## Werk

**Titel:** Klassische theoretische Physik

**Ort:** Berlin

**Jahr:** 1950

**PURL:** https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0034|log24

## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

kompakt und total diskontinuierlich ist und $S^n - C$ un. a. l. g. hat. — Die offene Menge $A$ des topologischen Raumes $X$ hat dabei un. a. l. g., falls es für jeden Punkt $p \in X$ und jede Umgebung $U$ von $p$ in $X$ eine Umgebung $V$ von $p$ in $X$ gibt, so daß $V \cap A \subset U \cap A$ und jeder geschlossene Weg in $V \cap A$, der in $U \cap A$ zum Kommutator zweier Wege von $U \cap A$ homotop ist, in $U \cap A$ nullhomotop ist. Zum Beweise werden Beziehungen des Begriffes „un. a. l. g." zu den Begriffen „gleichmäßig lokal-zusammenhängend im Homologie- bzw. Homotopiesinn" [vgl. hierzu Eilenberg and Wilder, Amer. J. Math. **64**, 613—622 (1942)] hergeleitet und u. a. Sätze der zitierten Arbeit benutzt. *Burger* (Frankfurt a. M.).

**Ghezzo, S.: Intorno ad un teorema sulle quasi-traiettorie di una traslazione piana generalizzata.** Rend. Sem. mat. Univ. Padova **18**, 177—180 (1949).

Verallgemeinerung eines Theorems von Scorza Dragoni (erscheint in Annali Triestini) bezüglich Quasi-Translationsbögen. *Fáry* (Paris).

**Bernhart, Arthur: Another reducible edge configuration.** Amer. J. Math. **70**, 144—146 (1948).

Eine Gebietseinteilung ist für das Vierfarbenproblem reduzibel, wenn sie einen 4-Ring enthält, der aus zwei Sechsecken besteht mit gemeinsamer Kante, an deren Endpunkte je ein Fünfeck stößt. *Künneth* (Erlangen).

## Klassische theoretische Physik.

● **Weizel, Walter: Lehrbuch der theoretischen Physik. I: Physik der Vorgänge. Bewegung, Elektrizität, Licht, Wärme.** Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1949. Mit 270 Textabb., XIV, 771 S., DM 53.—, geb. DM 56,90.

Der vorliegende 1. Band eines neuen zweibändigen Lehrbuches der theoretischen Physik ist „Physik der Vorgänge" überschrieben und behandelt die vorquantenmechanische klassische Physik. Der 1. Abschnitt (140 Seiten) behandelt die Mechanik der Punkte und starren Körper in dem bei gleichartigen Lehrbüchern üblichen Umfang. Etwas knapp ist die Behandlung der Prinzipien der Dynamik ausgefallen; dafür ist ausführlich dargestellt, was zum Verständnis der Überleitung zur Quantenmechanik notwendig ist (Hamilton-Jacobische Theorie, periodische und bedingtperiodische Bewegungen). Gelegentlich sind, wohl um eine größere Flüssigkeit des Textes zu erreichen, die Voraussetzungen einer Ableitung und ihre Ergebnisse nicht noch einmal in einem Satz zusammengefaßt (z. B. Drehimpulssatz). Das ist möglich, macht aber das Lehrbuch mehr für ein älteres als für ein jüngeres Semester geeignet. Sehr ausführlich und klar (170 Seiten) ist der Abschnitt über die Kontinuumsmechanik. Der elektrodynamische Abschnitt (180 Seiten), in dem konsequent praktische Einheiten verwendet werden, zeichnet sich in glücklicher Weise durch ein sonst nur in elektrotechnischen Lehrbüchern auftretendes Kapitel über die Vierpoltheorie der Schaltungen aus. Die Behandlung der Optik (120 Seiten) geht von der Maxwellschen Theorie aus. Der 5. Abschnitt, Elektrodynamik bewegter Körper und Relativitätstheorie (60 Seiten), behandelt zunächst die Theorie des ruhenden Äthers und zeigt so klar, welche experimentelle Erfahrungen dazu zwingen, auf diese Theorie zu verzichten. Dieses Verfahren erscheint dem Ref. besser, als wenn die Darstellung direkt von den Postulaten der speziellen Relativitätstheorie ausgehen würde. Der letzte Abschnitt des Buches (100 Seiten) bringt die Darstellung der Wärme einschließlich der Wärmeleitung und der Wärmestrahlung. — Der vorliegende Band ist so gut und so inhaltsreich, daß man ihm eine weite Verbreitung unter den Studenten wünschen kann und gerade deshalb wohl noch die Bitte aussprechen darf, daß dem zweiten Band oder einer späteren Auflage ein Register und zur Belebung des Inhalts die Behandlung einiger praktischer Beispiele oder ein Aufgabenteil beigefügt werden möge.
*Kockel* (Leipzig).

### Mechanik:

● **Timoshenko, S. and D. H. Young: Advanced Dynamics.** New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Co. 1948. 400 p., diagrams, charts, tables, cloth $ 5,50.

Diese „Höhere Dynamik" ist hauptsächlich zur Unterstützung von Kursen gedacht, die sich mit schnell laufenden Maschinen, Schwingungen, Ballistik und gyroskopischen Wirkungen etwa bei Raketen befassen wollen. Approximations-

methoden stehen stark im Vordergrund. Bezeichnend ist, daß das Werk von Grammel und Bieżeno viel zitiert wird. Ferner das Buch von v. Sanden. Es ist also eine technische Mechanik für Fortgeschrittene. Zur Grundlegung wird auf das Werk: „Engineering Mechanics" derselben Verff. verwiesen, doch werden die benötigten Theoreme der Allgemeinen Mechanik genügend auseinandergesetzt. Man kann natürlich nicht äußerste Schärfe verlangen. So werden z. B. innere eingeprägte Kräfte entweder beiseite gelassen oder mit der Bemerkung: wir rechnen sie zu den äußeren Kräften hinzu, abgetan. Dafür ist der konkrete Inhalt außerordentlich reich, auch die Zahl der Aufgaben beträchtlich. Das Buch zerfällt in fünf Kapitel. Das erste, Dynamik eines Partikels, könnte am besten als Lehre von den in der Punktmechanik auftretenden Differentialgleichungen bezeichnet werden. Das zweite Kapitel handelt von der Dynamik eines Systems von Punkten, enthält u. a. geradlinige Bewegung variabler Massen, Stoß, Massenausgleich und Schwungradtheorie. Das dritte Kapitel behandelt grundsätzlicher die Dynamik der Systeme mit Bindungen, dabei die Lagrangeschen Gleichungen und das Hamiltonsche Prinzip, das vierte Kapitel bringt eine ausführliche Behandlung der Theorie kleiner Schwingungen, das fünfte die Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt mit zahlreichen Anwendungen, z. B. Kreiselkompaß, Schiffskreisel, Einschienenbahn u. a. Ein Anhang schließlich orientiert über die Modelltheorie im Anschluß an eine Dimensionsbetrachtung. *Hamel* (Landshut).

● **Housner, George W. and Donald E. Hudson: Applied mechanics: Statics.** New York: D. van Nostrand Co., Inc.; London: Macmillan and Co., Ltd., 1949. IX, 220 p., 22 s. 6 d. net.

**Weizsäcker, C. F. v.: Eine Bemerkung über die Grundlagen der Mechanik.** Ann. Physik, VI. F. **6**, 67—68 (1949).

Der Energiesatz der nichtrelativistischen Mechanik enthält neben einer Ortsfunktion gerade das Quadrat der Geschwindigkeit. Quantenmechanisch geht dies in den Laplace-Operator der Schrödingergleichung über. Das Newtonsche Gravitationspotential ist Lösung der ähnlichen, nur einfacheren Gleichung $\Delta U = 0$. Es wird auf den hierin sich andeutenden Zusammenhang zwischen dem Gravitationsgesetz und dem Newtonschen Trägheitsgesetz hingewiesen. *Volz* (Erlangen).

**Pignedoli, Antonio: Sulle curve naturali di un sistema dinamico.** Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena **2**, 37—59 (1948).

Eine natürliche Familie von Kurven nennt Verf. nach Kasner die Kurven, die einem Variationsproblem der Form $\delta \int F\, ds = 0$ entspringen. Hierher gehören also die geodätischen Linien, die Kurven eines konservativen holonomen Systems, die Brachistochronen desselben Systems. Zwischen diesen Familien entdeckt Verf. interessante Beziehungen, wie die, daß geodätische Krümmung und Torsion der dynamischen Kurven und der Brachistochronen entgegengesetzt gleich sind. Auch über die Reaktion, die eine Geodätische aushalten muß, wenn sie von einem Punkt unter Wirkung eines Potentials durchlaufen wird, gibt es einen interessanten Satz. Zum Schluß wird nach den Linien konstanten Druckes auf einer Fläche gefragt. *Hamel* (Landshut).

**Pignedoli, Antonio: Sull'esistenza, per un sistema anolonomo, di un integrale lineare nelle velocità lagrangiane.** Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena **1**, 50—58 (1947).

Um ein lineares Integral der Bewegungsgleichungen nichtholonomer Systeme zu finden, wird man einen nichtholonomen Geschwindigkeitsparameter (caratteristica cinetica) null setzen, woraus sich die Bedingungen ableiten lassen. *Hamel.*

**Pignedoli, Antonio: Sulla applicabilità del metodo di Jacobi della meccanica analitica ai sistemi anolonomi.** Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena **1**, 78—94 (1947).

**Pignedoli, Antonio: Ancora sulla applicabilità del metodo di Jacobi della Meccanica analitica ai sistemi anolonomi.** Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena **2**, 87—95 (1948).

Kann man auch bei nichtholonomen Systemen entsprechend der Hamiltonschen eine partielle Differentialgleichung aufstellen, aus deren vollständigem Integral nach Jacobi die Integrale der Bewegungsgleichungen gewonnen werden können? Verf. gelingt die Aufstellung der zu erwartenden partiellen Differentialgleichung, zu der allerdings wegen der nichtholonomen Bedingungen noch weitere Gleichungen zutreten, und der Nachweis, daß aus einem vollständigen Integral die Integrale gewonnen werden können. Freilich müssen die aus den Bedingungen entstehenden Differentialgleichungen noch weiter integriert werden. Leider aber sind die Differentialgleichungen nur selten miteinander verträglich. Bedingungen dafür können angegeben werden. *Hamel* (Landshut).

**Agostinelli, Cataldo: Sistemi anolonomi a caratteristiche cinetiche separate e moto di rotolamento di una sfera pesante sopra una superficie generica.** Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena **2**, 197—213 (1948).

In § 1 bekannte Ableitung der Bewegungsgleichungen für nichtholonome Systeme. In § 2 Systeme mit getrennten „Charakteristiken", d. h. solchen nichtholonomen Geschwindigkeitsparametern (= caratteristiche cinetiche), für welche die Gleichungen in zwei getrennte Systeme zerfallen. In § 3 Anwendung auf den Fall der schweren Kugel auf einer Fläche. In § 4 der Fall der homogenen Kugel. *Hamel* (Landshut).

**Aržanych, I. S.: Nicht-holonome dynamische Systeme, die ein kinetisches Potential haben.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **65**, 809—811 (1949) [Russisch].

Relativement à un système matériel $S$, à $n > 2$ degrés de liberté $x^\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n$), astreint à $s < n$ conditions:

$$(1) \qquad b^\varrho_\nu \dot{x}^\nu + b^\varrho = 0 \quad (\varrho = 1, \ldots, s),$$

dont les coefficients dépendent du temps, l'A. établit deux résultats. 1) Il donne la forme explicite des $\ddot{x}^\nu$ en fonction des coefficients de la forme quadratique non homogène $2T$, des coefficients de (1) et des coefficients de la forme $X_\nu\, \delta x^\nu$ — qui fournit le travail virtuel des forces extérieures correspondant au déplacement virtuel $\delta x^\nu$ de $S$. 2) Il indique la condition nécessaire et suffisante pour que les équations du mouvement de $S$ expriment l'extremum d'une forme quadratique non homogène des $\dot{x}^\nu$. *J. Kravtschenko* (Grenoble).

**Gallissot, François: Sur une forme des équations du mouvement d'un système matériel à liaisons holonomes ou non avec ou sans frottement.** C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 511—512 (1950).

Für Systeme mit einseitigen Bindungen mit oder ohne Reibung läßt sich aus den Appellschen Gleichungen eine allgemein gültige Form für die Differentialgleichung der „vitesse de contingence" ableiten, d. h. den Vektor der Geschwindigkeitsdifferenz unmittelbar benachbarter Punkte auf der gemeinsamen Normale sich berührender Körper. Das allgemeine Theorem umfaßt ältere Theoreme von Delassus und von Pérès. *Hamel* (Landshut).

**Gallissot, François: Sur la discussion des éventualités dans un systeme à $k$ contacts avec ou sans frottement.** C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 611—612 (1950).

Sonderfälle des im vorangeh. Referat genannten allgemeinen Theorems. Auch das Paradox von Painlevé wird berührt. *Hamel* (Landshut).

**Pignedoli, Antonio: Sul problema delle teleferiche. Moto di un corpo rigido pesante, un punto del quale è vincolato a scorrere senza attrito lungo un filo teso, soggetto a piccole oscillazione intorno alla sua configurazione rettilinea di riposo.** Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena **2**, 149—169 (1948).

Ein starrer Körper läuft mit einem seiner Punkte auf einem glatten, gespannten Faden, der kleine Schwingungen ausführen kann. Aufstellung der Bewegungsgleichungen für Körper und Faden. Sonderfälle, z. B. Rotation des Körpers um eine vertikale Schwerachse, Oszillationen des Körpers um die horizontale Achse senkrecht

zum gespannten Faden, gleichförmige Bewegung des geführten Punktes auf dem Faden. *Hamel* (Landshut).

**Sestini, Giorgio: Sopra i moti di un sistema rigido un punto del quale è vincolato ad una linea liscia.** Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena **3**, 18—28 (1949).

