Werk

Titel: Analysis

Ort: Berlin

Jahr: 1950

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0033|log30

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

$0 < x \leq \varepsilon t^{n/m}$, für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele Lösungen haben. Verf. beweist dann den Satz: Alle nichtsingulären $\{\Theta_{ij}\}$ sind Čebyševsche Systeme und alle Čebyševschen $\{\Theta_{ij}\}$ sind nicht-singulär. Für den Fall $m = n = 1$ hat schon Čebyšev den Satz bewiesen [Gesammelte Werke, Moskau, 1944, Bd. I, 237—275]. Die Beweismethode, mit der Verf. den Fall $m \geq 1$, $n = 1$ früher erledigen konnte, kann man im allgemeinen nicht anwenden [Acta arith., Warszawa 2, 161—172 (1937); dies. Zbl. 18, 53]. Er beweist jetzt die erste Hälfte des Satzes mit Hilfe der J. L. Mordellschen Methode. Der Beweis der zweiten Hälfte des Satzes ist auf den folgenden Hilfssatz gegründet: Wenn die L_j Čebyševsche Formen sind, dann sind die Formen $M_i = \sum_{j=1}^{n} \Theta_{ij} u_j - v_i$ nicht-singulär. *Gál* (Paris).

Chinčin (Khintchine), A. Ja.: Über die Bruchteile einer Linearform. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **13**, 3—8 (1949) [Russisch].

Soit $\{\lambda\} = \min_{(\nu)} |\nu - \lambda|$ où $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ L'A. démontre le théorème suivant: Soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ n'importe quels nombres réels et soient k, n $(k \leq n)$ entiers positifs. Pour tout $t \geq 1$ ils existent k systèmes des entiers

$$(a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, \ldots, a_n^{(j)}) \quad (1 \leq j \leq k)$$

pour lesquels

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \theta_i a_i^{(j)} \right\} < t^{-1} \quad (1 \leq j \leq k) \quad \text{et} \quad \prod_{j=1}^{k} \max_{(i)} |a_i^{(j)}| < c\,(k, n)\, t^{k/n}.$$

On peut supposer les vecteurs $(a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, \ldots, a_n^{(j)})$ indépendants. Le résultat pour les cas $k < n$ $(n \geq 2)$ est une simple conséquence du cas spécial $k = n$. *Gál* (Paris).

Gel'fond, A. O.: Über die algebraische Unabhängigkeit von transzendenten Zahlen gewisser Klassen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **67**, 13—14 (1949) [Russisch].

Verf. erhielt mit Hilfe seiner früheren Methoden drei Sätze [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **64**, 277—280 (1949)], die ohne Beweise angekündigt werden. Durch Adjunktion einer transzendenten Zahl (oder 0) entstehe der Körper R_0 aus dem Körper der rationalen Zahlen; einen durch Adjunktion der Wurzeln einer Gleichung $\sum c_n x^n = 0$, $c_n \in R_0$, zu R_0 erzeugten Körper nennt Verf. R-Körper. Erster Satz: Seien die Zahlen η_0, η_1, η_2 und $\alpha_0 = 1, \alpha_1, \alpha_2$ unabhängig im Körper der rationalen Zahlen. Wenn für $x > x_0 > 0$ und für alle ganze x_0, x_1, x_2

$$|x_0 \eta_0 + x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2| > e^{-\gamma x \ln x}, \quad |x_i| \leq x; \; i = 1, 2, 3 \tag{1}$$

gilt, dann ist die Erweiterung des Körpers der rationalen Zahlen durch die Zahlen α_1, α_2, $e^{\eta_i \alpha_k}$ $(i = 0, 1, 2; k = 0, 1, 2)$ nicht R-Körper. Im zweiten Satz ist (1) durch eine ähnliche Bedingung ersetzt. Aus dem zweiten Satz folgt, daß wenigstens eine der Zahlen $e^{\pi^{\nu+1}}$, $e^{\pi^{2\nu+2}}$, $e^{\pi^{3\nu+1}}$ transzendent ist. Der dritte Satz gibt eine durch s und $\max_{0 \leq \nu \leq s} |r_\nu|$ bestimmte untere Schranke für $\left| \sum_{\nu=0}^{s} r_\nu a^{b^\nu} \right|$, wo $a \neq 0, 1$, b algebraisch, $(r_1, r_2, \ldots, r_s) = 1$. Diese Abschätzung ist besser als die früheren Resultate von Verf. [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **2**, 180—182 (1935); dies. Zbl. **11**, 339 und Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **1939**, 509—517; dies. Zbl. **24**, 251]. *Gál* (Paris).

Analysis.

Allgemeines:

Loria, Gino: Sull'introduzione dei numeri immaginari e irrazzionali. Archimede, Firenze **1**, 48—49 (1949).

● **Rothe, R.: Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. Teil III: Flächen im Raume, Linienintegrale und mehrfache Integrale. Gewöhnliche**

und partielle Differentialgleichungen nebst Anwendungen. 4. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner 1949. 236 S. mit 167 Abb., kartoniert 7.—DM.

Mengenlehre:

Levi, Beppo: Kritische und historische Untersuchung über die Arithmetik der Mengen und das Kontinuumproblem. Math. Notae, Rosario **8**, 6—78 (1948) [Spanisch].

Verf. vertritt den Standpunkt, daß allein jener Teil der Mengenlehre sichere mathematische Erkenntnis darstellt, welcher ohne das Zermelosche Auswahlaxiom deduziert werden kann; Konstruktionen, welche auf diesem Axiom beruhen, seien Illusionen. Um aber die Potenzierung A^B zweier Mengen A und B als Aufbauprinzip zur Verfügung zu haben, unterscheidet Verf. bei Existentialaussagen zwischen „Es gibt ein Element . . .“ und „Es gibt ein bestimmtes Element . . .“. Letztere Form wird als mit logischen Schwierigkeiten behaftet im Zusammenhang mit dem Zermeloschen Axiom abgelehnt. Mit diesem Gesichtspunkt werden die bekannten Arbeiten von G. Cantor, von welchen die allgemeine Mengenlehre ihren Ausgang genommen hat, einer kritischen Betrachtung unterzogen und gleichzeitig die dabei zugänglichen Sätze über Mengenmächtigkeiten entwickelt. In feiner Weise wird zwischen den Wunschträumen des Philosophen Cantor und der Vorsicht Cantors als Mathematiker ein Unterschied gemacht. Für die Konstruktion von Mengen höherer Mächtigkeit ergeben sich zwei Prinzipien: 1. Iteration der Potenzierung von Mengen und 2. Iteration der vollständigen Induktion im Bereich der Ordnungszahlen im Sinne einer Übertragung der Peanoschen Axiome auf transfinite (wohl-) geordnete Mengensysteme, wobei neben der Nachfolgeroperation noch eine Limesoperation und ein beide Operationen betreffendes Vollständigkeitsaxiom hinzutreten. Durch den Verzicht auf das Auswahlaxiom im Sinne Zermelos bleibt die generelle Vergleichbarkeit der Mengen offen, und natürlich erst recht der gegenseitige Vergleich der durch die beiden Konstruktionsprinzipien aufgebauten Mengentürme.
Aumann (Würzburg).

