

1. Da endliche Überdeckungen zur Untersuchung der Homologieeigenschaften nicht kompakter Räume nicht mehr genügen, werden abzählbar unendliche (offene) Überdeckungen herangezogen, welche die Eigenschaft der „Stern-Endlichkeit" haben, d. h. jedes Element der Überdeckung besitzt nur mit einer endlichen Anzahl der Elemente einen nichtleeren Durchschnitt. Zu jeder Überdeckung $\{V\}$ eines separablen metrischen Raumes gibt es eine abzählbare Stern-endliche Überdeckung $\{U\}$ derart, daß $\{U\}$ eine Verfeinerung von $\{V\}$ ist, d. h. jedes Element U ist in einem Element V enthalten. Abzählbare Stern-endliche Überdeckungen sind das Werkzeug zur Entwicklung der folgenden Theorie. — 2. Zum Studium der Homologieeigenschaften des topologischen Raumes A werden mittels der (in A offenen) Überdeckungen von A Čech-Zyklen und Čech-Homologiegruppen eingeführt. Ist A eine Teilmenge des topologischen Raumes R und $\{U\}$ eine (offene) Überdeckung von R, so bestimmen diejenigen Elemente von $\{U\}$, welche A treffen, eine Überdeckung von A mit der Festsetzung: Die Elemente $U_0, U_1, \ldots, U_k$ bilden ein Simplex des Nerven dieser Überdeckung, wenn $\bigcap_{i=0}^{k} U_i$ die Menge A schneidet. Auch auf diese sogenannten „äußeren" zur Unterscheidung von den oben erwähnten „inneren" Überdekkungen kann eine Čech-Homologietheorie aufgebaut werden. Ist A eine abgeschlossene Teilmenge eines separablen metrischen Raumes, so sind die Homologiegruppen, gebildet aus inneren und äußeren Überdeckungen, isomorph. Für kompakte Čech-Zyklen, d. h. solche, die auf kompakten Teilmengen des Raumes R liegen, können entsprechende Vietoris-Zyklen gefunden werden. Für diese Vietoris-Zyklen wird eine topologisch invariante Berandungsdefinition gegeben, die mit der Berandungsdefinition der Čech-Zyklen äquivalent ist. — 3. Wenn die Teilmenge A des separablen metrischen Raumes R nicht abgeschlossen ist, brauchen die Čech-Homologiegruppen, bestimmt durch innere bzw. äußere Überdeckungen von A, nicht mehr isomorph zu sein. Um nun doch die Homologieeigenschaften von A mittels offener Mengen von R zu definieren, werden Überdeckungen der Umgebungen von A betrachtet. Unter Benutzung aller Umgebungsüberdeckungen von A und einer Definition der Verfeinerung werden Čech-Homologiegruppen erklärt; diese sind isomorph mit den Čech-Homologiegruppen, welche unter Verwendung der inneren Überdeckungen von A gefunden werden. — 4. Wenn K ein (im allgemeinen unendliches) Polyeder ist, so sind die Čech-, die Vietoris- und die klassischen Homologiegruppen von K isomorph. Ist A eine Teilmenge des Polyeders K, so können wir ihre Homologieeigenschaften, mittels der stetigen Zyklen in den Umgebungen von A untersuchen. Ein „geometrischer" Čech-Zyklus von A ist eine Gesamtheit $\{z^k(G)\}$, wobei G die Umgebungen von A durchläuft, $z^k(G)$ ein stetiger Zyklus in G ist und, falls H und G Umgebungen von A sind, aus $H \subset G$ folgt: $z^k(H) \sim z^k(G)$ in G. Wenn A eine Teilmenge des Polyeders K ist, so sind die Homologiegruppen der geometrischen Čech-Zyklen mit denjenigen isomorph, die von den inneren Überdeckungen (oder Umgebungsüberdeckungen) von A herrühren. Ein Čech-Zyklus in einer kompakten Teilmenge von A berandet in A dann und nur dann, wenn er in einer kompakten Teilmenge jeder Umgebung von A berandet. — 5. Nach der Einführung der Verschlingungszahlen für Čech-Zyklen wird der Alexandersche Dualitätssatz für beliebige Teilmengen der n-Sphäre S_n in verschiedenen Richtungen verallgemeinert. Es gelten dann Sätze der folgenden Art: a) Notwendig und hinreichend dafür, daß eine beliebige Teilmenge A der S_n h kompakte Čech-k-Zyklen (vgl. Nr. 2) enthält, die in A homolog unabhängig sind, ist, daß $S_n - A$ h kompakte Čech-$n-k-1$-Zyklen, die in $S_n - A$ homolog unabhängig sind, besitzt. b) Wenn die Teilmenge A der S_n