Ein starrer Körper vollführe eine Präzessionsbewegung um seinen Schwerpunkt. Einer seiner Punkte soll so auf einer glatten Kurve geführt werden, daß die Präzessionsbewegung nicht gestört wird. Aufstellung der Bewegungsgleichungen. Als Bedingung für die Kurve ergibt sich konstante Totalkrümmung. Sonderfälle. *Hamel* (Landshut).

**Rubbert, F. K.: Zur Theorie des momentfreien Kreisels.** Ann. Physik, VI. F. **5**, 237—250 (1949).

Die an sich bekannte Integration der Bewegungsgleichungen des kräftefreien Kreisels wird so umgestaltet, daß sofort die Eulerschen Winkel in die Erscheinung treten. Da $r$ dem $\cos\vartheta$ proportional ist, wo $\vartheta$ der Winkel zwischen der $z$-Achse und der raumfesten Impulsachse ist, hat man mit $r$ sofort auch $\cos\vartheta$, dann aber mit $p$ und $q$ auch sofort die beiden anderen Eulerschen Winkel. Bemerkenswert ist die „Vektordifferentialgleichung zweiter Art" für die Winkelgeschwindigkeit $u$

$$[u, \dot{u}] = \Omega \cdot u,$$

wo $\Omega$ eine Dyade ist, die auch von den Integrationskonstanten abhängt. Sie erweist sich als nützlich zur Behandlung von Polhodie und Herpolhodie. *Hamel.*

**Tkačev, L. I.: Über die 84-Minuten-Periode für Systeme mit gebundenen und freien Kreiseln.** Priklad. Mat. Mech., Moskva **13**, 217—218 (1949) [Russisch].

M. Schuler [Phys. Z. **24**, 344—350 (1923)] — et à sa suite, quelques autres auteurs — on construit des systèmes matériels pendulaires (gyro-pendules, gyro-compas, etc.) admettant une période propre constante de 84,4 minutes dans le champ de la pesanteur. L'A. étend ici cette propriété à d'autres types de systèmes (à gyros libres ou à gyros soumis à certaines liaisons). *J. Kravtchenko* (Grenoble).

**Milne-Thomson, L. M.: The pendulum.** Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford **2**, 479—480 (1949).

Die Darstellung der Pendelschwingung durch elliptische Funktionen kann sehr schnell aus der Differentialgleichung durch die Substitution $\sin\frac{1}{2}\vartheta = \mathrm{sn}\,(u, k)$ gewonnen werden. *Hamel* (Landshut).

**Pailloux, Henri: Sur quelques problèmes d'oscillations.** C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 1208—1210 (1948).

Zwei Ergänzungen zu früheren Untersuchungen: I. Welche Bedingungen müssen die Funktionen $a$, $b$, $c$ und $d$ von $x$ erfüllen, wenn eine Lösung der Differentialgleichung $y''' = ay'' + by' + cy + d$ eine an beiden Enden des Intervalls mit der ersten Ableitung verschwindende Lösung haben soll? II. Bei einem Schwinger mit Dissipation läßt sich bei konstanten Koeffizienten der drei quadratischen Formen eine quadratische Gleichung für das $r$ in $q_k = A_k e^{rt}$ aufstellen, die allerdings von den $A_k$ abhängt. *Hamel* (Landshut).

**Haag, Jules: Sur la stabilité des points invariants d'une transformation.** Bull. Sci. math., II. S. **73**$_{\mathrm{I}}$, 123—134 (1949).

Es handelt sich um eine rein mathematische Untersuchung, die als Hilfsmittel zu den umfangreichen Arbeiten des Verf. über die Synchronisation nichtlinearer Schwinger dienen soll. Invariante Punkte sind solche Punkte, die bei einer Transformation im $m$-dimensionalen Raum fest bleiben. Stabil heißt eine solche Transformation, wenn auch bei fortgesetzter Wiederholung eine hinreichend kleine Umgebung des invarianten Punktes in einen Teil von sich selbst abgebildet wird. Unter Annahme stetiger erster und zweiter Ableitungen wird die Transformation zuerst auf eine Normalform gebracht, durch Einführung sogenannter kanonischer Variabeln, die im unendlich Kleinen eine bloße Dehnung erfahren, deren Faktoren $S_i$ Wurzeln

einer Gleichung $m$-ten Grades sind, die als verschieden angenommen werden. Ein Teil der Ergebnisse steht schon in einer Arbeit von Samuel Lattés [Ann. Mat. pura appl., Milano, III. S. **13**, 1—137 (1906)]. Verf. kommt es hauptsächlich auf die Ausdehnung dieser Ergebnisse auf den Fall an, daß noch ein kleiner Parameter $\lambda$ vorkommt. Ferner interessieren invariante Untermannigfaltigkeiten. Solche existieren, wenn einige der „Dekremente" $S$ gleich 1 sind, und sind stabil, wenn die anderen Dekremente absolut kleiner als 1 sind. Auch im Falle eines Parameters kann die Stabilitätsbedingung angegeben werden. *Hamel* (Landshut).

**Solodovnikov, V. V.: Ein Kriterium für die Qualität der Regulierung.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **60**, 977—980 (1948) [Russisch].

Un problème de régulation linéaire a conduit l'A. au problème d'analyse suivant. Considérons:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{J(z)}{z} e^{zt}\, dz$$

où le chemin d'integration $C$ est formé de l'axe imaginaire et d'un petit demi-cercle entourant l'origine et où $J(z)$ est une fonction donnée. Il s'agit de caractériser $J(i\omega)$, $\omega$ réel, de façon que $\delta(t)$ soit intérieur à un domaine convenable. L'A. donne une condition nécessaire et suffisante pour que le critère précédent soit satisfait. *J. Kravtchenko* (Grenoble).

**Staržinskij, V. M.: Über die Eigenschwingungen einer elektrischen Kontrollzuführungsleitung.** Prikl. Mat. Mech., Moskva **13**, 41—50 (1949) [Russisch].

L'A. décrit un servo-moteur à entretien électrique dont il fait une théorie approchée, en tenant compte des frottements. Il discute avec soin les différents régimes de fonctionnement et calcule les valeurs critiques des caractéristiques, tant dynamiques qu'électriques, de son appareil. — Ce mémoire parait offrir un exemple interessant d'une étude théorique complète (nécessairement approchée) d'un instrument très complexe. *J. Kravtchenko* (Grenoble).

**Minorsky, Nicolas: Sur l'oscillateur de van der Pol.** C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 60—61 (1949).

Als van der Polscher (VDP) Oszillator wird ein nichtlinearer Oszillator durch folgende Differentialgleichung definiert: $\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$. In diese Gleichung wird mit $\varrho = r^2 = x^2 + \dot{x}^2$ die Energie als abhängige Variable eingeführt. Man erhält:

$$\dot{\varrho} = 2\varepsilon(1 - \varrho\cos^2\theta)\,\varrho\sin^2\theta, \qquad \dot{\theta} = -1 + \varepsilon(1 - \varrho\cos^2\theta)\sin\theta\cos\theta,$$

$$\frac{d\varrho}{d\theta} = \frac{[2\varepsilon(1 - \varrho\cos^2\theta)\,\varrho\sin^2\theta]}{[1 + \varepsilon(1 - \varrho\cos^2\theta)\sin\theta\cos\theta]}$$

Man setzt $\varrho = \varrho_0 + \varepsilon\varrho_1 + \varepsilon^2\varrho_2 + \cdots$ und erhält durch Gleichsetzen der Glieder von der gleichen Ordnung in $\varepsilon$ eine Reihe von Differentialgleichungen für $\varrho_0, \varrho_1(\theta), \varrho_2(\theta), \ldots$. Als periodische Lösung ergibt sich angenähert:

$$\varrho(\theta) = 4 + \varepsilon(2\sin 2\theta - \sin 4\theta) + \varepsilon^2\left(\frac{3}{8} - \frac{3}{4}\cos 2\theta + \frac{1}{4}\cos 4\theta + \frac{5}{12}\cos 6\theta - \frac{1}{4}\cos 8\theta\right).$$

Die Energieverhältnisse werden für kleine und große Werte von $\varepsilon$ untersucht, wobei die Methode der Isoklinen eine Rolle spielt. *Lassen* (Berlin).

**Aronovič, G. V.: Zur Theorie des Shimmys der Automobile und Flugzeuge.** Priklad. Mat. Mech., Moskva **13**, 477—488 (1949) [Russisch].

L'A. apporte une contribution intéressante à la théorie des vibrations, autour d'un axe vertical, des roues des machines telles que l'automobile et l'avion (phénomène connu sous le nom de shimmy). — L'étude complète du phénomène relève d'un problème très compliqué de Mécanique non linéaire. Aussi, les travaux antérieurs [parmi lesquels nous retiendrons ceux de Rocard, Rev. Sci. Paris **84**, No. 15 (1946) et de Keldysch, Publ. Inst. Centr. Aérodyn. Moscou **1945**, No. 564] se

limitent uniquement à la discussion des conditions de la naissance du shimmy sur les équations linéarisées (ce qui est, aussi, le point de vue de l'A.), écrites pour le système des roues seules. L'analyse de l'A. est plus complète; il fait intervenir les caractéristiques dynamiques de l'ensemble de la machine et tient compte de l'effet dit du „tramping" (en négligeant les effets secondaires, tels que la variation du diamètre des roues due aux déformations du pneu). L'A. parvient ensuite à discuter qualitativement la stabilité de certains régimes stationnaires, en mettant en évidence le rôle, parfois prépondérant, des facteurs négligés par ses prédécesseurs.

*J. Kravtchenko* (Grenoble).

**Weber, Max: Beitrag zur Messung von Erschütterungen.** Helvetica physica Acta **22**, 425—456 (1949).

Verf. gibt zunächst eine Darstellung der dynamischen Grundgleichungen für Relativbewegung, wobei im Anschluß an Arbeiten von F. Gassmann außer dem Absolutsystem mehrere Relativsysteme berücksichtigt werden, so daß die relativen Bewegungen des im Erschütterungsmesser eingebauten schwingungsfähigen Gebildes gegenüber dem äußeren Rahmen oder Gehäuse einerseits sowie die Bewegungen des Gehäuses gegenüber dem absoluten Raum andererseits erfaßbar sind. Die rechte Seite der so gewonnenen inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung enthält dann verschiedene charakteristische Terme, deren gesonderte Behandlung im wesentlichen auf drei Grundtypen des im Erschütterungsmesser sich einstellenden Schwingungsvorganges führt. Hierbei lassen sich leicht die Bedingungen auffinden, unter denen der Erschütterungsmesser als idealer Amplitudenmesser oder Beschleunigungsmesser arbeitet; maßgeblich hierfür ist u. a., ob das Verhältnis der Erschütterungsfrequenz zur Eigenfrequenz einen besonders großen oder kleinen Wert annimmt. Weiter werden diskutiert der prismatische Stab ohne und mit Einzelmasse als Erschütterungsmesser, der dreieckförmig zugespitzte Stab, sowie einige weitere Typen. Schließlich erörtert Verf. technische Einzelheiten über Aufbau, Eichung und Handhabung von Erschütterungsmessern im praktischen Betrieb. *H. Neuber* (Dresden).

**Pylarinos, O.: Über das Dreikörperproblem.** Acta math., Uppsala **81**, 257—263 (1949).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit [Math. Z. **47**, 351—372 (1941); dies. Zbl. **26**, 23] untersucht Verf. den allgemeinen Fall des Dreikörperproblems, wo die Ebene der drei Körper beständig durch eine in bezug auf ein Inertialkoordinatensystem mit dem Ursprung im Schwerpunkte der drei Massen feste Gerade hindurchgeht. Zunächst wird der Hilfssatz bewiesen, daß, wenn die Körper eines isolierten Systems dauernd in einer Geraden liegen, diese Gerade in bezug auf das obige Koordinatensystem entweder festbleiben oder sich um den Schwerpunkt in einer festen Ebene drehen muß, wobei im letzteren Falle die Abstandsverhältnisse von den Körpern während der Bewegung konstant bleiben. Wird nun im genannten Dreikörperproblem die $z$-Achse als die feste Gerade gewählt, so liegen die Projektionen der drei Körper auf die $xy$-Ebene ebenso wie die Projektionen ihrer Beschleunigungen beständig in der Knotenlinie der drei Körper auf der $xy$-Ebene, und der Hilfssatz ist anwendbar; während der Bewegung sind also die Abstände der drei Körper von der Drehachse von der Zeit unabhängigen Größen proportional. Setzt man weiter voraus, daß die Wechselwirkung von je zweien der drei Körper dem Produkt aus den Massen beider Körper und der $-(\nu-1)$-ten Potenz ihrer Abstände proportional ist, so besteht, wie Verf. zeigt, zwischen den gegenseitigen Entfernungen $a_{ik}$ der drei Körper eine Beziehung von der Form $A_1 a_{23}^{-\nu} + A_2 a_{31}^{-\nu} + A_3 a_{12}^{-\nu} = 0$, wo $A_1, A_2, A_3$ von der Zeit unabhängige Größen sind, von denen mindestens zwei $\neq 0$ sind.

*Volk* (Würzburg).

**Polachek, Harry: Solution of the differential equations of motion of a projectile in a medium of quasi-newtonian resistance.** Quart. appl. Math. **7**, 275—291 (1949).