Rado, R.: Axiomatic treatment of rank in infinite sets. Canadian J. Math. **1**, 337—343 (1949).

In Fortführung einer Untersuchung von H. Whitney [Amer. J. Math. **57**, 509—533 (1935); dies. Zbl. **12**, 4] wird eine abstrakte Rangfunktion $r(A)$, deren Werte beliebige Kardinalzahlen sein können, für die Teilmengen A einer Menge M definiert durch folgende Axiome: 1. $r(N) = 0$ für die Nullmenge N. 2. Ist x ein nicht in A enthaltenes Element von M, so ist $r(A) \leq r(A + \{x\}) \leq r(A) + 1$. 3. Ist $r(A) = r(A + \{x\}) = r(A + \{y\})$, so ist $r(A) = r(A + \{x, y\})$. Eine Teilmenge A von M heißt unabhängig, wenn für jede endliche Teilmenge E von A die Funktion $r(E)$ gleich der Anzahl der Elemente von E ist. Eine maximale unabhängige Teilmenge A' von A heißt eine Basis von A; eine solche existiert stets. Alle Basen einer Teilmenge A von M besitzen dieselbe Kardinalzahl, welche folglich als der Rang $r(A)$ von A definiert werden kann. *Eichler* (Münster).

Cuesta, N.: Mächtigkeit von Ordnungstypen. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. **7**, 3—9 (1947) [Spanisch].

Es wird bewiesen: 1. Ist $\alpha \geq 2^{\aleph_0}$, so ist die Mächtigkeit aller stetigen Ordnungstypen der Mächtigkeit α gleich 2^α. — 2. Für $\alpha > \aleph_0$ ist 2^α die Mächtigkeit aller jener dichten Ordnungstypen, in welchen kein stetiger Typus einbettbar ist. — Einige weitere Bemerkungen beziehen sich auf spezielle Klassen von Ordnungstypen, wie sie Verf. in seiner „Dezimaltheorie der Ordnungstypen“ [Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. **3**, 186—205, 242—268 (1943)] eingeführt hat. *Aumann* (Würzburg).

Cuesta, N.: Note über einige Arbeiten von Sierpiński. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. **7**, 128—131 (1947) [Spanisch].

Mit der in seiner Arbeit „Dezimaltheorie der Ordnungstypen“ [Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. **3**, 186—205, 242—268 (1943)] entwickelten Methode behandelt Verf. die folgenden, von Sierpiński untersuchten Probleme: 1. Gibt es eine linear geordnete Menge einer Mächtigkeit $> 2^{\aleph_0}$, welche eine dichte Teilmenge der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ enthält? [Fundam. Math., Warszawa **3**, 109—112 (1922).] 2. Eine dichte geordnete Menge der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ zu konstruieren, deren Schnitte und Lücken die Mächtigkeit $2^{\aleph_1}$ haben [Accad. Sci. fisic. mat. Napoli, Rend., IV. S. **10**, 355—356 (1940); dies. Zbl. **26**, 105]. 3. Zur Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ eine geordnete Universalmenge zu bestimmen [Acta Pontificia Acad. Sci. **4**, 207—208 (1940); dies. Zbl. **26**, 105]. *Aumann* (Würzburg).

Cuesta, N.: Dicht geordnete gestufte Mengen. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. **8**, 57—71 (1948) [Spanisch].

Ist in einer Menge E durch ein System von Beziehungen zwischen ihren Elementen eine Struktur (R) definiert, so erzeugt die Gruppe der zu (R) gehörigen Automorphismen Äquivalenzklassen: Zwei Elemente sind äquivalent, wenn das eine in das andere durch einen Automorphismus übergeführt wird. Ein Element heißt dabei singulär, wenn es nur mit sich selbst äquivalent ist. Eine geordnete Menge heißt stufig geordnet, wenn mit je zwei äquivalenten Elementen auch alle dazwischen liegenden damit äquivalent sind; sie heißt (darüber hinaus) gestuft, wenn jedes Element singulär ist, d. h. also jede ordnungserhaltende 1-1-deutige Selbstabbildung die Identität ist. Verf. beantwortet die Frage nach dicht geordneten gestuften Mengen durch Konstruktion einer solchen Menge; als Elemente fungieren dabei endliche Komplexe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ von Ordinalzahlen α_k, deren Variationsbereiche durch vollständige Induktion festgelegt werden. Auf die Arbeiten des Verf. [Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. **3**, 186—205, 242—268 (1943) sowie id., IV. S. **4**, 175—187, 215—233 (1944)] wird Bezug genommen. *Aumann.*

Denjoy, Arnaud: L'introduction d'un nouvel élément dans un ensemble ordonné. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 570—573 (1949).

Verf. untersucht die Bedingungen, unter denen zwischen die Elemente einer geordneten Menge E ein neues Element a so eingeschoben werden kann (Setzung an den Anfang, bzw. das Ende der Menge eingeschlossen), daß die neu entstehende geordnete Menge den gleichen Ordnungstyp hat wie die alte. Für jede geordnete Menge läßt sich das neue Element so einschieben, daß ein anderer Ordnungstyp entsteht. a braucht nämlich nur nach dem größten wohlgeordneten Anfangsabschnitt gesetzt zu werden, bzw. an den Anfang der Menge, falls ein solcher Abschnitt nicht existiert. Zerlegt man E in die Mengen C und D, so daß jedes Element von D später ist als jedes von C, und schiebt man zwischen C und D das Element a ein, so haben E und $E + (a)$ offenbar den gleichen Ordnungstyp, wenn C einen Endabschnitt vom Typus ω^* oder D einen Anfangsabschnitt vom Typ ω besitzt. Verf. gibt nun ein Beispiel für eine Menge E — und das nimmt den größten Teil der Ausführungen ein — bei der für jede Zerlegung $C + D$ (C und D beide nicht leer) keine der genannten Eigenschaften zutrifft und trotzdem jedesmal die Mengen $C + (a) + D$ den gleichen Ordnungstyp haben wie E. *Wilhelm Ackermann* (Lüdenscheid).

Dienes, Z. P.: Note sur la comparaison des ensembles mesurables B. J. Math. pur. appl., Paris, IX. S. **26**, 227—235 (1948).

Die Vergleichbarkeit zweier Mengen E und F, d. h. die Entscheidung, welcher der Fälle $E \subset F$, $F \subset E$, $E = F$, $EF = 0$, $EF \neq 0$ vorliegt, hängt ab von den zugelassenen Operationen. Verf. stellt sich auf den Standpunkt, daß nur Operationen abzählbaren Charakters und diese wiederum nur in abzählbarer Anzahl bei der Prüfung der Vergleichbarkeit benutzt werden dürfen. Er nennt eine Aussage D-prüfbar, wenn sie durch abzählbar viele Vergleiche von ganzen Zahlen prüfbar ist. Z. B. ist eine Gleichung oder Ungleichung zwischen zwei bestimmten reellen Zahlen D-prüfbar (was an Hand ihrer dyadischen Entwicklungen gezeigt wird). Ebenso

ist eine Gleichung $a = \lim b_n$, wo $((b_n))$ eine monotone Folge reeller Zahlen bezeichnet, D-prüfbar. Das Hauptergebnis ist der Nachweis, daß auf der Zahlgeraden Mengenvergleichbarkeit jedenfalls innerhalb der Baireschen Mengenklassen B_0, B_1 und B_2 im Sinne der D-Prüfbarkeit vorliegt. Es werden noch einige weitere Ergebnisse und Vermutungen in dieser Richtung dargelegt: *Aumann* (Würzburg).