einen Čech-k-Zyklus enthält, welcher nicht berandet, so enthält $S_n - A$ einen kompakten Čech-$n-k-1$-Zyklus, der in keiner kompakten Teilmenge von $S_n - A$ berandet. Offen gelassen wird die Frage, ob es in separablen metrischen Räumen Čech-Zyklen gibt, die nicht homolog kompakten Čech-Zyklen sind. Die eingeführten Begriffe gestatten es, die (Menger-Urysohnsche) Dimension einer Teilmenge A der S_n aus Homologieeigenschaften der Komplementärmenge $S_n - A$ zu bestimmen. Wenn die Teilmenge A der S_n eine Dimension $\leq k$ besitzt, so beranden alle kompakten Čech-$n-k-2$-Zyklen in kompakten Teilmengen von $S_n - A$. Für jede kompakte Teilmenge F_0 von $S_n - A$ gibt es eine kompakte Teilmenge F mit $F_0 \subset F \subset S_n - A$, derart, daß alle Čech-$n-k-2$-Zyklen von F_0 in F beranden. — 6. Wenn A eine beliebige Teilmenge der S_n ist, so können die $n-1$-dimensionalen Homologieeigenschaften von A durch die Untersuchung von endlichen Überdeckungen von A bestimmt werden. Es gilt nämlich der Satz: A sei eine beliebige Teilmenge der S_n und C^{n-1} ein Čech-$n-1$-Zyklus von A. Wenn $C^{n-1} \sim 0$ in allen endlichen Überdeckungen von A ist, so gilt auch $C^{n-1} \sim 0$ in allen Überdeckungen von A. Ähnliche Sätze gelten für kompakte Čech-Zyklen. *Thimm.*

Eilenberg, Samuel: Homology of spaces with operators. I. Trans. Amer. math. Soc. **61**, 378—417 (1947).

Für ein zusammenhängendes, in den Dimensionen $2, 3, \ldots, q-1$ asphärisches Polyeder X bestimmt die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ von X bekanntlich in rein algebraischer Weise die Homologie- und Kohomologiegruppen von X bis zur Dimension $q-1$ sowie eine Faktorgruppe der q-ten Homologiegruppe und eine Untergruppe der q-ten Kohomologiegruppe [vgl. Eilenberg-MacLane, Ann. Math., Princeton, II. S. **46**, 480—509 (1945); Hopf, Comment. math. Helvetici **17**, 39—79 (1945); Eckmann, Comment. math. Helvetici **18**, 232—282 (1945/46)]. Hopf und Eckmann operieren dabei mit der universellen Überlagerung $\tilde{X}$ von X, Eilenberg-MacLane dagegen zunächst nur in X selbst. Geht man jedoch zu $\tilde{X}$ und zu den Überlagerungsabbildungen (zu singulären Simplexen von X) über, so wird das Verfahren von Eilenberg-MacLane im wesentlichen mit dem von Eckmann identisch. Dabei treten die Homologiegruppen von X auf als diejenigen Gruppen von $\tilde{X}$, die mittels der Ketten von $\tilde{X}$ mod den Ketten $w\sigma - \sigma$ [$w \in \pi_1(X)$, $\sigma =$ Zelle von X] definiert werden. Ebenso sind die Kohomologiegruppen von X gleich den Gruppen von $\tilde{X}$, die mittels der „invarianten" Koketten f [d. h. $f(w\sigma) = f(\sigma)$] definiert werden. Ferner wird die Asphärizität von X ersetzt durch die äquivalente Bedingung der Azyklizität von $\tilde{X}$. Auf diese Weise wird der obengenannte Satz zum Spezialfall eines reinen Homologiesatzes für azyklische Komplexe mit fixpunktfreien Automorphismen. — Verf. betrachtet nun den allgemeineren Fall, daß der Homologietheorie eines Komplexes K mit Automorphismengruppe W eine Koeffizientengruppe G zugrunde gelegt wird, auf die W ebenfalls als Gruppe von (Rechts-)Operatoren wirkt. Er definiert dann in Verallgemeinerung zu oben „äquivariante" und „residuale" Homologiegruppen. Eine Kette von K heißt residual, wenn sie Summe von Ketten der Form $g(w\sigma) - (gw)\sigma$ ($g \in G$, $w \in W$, $\sigma =$ Zelle von K) ist. Der Rand einer residualen Kette ist residual. Daher erhält man aus ihnen nach bekanntem Schema die residualen Homologiegruppen $H_n^r(K, G)$. Rechnet man dagegen mod residualen Ketten, so erhält man die äquivarianten Homologiegruppen $H_n^e(K, G)$. Entsprechend heißt (für Linksoperatoren $w \in W$) eine Kokette f von K mit Funktionswerten in G äquivariant, wenn $f(w\sigma) = wf(\sigma)$ für alle $w \in W$ und alle σ gilt. Der Korand einer äquivarianten Kokette ist äquivariant, und man erhält daher aus den äquivarianten Koketten die äquivarianten Kohomologiegruppen $H_e^n(K, G)$. Rechnet man mod äquivarianten Koketten, so erhält man die residualen Kohomologiegruppen $H_r^n(K, G)$. Zwischen diesen Homologie- und Kohomologiegruppen gelten die gewöhnlichen Dualitätssätze. — Diese Begriffsbildungen lassen sich übertragen auf einen topologischen Raum X mit einer Gruppe W von Homöomorphismen auf sich, indem man alles auf den singulären Komplex von X bezieht, der W als Automorphismengruppe besitzt. Ist insbesondere X ein Polyeder und W eine Gruppe simplizialer Selbstabbildungen, so kann man die Gruppen