Verf. entwickelt ein Näherungsverfahren zur Lösung der Differentialgleichungen,

welche die Bewegung eines Körpers in einem Medium, in dem das Newtonsche quadratische Luftwiderstandsgesetz nur näherungsweise zutrifft, beschreiben. Es gründet sich auf die Variation der Bahnelemente nach Moulton (New methods in exterior ballistics, Chicago 1926, Ch. IV) und die Einführung geeigneter Störungsglieder. Alle Differentialglieder von 2. Ordnung an werden vernachlässigt. Als Musterbeispiel erfolgt die Bahnbestimmung für ein Geschoß mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 300 m/s bei einem Erhebungswinkel von 60° nach der neuen Methode einerseits und der üblichen Methode der sukzessiven Approximationen andererseits. Die nach beiden Verfahren erzielten Schußweiten stimmen bis auf weniger als 1 m überein und ergeben 4240 m. Da die Anfangsgeschwindigkeit des Beispiels bereits 88% der Schallgeschwindigkeit beträgt und der Erhebungswinkel sehr groß gewählt wurde, glaubt Verf., daß die neue Methode für alle Bahnen mit einer Anfangsgeschwindigkeit unterhalb der Schallgeschwindigkeit brauchbar sein wird und genaue Ergebnisse liefern wird. Es ist noch zu bemerken, daß die Änderung der Dichte mit der Höhe in Rechnung gestellt wurde. Verf. weist darauf hin, daß die Methode mit leichten Abänderungen verallgemeinerungsfähig ist, wenn etwa an Stelle des Newtonschen ein anderes Widerstandsgesetz tritt, für welches eine Lösung der Bewegungsgleichungen (wie im Newtonschen Fall) in geschlossener Form angegeben werden kann. *Garten* (Tübingen).

**Grammel, R. und K. Zoller: Zur Mechanik der Peitsche und des Peitschenknalles.** Z. Physik **127**, 11—15 (1950).

Wenn eine Peitschenschnur, die an einer Stelle eine Umlenkung um 180° aufweist, an ihrem einen (z. B. dem rechten) Ende etwa mit konstanter Geschwindigkeit nach rechts gezogen wird, so beschreibt der andere Endpunkt eine beschleunigte Bewegung nach links. Unter vereinfachten Annahmen wird dieser Bewegungsvorgang durch eine elementare Rechnung beschrieben und wird gezeigt, daß die Geschwindigkeit des linken Endpunktes gegen Schluß der Bewegung kurzzeitig über jede Grenze, also auch über die Schallgeschwindigkeit anwachsen kann, womit die Entstehung des Peitschenknalles ihre Erklärung findet. *R. Zurmühl* (Darmstadt).

## Elastizität. Plastizität. Akustik:

**Postacioğlu, Bekir: Remarques sur les conditions d'existence des courbes intrinsèques.** Bull. Techn. Univ. Istanbul **1**, 36—47 und türkische Zusammenfassg. 36 (1948).

Die Schar der Mohrschen Kreise $\{x-p\}^2+y^2=r^2\{p\}$ hat die Hüllkurve $x=p-r\,r'$, $y=r\sqrt{1-r'^2}$. Diese existiert nicht, wenn $r'^2>1$. Im Falle $\left|\frac{r\{p_m\}-r\{p_n\}}{p_m-p_n}\right|>1$ existiert die Hüllkurve für einen gewissen Wert $p$ nach dem Rolleschen Satze nicht. Die Zugfestigkeit wird mit $R'$, die Schubfestigkeit mit $T$ und die Druckfestigkeit mit $R$ bezeichnet. Zu $p=R'/2$, 0 und $R/2$ gehören $r=-R'/2$, $T$ und $R/2$. Wenn $T>-R'$ oder $R$, existiert die Hüllkurve nicht. Wenn $r=a\,p+b$, ist $a=\frac{R+R'}{R-R'}$, d. h. die Hüllkurve $y=\frac{R+R'}{2\sqrt{-R\,R'}}\,x-\frac{\sqrt{-R\,R'}}{2}$ existiert immer. $T=\frac{-R\,R'}{R-R'}$. Wenn $r^2=A\,p^2+2\,B\,p+C$, existiert die Hüllkurve unter den Bedingungen $0<A<1$ und $A\,C-B^2>0$, d. h. $T<R\,R'/(R-R')$. Wenn $p=A\,r^2+2\,B\,r+C$, sichert $(1-2\,B)/2A<-R'/2$ die Existenz der Hüllkurve im Gebiet $R'/2\leqq p<\infty$. Anm. des Ref.: S. 42 in $\Delta$ müssen die Quadrate gestrichen werden; in $\Delta_B$ fehlt der Faktor $-1$; wenn $r=A\,p^m+B$, ist $\{dp/dr\}_{p=0}=0$; in $m$ muß $\ln R/R'$ durch $\ln R/-R'$ ersetzt werden; die Funktion $r=\ln\{A\,p+B\}$ ist unmöglich, da $r$ die Dimension einer Spannung hat. Auf S. 45 muß $r$ durch $r^2$ ersetzt werden; im Radikanden $4T^2+R\,R'$ fehlt der

Faktor $-1$; die Hyperbel muß durch ihre konjugierte ersetzt werden; in der Hyperbelgleichung muß $T$ durch $T^2$ ersetzt werden. *Konrad Ludwig* (Hannover).

**Mackenzie, J. K.: The elastic constants of a solid containing spherical holes.** Proc. physic. Soc. London, Sect. B **63**, 2—11 (1950).

Im Innern eines homogenen, isotropen, elastischen Materials wird eine willkürliche Verteilung kugelförmiger, voneinander getrennter Hohlräume angenommen. Das Volumen aller dieser Hohlräume wird als klein gegenüber dem Gesamtvolumen des Körpers und ferner die Anzahl der Hohlräume als sehr groß vorausgesetzt. Zur Berechnung der Zusammendrückbarkeit und des Schubmoduls dieses so beschaffenen Stoffes wird als Hilfsmittel ein äquivalentes homogenes Kontinuum eingeführt. Die elastischen Konstanten $k$ und $\mu$ dieses fiktiven Kontinuums werden nun in Abhängigkeit von den elastischen Eigenschaften des wirklichen Materials und von Anzahl und Größenverteilung der Hohlräume untersucht. Bei hinreichend großen Volumina werden diese Konstanten von der äußeren Begrenzungsform der Körpers unabhängig sein, und daher wird diese einfachheitshalber als Kugel gewählt. Jeder Hohlraum wird so zunächst von einer Kugelschale mit wirklichem Material umgeben gedacht, und die Wirkung des Restmaterials wird dadurch abgeschätzt, daß eine weitere Kugelschale mit äquivalentem homogenem Material hinzugenommen wird. Sowohl Dichte als auch Verformung der äußeren Kugelbegrenzung müssen nun gleich bleiben, wenn der Hohlraum und seine innere umgebende Kugelschale mit äquivalentem homogenem Material ausgefüllt wird. Die tatsächlichen elastischen Konstanten ergeben sich aus einem Verzerrungszustand der äußeren Kugelhülle, indem man die Spannungen, die in dem wirklichen Körper hervorgerufen werden, vergleicht mit den Spannungen, die bei derselben Verzerrung in dem fiktiven, homogenen, isotropen Körper erzeugt werden. Nach H. Fröhlich und R. Sack [Proc. R. Soc. London A **185**, 415 (1946)] gestattet eine Art Störungsrechnung zufolge der Annahme, daß das Volumen aller Hohlräume hinreichend klein gegenüber dem Totalvolumen ist, die Bestimmung der Konstanten wie folgt:

$$1/k = 1/k_0\,\varrho + 3\,(1-\varrho)/4\,\mu_0\,\varrho + O\,[(1-\varrho)^3],$$

$$(\mu_0-\mu)/\mu_0 = 5\,(1-\varrho)\,(3k_0+4\,\mu_0)/(9k_0+8\,\mu_0) + O\,[(1-\varrho)^2],$$

wobei sich $k_0$ und $\mu_0$ auf das tatsächliche Material beziehen und $\varrho$ die Dichte des fiktiven Materials, bezogen auf diejenige des tatsächlichen Materials, bedeutet. Hieraus folgt, daß einige Hohlräume in einem sonst völlig unzusammendrückbaren Medium eine ganz beträchtliche Zusammendrückbarkeit erzeugen können. Wird endlich in den Hohlräumen selbst ein Druck ausgeübt und bedeutet $\bar{p}$ das bewichtete Mittel aller dieser Hohlraumdruckwerte, wobei die Gewichte proportional zu den Hohlraumvolumina anzusetzen sind, so folgt für die Dehnung $\bar{p}\ (1/k - 1/k_0)$. Unter Anwendung der hydrodynamischen Analogie des elastischen Problems wird schließlich die Theorie auf Sintererscheinungen angewandt zur Bestimmung der effektiven Viskosität einer Flüssigkeit, die kleine Gasbläschen enthält. *Garten* (Tübingen).

**Herpin, André: Extension des relations de Cauchy aux coefficients d'élasticité du troisième ordre.** C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 921—922 (1949).

Verf. setzt sich zum Ziel, in der Entwicklung des elastischen Potentials eines isotropen Körpers nach den Potenzen der Dilatation

$$U = U_0 + (\lambda/8)\,I_1^2 + (\mu/4)\,I_2 + A\,I_1\,I_2 + B\,I_1^3 + C\,I_3$$

(wobei $I_1 = \sum_i e_{ii}$, $I_2 = \sum_{i,k} e_{ik}\,e_{ki}$, $I_3 = \sum_{i,k,l} e_{ik}\,e_{kl}\,e_{li}$ die drei Deformationsinvarianten und $\lambda$ und $\mu$ die Laméschen Elastizitätskonstanten bedeuten) die Koeffizienten $A$, $B$, $C$, deren Berechnung aus den Molekularkräften wegen der ungenügenden Kenntnis dieser Kräfte nicht möglich ist, wenigstens der Größenordnung nach in dem Fall, wo die Cauchyschen Relationen erfüllt sind (die sich für einen isotropen Körper auf $\lambda = \mu$ reduzieren), zu bestimmen. Er setzt lediglich voraus, daß der Körper aus zufällig verstreuten Molekülen besteht, die nur von einem Potential $\varphi(r)$ herrührenden Zentralkräften unterworfen sind. Er entwickelt den Energieinhalt nach den Potenzen der Molekülverrückungen und geht hier bis zur dritten Potenz und nimmt weiterhin an, daß der Körper einer homogenen Deformation unterworfen ist. Für die Koeffizienten der Glieder zweiter Ordnung ergibt sich wieder die klassische Relation von Cauchy

$$\lambda = \mu = N/60 \sum_i r_{0i}^4 \left[(1/r)\,\frac{d}{dr}\left(1/r\,\frac{d\varphi}{dr}\right)\right]_{r=r_{0i}}$$

($r_{0i}$ Abstand des betr. Moleküls vom Ursprung, $N$ Anzahl der Molekel pro cm³, die Summation über alle Moleküle zu erstrecken). Für die Koeffizienten dritter Ordnung findet Verf. $A = (11/16)\,\Phi^{(3)}/105$, $B = (3/16)\,\Phi^{(3)}/105$, $C = \Phi^{(3)}/105$ mit

$$\Phi^{(3)} = N/12 \cdot \sum_i r_{0i}^6 \left\{1/r\,\frac{d}{dr}\left[1/r\,\frac{d}{dr}\left(1/r\,\frac{d\varphi}{dr}\right)\right]\right\}_{r=r_{0i}}.$$

Die drei Koeffizienten $A$, $B$, $C$ genügen also den Beziehungen $(16/11)\,A = (16/3)\,B = C$ und ihre Größenordnung wird unter Verwendung eines Satzes aus der klassischen Theorie der ther-

mischen Dilatation

$$A = -0{,}176\,\lambda,\quad B = -0{,}048\,\lambda,\quad C = -0{,}257\,\lambda.$$

*Garten* (Tübingen).

**Roma, Maria Sofia: Integrazione del sistema di equazioni dell'elastostatica tridimensionale in un manicotto cilindrico illimitato.** Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. S. **2**, 63—83 (1950).

Die Integration der statischen elastischen Grundgleichungen für die Verschiebungen eines unendlich langen Hohlzylinders, bei dem auf den Mänteln entweder die Spannungen oder die Verschiebungen gegeben sind, wird zurückgeführt auf die Lösung eines Systems von 6 linearen inhomogenen Gleichungen für 6 Unbekannte mit nicht verschwindender Determinante: Die Fouriertransformierten der Verschiebungen $u, v, w$ in Zylinderkoordinaten $\varrho, \theta, z$

$$u_n(\varrho, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha z}\,dz \int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\,u\,d\theta,$$

entsprechend für $v_n$, $w_n$, sollen existieren. Dann ergibt sich unter passenden Regularitätsvoraussetzungen für $u_n, v_n, w_n$ ein System von 3 gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung in Abhängigkeit der Variabeln $\alpha\varrho$. Seine allgemeine Lösung stellt sich dar als Linearkombination von Besselfunktionen 1. und 2. Art mit 6 unabhängigen Koeffizienten, die sich im Falle des Vollzylinders auf 3 erniedrigen. Die Randbedingungen ergeben dann beim Übergang zu den entsprechenden Fouriertransformierten der Spannungskomponenten 6 lineare Bedingungen für diese Konstanten, ihre Determinante ist für alle Werte von $\alpha$ von Null verschieden. Am Spezialfall des Vollzylinders unter rotationssymmetrischer Belastung durch normalen Außendruck ist die Rechnung für $n = 0$ im einzelnen durchgeführt mit allen Konvergenzbeweisen der auftretenden uneigentlichen Integrale. *R. Moufang.*

**Fichera, Gaetano: Sul calcolo delle deformazioni, dotate di simmetria assiale, di uno strato sferico elastico.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. **6**, 582—589 (1949).

Verf. untersucht nach einer Methode von Picone [Ann. Scuola norm. Sup. Pisa, II. S. **5**, 213—283 (1936); dies. Zbl. **14**, 261] die elastische Verformung einer materiellen Kugelschicht in dem besonderen Fall, daß eine durch die Kugelmitte gehende Gerade als Symmetrieachse des Verformungszustandes auftritt. Die Verrückungen eines Innenpunktes der Schicht werden in Form einer Entwicklung nach Legendreschen Kugelfunktionen angesetzt. Wird auf die Außenfläche der Schicht ein hydrostatischer Druck ausgeübt, so ergibt sich die Lösung in geschlossener Form, indem alle Entwicklungsglieder von höherer als dritter Ordnung fortfallen.