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

Goodstein, R. L.: Missing value theorems. Math. Gaz., London **33**, 19—25 (1949).

Besprechung der Beweise einer Reihe verwandter Sätze, bei denen es sich im Grunde um die Erweiterung des Definitionsbereiches gewisser Funktionen durch Einbeziehung gewisser Punkte handelt, Beweise, die in elementaren Darstellungen öfters lückenhaft sind. Beispiel: Verschwindet ein Polynom für alle x, so sind alle Koeffizienten Null; und der analoge Satz für Potenzreihen. *Haupt* (Erlangen).

Charles, Fernand: Sur l'extension aux fonctions implicites d'un théorème de Lindelöf et de sa généralisation. Bull. Soc. Sci. Liége **16**, 254—260 (1947).

L'A. applica all'equazione $z = z_0 + f(x_1, \ldots, x_n, z)$ il metodo delle approssimazioni successive in modo analogo a quello seguito da R. H. J. Germay [Bull. Soc. Sci. Liége **11**, 442—446 (1946)] per i sistemi di equazioni differenziali in forma normale. *S. Cinquini* (Pavia).

Chuang, Chi-Tai: Sur les fonctions continues monotones. Ann. sci. École norm. sup., III. S. **64**, 179—196 (1947).

Es handelt sich um Verallgemeinerungen eines Satzes von E. Borel über monotone Funktionen in der Formulierung von R. Nevanlinna [Bull. Sci. math., II. S. **55**, 140—144 (1931); dies. Zbl. **2**, 37], wovon ein erster Satz lautet: 1. Für nicht negative Argumente x, t seien $f(x)$ nicht negativ, stetig und nicht fallend, $\gamma(t)$ positiv, stetig und nicht waehsend mit $c = \int_0^{+\infty} \gamma(t)\,dt < +\infty$, und $\delta(x)$ positiv, stetig und nicht wachsend mit $\int_0^{+\infty} \delta(x)\,dx = +\infty$. Dann gilt

$$f(x + \gamma(f(x))) - f(x) < \delta(x) \tag{1}$$

mit Ausnahme von x-Werten aus einer offenen Menge, in welcher die Totalvariation von $\int_0^x \delta(\xi)\,d\xi$ den Wert $\delta(0)\,\gamma(0) + c$ nicht überschreitet. 2. Ein zweiter ähnlicher Satz bezieht sich auf den Fall $0 < t \leqq 1$, bei nicht wachsendem f mit $0 < f(x) \leqq 1$. 3. Seien $\gamma(t)$ und $\delta(x)$ wie im ersten Satz erklärt. Es heißt $f(x)$ eine Typenfunktion bezüglich $\gamma(t)$ und $\delta(x)$, wenn $f(x)$ positiv, stetig und nicht fallend gegen $+\infty$ strebt für $x \to +\infty$ und wenn (1) ausnahmslos für $x \geqq 0$ gilt. Ferner heißt $g(x)$ eine engere Oberfunktion von $f(x)$, wenn schließlich $f(x) \leqq g(x)$ und das Gleichheitszeichen für eine gegen $+\infty$ strebende Folge von x-Werten statthat. Als dritter Satz wird bewiesen: Sind γ und δ wie eingangs erklärt, ist ferner $f(x)$ für $x \geqq 0$ nicht negativ, stetig und nicht fallend mit $f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$, so gibt es zwei Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, so daß f_1 und f_2 Typenfunktionen bezüglich γ und δ, außerdem f_1 und f_2 engere Ober- bzw. Unterfunktion von f sind. — 4. Ein analoger Satz hat ähnliche Voraussetzungen wie der zweite mit $f(x) \to 0$ für $x \to +\infty$. — Es werden noch einige Folgerungen aus diesen vier Hauptsätzen gezogen. *Aumann* (Würzburg).

Zahorski, Zygmunt: Sur l'ensemble des points singuliers d'une fonction d'une variable réelle admettant les dérivées de tous les ordres. Fundam. Math., Warszawa **34**, 183—245 (1947).

Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle x $(-\infty < x < \infty)$ admettant des dérivées de tous les ordres. Les points x se divisent en trois catégories: 1) le rayon

de convergence de la série de Taylor autour du point x_0 est nul, x_0 est alors un point singulier (P), ou au sens de Pringsheim; 2) le rayon de convergence de la série de Taylor autour du point x_0 est >0, mais il existe des points x_0+h, aussi voisins de x_0 que l'on veut, pour lesquels la série de Taylor ne converge pas vers $f(x_0+h)$, x_0 est alors un point singulier (C), ou au sens de Cauchy; 3) la série de Taylor converge vers la fonction $f(x)$ dans un voisinage de x_0, x_0 est alors un point régulier. — L'A. démontre que pour une fonction $f(x)$ l'ensemble P des points singuliers (P) est un G_δ, l'ensemble C des points singuliers (C) est un F_σ de 1-ère catégorie, et de plus $\overline{P \cup C} = P \cup C$, $P \cap C = 0$. Réciproquement soit P un G_δ et C un F_σ de 1-ère catégorie, tels que $\overline{P \cup C} = P \cup C$ et $P \cap C = 0$; il existe alors une fonction $f(x)$ dont P est l'ensemble des points singuliers (P), C est l'ensemble des points singuliers (C) et le complémentaire de $P \cup C$ est l'ensemble des points réguliers. L'A. construit $f(x)$ comme la somme de deux fonctions $\Omega(x)$ et $\Psi(x)$, où $\Omega(x)$ est telle que P est l'ensemble des points singuliers (P) de $\Omega(x)$ et $\Omega(x)$ est régulière sur le complémentaire de $\bar{P}$ et $\Psi(x)$ ne possède que des singularités (C).. La construction très délicate de la fonction $\Omega(x)$ occupe la plus grande partie du mémoire, elle est exposée avec beaucoup de soin et une clarté parfaite. — Comme application de ces résultats l'A. démontre l'existence d'une fonction continue $f(x)$, telle que l'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ ne contienne que des points isolés, quelle que soit la fonction analytique $g(x)$. Ceci est la solution d'un problème posé par Ulam. — Finalement l'A. démontre (sans utiliser les résultats précedents) le théorème suivant, énoncé par Pringsheim: Soit $f(x)$ une fonction indéfiniment dérivable sur le segment $a \leq x \leq b$, et soit $r(x)$ le rayon de convergence de la série de Taylor de $f(x)$ au point x. S'il existe un $r_1 > 0$ tel que $r(x) \geq r_1$ pour $a \leq x \leq b$, alors $f(x)$ est holomorphe sur ce segment. La démonstration originale de Pringsheim n'était pas rigoureuse; une autre démonstration correcte a été donnée par R. P. Boas jr. [Bull. Amer. math. Soc. **41**, 233—236 (1935); ce Zbl. **11**, 201]. — (Faute d'impression non signalée dans les Errata: p. 229, ligne 6 en descendant: au lieu de $y^* = y$, lire $y^* = y/2d$.) *Horváth* (Paris).