von X aus der Simplizialzerlegung von X berechnen. — Wieder gilt der Hauptsatz: Sei X ein stetig-zusammenhängender, in den Dimensionen $1, 2, \ldots, q-1$ azyklischer Raum. Sei W eine Gruppe fixpunktfreier Homöomorphismen von X auf sich und gleichzeitig Gruppe von rechten (linken) Operatoren für die Koeffizientengruppe G. Dann bestimmt W die Gruppen $H_i^e(X, G)$, $H_i^r(X, G)$ [$H_e^i(X, G)$, $H_r^i(X, G)$] für $i = 1, 2, \ldots, q-1$ sowie eine gewisse Faktorgruppe von $H_q^e(X, G)$ [eine gewisse Untergruppe von $H_e^q(X, G)$]. Und zwar sind die Gruppen $H_e^i(X, G)$ die von Verf. und MacLane (dies. Zbl. **29**, 340) definierten Kohomologiegruppen $H^i(W, G)$ der Gruppe W. — Ist insbesondere $X = \tilde{X}_0$ die universelle Überlagerung eines topologischen Raumes X_0 und W die Deckbewegungsgruppe von $\tilde{X}_0$, so sind die Gruppen $H_n^e(\tilde{X}_0, G)$ und $H_e^n(\tilde{X}_0, G)$ identisch mit Homologie- und Kohomologiegruppen von X_0 über geeigneten lokalen Koeffizientengruppen im Sinne von Steenrod [Ann. Math., Princeton, II. S. **44**, 610—627 (1943)]. Diese letzteren sind übrigens (für ein Polyeder X_0) mit den Reidemeisterschen Homologiegruppen der Überdeckungen von X_0 [J. reine angew. Math. **173**, 164—173 (1935); dies. Zbl. **12**, 126] äquivalent. Der Hauptsatz liefert also eine Verallgemeinerung des zu Anfang erwähnten Satzes auf lokale Koeffizienten. *Burger* (Frankfurt a. M.).

Eilenberg, Samuel and Saunders MacLane: Homology of spaces with operators. II. Trans. Amer. math. Soc. **65**, 49—99 (1949).