*Garten* (Tübingen).

**Maccaferri, Luisa: La formula per la variazione di volume nell'elasticità ereditaria.** Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena **3**, 46—49 (1949).

Das Reziprozitäts-Theorem von Betti liefert die bekannte Formel, die die integrale Volumendehnung eines elastisch deformierten Körpers durch die Massen- und Oberflächenkräfte ausdrückt. Eine analoge Formel wird hier für elastische Nachwirkungsvorgänge abgeleitet, wenn für die Nachwirkung der Volterrasche lineare Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verzerrungstensor besteht. Alsdann ergibt sich zwischen den Spuren beider Tensoren eine lineare Volterrasche Integralgleichung, deren Kern $k(t, \tau)$ durch die Nachwirkungskerne im Verformungsgesetz bestimmt ist. Unter Benutzung einer Integralbeziehung von Signorini ergibt sich dann der gesuchte Ausdruck $A$ für die Volumendehnung durch Integration über das Gesamtvolumen des Körpers. Er unterscheidet sich von dem üblichen Ausdruck durch ein additives Integral nach der Zeit $\tau$, dessen Integrand im wesentlichen $k(t, \tau)\,A(\tau)$ ist. *R. Moufang* (Frankfurt a. M.).

**Gross, Wolf: Sulla matrice di Green di un problema di elasticità piana.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. **6**, 444—448 (1949).

Berechnung des Spannungs- und Verzerrungszustandes für den Fall, daß eine Kreisscheibe durch stetig auf ihrem Rand verteilte Kräfte beansprucht wird. Die Airysche Spannungsfunktion und die Kraftkomponenten werden dabei als Fouriersche Reihen angesetzt. *Garten* (Tübingen).

**Carrier, G. F.: The extrusion of plastic sheet through frictionless rollers.** Quart. appl. Math. **6**, 186—192 (1948).

Auf der Grundlage der de St. Venantschen Theorie des plastischen Gleichgewichts eines ebenen Kontinuums wird bei reibungsfreiem Walzen eines Bleches, dessen Dicke klein ist gegen den Walzradius, die in der Technik übliche Näherungsformel, die auf Grund der eindimensionalen Theorie abgeleitet wird, als Näherungslösung wiedergefunden. Die Integration der Gleichgewichtsbedingungen wird mit Hilfe einer Approximation der unbekannten Funktionen im Mittel durch endliche Reihenentwicklungen zurückgeführt auf eine nicht-lineare Volterrasche Integralgleichung, die mit sukzessiver Approximation gelöst werden kann. Die ersten Näherungen liefern bereits die gewünschte Formel. *R. Moufang* (Frankfurt a. M.).

**Pastori, M.: Plasticità.** Rend. Sem. mat. fis. Milano **18**, 93—113 (1948).

Zusammenfassender Bericht über einige bekannte klassische und einige jüngere Untersuchungen aus der Arbeitsgemeinschaft des Mailänder Seminars über verschiedene Ansätze zur Beschreibung des elastisch-plastischen und des zähplastischen Fließens. Verschiedene Verformungsgesetze und Fließbedingungen werden begrifflich und auch in bezug auf calculmäßig sich daraus ergebende Schwierigkeiten diskutiert. *R. Moufang* (Frankfurt a. M.).

**Symonds, P. S.: The determination of stresses in plastic regions in problems of plane flow.** J. appl. Physics, Lancaster Pa. **20**, 107—112 (1949).

Unter Heranziehung der von Hencky erkannten Bedeutung der Fließlinien für das plastische Gleichgewicht wird ein einfaches numerisch-graphisches Lösungsverfahren angegeben zur Bestimmung des Gleichgewichts eines ideal-plastischen ebenen Körpers mit beliebiger Berandung. Die Rechnung wird durchgeführt für den Fall eines lastfreien elliptischen Randes für verschiedene Werte des Hauptachsenverhältnisses und weiter für die Bestimmung der Last, die in einem auf Zug beanspruchten Flachstab mit 2 elliptischen Außenkerben Fließen hervorruft. In ähnlicher Weise läßt sich auch der Zugstab mit elliptischem Loch behandeln.
*R. Moufang* (Frankfurt a. M.).

**Dorn, John E.: Stress-strain rate relations for anisotropic plastic flow.** J. appl. Physics, Lancaster Pa. **20**, 15—20 (1949).

Bisher liegen wenig Untersuchungen vor zur Beschreibung des plastischen Verhaltens anisotroper Stoffe. Für gewalzte Bleche wird hier eine Systematik versucht mit der Grundannahme, daß die Verzerrungsgeschwindigkeiten in erster Näherung linear von den Spannungen abhängen; die 36 Koeffizienten der Zuordnung hängen dabei von der Vorgeschichte und dem Verformungsgrad ab. Bei ebenem plastischen Fließen reduzieren sie sich auf 9 und unter Berücksichtigung der in jedem gewalzten Metall vorhandenen Symmetrieebenen weiter auf 5. Im Falle verschwindender Volumendehnung gehen bei voller Symmetrie in den 3 Koordinatenrichtungen diese Gleichungen in das übliche Verformungsgesetz über. Die Abhängigkeit der Fließspannung $\sigma$ von der Verfestigung wird auch bei Anisotropie versuchsweise durch die Formänderungsenergie erfaßt in Analogie zum R. Schmidtschen Verfestigungsgesetz. Bisher liegt nur ein Versuch vor, der jedoch nur bei kleinen Formänderungen die Unabhängigkeit der Verfestigungskurve von der Belastungsart zeigt. Die Fließbedingung von Mises gibt für verschiedene Grade der Symmetrie ein wenig voneinander abweichende Ellipsen. *R. Moufang* (Frankfurt a. M.).

**Cattaneo, Carlo: Sul calcolo di alcuni potenziali e sul loro intervento nella risoluzione di particolari problemi armonici.** Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena **3**, 29—45 (1949).

Man bilde mit $\mu^s = \sqrt{1-\varrho^2/a^2}^s$, $\varrho^2 = x^2+y^2$, $(s=-1, 1, 3, 5, \ldots)$ das Potential $V_s(x,y,z) = \int_\sigma \mu^s \frac{1}{r} d\sigma$ einer in der $xy$-Ebene gelegenen Kreisscheibe $\sigma$ vom Radius $a$ um den Nullpunkt, die mit der Massendichte $\mu^s$ belegt ist. Ist $\bar{V}_s(x,y) = \lim_{z\to 0} V_s(x,y,z)$, so sind alle $\bar{V}_s$ Polynome in $\varrho^2$ vom Grade $\frac{1}{2}(s+1)$ mit rekursiv berechenbaren Koeffizienten. Die $\bar{V}_s$ sind von Nutzen zur Lösung einiger Probleme der Potentialtheorie für den Halbraum mit gemischten Randbedingungen an der Begrenzungsebene, z. B. 1. In $\sigma$ sei ein beliebiges Polynom $P_n(x,y)$, das nur von $\varrho^2$ abhängt, vom Grade $n$ gegeben. Gesucht ist eine in $z \geq 0$ reguläre Potentialfunktion $\varphi(x,y,z)$, die im Unendlichen verschwindet, so daß

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \text{ in } z=0 \text{ für } \varrho > a,\ \varphi = P_n(x,y) \text{ in } z=0 \text{ für } \varrho \leq a.$$

Die allgemeinere Aufgabe, daß das Polynom in beliebiger Weise von $x$, $y$ abhängt, läßt sich auf diese zurückführen. 2. Man bestimme die elastischen Schwingungen einer Kreisscheibe um eine Gleichgewichtslage in einer unendlich ausgedehnten, von Reibung und Massenkräften freien Flüssigkeit konstanter Dichte. Als Formänderungen der Scheibe sind normale Verschiebungen und Drehungen um einen Durchmesser zugelassen. Es zeigt sich, daß die Anwesenheit der Flüssigkeit keine Dämpfung der elastischen Schwingungen der Scheibe bewirkt, sie erniedrigt nur die Hauptfrequenzen der Schwingung. *Moufang* (Frankfurt a. M.).

**Cooper, J. L. B.: The propagation of elastic waves in a rod.** Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, London, VII. S. **38**, 1—22 (1947).

Bei periodischen elastischen Wellen längs eines Stabs gibt es zu jeder Wellenlänge eine unendliche Folge diskreter Phasengeschwindigkeiten, welche einer Folge verschiedener möglicher Schwingungszustände entsprechen. Diese Phasengeschwindigkeiten variieren mit der Wellenlänge und nehmen Werte bis unendlich an. Trotzdem muß man erwarten, daß etwa die Front einer Stoßwelle sich längs des Stabes nicht schneller als mit der Geschwindigkeit $V_D$ der Dichtewellen fortpflanzen kann. Verf. sucht diese Erwartung aus der Theorie der Stabwellen zu bestätigen. Zur Vereinfachung wird das Problem nur zweidimensional behandelt, d. h. statt eines Stabes wird eine Platte betrachtet. Der Deformationszustand kann dann aus zwei Potentialfunktionen $\varphi(x,y,t)$ und $\psi(x,y,t)$ abgeleitet werden, die den Wellengleichungen

$$V_D^2 \Delta\varphi = \partial^2\varphi/\partial t^2,\quad V_n^2 \Delta\psi = \partial^2\psi/\partial t^2$$

genügen ($V_D$, $V_n$ Geschwindigkeiten der Dichte- und Schubwellen). An der Plattenoberfläche $y = \pm b$ müssen $\varphi$, $\psi$ Randbedingungen erfüllen, die die Spannungsfreiheit ausdrücken. — Vorgegeben sei ein etwa durch Stoß erzeugter Anfangszustand $\varphi(x,y,0)$, $\psi(x,y,0)$, $\varphi_t(x,y,0)$, $\psi_t(x,y,0)$, und zwar seien Anfangsdeformation und Deformationsgeschwindigkeit nur in einem beschränkten räumlichen Bereich von null verschieden. — Die Lösung der Aufgabe läßt sich in der Form einer Fourierdarstellung

$$(1)\qquad \varphi = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{i\beta-\infty}^{i\beta+\infty} \left[\int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \Phi(y,p,w)\, e^{-i(wt+px)}\, dw\right] dp \quad (\alpha, \beta \text{ beliebig} > 0)$$

(analog für $\psi$) geben, wo die Fouriertransformierte $\Phi$ quellenmäßig durch die Fouriertransformierten der obigen Anfangswerte dargestellt werden kann. $\Phi$ erweist sich als meromorphe Funktion von $w$ und ist regulär in $\operatorname{Im} w > 0$ (für $t > 0$). Mit den Residuen $\frac{1}{i} Z(y,p,w_n)$ von $\Phi(y,p,q)$ kann (1) dann verwandelt werden in

$$(2)\qquad \varphi = \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_{i\beta-\infty}^{i\beta+\infty} Z(y,p,w_n)\, e^{-i(w_n t+px)}\, dp.$$

Verf. zeigt nun, daß für $p \to i\infty$ die Pole $w_n(p)$ teils $\to p\, V_D$, teils $\to p\, V_h$ und teils $\to p\, V_s$ ($V_s$ = Geschwindigkeit der Rayleighschen Oberflächenwellen) streben. Daraus folgert er dann durch Verlegung des Integrationswegs in (2) nach $\beta \to \infty$, daß die Grenze zwischen erregtem und unerregtem Gebiet höchstens mit der Geschwindigkeit $V_D$ fortschreitet. — Für reelle $p$ werden auch die Pole $w_n(p)$ reell; sie entsprechen dann den möglichen rein periodischen Plattenwellen [die schon von Rayleigh und Lamb untersucht worden sind (Anm. d. Ref.)]. Deren Phasengeschwindigkeit $V = w_n/p$ in Abhängigkeit von $p$ wird ausführlich diskutiert. Daß $V$ Werte $V > V_D$ annehmen kann, macht Verf. anschaulich verständlich durch den Hinweis, daß diese Plattenwellen aus ebenen Wellen bestehen, die zwischen den Plattenoberflächen im allgemeinen schräg im Zick-Zack hin- und herreflektiert werden. *A. Schoch* (Göttingen).

**Pailloux, Henri: Choc longitudinal d'une barre prismatique.** C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 2006—2008 (1949).

Ein homogener Balken vom Querschnitt $A$ habe die Dichte $\varrho$ und den Elastizitätsmodul $E$. Seine eine Basisfläche falle mit $x = 0$, die andere mit $x = 1$ zusammen. Im Augenblick $t = 0$ stoße eine Masse $m$ mit der Geschwindigkeit $V$ gegen das Ende $x = 1$ des Balkens, dessen Masse $M$ sei. Zur Bestimmung der Verrückung $u(x, t)$ der Balkenteilchen und der dort herrschenden Spannung $S(t, x)$ ist die Integration der Schwingungsgleichung $\partial^2 u/\partial t^2 = a^2\, \partial^2 u/\partial x^2$, $a^2 = E/p$ unter den Anfangs- und Randbedingungen $u(x, 0) = 0$ für $0 \leq x \leq 1$, $\partial u/\partial t|_{t=0} = 0$ für $0 \leq x < 1$ und $= V$ für $x = 1$ sowie $u(0, t) = 0$, $S(1, t) = m\, \partial^2 u\,(1, t)/\partial t^2$ erforderlich. Die Lösung wird durch Entwicklung nach Orthogonalfunktionen entsprechend

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \alpha_n a t + B_n \sin \alpha_n a t) \sin \alpha_n x$$

gefunden, wo $\alpha_n$ die $n$-te Wurzel der transzendenten Gleichung $\alpha \operatorname{tg} \alpha = M/m = k$ bedeutet. Es ergibt sich

$$u(x, t) = \frac{4V}{ka} \sum \frac{\sin \alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha} \sin \alpha a t \cdot \sin \alpha x,$$

wo über alle positiven Wurzeln $\alpha$ zu summieren ist. In ähnlicher Weise wird der Ausdruck für die Spannungsverteilung im Balken gefunden. *Hardtwig.*

● **Reiner, Markus: Deformation of flow: an elementary introduction to theoretical rheology.** London: H. K. Lewis and Co., Ltd., 1949. XIX, 346 p.; 32 s. 6 d. net.