Bang, Thøger: On quasi-analytic functions. 10. Skand. Mat. Kongr., København **1946**, 249—254 (1947).

Exposé de quelques résultats obtenus par l'auteur dans sa thèse: Om quasi-analytiske Funktioner, København, 1946. *Horváth* (Paris).

Allgemeine Reihenlehre:

● **Hyslop, J. M.: Infinite series.** 3. ed., rev. New York: Interscience Publishers, Inc. 1947. 121 p.

Es handelt sich um die dritte Aufl. des 1942 in erster, 1945 in zweiter Auflage erschienenen Büchleins aus der Reihe der von A. C. Aitken und D. E. Rutherford herausgegebenen University Mathematical Texts. Das Ziel ist, jungen Studenten, die schon mit gewissen Teilen der Analysis vertraut sind, das Wichtigste über Unendliche Reihen zu vermitteln. Dies wird in neun angenehm zu lesenden und gut geschriebenen Kapiteln erreicht, denen jeweils zahlreiche Aufgaben mit Lösungen beigegeben sind. — Die Kenntnis der elementaren Funktionen, der Differentialrechnung von Funktionen einer Veränderlichen bis zum Taylorschen Lehrsatz und des Riemannschen Integrals wird vorausgesetzt. Das Wichtigste aus diesen Gebieten, insbesondere soweit es, wie z. B. der Begriff des Grenzwertes, für die Reihenlehre von Bedeutung ist, wird auf den ersten 24 Seiten zusammengestellt. Nach einem allgemeinen Kapitel über reelle Folgen und Reihen, das auch die Reihenentwicklungen einiger elementarer Funktionen bringt, werden sodann Reihen mit positiven Gliedern bis zum Raabeschen, Gaußschen und Integral-Kriterium behandelt. Im Kapitel über Reihen mit beliebigen Gliedern (absolute Konvergenz, Riemannscher Umordnungssatz, Abelsches Kriterium) werden kurz auch Reihen mit komplexen Gliedern erwähnt. Bei den Funktionenreihen stehen der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz (hinreichende Bedingungen für gliedweise Grenzübergänge) und die Potenzreihen (Konvergenzgebiet, Abelscher Grenzwertsatz) im Vordergrund. Ein besonderes Kapitel ist der Multiplikation von Reihen gewidmet (Sätze von Cauchy, Abel und Mertens). Im Kapitel über unendliche Produkte (reelle konstante und veränderliche Glieder, absolute und gleichmäßige Konvergenz)

wird das sin-Produkt einschließlich seines Zusammenhangs mit der Gammafunktion hergeleitet. Schließlich werden im letzten Kapitel Doppelreihen und iterierte Reihen (Cauchyscher Doppelreihensatz) behandelt. — An einigen Stellen sind nach des Ref. Ansicht Änderungen wünschenswert. Bei der Definition von $f(x) \to l$ für $x \to a$ (z. B.) auf S. 3 fehlt die Forderung, daß $f(x)$ in einer gewissen Umgebung von $x = a$ erklärt ist oder dergleichen. Unter der Überschrift Cauchy's condensation test wird S. 44 das Wurzelkriterium behandelt. Auf S. 69 ist die Unbeschränktheit von $N(\varepsilon, x)$ keine hinreichende Bedingung für ungleichmäßige Konvergenz. Die S. 86 gegebene Motivierung der Bevorzugung der Cauchyschen Produktreihe ist unbefriedigend. Zu bedauern ist, daß Verf. bei den Doppelreihen nicht die Pringsheimsche Konvergenzdefinition, sondern eine sehr viel engere gewählt hat, die übrigens nicht ganz klar formuliert ist. Auf S. 108 ist die Gleichung (2) nicht in Ordnung. *Meyer-König* (Stuttgart).

Sonnenschein, Jakob: Sur les séries divergentes. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. **35**, 594—601 (1949).

Indem eine Folge $(p_0, p_1, \ldots)$ als ein Punkt einer linearen Mannigfaltigkeit mit den Koordinaten p_n betrachtet wird, interpretiert Verf. unter anderem die bekannte Tatsache, daß der Matrix, gebildet aus den Koeffizienten der Taylorschen Entwicklung der Potenzen einer Funktion $f(z)$

$$f^k(z) = f_{k0} + f_{k1} z + f_{k2} z^2 + \cdots + f_{kn} z^n + \cdots, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit $f(1) = 1$, eine Toeplitz-Schursche Mittelbildung darstellt (welche sich speziell für $f(z) = \frac{1}{2}(1 + z)$ auf die Eulersche und für $f(z) = e^{z-1}$ auf die Borelsche Mittelbildung reduziert), welche die Teilsummen der Reihe $\sum z^\nu$ gegen $1/(1 - z)$ limitiert für jedes z, für welches $|f(z)| < 1$ ist. *Karamata* (Zemun).

Teghem, J.: Une généralisation des théorèmes $E \to B$ et $B \to E$ de M. Knopp. Nieuw Arch. Wiskunde, II. S. **23**, 8—12 (1949).

Verf. definiert gewisse $B(\alpha, m)$- und $E(q, m)$-Summierungsverfahren. Das erste ist die Anwendung des Borelschen Integral-Verfahrens auf die Reihe $a_m + a_{m+1} + \cdots$; er integriert aber auf der Geraden $r = \varrho e^{i\alpha}$. Man bekommt $E(q, m)$ (wo q eine komplexe Zahl bedeutet), wenn man die Euler-Knoppsche (E, q)-Methode auf $a_m + a_{m+1} + \cdots$ anwendet. Diese Verfahren sind nur im klassischen Falle, d. h. $\alpha = 0$ bzw. $q > 0$, regulär. Verf. beweist dann, daß die K. Knoppschen Einschließungssätze auch für diese Verfahren gültig sind [Math. Z. **18**, 125—156 (1923)]; im kritischen $E \to B$-Falle benützt er aber den Tauberschen Satz der Borelschen Methode [G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Rend. Circ. mat. Palermo **41**, 36—53 (1916)]. *Gál* (Paris).

Vermes, P.: Series to series transformations and analytic continuation by matrix methods. Amer. J. Math. **71**, 541—562 (1949).