Seien K_1 und K_2 zwei in den Dimensionen $< q$ azyklische Komplexe mit der Gruppe W von fixpunktfreien Automorphismen. Dann sieht man durch Induktion nach der Dimension leicht, daß es eine „äquivariante Kettentransformation" α des q-dimensionalen Gerüstes K_1^q in K_2^q gibt [d. h. W-treue, randtreue Homomorphismen α_i der Kettengruppen $C_i(K_1)$ in $C_i(K_2)$ für $i \leq q$, wobei α_0 Ecken auf Ecken abbildet] und daß irgend zwei solche Kettentransformationen α und β in den Dimensionen $\leq q-1$ „kettenhomotop" sind (d. h. es gibt für $i \leq q-1$ W-treue Homomorphismen D_i: $C_i(K_1) \to C_{i+1}(K_2)$ mit $\partial D_i = \beta_i - \alpha_i - D_{i-1}\partial$ [∂ = Randoperator]). Bezeichne η den natürlichen Homomorphismus der Zyklengruppen Z_q auf die Homologiegruppen H_q. Dann ist die „Obstruktion" f_α^{q+1} von α als die äquivariante Kokette von K_1 erklärt, die jedem Simplex σ^{q+1} von K_1 den Funktionswert $\eta\,\alpha_q\,\partial\sigma^{q+1} \in H_q(K_2)$ zuordnet. Ihre äquivariante Kohomologieklasse $\{f_\alpha^{q+1}\} \in H_e^{q+1}(K_1, H_q(K_2))$ (für die Bezeichnungen vgl. vorsteh. Referat) ist unabhängig von der speziellen Wahl von α und dann und nur dann gleich Null, wenn eine äquivariante Kettentransformation von K_1^{q+1} in K_2^{q+1} existiert [vgl. hierzu auch Eilenberg, Ann. Math., Princeton, II. S. **41**, 231—251 (1940); dies. Zbl. **22**, 407]. Wählt man als K_1 für jede feste Gruppe W einen in allen Dimensionen azyklischen Standardkomplex K_W mit der fixpunktfreien Automorphismengruppe W, so erhält man für jeden Komplex K_2 eine charakteristische Kohomologieklasse $l_{K_2}^{q+1} \in H_e^{q+1}(K_W, H_q(K_2))$. Die Gruppen $H_e^n(K_W, G)$ des Standardkomplexes K_W sind übrigens nach Eilenberg (vgl. vorsteh. Referat) die Gruppen $H^n(W, G)$ der Gruppe W. Es gilt nun der grundlegende Satz: Sind K_1 und K_2 Komplexe wie oben und ferner $H_q(K_1) = H_q(K_2)$ und $l_{K_1}^{q+1} = l_{K_2}^{q+1}$, dann sind K_1 und K_2 vom selben „Kettenhomotopietyp" in den Dimensionen $\leq q$ (d. h. es existieren äquivariante Kettentransformationen λ: $K_1^{q+1} \to K_2^{q+1}$ und λ': $K_2^{q+1} \to K_1^{q+1}$, so daß $\lambda\lambda'$ und $\lambda'\lambda$ in den Dimensionen $\leq q$ zur Identität kettenhomotop sind). Insbesondere ist also $H_e^q(K_1, G) = H_e^q(K_2, G)$. Es wird eine explizite algebraische Konstruktionsvorschrift für $H_e^q(K, G)$ aus W, $H_q(K)$, G, der Operationsweise von W auf $H_q(K)$ und G und der charakteristischen Kohomologieklasse l_K^{q+1} angegeben. — Die Begriffsbildungen lassen sich übertragen auf einen topologischen Raum X mit einer Gruppe W von fixpunktfreien Homöomorphismen auf sich, indem man alles auf den singulären Komplex von X bezieht. Insbesondere ist für ein Polyeder X

mit einer Gruppe W fixpunktfreier simplizialer Selbstabbildungen die charakteristische Kohomologieklasse l_X^{q+1} gleich der charakteritischen Kohomologieklasse einer Simplizialzerlegung von X. — Ist insbesondere $X = \tilde{X}_0$ die universelle Überlagerung eines topologischen Raumes X_0 und W die Deckbewegungsgruppe von $\tilde{X}_0$ und operiert W trivial auf die Koeffizientengruppe G, so folgt: Ist X_0 stetig-zusammenhängend und asphärisch in den Dimensionen $2, 3, \ldots, q-1$, so ist die Kohomologiegruppe $H^q(X_0, G)$ durch die Homotopiegruppen $\pi_1(X_0)$, $\pi_q(X_0)$, die Operationsweise von π_1 auf π_q, die Koeffizientengruppe G und die charakteristische Kohomologieklasse $l_{\tilde{X}_0}^{q+1} \in H^{q+1}(\pi_1, \pi_q)$ bestimmt. Bei anderer Operationsweise von W auf G erhält man einen entsprechenden Satz für die q-te Kohomologiegruppe von X_0 mit lokalen Koeffizienten. Durch Übergang zu den Homologiegruppen gelingt ferner die Bestimmung des Bildes und des Kernes für den natürlichen Homomorphismus von $\pi_q(X_0)$ in $H_q(X_0)$. — Als Beispiel werden die Invarianten $l_{S^{2n+1}}^{2n+2}$ für die Linsenräume L^{2n+1} berechnet. *Burger* (Frankfurt a. M.).