**Tjabin, N. V.: Die Grundgleichungen der Rheologie einer Maxwellschen Flüssigkeit.** Z. eksper. teor. Fiziki, Moskva, Leningrad **19**, 559—560 (1949) [Russisch].

L'A. établit l'équation fondamentale du phénomène d'une manière originale et donne les lois de la similitude pour les mouvements que cette équation gouverne. *J. Kravtchenko* (Grenoble).

**Bartenev, G. M.: Die Abhängigkeit der Festigkeit von der Zeit der Einwirkung der Belastung bei brüchigem Zerreißen.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **71**, 23—26 (1950) [Russisch].

## Hydrodynamik:

**Ghosh, N. L.: A note on the equilibrium of fluid matter in a steady differential rotation.** Bull. Calcutta math. Soc. **39**, 131—138 (1947).

Verf. beschäftigt sich mit Flüssigkeitsmassen, deren Teilchen mit variabler Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um eine feste Achse rotieren. Die Bedingung, daß das Gravitationspotential $\Phi$ eine Funktion des Dichte $\varrho$ allein ist, bedingt, daß $\varrho\, \omega^2$ eine Funktion des Abstandes $r$ von der Achse und $|\nabla \varrho|^2$ und $\nabla^2 \varrho$ Funktionen von $\varrho$ sind. Als Illustration werden drei verschiedene Konfigurationen eines schweren kugelförmigen Kernes mit einer rotierenden Atmosphäre näher betrachtet. Eine Druck-Dichte-Relation wird nicht angenommen. *E. Hölder* (Leipzig).

**Moreau, Jean-Jacques: Sur l'interprétation tourbillonnaire des surfaces de glissement.** C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1923—1925 (1949).

Bekanntlich faßt man eine Unstetigkeitsfläche der Geschwindigkeit in der Hydrodynamik gerne als eine konzentrierte Wirbelfläche auf. Verf. sucht Bedingungen dafür, daß diese Auffassung konsequent durchgeführt werden kann. Sie sei invariant gegen lineare Integraltransformationen und auch gewisse quadratische Transformationen. Es wird eine Formel für die Ableitung der tangentialen Wirbelkomponente abgeleitet und daraus auf die Zulässigkeit der Konstruktion von Wirbelfäden geschlossen. *Hamel* (Landshut).

**Olver, F. W. J.: Transformation of certain series occurring in aerodynamic interference calculations.** Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford **2**, 452—457 (1949).

Da die bei aerodynamischen Rechnungen auftretende Doppelreihe

$$(1)\qquad F(\alpha,\beta)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^n\,[f_n(\alpha-m)-f_n(\beta-m)],$$
$$f_n(y)=y(y^2+2\mu^2n^2)/n^2(y^2+\mu^2n^2)^{3/2}$$

($\alpha,\beta$ reelle Parameter, $\mu$ positiver Parameter) sehr langsam konvergiert und auf direktem Wege schwer auszuwerten ist, obwohl W. S. Brown [Wind tunnel corrections on ground effect, Aeronaut. Research Committee, Rep. Mem. No. 1865 (1938)] eine Restabschätzung gegeben hatte, wendet Verf. die folgende Umformung an

$$(2)\qquad F(\alpha,\beta)=\chi(\beta)-\chi(\alpha)\qquad\text{mit}\qquad(3)\qquad\chi(x)=\pi^2x/6+\sum_{s=1}^{\infty}k_s\sin 2\pi s x$$

$$(4)\qquad k_s=8\pi\mu^2 s\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}K_0(2\pi\mu s n)+4\mu\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\{K_1(2\pi\mu s n)\}/n,$$

wo $K_\nu(z)$ die modifizierte Besselfunktion bedeutet. Die Reihen (3), (4) konvergieren sehr schnell, außer wenn $\mu$ sehr klein ist. Die Herleitung der Identität (2) erfolgt auf dem Weg über das Komplexe, insbesondere mit Hilfe des Cauchyschen Residuensatzes. Für einige praktisch wichtige Fälle werden die Koeffizienten der neuen Reihe (4) mitgeteilt. Ferner wird darauf hingewiesen, daß langsam konvergierende Reihen der allgemeineren Form $f_n(y)=\psi_n(y,\mu)\,(y^2+\mu^2n^2)^{-r+1/2}$ ($r>0$ ganz, $\psi_n(y,\mu)$ ein Polynom in $y$) sowie der Gestalt $\sum_{m=-\infty}^{\infty}\{g(\alpha-m)-g(\beta-m)\}$, $g(y)=\psi(y,\mu)/(y^2+\mu^2)^{-(r+1/2)}$ ($\psi(y,\mu)$ ein Polynom in $y$) sich nach der gleichen Methode in schneller konvergierende Reihen überführenlassen. *Garten.*

**Reuter, G. E. H.: Note on the preceding paper.** Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford **2**, 457—459 (1949).

Die Olversche Identität (s. vorsteh. Referat) gewinnt Verf. auf einem neuen Wege unter Benutzung der Poissonschen Formel. *Garten* (Tübingen).

**Vazsonyi, Andrew: On the aerodynamic design of axial-flow compressors and turbines.** J. appl. Mech., New York **15**, 53—64 (1948).

Verf. entwickelt ein graphisches Verfahren zur Ermittlung der Strömung einer vollkommenen, reibungslosen und unzusammendrückbaren Flüssigkeit durch eine kaskadenförmige Anordnung von beliebigen Profilen. Er stützt sich dabei vor allem auf die mit Mitteln der konformen Abbildung und der Potentialtheorie erzielten Ergebnisse von R. A. Howell (Note on the theory of arbitrary airfoils in cascade, Royal Aircraft Establishment, Farnborough, England, Note No. E. 3859, 1941). Die Bestimmung der beiden charakteristischen Kaskadenparameter (d. h. der Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit in Richtung der Kaskadenachse auf der Rückseite der Profile jeweils beim Anblasen senkrecht oder parallel zur Achse) erfolgt aus mehreren Kurvenblättern. Sodann lassen sich aus einer Formelzusammenstellung der Druckanstieg, die Luftkräfte und der Ablenkungswinkel entnehmen. *Garten* (Tübingen).

**Rubinštejn, L. I.: Über ein hydrodynamisches Problem.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **68**, 821—824 (1949) [Russisch].

L'A. cherche à construire l'écoulement permanent d'un fluide visqueux incompressible dans le domaine: $0 \leqq x \leqq a$, $-\infty \leqq y \leqq \infty$, $\zeta(x, y) \leqq z \leqq c$; les équations du mouvement sont linéarisées; le fluide est placé dans le champ de la pesanteur; on tient compte des forces de Coriolis dues à la rotation de la terre (tout en en négligeant certaines composantes); on admet qu'aucun des éléments du mouvement ne dépend de $y$; à la surface libre, a priori inconnue: $z = \zeta(x, y)$ sont appliqués des efforts tangentiels d'intensité constante; $|\zeta|$ est petit: on rapportera, dès lors, à $z = 0$ les conditions frontières valables sur: $z = \zeta(x, y)$. Nous omettons d'expliciter toutes les autres conditions aux limites imposées à la solution. — Ce problème généralise ceux étudiés par Leibensohn (Izvestija Akad. Nauk. SSSR, Sér. geograf, geofiz. **1940**, Nr. 5); il se ramène à un système infini d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Ce système est regulier: de la, un théorème d'existence et d'unicité pour le problème posé. *J. Kravtchenko* (Grenoble).

**Supino, Giulio: Sul moto irrotazionale dei liquidi viscosi.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. **6**, 615—620 (1949)

Verf. beschäftigt sich mit der Frage nach der Möglichkeit wirbelfreier Bewegungen bei zähen Flüssigkeiten. Unter der Voraussetzung, daß zähe Flüssigkeiten an den Wänden haften, werden die folgenden drei Behauptungen bewiesen: 1. Eine zähe Flüssigkeit kann sich nicht wirbelfrei bewegen, wenn sie, zu einem noch so kleinen Teil, von einer festen oder in Translation befindlichen starren Wand begrenzt wird. 2. Im Fall starrer und zugleich bewegter Wände (und bei einer Schraubenbewegung oder wenigstens einfacher Drehbewegung) führt die Frage nach wirbelfreien Bewegungen auf überzählige und i. a. unverträgliche Bedingungen. Man kann zwar nicht behaupten, daß diese Bedingungen in allen Fällen unverträglich sind, da zwei wirbelfreie Bewegungen parallel zu einer festen Ebene tatsächlich angeführt werden, doch sind dies die einzig möglichen Fälle dieser Art in zwei Dimensionen. 3. Wird endlich die zähe Flüssigkeit nur von einer freien Oberfläche begrenzt, so gibt es keine wirbelfreien Bewegungen, wenn das von der Flüssigkeit erfüllte Gebiet einfach zusammenhängend und beschränkt ist, während im Fall eines Kanals keine wirbelfreie und permanente Wellenbewegung vorkommen kann. *Garten.*

**Holstein, H.: Über die äußere und innere Reibungsschicht bei Störungen laminarer Strömungen.** Z. angew. Math. Mech. **30**, 25—49 (1950).

Die vorliegende Arbeit liefert einen Beitrag zur mathematischen Vertiefung der Stabilitätstheorie der laminaren Reibungsschicht von W. Tollmien. Nachdem diese Theorie neuerdings durch experimentelle Untersuchungen von Schubauer und Skramstad in vorzüglicher Weise bestätigt worden ist, werden hier jetzt die bisher noch vorhanden gewesenen Unvollkommenheiten der älteren theoretischen Arbeiten beseitigt. Mathematisch handelt es sich um das Eigenwertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung 4. Ordnung, der sog. Störungsdifferentialgleichung. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung wird durch zwei Paare von Näherungs-Partikular-Lösungen dargestellt. Dabei spielt die sog. kritische Schicht eine besondere Rolle, wo die Geschwindigkeit der Grundströmung übereinstimmt mit der Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit der Störungsbewegung. Das eine Paar dieser Lösungen, welches rasch veränderlich ist, ist von den speziellen Daten der Laminarströmung unabhängig und nur in unmittelbarer Wandnähe wichtig („äußere Reibungsschicht"). Es läßt sich durch Besselsche und Hankelsche Funktionen darstellen und wird hier mit größerer Genauigkeit als bisher tabuliert. Die eine Lösung des anderen Lösungspaares weist, reibungslos gerechnet, in der kritischen Schicht eine Singularität auf, die durch eine „Reibungskorrektur" („innere Reibungsschicht") behoben werden muß. Diese Reibungskorrektur, die einen wichtigen Kernpunkt der ganzen Stabilitätstheorie

bildet, wird eingehender als bisher untersucht. — Im ganzen ergibt sich eine so gute Übereinstimmung mit den bisherigen Arbeiten zur Stabilitätstheorie der Göttinger Schule, daß deren Ergebnisse nunmehr auch von der theoretischen Seite her völlig gesichert sind. — Zu einigen einschlägigen Arbeiten von Lin und Meksyn werden kritische Bemerkungen gemacht, durch die einige Irrtümer dieser Arbeiten aufgezeigt werden. *H. Schlichting* (Braunschweig).

**Loicjanskij, L. G.: Angenäherte Integrationsmethode der Gleichungen der laminaren Grenzschicht in einem inkompressiblen Gase.** Priklad. Mat. Mech., Moskva **13**, 513—524 (1949) [Russisch].

$U(x)$ étant la vitesse, connue a priori, de l'écoulement à la frontière de la couche, les équations du mouvement plan peuvent être mises sous la forme

$$(1)\qquad L(u,v)=\frac{\partial}{\partial x}[u(U-u)]+\frac{\partial}{\partial y}[v(U-u)]+U'(U-u)-\nu\frac{\partial^2(U-u)}{\partial y^2}=0,$$

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

où $u$ et $v$ ont la signification habituelle. Remplaçons dans (1) $v$ par sa valeur tirée de (2); on aura alors:

$$(3)\qquad \int_0^{\delta(x)} L(u,v)\,y^k\,dy=0;\quad k=0,1,2,\ldots,\infty,$$

où $\delta(x)$ est l'épaisseur de la couche au point d'abscisse $x$ [cas limite: $\delta(x)=\infty$]. A noter que pour $k=0$ et $k=1$, (3) équivaut à des relations classiques. L'A. cherche alors $n$ fonctions $\lambda_i(x)$ telles que la fonction: $u=u^0[x,y,\lambda_1(x),\lambda_2(x),\ldots,\lambda_h(x)]$ vérifie les conditions frontières imposées à $u$ et satisfasse à $n$ premières relations (3). Si on admet que la théorie des moments s'applique à l'espèce (à noter qu'içi l'intervalle d'intégration a une limite variable, eventuellement infinie) et si le passage $n\to\infty$ est légitime, $u=\lim_{n\to\infty} u^0$ fournit une solution du problème de la couche limite. Laissant de côté la justification rigoureuse de ces assertions, l'A. indique une méthode approchée pour le calcul explicite d'une solution. A cet effet, il fait un choix de paramètres qui fixent le mieux, selon lui, la forme des profils des vitesses et il les calcule numériquement au moyen des équations (3), dans le cas où le solide immergé est une plaque plane et où $\delta(x)=\infty$. La concordance des formules ainsi obtenues avec quelques solutions exactes connues paraît bonne. *Kravtchenko.*

**Dolidze, D. E.: Nichtlineare Randwertaufgabe der instationären Bewegung einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit.** Priklad. Mat. Mech., Moskva **12**, 165—180 (1949) [Russisch].