Die Matrizen $G = (g_{nk})$ bzw. $A = (a_{nk})$ sollen γ- bzw. α-Matrix heißen, wenn die mit ihnen gebildeten Transformationen $\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} g_{nk} u_k$ einer Reihe $\sum_k u_k$ in eine Folge σ_n bzw. $v_n = \sum_k a_{nk} u_k$ einer Reihe $\sum_k u_k$ in eine Reihe $\sum_k v_k$ permanent sind. Es werden Sätze der folgenden Art bewiesen: 1. Das Produkt GA einer γ-Matrix G und einer α-Matrix A ist vorhanden und ist eine γ-Matrix; 2. das Produkt zweier α-Matrizen ist vorhanden und ist eine α-Matrix; 3. dann und nur dann ist das Produkt GA für jede γ-Matrix G vorhanden und eine γ-Matrix, wenn A eine α-Matrix ist. — Sodann wird die Matrix $A(\lambda)$ mit dem allgemeinen Element $\binom{k}{n} \lambda^{k-n} (1 - \lambda)^n$ (λ Parameter) betrachtet. Die mit ihrer Hilfe gebildete Transformation einer Reihe in eine Reihe gibt Anlaß zu einem Limitierungsverfahren, das hinsichtlich Permanenz, Indexverschiebung und Iteration untersucht und als Folgentransformation dargestellt wird. Es handelt sich dabei, wie Ref. bemerken möchte, um das von G. H. Hardy und J. E. Littlewood [Rend. Circ. mat. Palermo **41**, 36—58 (1916)] als circle method bezeichnete und auch von R. Wais [Das Taylorsche Summierungsverfahren, Dissertation, Tübingen 1935, 58 S.] untersuchte und als T_α-Verfahren bezeichnete Verfahren. Neu an den Untersuchungen des Verf. ist vor allem die Zulassung komplexer Werte für λ und die Bestimmung des bei Potenz-

reihen erzielten Summierbarkeitsbereiches durch eine Sternkonstruktion. Unter im wesentlichen anderen Gesichtspunkten als den vorliegenden wurde das Verfahren auch vom Ref. [Math. Z. **52**, 257—304 (1949)] behandelt. — Die Transposition der Matrix $A(\lambda)$ führt auf das Euler-Knoppsche Limitierungsverfahren. Verf. ergänzt ein auf Anwendung dieses Verfahrens bei Potenzreihen und auf komplexe Ordnung bezügliches Resultat aus einer für Ref. unzugänglichen Arbeit von R. P. Agnew [Amer. J. Math. **66**, 313—338 (1944)]. — Die Aufgabe der analytischen Fortsetzung einer Laurent-Reihe führt Verf. auf die mit Hilfe der Matrix $a_{nk}(t) = \binom{k+n+1}{n}(1-t)^n t^k$ (t Parameter) gebildete Reihentransformation und das zugehörige, für $0 < t \leqq 1$ permanente Limitierungsverfahren. Die Möglichkeit der Indexverschiebung wird geprüft. Der für geeignete (nicht notwendig reelle) Parameter t bei Potenzreihen erzielte Summierbarkeitsbereich wird wieder durch eine Sternkonstruktion bestimmt. Unter der Bezeichnung S_α-Verfahren wurde dieses Verfahren in im wesentlichen anderer Richtung (Zusammenhänge mit den Verfahren E_p, B und T_α) auch in der oben angegebenen Arbeit des Ref. [vgl. ferner Math. Z. **52**, 344—354 (1949)] untersucht.

Meyer-König (Stuttgart).

Kuttner, B.: On positive Riesz and Abel typical means. Proc. London math. Soc., II. S. **49**, 328—352 (1947).

Es sei $0 \leqq \mu_0 < \mu_1 \cdots \to \infty$, $\Phi(u)$ eine für $u \geqq 0$ wachsende Funktion, $\Phi(u) \to \infty$ mit $u \to \infty$, $\lambda_n = \Phi(\mu_n)$, $A_\mu(u) = \sum_{\mu_n \leqq u} a_n$, $A_\lambda(u) = \sum_{\lambda_n \leqq u} a_n$. $A_\mu^{(k)}(u) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^u (u-t)^{k-1} A_\mu(t)\, dt$, $A_\lambda^{(k)}(u)$ entsprechend. Es wird bewiesen: Satz 1. Wenn $\varkappa = n + \theta$ ($n = 0, 1, \ldots$; $0 < \theta \leqq 1$), $\Phi(u)$ für $u > \mu_0$ $(n+2)$-mal differenzierbar, $\Phi(u) \geqq 0$, $(-1)^{\nu+1} \Phi^{(\nu)}(u) \geqq 0$ $(\nu = 1, \ldots, n+2)$, $\Phi(u)$ stetig für $u \geqq u_0$ ist, dann folgt aus $A_\mu^{(\varkappa)}(u) \geqq 0$ für alle u stets $A_\lambda^{(\varkappa)}(u) \geqq 0$ für alle u. Wenn außerdem $\Phi''(u) < 0$ für $u > \mu_0$ ist, dann ist $A_\lambda^{(\varkappa)}(u) > 0$, sofern nicht $A_\mu^{(\varkappa)}(t) = 0$ für alle t mit $\Phi(t) \leqq u$. Satz 2. Wenn $\Phi(u)$ den Voraussetzungen des Satzes 1 genügt und wenn die Reihen $f_\mu(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\mu_n s}$ und $f_\lambda(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ für jedes $s > 0$ konvergieren, so folgt aus $f_\mu(s) \geqq 0$ für alle $s > 0$ stets $f_\lambda(s) \geqq 0$ für alle $s > 0$. Der Beweis des Satzes 2 gelingt so, daß die Vertauschbarkeit zweier Integrationen gezeigt wird, und dann Sätze von F. Hausdorff [Summationsmethoden und Momentfolgen, I und II, Math. Z. **9**, 74—109, 280—299 (1921)] und S. Bernstein [Sur les fonctions absolument monotones, Acta Math., Uppsala **52**, 1—66 (1929)] herangezogen werden.

R. Schmidt (München).

Hadwiger, H.: Über eine Konstante Tauberscher Art. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. **7**, 65—69 (1947).

Anknüpfend an einige Arbeiten des Verf. [vgl. H. Hadwiger, Die Retardierungserscheinung bei Potenzreihen und Ermittlung zweier Konstanten Tauberscher Art, Comment. math. Helvetici **20**, 319—332 (1947), wie auch A. Wintner, „A Tauberian theorem", ebenda 216] wird gezeigt, daß, $p = \sup n|a_n|$ gesetzt, eine absolute Konstante τ existiert, derart, daß für eine passend gewählte Folge t_n für jedes n gilt: $\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu t_n^\nu - \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu\right| < \tau p$, und daß der kleinste Wert von τ für $t_n = 2^{-1/n}$ erreicht wird, in welchem Falle

$$\tau = C + \log\log 2 + 2\int_{\log 2}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, dx = 0{,}96804\ldots$$

der bestmögliche Wert von τ ist.

Karamata (Zemun).

Camm, G. L.: Square roots of integers expressed as infinite series. Math. Gaz., London **33**, 99—104 (1949).

Es wird in ganz elementarer Weise bewiesen, daß

$$\sqrt{m^2-1} = m - \frac{1}{2m}\left[1 + \frac{1}{4m^2-2}\left[1 + \frac{1}{16m^4-16m^2+2}\left[1+\cdots\right]\right]\right]$$

Ähnliche Formeln werden für $\sqrt{m^2-n}$ aufgestellt (m, n sind ganze Zahlen $0 < n < 2m-1$). *St. Fenyö* (Budapest).

Wall, H. S.: Convergence of continued fractions in parabolic domains. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 391—394 (1949).