Gordon, I. I.: Klassifikation der Abbildungen eines Komplexes in den projektiven Raum. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **65**, 441—444 (1949) [Russisch].

Es werden die Abbildungsklassen eines n-dimensionalen Komplexes K^n in den n-dimensionalen reellen projektiven Raum P^n untersucht. Sei $\Phi_0(f)$ die Untergruppe der Fundamentalgruppe Φ von K^n, die durch die Abbildung f von K^n in P^n annulliert wird. Für die Abbildungen mit $\Phi_0(f) = \Phi$ fällt das Klassifikationsproblem mit dem der Abbildungen von K^n in S^n (= universelle Überlagerung von P^n) zusammen. Sei daher weiterhin $\Phi_0(f) \neq \Phi$. Satz 1: Zwei Abbildungen f, g sind dann und nur dann auf dem $(n-1)$-dimensionalen Gerüst K^{n-1} von K^n homotop, wenn $\Phi_0(f) = \Phi_0(g)$ ist. Es bleiben daher weiterhin nur noch solche Abbildungen zu untersuchen, die auf K^{n-1} übereinstimmen, also zu einer festen Untergruppe $\Phi_0 \subset \Phi$ gehören. Für diese gilt Satz 2: Für ungerades n entsprechen ihre Klassen umkehrbar eindeutig den Elementen der n-ten (ganzzahligen) Kohomologiegruppe von K^n. Für gerades n ist das Ergebnis komplizierter. — Für den Fall einer Mannigfaltigkeit K^n gilt Satz 5: Die Abbildungsklassen von K^n in P^n, die zur selben Untergruppe $\Phi_0 \neq \Phi$ gehören, stehen für ungerades n und orientierbares K^n in eineindeutiger Beziehung zum Abbildungsgrad, für ungerades n und nichtorientierbares K^n gibt es zwei Klassen. Für gerades n und orientierbares K^n gibt es zwei Klassen, für gerades n und nichtorientierbares K^n, für das aber die zu Φ_0 gehörige zweiblättrige Überlagerung L^n von K^n orientierbar ist, stehen die Abbildungsklassen in eineindeutiger Beziehung zum absoluten Betrag des Grades der Überlagerungsabbildung von L^n in S^n. Im Falle n gerade, K^n und L^n nichtorientierbar, gibt es höchstens zwei Klassen. — Beweise werden nicht ausgeführt. Jedoch ist ersichtlich, daß die Überlagerung L^n eine wesentliche Rolle spielt. *Burger* (Frankfurt a. M.).

Youngs, J. W. T.: The extension of a homeomorphism defined on the boundary of a 2-manifold. Bull. Amer. math. Soc. **54**, 805—808 (1948).

M, $\mathfrak{M}$ seien homöomorphe (kompakte und berandete) Flächen mit den Rändern $B = J_1 \cup \ldots \cup J_n$ bzw. $\mathfrak{B} = \mathfrak{J}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{J}_n$ (J_i, $\mathfrak{J}_i$ sind Jordansche Kurven). Bezeichne h: $B \to \mathfrak{B}$ eine Homöomorphie zwischen den Rändern. 1) M, $\mathfrak{M}$ seien orientierbar angenommen. Es gibt dann und nur dann eine topologische Erweiterung h^*: $M \to \mathfrak{M}$ von h, wenn h zusammengehörige Orientierungen von $J_1, \ldots, J_n$ in zusammengehörigen Orientierungen von $\mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_n$ transformiert. 2) Wenn M, $\mathfrak{M}$ nicht orientierbar sind, läßt sich jede Homöomorphie h zwischen den Rändern in eine Homöomorphie zwischen den Flächen erweitern. (Zusammenfassend: die natürlichen notwendigen Bedingungen sind hinreichend.) *Fáry* (Paris).

Kagno, I. N.: Desargues' and Pappus' graphs and their groups. Amer. J. Math. **69**, 859—862 (1947).