L'A. aborde le problème fondamental de l'hydrodynamique des fluides visqueux incompressibles, animés de mouvements non-permanents. — Soit $D$, un domaine tri-dimensionnel, simplement connexe, limité par une surface fixe $F$; $F$ admet en chacun de ses points un plan tangent et une courbure continus. Le problème revient à déterminer dans $D$ le champs des vitesses $\vec{V}(x_1, x_2, x_3, t)$, régulier (c. a. d. admettant $\partial\vec{V}/\partial t$ et $\partial^2\vec{V}/\partial x_i^2$ continus dans $D$), tel que: 1) $\vec{V}$ soit solution du système de Navier et vérifie: div $\vec{V}=0$. 2) $\vec{V}$ soit connu sur $F$, à tout instant $t>0$. 3) $\vec{V}(x_1, x_2, x_3, 0)$ soit une donneé (dans tout $D$). Des conditions supplémentaires sont à imposer à $\vec{V}$ dans le cas du problème extérieur. — Un processus des approximations successives permet à l'A. de former la solution sous forme de séries procédant suivant les puissances de la densité $\varrho$, absolument et uniformément convergentes pour $\sqrt{t}<1/9\sqrt{\pi\varrho}\,A\,\alpha$, où $A$ est une constante dépendant seulement des conditions frontières, $\alpha$ une constante dépendant seulement de $D$. Ce résultat d'existence est complété ensuite par un théorème d'unicité. — Des conclusions analogues valent aussi pour le problème plan. — Les raisonnements se simplifient lorsqu'on linéarise partiellement les termes

d'inertie des équations de Navier au moyen du procédé d'Oseen. — La bibliographie de l'A. ne mentionne pas les travaux antérieurs d'Oseen et de Leray.
*J. Kravtchenko* (Grenoble).

**Kolmogorov, A. N.: Über die Zerstückelung von Tropfen in turbulenter Strömung.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **66**, 825—828 (1949) [Russisch].

Baranaev, Teverovsky et Tregoubova [Doklady Akad. Nauk. SSSR, n. S. **66**, 821—825 (1949)] publient une série de mesures intéressant le phénomène de fractionnement des gouttes du liquide, appelé „second", placées dans le courant turbulent du „premier" liquide, de même densité, mais de viscosité différente. — Ces expériences, faites avec soin, peuvent servir au contrôle de la théorie de la structure locale de la turbulence, due à l'A.; celui-ci discute à ce point de vue les conclusions de l'article précité — que nous désignerons par B. dans la suite et dont nous respecterons les notations. — Certaines mesures de B. ont été interprétées par les auteurs de ce travail comme incompatibles avec la formule asymptotique $f(k) \sim k^2$ (pour $k$ petit) de l'A.; celui-ci refute cette assertion de B. — Ensuite, l'A. critique le schéma proposé dans B. pour rendre compte de l'évolution d'une veine mince du „second" liquide, introduite dans le courant turbulent du „premier", veine qui finit par se resoudre en gouttes de plus en plus fines. Il discute le rôle respectif des divers facteurs (différence des coefficients de viscosité de deux liquides, tension superficielle) en fonction du diamètre $d$ de la goutte; il caractérise les paramètres qui gouvernent le phénomène et est ainsi conduit à donner une expression du diamètre $d_0$ des gouttes possédant une certaine stabilité dans le courant. — Les prévisions théoriques sont comparées aux résultats des mesures; l'A. insiste sur les inévitables incertitudes de ces interprétations. — A la fin, l'A. fixe le plan des recherches à entreprendre en énonçant quelques problèmes tant théoriques qu'expérimentaux. *J. Kravtchenko* (Grenoble).

**Fajnzil'ber, A. M.: Wärmeverluste der Energie in Strömungen einer zähen Flüssigkeit bei großen Reynoldsschen Zahlen.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **69**, 503—506 (1949) [Russisch].

L'A. introduit la fonction sans dimension $E_1 = 2\nu(\partial u/\partial y)^2/\bar{u}_k^2$ (ou $\bar{u}_k$ est une constante convenable) qui donne la perte relative d'énergie dans un écoulement plan de fluide visqueux incompressible. Il indique ensuite les conditions que vérifie $E_1$, qu'il détermine ensuite d'une manière approchée. L'A. déduit de là la loi de repartition des vitesses et, dans quelques cas particuliers, la loi des températures.
*J. Kravtchenko* (Grenoble).

**Fajnzil'ber, A. M.: Über die Zurückführung der Gleichungen eines zähen Gases auf Quadraturen.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **57**, 439—442 (1947) [Russisch].

La détermination de l'écoulement permanent, plan d'un gaz visqueux se ramène, au moyen d'un changement de variables et de fonction à l'integration de l'équation

$$z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - m p (1-y^2)^n \frac{\partial z}{\partial y} - p\, y\, (1-y^2)^{n-1} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

avec des conditions aux limites convenables. L'A. cherche des solutions de la forme: $z = A(x)\, B_n(y)$; $A$ et $B_n$ se déterminent au moyen de quadratures. L'A. signale un autre cas de reduction aux quadratures: c'est celui du domaine des grandes vitesses. — La même méthode s'applique aussi aux écoulements de révolution; mais alors le problème n'a été reduit aux quadratures que dans un cas particulier.
*J. Kravtchenko* (Grenoble).

**Prim, R. C.: A new superposition principle for steady gas flows.** Quart. appl. Math. **7**, 445—450 (1950).

H. Poritsky hat 1945 darauf hingewiesen, daß man aus ebenen Gasströmungen durch Hinzufügung einer konstanten Normalgeschwindigkeit räumliche Strömungen gewinnen kann, was ja unmittelbar aus dem Galilei-Newtonschen Relativitätsprinzip folgt. Andererseits hat R. C. Prim (dies. Zbl. **33**, 417) für Gase mit einer Zustandsgleichung der Form $\varrho = P(p)\, S(s)$ ein Substitutionsprinzip entwickelt, nach dem man aus einer bekannten Gasströmung sofort weitere, im allgemeinen nicht mehr rotationsfreie ableiten kann. Durch Verbindung beider Gedankengänge ergibt sich ein allgemeineres Substitutionsprinzip für räumliche Gasströmungen. Die so gewonnenen Beziehungen werden insbesondere auf „verallgemeinerte Beltrami-Strömungen" angewandt, die dadurch ausgezeichnet sind, daß $\mathfrak{W} \times \mathrm{rot}\, \mathfrak{W} = 0$,

wobei $\mathfrak{W} = \mathfrak{V}/a$ der reduzierte Geschwindigkeitsvektor und $a$ der maximal erreichbare Geschwindigkeitsbetrag (bei Expansion ins Vakuum) ist. *Wuest.*

**Tomotika, S. and K. Tamada: Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluid. Part I.** Quart. appl. Math. **7**, 381—397 (1950).

Die bekannten mathematischen Schwierigkeiten bei der Lösung der gasdynamischen Grundgleichung für den Fall einer Strömung mit Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit im Inneren des Strömungsbereichs werden hier durch eine bemerkenswerte Approximation umgangen. Die Veränderliche

$$w = \int_1^q \frac{\varrho}{q}\, dq,$$

worin $\varrho$ die Dichte des Gases, $q$ den Betrag der Strömungsgeschwindigkeit bezeichnen — beide so normiert, daß sie dort, wo örtlich die Schallgeschwindigkeit erreicht wird, den Wert 1 annehmen —, ist in einem Bereich, in dem die Strömung, nicht stark von einer gleichförmigen Strömung abweichend, die Schallgeschwindigkeit durchschreitet, dem Betrage nach klein. Unter Beschränkung auf Strömungen dieser Art kann man daher in Potenzentwicklungen nach $w$ höhere Potenzen vernachlässigen. Im Rahmen einer solchen Approximation gelangen die Verff. zu einer Differentialgleichung der Gestalt $(kw)_{\psi\psi} = \{(kw)^2\}_{\varphi\varphi}$ als approximativ gültige Grundgleichung (anders gesagt: als exakte Gleichung für die Strömung eines hypothetischen Gases, dessen Verhalten in Nähe der Schallgeschwindigkeit gut mit dem des gegebenen Gases übereinstimmt); darin ist $\varphi$ das Geschwindigkeitspotential, $\psi$ die Stromfunktion, $k = (\gamma + 1)/2$, wo $\gamma$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen bedeutet. Für diese Differentialgleichung lassen sich eine ganze Reihe interessanter partikulärer Integrale angeben. Insbesondere werden ausführlich behandelt die Strömung durch eine Düse mit zwei Verengungen und die Strömung durch eine Laval-Düse. Im Falle der Laval-Düse interessiert die Frage nach der Möglichkeit eines Übergangs vom Taylorschen zum Meyerschen Strömungstypus. Diese Frage ist bisher für die strenge gasdynamische Grundgleichung mittels Doppelreihenentwicklung nach den kartesischen Koordinaten der Strömungsebene behandelt worden (Taylor, Görtler). Für ihr hypothetisches Gas mit der oben angegebenen Grundgleichung können die Verff. exakte Lösungen angeben. Allerdings bleibt die Gestalt der Düsenwände bei der Gesamtheit der von ihnen betrachteten Lösungen nicht exakt die gleiche. Immerhin erhärtet das Verhalten dieser Lösungen das bisherige Ergebnis anderweitiger Überlegungen, wonach ein kontinuierlicher und regulärer Übergang zwischen beiden Strömungstypen nicht möglich erscheint.

*H. Görtler* (Freiburg i. Br.).

**Coburn, N.: Degenerate two-dimensional non-steady irrotational flows of a compressible gas.** Quart. appl. Math. **7**, 439—443 (1950).

Die Untersuchung bezieht sich auf einen Sonderfall von ebenen nichtstationären Überschallströmungen, bei dem das Charakteristikennnetz unabhängig von der Zeit ist. Die Zeitabhängigkeit besteht daher nur darin, daß sowohl die beiden Geschwindigkeitskomponenten als auch die Schallgeschwindigkeit mit der gleichen Zeitfunktion $f(t)$ multipliziert sind, so daß beispielsweise $u = f(t)\,\bar{u}(x, y)$. Die Funktion $f(t)$ ist jedoch nicht frei wählbar, sondern ergibt sich zu $f(t) = -1/(kt + b)$ mit den Konstanten $k$ und $b$. Die Frage, wie solche Strömungen physikalisch zu verwirklichen sind, wird offen gelassen. *Wuest* (Göttingen).

**Galin, L. A.: Schlag auf einen festen Körper, der sich auf der Oberfläche einer kompressiblen Flüssigkeit befindet.** Priclad. Mat. Mech., Moskva **11**, 547—550 (1947) [Russisch].

A l'instant initial, un solide $S$ se trouve en contact, par une portion plane de sa frontière, avec la surface libre d'un fluide compressible élastique (dont seule la

constante $\lambda$ de Lamé est supposée $\neq 0$). Le problème est à deux dimensions; le fluide occupe, à l'époque $t = 0$, le domaine $y \leq 0$. — A l'instant initial $S$ subit une percussion verticale qui lui imprime un mouvement de translation vers le bas; la vitesse initiale est connue. — Après avoir ramené la question à un problème aux limites posé relativement à l'équation des ondes cylindriques, l'A. discute diverses éventualités (conservation ou cessation de contacts), donne l'état des vitesses, calcule la percussion. *J. Kravtchenko* (Grenoble).

**Pillow, A. F.: The formation and growth of shock waves in the one-dimensional motion of a gas.** Proc. Cambridge philos. Soc. **45**, 558—586 (1949).

Vorliegende Arbeit behandelt die eindimensionale, nichtstationäre Gasströmung in einem unendlich langen Rohr, das am einen Ende durch einen beschleunigt bewegten Kolben verschlossen ist. In der $x, t$-Ebene grenzt die der Kolbenstellung zugeordnete Kurve das Strömungsfeld ab. In einem gewissen Anfangszustand treten Stoßwellen noch nicht auf, und das Strömungsfeld der $x, t$-Ebene wird von einer geradlinigen Charakteristik durch den Ursprung in eine ungestörte Zone und eine Zone stetiger Verdichtung geteilt. Bei beschleunigter Kolbenbewegung laufen die „positiven" Charakteristiken jedoch zusammen und bilden schließlich eine Enveloppe. Die Spitze dieser Enveloppe, die berechnet werden kann, bildet den Ausgangspunkt einer Stoßwelle. Durch die Stoßwelle und die durch deren Anfangspunkt laufende Stromlinie wird das Strömungsfeld in zwei weitere Bereiche abgegrenzt, wobei in dem Bereich zwischen Stoßwelle und Stromlinie die Entropie veränderlich ist, während sie in allen übrigen Bereichen konstant ist. Für den mit konstanter Beschleunigung bewegten Kolben wird eine erste Näherung unter Vernachlässigung der Entropieänderung hinter dem Stoß berechnet. Auf dieser Grundlage wird dann eine zweite Näherung für die Entropie in der Nähe der Stoßlinie berechnet, und die Einführung einer „Riemannschen Funktion" und die Befriedigung der Grenzbedingungen am Stoß führt zu einer Integralgleichung, deren Lösung die Lage der Stoßfront als Funktion der Zeit angibt. Die Lösung wird als Potenzreihe entwickelt und gilt für den Fall, daß der Stoß nicht zu stark ist. Wenn dem Kolben schließlich eine konstante Endgeschwindigkeit erteilt wird, läuft von der Stoßfront eine Welle zum Kolben zurück, wird dort reflektiert und holt unter Umständen den Stoß wieder ein, wobei die Geschwindigkeit der Stoßfront auf einen konstanten Endwert herabgesetzt wird. *Wuest* (Göttingen).

**Bryant, A. R.: The pressures exerted by an underwater explosion bubble on a disc-like baffle.** Proc. physic. Soc. London **61**, 341—351 (1948).