Sei c_p ($p = 1, 2, \ldots$) eine Folge von komplexen Zahlen, für welche

$$|c_p| - \Re\,(c_p \cdot \exp i(\Phi_p + \Phi_{p+1})) \leqq 2r \cos\Phi_p \cos\Phi_{p+1}\,(1 - g_{p-1})\,g_p$$

gilt. r, Φ_p, g_p ($p = 1, 2, \ldots$) sind reelle Zahlen, welche folgenden Ungleichungen genügen: $0 < r < 1$; $-\pi/2 + c \leqq \Phi_p \leqq \pi/2 - c$ $(0 < c < \pi/2)$; $0 \leqq g_p \leqq 1$ ($p = 1, 2, \ldots$). r und c sind von p unabhängig. Es wird untersucht die Konvergenz des regelmäßigen Kettenbruches:

$$\frac{1}{|1} + \frac{c_1}{1} + \frac{c_2}{|1} + \frac{c_3}{|1} \cdots.$$

Dieser konvergiert dann und nur dann, wenn a) ein c_p verschwindet; b) $c_p \neq 0$ ($p = 1, 2, \ldots$), aber die Reihe $\Sigma\,|d_p|$ divergiert. Die Glieder dieser Reihe sind definiert durch die Formeln $d_1 = 1$; $d_{p+1} = 1/c_p\,d_p$ ($p = 1, 2, \ldots$). *St. Fenyö.*

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Kneschke, A.: Zur Theorie der Interpolation. Math. Z. **52**, 137—149 (1949).

Ist $f(x)$ eine in $a \leqq x \leqq b$ entsprechend oftmalig differenzierbare Funktion, welche an den Stellen $\{x_\nu\}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) aus $\alpha < x < \beta$ die Funktionswerte $f(x_\nu)$ annimmt, so läßt sich $f(x)$ in der Gestalt

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{\mu=1}^{n} f(x_\mu)\,L_\mu(x) + \int_\alpha^\beta K(x,\xi)\,f^{(n)}(\xi)\,d\xi \quad \text{mit}$$

$$K(x,\xi) = \frac{1}{2}\left\{\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\operatorname{sgn}(x-\xi) - \sum_{\mu=1}^{n} L_\mu(x)\,\frac{(x_\mu-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\operatorname{sgn}(x_\mu-\xi)\right\}$$

schreiben, wobei $L_\mu(x) = L(x)/(x-x_\mu)\,L'(x_\mu)$ und $L(x) = \prod_{\nu=1}^{n}(x-x_\nu)$. — Hieraus leitete G. Kowalewski folgendes allgemeinere Interpolationstheorem her: Es ist

$$(2) \qquad f^{(\varrho)}(x) = S(x) + \int_\alpha^\beta K_{\nu-1}^{(\varrho)}(x,\xi)\,f^{(\nu\varepsilon+\varrho)}(\xi)\,d\xi \quad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

mit der Interpolationsfunktion

$$S(x) = \sum_{\mu=1}^{n} f(x_\mu)\,I_{\mu 0}(x) + \sum_{\mu=1}^{n} f^{(\varepsilon)}(x_\mu)\,I_{\mu 1}(x) + \cdots + \sum_{\mu=1}^{n} f^{[(\nu-1)\varepsilon]}(x_\mu)\,I_{\mu,\nu-1}(x),$$

wobei $n - \varrho = \varepsilon$ ist und die Entwicklungsfunktionen $I_{\mu 0}(x) = L_\mu^{(\varrho)}(x)$, $I_{\mu 1}(x) = \int_\alpha^\beta K^{(\varrho)}(x,\xi)\,L_\mu^{(\varrho)}(\xi)\,d\xi, \ldots, I_{\mu,\nu-1}(x) = \int_\alpha^\beta K_{\nu-2}^{(\varrho)}(x,\xi)\,L_\mu^{(\varrho)}(\xi)\,d\xi$ vermöge der Kerniterationen

$$K_i^{(\varrho)}(x,\xi) = \int_\alpha^\beta K_{i-1}^{(\varrho)}(x,\eta)\,K^{(\varrho)}(\eta,\xi)\,d\eta = \int_\alpha^\beta K^{(\varrho)}(x,\eta)\,K_{i-1}^{(\varrho)}(\eta,\xi)\,d\eta,$$

$$K^{(\varrho)}(x,\xi) = \partial^\varrho K(x,\xi)/\partial x^\varrho$$

erhalten werden können. — Verf. gibt für die Entwicklungspolynome $I_{\mu\sigma}(x)$ die Integraldarstellungen

$$I_{\mu\sigma}(x) = \int_\alpha^\beta K_{\sigma-1}^{(\varrho)}(x, \xi)\, I_{\mu 0}(\xi)\, d\xi = \int_\alpha^\beta K^{(\varrho)}(x, \xi)\, I_{\mu,\sigma-1}(\xi)\, d\xi$$

an, nach welchen sich jedes Entwicklungspolynom als Kernintegral seines vorangehenden Polynoms auffassen läßt, und beweist die zu dieser Integralbeziehung äquivalente Differentialrelation. Schließlich berechnet er den in der Restfunktion $R(x) = \int_\alpha^\beta K_{i-1}^{(\varrho)}(x, \xi)\, f^{(i\varepsilon+\varrho)}(\xi)\, d\xi$ auftretenden Kern $K_i^{(\varrho)}(x, \xi)$ als Iteration zu $K^{(\varrho)}(x, \xi)$. Ferner zeigt Verf., daß sich aus dem Kowalewskischen Interpolationstheorem folgende Interpolationstheoreme als Spezialfälle ergeben: Für $\varrho = 0$, $n = 2$, $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ das Euler-Bernoullische Interpolationstheorem, für $\varrho = 1$, $n = 2$, $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ das Euler-MacLaurinsche Interpolationstheorem und für $\varrho = 0$, $n = 1$, $x_1 = \alpha$ die Taylorsche Interpolationsformel mit dem bekannten Bernoullischen Integralrestglied. Das Kowalewskische Interpolationstheorem (2) erweist sich also als gemeinsame Quelle für eine Reihe von Interpolationsgesetzen, welche bisher gesondert bewiesen werden mußten. — Aus (2) folgert Verf. zwei Quadraturformeln, welche er als erste und zweite Kowalewskische Quadraturformel bezeichnet. Die erste Kowalewskische Quadraturformel lautet:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = S + \int_\alpha^\beta \mathfrak{K}_i(\xi)\, f^{(in)}(\xi)\, d\xi \tag{3}$$

mit der Interpolationssumme

$$S = \sum_{\mu=1}^{n} \{I_{\mu 0}\, f(x_\mu) + I_{\mu 1}\, f^{(n)}(x_\mu) + \cdots + I_{\mu,i-1}\, f^{[(i-1)n]}\, x_\mu)\},$$

wobei $\mathfrak{K}_\sigma(\xi) = \int_\alpha^\beta K_{\sigma-1}(x, \xi)\, dx = \int_\alpha^\beta K(x, \xi)\, \mathfrak{K}_{\sigma-1}(x)\, dx$, $\mathfrak{K}_0 = 1$

und $I_{\mu\sigma} = \int_\alpha^\beta \mathfrak{K}_\sigma(\xi)\, L_\mu(\xi)\, d\xi \quad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots)$

ist. — Man erhält diese Quadraturformel aus (2), wenn man für $\varrho = 0$ nach x von α bis β integriert. — Speziell ergibt sich für $i = 1$ die Newtonsche Quadraturformel, für $n = 1$ und $x_1 = \alpha$ bzw. $x_1 = \beta$ die Taylorsche Quadraturformel, für $x_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ die Maclaurinsche Quadraturformel und für $n = 2$, $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ die Boolesche Quadraturformel. — Die zweite Kowalewskische Quadraturformel sieht folgendermaßen aus: Es ist

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = S + \int_\alpha^\beta \mathfrak{G}_{i-1}(\xi)\, f^{(in-1)}(\xi)\, d\xi \tag{4}$$

mit der Interpolationssumme

$$S = \sum_{\mu=1}^{n} \{H_{\mu 0}\, f(x_\mu) + H_{\mu 1}\, f^{(n-1)}(x_\mu) + \cdots + H_{\mu,i-1}\, f^{[(i-1)n-1]}\, (x_\mu)\},$$

wobei $\mathfrak{G}_0(\xi) = -\sum_{\mu=1}^{n} L_\mu\, K'(x_\mu, \xi)$ mit $L_\mu = \int_\alpha^\beta L_\mu(x)\, dx$,

$$\mathfrak{G}_i(\xi) = \int_\alpha^\beta K(x, \xi)\, \mathfrak{G}_{i-1}(x)\, dx \quad \text{und}$$

$$H_{\mu\sigma} = \int_\alpha^\beta \mathfrak{G}_{\sigma-1}(\xi)\, L_\mu(\xi)\, d\xi, \quad H_{\mu 0} = L_\mu;\ \sigma = 1, 2, \ldots$$

ist. — Diese Quadraturformel erhält Verf. durch Umformung des Ausdruckes $\sum_{\mu=1}^{n} L_\mu\, f'(x_\mu)$ mit Hilfe von (2) für $\varrho = 1$. Für $n = 2$ ergibt (4) die Euler-Maclaurinsche Quadraturformel.

Lammel (Tutzing).

Szarski, J.: Sur une méthode d'approximation des fonctions. Ann. Soc. Polonaise Math. **20,** 121—125 (1948).

Sia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una funzione continua in un insieme aperto A ed E un insieme aperto e limitato contenuto in A. Per ogni indice ν abbastanza grande, l'A. considera le funzioni definite in E:

$$F_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\nu^n (1/\nu)^n} \int_{x_1-1/\nu}^{x_1+1/\nu} \cdots \int_{x_n-1/\nu}^{x_n+1/\nu} f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n$$

e studia la convergenza della successione $\{F_\nu\}$ verso f, nonchè le proprietà delle funzioni F_ν in relazione a quelle di f. — A proposito di dette funzioni, esse furono già introdotte da L. Tonelli [cfr. Sulla definizione di funzioni di due variabili a variazione limitata, Atti Accad. naz. Lincei, Rend Cl. Sci. fisic. mat. natur., IV. S. **7**, 357—363 (1928); p. 361]. *C. Miranda* (Napoli).

Jordan, Charles: Note on approximation and graduation by orthogonal moments. Hung. Acta Math. **1,** 4—9 (1949).

Verf. gibt einen zusammenfassenden Überblick über eigene frühere Arbeiten. — Den Zahlen $x = 0, 1, \ldots, N-1$ seien die reellen Werte y_0 bzw. $y_1, \ldots, y_{N-1}$ zugeordnet. Es ist dasjenige Polynom $f_n(x)$ vom Grade n (insbesondere $n < N-1$) gesucht, dessen Werte in $x = 0, 1, \ldots, N-1$ möglichst wenig von den y_ν abweichen: Die Quadratsumme $S = \sum_{\nu=0}^{N-1} [f_n(\nu) - y_\nu]^2$ soll für die gesuchte Funktion $f_n(x)$ kleiner als die entsprechende Quadratsumme jedes beliebigen anderen Polynoms n-ten Grades sein. — Die Funktionen

$$U_{N,m}(x) = c_{N,m} \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^{m+\lambda} \binom{m+\lambda}{m} \binom{N-\lambda-1}{m-\lambda} \binom{x}{\lambda} \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

(die $c_{N,m}$ sind gewisse, für die Rechnungen zweckmäßig festgelegte Konstanten) sind bezüglich $x = 0, 1, \ldots, N-1$ orthogonale Polynome, da sie den Gleichungen $\sum_{x=0}^{N-1} U_{N,m}(x)\, U_{N,m'}(x) = 0$ $(m \neq m')$ genügen. Unter dem orthogonalen Moment $\Theta_{N,m}$ wird der Wert $\Theta_{N,m} = \sum_{\nu=0}^{N-1} U_{N,m}(\nu)\, y_\nu$ verstanden. Dann ist

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \left\{ \sum_{\mu=0}^{m} C_{N,m,\mu}\, \Theta_{N,m} \binom{x}{\mu} \right\},$$

wobei die $C_{N,m,\mu}$ explizit angegebene, von den y_ν unabhängige Konstanten sind. Ein rechnerisch sehr einfaches Verfahren zur Ermittlung der $\Theta_{N,m}$ wird beschrieben. — Für S wird eine Formel angegeben. Ein Vorteil der Methode liegt darin, daß man bei nicht genügender Approximation vermöge $f_n(x)$ unter Benutzung der für $f_n(x)$ errechneten Werte zum besseren Polynom $f_{n+1}(x)$ übergehen kann. — Zuletzt wird der Wert $f_n(\nu_0)$ einer besonderen Betrachtung unterzogen, wobei ν_0 mittlerer Abszissenpunkt des Intervalls ist. — Alle Untersuchungen lassen sich leicht auf beliebige äquidistante Abszissenpunkte übertragen. *Töpfer* (Köln).

Zahorski, Z.: On zeros of quasianalytic (B) functions. Bull. Calcutta math. Soc. **39,** 157—165 (1947).

Let ε_n be a sequence of positive numbers tending to zero. The au. calls a function $f(z)$ of the complex variable z quasi-analytic $(B\,\varepsilon_n)$ in $|z| \leq 1$ if there exists a sequence of positive integers n_k $(n_k \to \infty;\ k = 1, 2, 3, \ldots)$ and a sequence of polynomials $P_k(z)$, $P_k(z)$ being of degree n_k, so that $|f(z) - P_k(z)| < \varepsilon_{n_k}$ for $|z| \leq 1$ and $k = 1, 2, 3, \ldots$ — It is shown that to every sequence ε_n and to every perfect set E lying on the circumference $|z| = 1$, there exists a non identically vanishing function $f(z)$, quasi-analytic $(B\,\varepsilon_n)$ in $|z| \leq 1$, possessing derivatives of all orders quasianalytic $(B\,\varepsilon_n)$ in $|z| \leq 1$ and such that $f^{(m)}(z) = 0$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ for all z belonging to a perfect subset E_1 of E having the power of continuum. *Horváth.*

Duffin, R. J. and A. C. Schaeffer: Functions whose Fourier-Stieltjes coefficients approach zero. Duke math. J. **16**, 327—329 (1949).