Eine kreisförmige, hohle Scheibe (also eine Art flacher Büchse von verschwindender Dicke als vereinfachtes Modell eines Unterwasser-„Ziels") ist in eine Wassermenge von unbegrenzter Ausdehnung getaucht. Auf der Achse der Scheibe vom Radius $C$ befindet sich im Abstand $x_0$ als Schallquelle eine schwingende Gasblase vom zeitabhängigen Radius $a(t)$. Die der Schallquelle zugekehrte Vorderseite der Scheibe sei deformierbar, die Rückseite dagegen vollkommen starr. Zur Vereinfachung wird angenommen, daß durch Angabe der Durchbiegung $z$ des Mittelpunkts der Vorderfläche deren Deformation vollständig bestimmt sei. — Sind die auftretenden Wellenlängen groß im Vergleich mit $C$, dann kann das Medium beim vorliegenden Beugungsproblem als inkompressibel angesehen werden. Es handelt sich damit um ein System mit 2 Freiheitsgraden, dessen Konfiguration durch die generalisierten Koordinaten $a(t)$ und $z(t)$ bestimmt ist. Das Geschwindigkeitspotential $\varphi$ der Mediumströmung setzt sich additiv aus einem zu $\dot{a}$ und einem zu $\dot{z}$ proportionalen Anteil zusammen und kann in der Form geschrieben werden: $\varphi = a^2 \dot{a}\, \varphi_1 + \dot{z}\, \varphi_2$. Für $z(t)$ ergibt sich nach der Lagrangeschen Methode die Bewegungsgleichung

$$\dot{z}(m + M) + k z = \sigma P \frac{d}{dt}(a^2 \dot{a}), \tag{1}$$

worin $m$ die (auf die Ausbiegung $z$ reduzierte) Masse der Vorderfläche der Scheibe, $kz$ die durch die Deformation der Scheibe verursachte Rückstellkraft, $\sigma$ die Dichte des Mediums, ferner

$$M = -\sigma \int \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\, ds, \quad P = \int \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\, ds$$

(Integrale über die Scheibenfläche zu erstrecken). $M$ ist die Zusatzmasse, die infolge der Reaktion des Mediums bei einer Deformation der Scheibe in Erscheinung tritt. Die rechte Seite von (1) gibt den die Deformation bewirkenden Druck. — In den Koordinaten $r$, $s$ des abgeplatteten Rotationsellipsoids ($r = $ const. Ellipsoide, $r = 0$ Zielscheibe, $s = $ const. dazu orthogonale Hyperboloide) werden die Potentialfunktionen $\varphi_1$ und $\varphi_2$ durch Reihenentwicklungen nach Legendreschen Funktionen erster und zweiter Art dargestellt. Verf. zeigt, daß der Wert von $\varphi_1$ für $r = 0$ (physikalisch ist dies die Druckverteilung auf der starren Scheibe, hervorgerufen durch eine Quelle der Stärke $4\pi$ im Punkt $r = r_0$, $s = 1$) sich auf die geschlossene Form bringen läßt:

$$\varphi_1(r_0, 1) = \frac{1}{C\sqrt{r_0^2 - s^2 + 1}} \left[1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{r^2 - s^2 + 1}}{s}\right].$$

Dieses $\varphi_1$, durch das Potential dividiert, das bei gleicher Quelle und abwesender Scheibe vorhanden wäre, ist gleich dem Verhältnis der Drucke mit und ohne starre Scheibe. Für letzteres Verhältnis werden in Diagrammen und Tabellen numerische Werte gegeben. Ebenso für die Druckfunktion $P$ und die Zusatzmasse $M$ bei deformierbarer Scheibe, wobei mit der vereinfachten Annahme gerechnet wird, daß nur ein zentraler, kreisförmiger Teil der Scheibenvorderfläche beweglich ist, und zwar kolbenartig als starres Ganzes. *A. Schoch* (Göttingen).

**Éfros, D. A.: Ähnlichkeit der Strömungen einer Flüssigkeit in einem porösen Medium.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **69**, 623—625 (1949) [Russisch].

L'A. developpe le théorie de la similitude mécanique pour les écoulements (ou filtrations) non-permanents de liquides incompressibles à travers les milieux poreux. Il indique les inégalités que doit vérifier la pression pour assurer la similitude globale et donne les loïs pour les échelles des vitesses, des débits, et des temps. Des exemples numériques complètent l'exposé. *J. Kravtchenko* (Grenoble).

● **Lewitt, E. H.: Hydraulics and the mechanics of fluids.** London: Sir Isaac Pimtan and Sons, Ltd., 1949. X, 630 p.; 21 s. net.

**Silber, Robert: Sur le tracé des écoulements à surface libre.** C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 1124—1126 (1949).

Unter Zugrundelegung dimensionsloser Veränderlicher für Tiefe $y^*$ und sekundliche Wasserführung $q^*$ eines Kanals entwirft Verf. ein Diagramm zur Ermittlung der freien Spiegelflächen, dessen „charakteristische Kurven" für verschiedene Wasserführung untereinander affin sind. Diese sind durch die Gleichung $q^* = y^* \sqrt{1 - y^*}$ bestimmt und ergeben, entsprechend dicht verzeichnet, durch ihre Netzpunkte die erwünschten Zusammenhänge. — Dabei kann nicht nur die Spiegelkurve prismatischer Kanäle von rechteckigem Profil, sondern — durch Beachtung der Veränderlichkeit der Breite mit der Tiefe — auch solcher mit allgemeinerer Querschnittsfläche und schließlich auch nicht prismatischer Kanäle bestimmt werden. — Als „repräsentierende Charakteristik" kann natürlich auch die durch den „pseudokritischen Punkt", der für Rechtecksprofile bekanntlich durch die Beziehung $U = \sqrt{g\,y}$ bestimmt ist, gewählt werden, wenn die Netzteilung auf sie entsprechenden Bezug nimmt. *Karas* (Darmstadt).

## Wärmelehre:

**Domb, C.: Statistical mechanics of some co-operative phenomena.** Nature, London **163**, 775—776 (1949).

Kurzer Bericht über die Weiterführung der Theorie von Kramers, Wannier und Onsager. Nach diesen kann man, unter Beschränkung auf ebene Gitter (Netze) und auf die Wechselwirkung zwischen unmittelbaren Nachbaratomen, die Zustandssumme pro Atom als höchsten Eigenwert $\Lambda$ einer Matrix darstellen. Es wurde für $\Lambda$ im Bereich tiefer Temperaturen eine Potenzreihe nach $z$ ($z$ = Boltzmannfaktor der Wechselwirkungsenergie) angegeben, d. h. man untersuchte im Falle des Ferromagneten dessen Verhalten für verschwindendes Magnetfeld. Verf. gibt nun eine Potenzreihe für $\Lambda$ nach zwei Variablen $z$ und $\mu$ an:

$$\Lambda(\mu, z) = 1 + \mu z^4 + 2\mu^2 z^6 + \cdots,$$

die für $\mu = 1$ in die frühere übergeht. Dabei charakterisiert die Variable $\mu$ das spezielle Problem. Beim Ferromagneten ist $\mu$ der Boltzmannfaktor der doppelten Energie eines Elementarmagneten im Feld, und es gilt $\Lambda(\mu, z) = \mu\,\Lambda(1/\mu, z)$. Im Falle der binären festen Lösung ist $\mu$ eine Funktion des Molenbruchs $\gamma_1$ der einen Komponente, und es gilt $\partial \log \Lambda / \partial \log \mu = \gamma_1$. Stetigkeitsuntersuchungen von $\Lambda$ mittels der Potenzreihe einerseits und den eben genannten Funktionalgleichungen andererseits liefern Aussagen über Umwandlungstemperaturen (z. B. den Curiepunkt) und über die Art des Übergangs. So findet Verf. in Übereinstimmung mit Heisenberg, daß die spezifische Wärme des Ferromagneten am Curiepunkt bei nichtverschwindendem Feld stetig ist. Die binäre feste Lösung zerfällt unter-

halb einer Übergangstemperatur in zwei Phasen, deren eine eine (schwache) Lösung der ersten Komponente in der zweiten ist und deren andere eine (schwache) Lösung der zweiten Komponente in der ersten darstellt. Dabei existiert keine Umwandlungswärme, jedoch eine Unstetigkeit der spezifischen Wärme (Übergang 2. Ordnung). *G. U. Schubert* (München).

**Schlüter, Arnulf: Zur Statistik klassischer Gesamtheiten.** Z. Naturforsch. **3a**, 350—360 (1948).

Verf. zeigt, daß unter der Voraussetzung der strengen Gültigkeit der Ergodenhypothese auch für kleine Teilchenzahlen einige zur statistischen Begründung der Thermodynamik benützte Voraussetzungen überflüssig sind. Die Phasendichte der Gesamtheit kann dann als das Faltungsprodukt der Phasendichten der Einzelteilchen gewonnen werden. Die vom Verf. durchgeführte Methode der Faltung kanonisch invarianter Phasendichten führt zur Definition von Größen, welche die thermodynamischen Differentialgleichungen exakt erfüllen, welche also für eine abgeschlossene Gesamtheit einen bestimmten Betrag haben und nicht statistisch schwanken. Verf. rechnet einige Beispiele durch. *Kofink* (Stuttgart).

**Einbinder, Harvey: Further deductions from the ℵ-theorem.** Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. **76**, 410—412 (1949).

Verf. zeigt mit Hilfe des Aleph-Theorems, daß ein scharfer physikalischer Unterschied zwischen entarteten und nichtentarteten Bose-Einstein-Gasen besteht; zu jeder gegebenen Dichte gehört eine Übergangstemperatur zwischen ihnen. Die entwickelte Methode wendet er auf das relativistische und nichtrelativistische, nichtentartete Quantengas und das entartete Fermi-Dirac-Gas an. *Kofink.*

**Polvani, G.: Il concetto di „traccia di una trasformazione" e il secondo principio della termodinamica.** Rend. Sem. mat. fisico Milano **18**, 140—173 (1948).

**Born, Max: Le second principe de la thermodynamique déduit de la théorie des quanta.** Ann. Inst. Henri Poincaré **11**, 1—13 (1949).

Siehe dies. Zbl. **31**, 136. *J. Meixner* (Aachen).

**Prigogine, I.: Le domaine de validité de la thermodynamique des phénomènes irréversibles.** Physica, The Hague **15**, 272—284 (1949).

Der Gültigkeitsbereich der Gibbsschen Beziehung $T\,dS = dE + p\,dV - \Sigma \mu_i\, dx_i$ in Gasen, in denen irreversible Prozesse ablaufen, wird mit den Methoden der kinetischen Gastheorie von Enskog und Chapman untersucht. Er geht nicht über den Gültigkeitsbereich der zweiten Näherung von Enskog und Chapman hinaus, umfaßt aber immerhin noch recht extreme Verhältnisse hinsichtlich der Transporterscheinungen und schließt chemische Reaktionen ein, die langsam genug sind, um die Gleichgewichtsverteilung jedes Partners nicht wesentlich zu stören (vgl. auch dies. Zbl. **25**, 122; Ref.). *J. Meixner* (Aachen).

**Brodin, J.: Miscibilité des fluides et viriel des forces intermoléculaires.** Ann. Physique, XII. S. **4**, 422—524 (1949).

An Hand einer großen Anzahl graphischer Darstellungen des „Metavolumens" eines binären flüssigen und gasförmigen Gemisches erläutert Verf. den Zusammenhang der Trennung eines Gemisches in 2 Phasen mit dem Verlauf der Kompressibilität, d. h. mit dem Abstandsgesetz der zwischenmolekularen Kräfte. Er diskutiert die Methoden der Thermodynamik der Flüssigkeiten, die experimentelle Bestimmung der thermodynamischen Funktionen der Gemische und die Abhängigkeit der Kompressibilität binärer Systeme von ihrer Zusammensetzung. Als spezielles Beispiel untersucht er das Methan-Propan-Gemisch. Schließlich erörtert er die Grenzen der Mischbarkeit bei verschiedenen Ansätzen für die zwischenmolekularen Kräfte. *Kofink* (Stuttgart).

**Rubinštejn, L. I.: Über die Anfangsgeschwindigkeit der Fortpflanzung der Kristallisationsfront in dem eindimensionalen Problem von Stefan.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **62**, 753—756 (1948) [Russisch].

Die Note handelt von der Ausbreitung der Kristallisationsfront in einem ursprünglich flüssigen Medium [eindimensionales Problem, vgl. J. Stefan, S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl. IIa **98**, 965—983 (1889)]. Bei der Bestimmung der anfänglichen Ausbreitungsgeschwindigkeit längs der Halbgeraden $x \geqq 0$ mögen $u_1(x, t)$ und $u_2(x, t)$ die Temperaturen der festen bzw. flüssigen Phase sein. Die den Vorgang beschreibenden Gleichungen lauten dann:

$$u_{1xx} = u_{1t}, \quad 0 < x < y(t), \tag{1.1}$$

$$a^2 u_{2xx} = u_{2t}, \quad y(t) < x < \infty, \quad t > 0, \tag{1.2}$$

$$u_1(0, t) = f_1(t) \leqq 0, \; u_i[y(t), t] = 0, \; u_2(x, 0) = \varphi(x) \geqq 0, \tag{1.3}$$

$$dy/dt = v_1(t) - v_2(t), \quad v_i(t) = u_{ix}[y(t), t], \quad y(0) = 0. \tag{1.4}$$

Verf. löst die Aufgabe unter der Annahme, daß $f(t)$ und $\varphi(x)$ stetige zweite Ableitungen besitzen, indem er mit dem Ansatz

$$f(t) = -c_0 t^{m_0} + c_1 t^{m_1}[1 + f^*(t)], \; \varphi(x) = b_0 x^{n_0} + b_1 x^{n_1}[1 + \varphi^*(x)],$$

$$\lim_{t \to 0} f^* = \lim_{t \to 0} \varphi^* = 0, \; c_0 > 0, \; b_0 > 0, \; m_0 > -1, \; n_0 > -1, \; m_1 > m_0, \; n_1 > n_0, \tag{1.5}$$

in die beiden Integraldarstellungen der Lösungen der beiden Wärmeleitungsgleichungen (1.1) und (1.2) hineingeht. Ist $f(0) \neq 0$, $\varphi(0) \neq 0$, so folgt

$$v_1(t) = \frac{\alpha_0}{\sqrt{t}}[1 + v_1^*(t)], \; v_2(t) = \frac{\beta_0}{\sqrt{t}}[1 + v_2^*(t)],$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\gamma_0}{\sqrt{t}}[1 + y^*(t)], \tag{3.1}$$

$$\lim_{t \to 0} v_i^* = \lim_{t \to 0} y^* = 0, \; y(t) = 2\gamma_0 \sqrt{t}\,[1 + y^{**}(t)],$$

wo sich die Konstanten $\alpha_0$, $\beta_0$, $\gamma_0$ nach Einsetzen unter Berücksichtigung von (1.4) ergeben. Ist $f \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$, so ist die Lösung durch (3.1) mit $v_i^* \equiv y^* \equiv 0$ gegeben. Dieses Ergebnis stimmt mit dem von J. Stefan überein. In ähnlicher Weise werden die Fälle $\varphi(0) = 0$, $f(0) \neq 0$ und $\varphi(0) = 0$, $f(0) = 0$ behandelt; die mit $f(0) \neq 0$, $\varphi(0) \neq 0$ und $f(0) \neq 0$, $\dot{\varphi}(0) \neq 0$ wurden von A. Huber [Z. angew. Math. Mech. **19**, 1—21 (1939); dies. Zbl. **21**, 173] untersucht. — Im zweiten Teil der Arbeit werden die Lösungen der beiden folgenden Randwertaufgaben erörtert: für $x = 0$ ist 1. der Wärmefluß, 2. die Ausstrahlung vorgegeben. Am Schluß wird eine notwendige Bedingung für das Eintreten der Kristallisation mitgeteilt. *Quade.*

## Elektrodynamik:

**Durand, Émile: Influence d'un champ quelconque sur une sphère ou sur un cylindre circulaire.** C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 188—190 (1950).

L'Autore determina l'induzione che un campo elettrico qualunque esercita su una sfera conduttrice o dielettrica; estende poi i risultati al cilindro circolare. La soluzione nel caso della sfera dielettrica non persuade perche il termine $A$ non risulta, in generale, costante. Il problema della induzione magnetica in una sfera (identico dal punto di vista analitico a quello in discorso) è, del resto, già stato completamente risoluto fin dal 1906 da Boggio (C. r. Acad. Sci., Paris **142**).

*Graffi* (Bologna).

**Taub, A. H.: Orbits of charged particles in constant fields.** Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. **73**, 786—798 (1948).

Es werden die relativistischen Bewegungsgleichungen eines Elektrons in einem räumlich und zeitlich konstanten Feld integriert. Verwendet wird die Matrizenschreibweise. Für die Vierergeschwindigkeit ergibt sich $V = L(s)\, V_0$, wobei $V_0$ die Anfangsvierergeschwindigkeit bedeutet und $L(s)$ die Matrix

$$L(s) = \exp\left(\frac{e}{m_0 c^2}\, sF\right),$$

$F$ die Matrix des Feldtensors $f_\nu^\mu$. Eine eingehende Untersuchung der Matrix $L(s)$ führt den Verf. zu einer ausführlichen Diskussion und Klassifikation der Bahnen. Diese Methode ist auch auf die Bewegung eines Elektrons im Felde einer ebenen Welle anwendbar. *Rinow* (Greifswald).

**Schlomka, Teodor: Die elektrischen und magnetischen Flächenwirbel bei bewegten Körpern.** Ann. Physik, VI. F. **5**, 190—196 (1949).

Den Minkowskischen Gleichungen für bewegte Körper werden die Gleichungen für die Flächendivergenzen und Flächenwirbel an die Seite gestellt: (1) $\mathfrak{n}_{12}(\mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_1) = \varrho_{\text{fl}}$, (2) $\mathfrak{n}_{12}(\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1) = 0$, (3) $\mathfrak{n}_{12} \times (\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1) = (\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2)\, v_{n_{12}} + j_{\text{fl}}$, (4) $\mathfrak{n}_{12} \times (\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1) = -(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2)\, v_{n_{12}}$. $\mathfrak{n}_{12}$ ist die Normale der Begrenzungsfläche, $v_{n_{12}}$ die Normalkomponente ihrer Geschwindigkeit. $\varrho_{\text{fl}}$ und $j_{\text{fl}}$ sind die Flächenladungs- bzw. Flächenstromdichte. Es wird ferner noch die Gleichung für den Flächenwirbel des Feldvektors $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + \mathfrak{v} \times \mathfrak{B}$ abgeleitet. *Rinow* (Greifswald).

**Perkins, Granville A.: Non-radiating Maxwell waves.** Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. **75**, 1947 (1949).

Es werde $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \Phi$ und $\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A} - \operatorname{grad} \Omega$ gesetzt. Verf. zeigt: Wenn die Permeabilität Null wird, also $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = \dot{\mathfrak{B}} = 0$ ist, folgen aus $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \dot{\mathfrak{E}} + \mathfrak{P}$ die Gleichungen

$$\Delta \Phi = \operatorname{div} \mathfrak{P} \quad \text{und} \quad \Delta \mathfrak{A} = -\dot{\mathfrak{P}}.$$

Daraus ergeben sich strahlungsfreie Wellen von $\Phi$ und $\mathfrak{A}$. Die Rechnung gilt nur dort, wo der Viererstrom fehlt. *Bauer.*

**Cullen, A. L.: Channel section wave-guide radiator.** Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, VII. S. **40**, 417—428 (1949).

Es wird eine Mikrowellenantenne theoretisch behandelt, die aus einer rechteckigen Rinne besteht, und einem an einer (schmalen) Seite offenen rechteckigen Hohlleiter entspricht. Setzt man zwei Rinnen der Tiefe $b/2$ mit der offenen Seite (Höhe $a$) aneinander, so erhält man einen rechteckigen Hohlleiter von der Weite $b$, dessen Phasenkonstante annähernd mit der der Rinne übereinstimmt. Verf. setzt für die Phasenkonstante der Rinne (1) $h = 2\pi/\lambda_g = 2\pi\lambda^{-1}\sqrt{1-(\lambda/2b')^2}$ ($\lambda$ = Wellenlänge im freien Raum). Dies ist die Phasenkonstante für einen rechteckigen Hohlleiter der Weite $b'$. Es ist $b' = b + \delta$ und $\delta$ ist eine durch den offenen Rand der Rinne bedingte Korrektur. — Für das (elektrostatische) Randfeld der Rinne wird in komplexen Koordinaten ($z = x + i\,y$) folgender Ausdruck angegeben ($V$ = Potentialdifferenz):

$$Z = \frac{a}{2\pi}\left[\exp\left(\frac{2\pi}{V}[u + j\,v]\right) + \frac{2\pi}{V}[u + j\,v]\right];$$

$v$ = const. gibt die Äquipotentiallinien, $u$ = const. die Feldlinien. Dieses Feld entspricht einer erhöhten Randkapazität, die dadurch in Rechnung gesetzt werden kann, daß man den beiden Wandungen der Rinne einen Streifen von der Breite $\delta = a\,\pi^{-1}\,[1 + \log_e(\pi\,b/a)]$ hinzugefügt denkt. Mit $b' = b + \delta$ ergibt sich aus (1) die Phasenkonstante. Das Experiment ergibt eine genügend genaue Bestätigung. — Die pro Längeneinheit der Rinne ausgestrahlte Leistung ist gegeben durch den reellen Teil der radialen Komponente des komplexen Poyntingschen Vektors, integriert über die Längeneinheit einer beliebigen zylindrischen Fläche, welche die Rinne umgibt. Es ist

$$\frac{dP_r}{dz} = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} E_\varphi\, H_z^*\, r\, d\Phi;$$

$dP_r$ ist die von der Länge $dz$ der Rinne ausgestrahlte Leistung. Die Feldstärken der Zylinderwelle werden in folgender Form dargestellt:

$$E_\varphi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{\partial \psi_n}{\partial r}, \quad H_z = \frac{k^2 - h^2}{j\,\omega\,\mu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n\, \psi_n$$

worin $\psi_n = e^{-jn\varphi}\, H_n^{(2)}(\sqrt{k^2 - h^2}\, r) e^{-jhz}$. Diese Berechnung ergibt:

$$\frac{dP_r}{dz} = \frac{V^2}{4}\sqrt{\frac{\varkappa}{\mu}}\left(\frac{k^2 - h^2}{k}\right) \tag{2}$$

Die Dämpfung der Welle in der Rinne ist durch Strahlungsverluste ($\alpha_r$) und durch Leistungsverluste ($\alpha_m$) bedingt. Demnach ist für den Dämpfungsfaktor zu setzen: $\alpha = \alpha_r + \alpha_m$. Für $\alpha_m$ kann man den Wert für einen rechteckigen Hohlleiter einsetzen: $\alpha_m = \frac{\pi\,\Delta\lambda_g}{\lambda^2}\left[\frac{1}{a} + \frac{\lambda^2}{2b^3}\right]$. Für

$\alpha_r$ folgt mit Hilfe der allgemeinen Beziehung: $\alpha = \frac{1}{2p}\frac{dP}{dz}$ unter Benutzung von (2) der Wert: $\alpha_r = \frac{1}{4}\pi a \lambda_g/b^3$. Die Berechnung wird experimentell mit zufriedenstellender Genauigkeit bestätigt. — Auf die begrenzte Anwendbarkeit der Rinne als Antenne wird hingewiesen. *Lassen.*

**Gans, Richard: Lecher-System in einer Schutzhülle.** Z. Naturforsch. **3a,** 519—521 (1948).

Für die wechselseitige Kapazität der beiden Drähte eines Lechersystems in einem Schutzrohr wird ein Näherungsausdruck abgeleitet, der besser ist als ein früher von F. Breising (Theoretische Telegraphie, 2. Aufl., Braunschweig 1924, S. 68) angegebener. *Rinow* (Greifswald).

**Papas, Charles H.: On the infinitely long cylindrical antenna.** J. appl. Physics, Lancaster Pa. **20,** 437—440 (1949).

Ein unendlich langer, vollkommen leitender kreiszylindrischer Antennendraht vom Radius $a$ wird von einer EMK gespeist, die in irgendeinem im Endlichen gelegenen Querschnitt, an dessen Stelle der unendlich lange, zylindrische Leiter aufgeschnitten worden ist, als endliche Spannungsdifferenz zwischen den dicht gegenüberliegenden Querschnittsebenen wirkend zu denken ist. Die Beziehung für die in Richtung des Zylinders genommene Komponente des elektrischen Feldes, aus der die Ausdrücke für die radiale elektrische Feldstärke und die azimutale magnetische Feldstärke durch Differentiation gewonnen werden, läßt sich ohne Schwierigkeit berechnen. Sie stellt sich in Form eines Fourier-Integrals dar, in dem unter dem Integralzeichen der Quotient $H_0^{(1)}(w\varrho)/H_0^{(1)}(wa)$ mit $\varrho > a$ und $w = (k^2 - \zeta^2)^{1/2}$ vorkommt. $\zeta$ ist darin die Integrationsvariable. — Das Fernfeld einer derart gespeisten Antenne wird vom Verf. mittels der Sattelpunktsmethode berechnet. An Hand des so gefundenen Näherungsausdrucks wird sowohl eine Beziehung für die reelle Komponente des Strahlungswiderstandes als auch eine Beziehung für den Strom in den weit entfernten Teilen des Antennenleiters aufgestellt. Die Formel für den Strahlungswiderstand gilt aber nur im Bereich großer Wellenlängen. — In älteren Aufsätzen der deutschen Literatur sind bereits mit den gleichen Hilfsmitteln ähnliche Rechnungen durchgeführt worden. *H. Buchholz* (Seeheim).

**Tai, C. T.: Application of a variational principle to biconical antennas.** J. appl. Physics, Lancaster Pa. **20,** 1076—1084 (1949).

Es wird die Strahlungsimpedanz einer Doppelkegelantenne berechnet. Das sind Antennen für ultrakurze Wellen, die aus zwei metallisch leitenden, endlich langen Kegeln bestehen, die sich symmetrisch zur Kegelspitze einander gegenüberstehen. Geht die Erregung des Feldes von einem Dipol an der Kegelspitze aus, so sind bei Benutzung von Polarkoordinaten $\mathfrak{E}_\vartheta$, $\mathfrak{E}_r$ und $\mathfrak{H}_\varphi$ die einzigen von Null verschiedenen Feldkomponenten. Für die Herstellung der Lösung werden zwei Bereiche unterschieden, und zwar einmal der Bereich, der von der äußeren Manteloberfläche des Doppelkegels und der Kugelfläche durch die Endquerschnitte des Doppelkegels begrenzt wird. Der zweite Bereich besteht aus dem unbegrenzten Raum außerhalb der Kugel. Es werden dann zunächst in bekannter Weise für beide Raumteile nach der Methode der Partikularlösungen die entsprechenden Lösungsansätze gebildet. Die Forderungen von dem stetigen Durchgang der Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ durch die Kugelfläche, die den oben beschriebenen beiden Bereichen gemeinsam ist, werden dazu benutzt, das Problem als eine Integralgleichung zu formulieren. Darin bildet die gesuchte Funktion unter dem Integralzeichen der Wert von $\mathfrak{E}_\vartheta$ in der erwähnten Kugelfläche, der nur noch allein von $\vartheta$ abhängt. Von hier an wird dann die Lösung nach einer im wesentlichen von Schwinger ausgearbeiteten Methode gewonnen. Sie besteht in der Behandlung der Aufgabe als ein Variationsproblem. — Für kleine Kegelwinkel ergibt sich auf diese Weise dieselbe Lösung wie in einigen älteren Arbeiten. Es wird aber auch eine neue Näherungslösung erster Ordnung hergeleitet, die sich sowohl für kleine wie auch für große Kegelwinkel als gut brauchbar erwiesen haben soll. Außerdem wird noch