Sia $\varrho(t)$ una funzione a variazione limitata in $(-\pi, \pi)$ e ivi regolare, $2\varrho(t) = \varrho(t+) + \varrho(t-)$ per $-\pi < t < \pi$, e si consideri la funzione $f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt}\, d\varrho(t)$. Gli AA. dimostrano che se $\varrho(t)$ è continua in $-\pi$ $[\varrho(-\pi+) - \varrho(-\pi) = 0]$, oppure in π $[\varrho(\pi) - \varrho(\pi-) = 0]$, allora se esiste una successione limitata $\{k_n\}$ di numeri reali tali che $\lim_{n\to\infty} f(n + i\,k_n) = 0$ si ha anche $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. [Quando sia $k_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, cfr. ad es. R. C. Young, questo Zbl. **11**, 397.] Il risultato si inverte nel senso che, supposto $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$, allora $\varrho(t)$ è continua per $-\pi \leq t \leq \pi$; oppure, se $f(n) \to 0$ quando $n \to \infty$ per valori interi positivi, allora $\varrho(t)$ è continua per $-\pi < t < \pi$, e si ha inoltre $\varrho(\pi) - \varrho(\pi-) = \varrho(-\pi) - \varrho(-\pi+)$.

Giovanni Sansone (Firenze).

Sbrana, Francesco: Su una proprietà degli sviluppi in serie di funzioni ortogonali. Boll. Un. mat. Ital., III. S. **4**, 101—103 (1949).

In Verallgemeinerung eines von Fubini [Ann. Scuola norm. sup. Pisa, II. S. **4**, 47—50 (1935); dies. Zbl. **10**, 351] herrührenden Kriteriums für Fourierreihen werden einfache hinreichende Bedingungen dafür mitgeteilt, daß eine samt ihren Ableitungen der ersten beiden Ordnungen in einem Intervall stetige Funktion in eine Reihe nach daselbst stetigen, normierten Orthogonalfunktion entwickelbar ist.

Garten (Tübingen).

Ganzburg, I. M.: Über eine Methode der Annäherung stetiger Funktionen durch trigonometrische Summen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **64**, 13—16 (1949) [Russisch].

Let $S_n(f, x)$ denote the nth partial sum of the Fourier series of the function f. The au. gives necessary and sufficient conditions for sequences $|\alpha_n| \leq \pi$, $|\beta_n| \leq \pi$ in order that the expressions $\frac{1}{3}\{S_n(f, x) + S_n(f, x + \alpha_n) + S_n(f, x + \beta_n)\}$ and $S_n(f, x + \alpha_n) + S_n(f, x + \beta_n) - S_n(f, x)$ should converge uniformly for any continuous periodic f. In the first case, for instance, the condition is that α_n and β_n admit of a representation $4p\pi/3(2n + 1) + O(1/n \log n)$ where the functions $p = p(n)$ take only a finite number of values of the form $3r \pm 1$. The method of proof is that of estimating the Lebesgue constants. *G. G. Lorentz* (Toronto).

Schmetterer, Leopold: Zur Fourierentwicklung des Produktes zweier Funktionen. Mh. Math., Wien **53**, 53—62 (1949).

The au. gives some results pertaining to the following problem. Let $f(x)$ be a function of a given class and let its Fourier series be convergent at x_0. Then conditions on a function $g(x)$ are sought which insure the convergence at x_0 of the Fourier series $\mathfrak{F}$ of the product $f(x)\,g(x)$. He proves (by an example) that $\mathfrak{F}$ needs not to converge if f is continuous and g absolutely continuous, further that $\mathfrak{F}$ converges whenever f is of bounded variation and g absolutely continuous [it should be observed that this is trivial on account of Dirichlet's theorem]. There are also theorems in which $\mathfrak{F}$ is replaced by the Fourier series of $\frac{1}{2}\{f(x_0 + x) + f(x_0 - x)\}\, g(x)$ at $x = x_0$.

G. G. Lorentz (Toronto).

Meńšov, D.: Über Fourierreihen stetiger und summierbarer Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **67**, 787—789 (1949) [Russisch].

Let P be the following problem. A function $f(x)$ on $[-\pi, +\pi]$ of a certain class being given, does there exist, for any $\varepsilon > 0$, a function of the same class, which is different from f only on a set E of measure $< \varepsilon$, such that the Fourier series of the new function is converging on $[-\pi, +\pi]$ in some sence? — For continuous functions and uniform convergence P has been solved to the positive by the author [Mat. Sbornik, n. S. **11**, 67—96 (1942)]. He states now some theorems in the same direc-

tion. (1) For continuous functions and uniform convergence the set E may be made depending only upon ε and the modulus of continuity of f. That a set E depending on ε alone cannot exist follows from (2). For any perfect set E_1 of positive measure and any of its points of density x_0 there is a function f continuous on $[-\pi, +\pi]$ and such that the Fourier series of any bounded measurable function which is equal to f on E_1, is divergent at x_0. (3) For the class of integrable functions and convergence almost everywhere the answer to P is again yes, and the set E may be taken open, with nowhere dense complement and depending only upon ε. *G. G. Lorentz.*

Nikol'skij, S. M.: Fourierreihen von Funktionen, die eine Ableitung von beschränkter Variation besitzen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **13**, 513—532 (1949) [Russisch].

Die Arbeit enthält ausführliche Beweise der Sätze, die Verf. vor kurzem in Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **65**, 13—15 (1949) veröffentlicht hat und die in dies. Zbl. **31**, 158—159 referiert wurden. *Béla Sz.-Nagy* (Szeged).

Vernotte, Pierre: Sommation, en termes finis, des séries de Fourier les plus générales, en tout point hors de l'intervalle où elles ont été formées. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 966—968 (1948).

Probleme der Wärmeströmung führen auf allgemeine Fouriersche Entwicklungen der Form $\sum A_{\lambda_\nu} \cos \varphi_{\lambda_\nu} \cos \lambda_\nu x + \sum A_{\lambda_\nu} \sin \varphi_{\lambda_\nu} \sin \lambda_\nu x$, worin die λ_ν Wurzeln einer transzendenten Gleichung sind. In früheren Noten [C. r. Acad. Sci., Paris **206**, 590 (1938), **217**, 364 (1943)] hat Verf. Fragen der Darstellung durch solche Entwicklungen behandelt, und er berichtet hier über weitere Ergebnisse, wegen deren ausführlicherer Behandlung er auf seine Thermocinétique (Publ. sci. techn. Minist. de l'Air, Sér. grise, **225**) verweist. *R. Schmidt* (München).

Hardy, G. H. and W. W. Rogosinski: Notes on Fourier series. V: Summability (R_1). Proc. Cambridge philos. Soc. **45**, 173—185 (1949).

Der Lebesguesschen Summationsmethode $(R, 1)$, die einer Reihe $\sum u_n$ den Grenzwert $\lim \sum_1^\infty u_n (\sin n h)/n h$ für $h \to +0$ als verallgemeinerte Summe zuordnet, wird die Methode (R_1), welche der Reihe $\sum u_n$ den Grenzwert $\lim (2/\pi) \sum s_n (\sin n h)/n$ zuordnet, gegenübergestellt. Beide Methoden sind nicht regulär und miteinander unvergleichbar. Im Gegensatz zu $(R, 1)$ ist (R_1) nur für Funktionen f einer Lebesguesschen Klasse L^p mit $p > 1$ „Fourier-effektiv", während es Fourierreihen aus L gibt, die nirgends R_1-summierbar sind. Das Hauptergebnis der Untersuchungen stellen notwendige und hinreichende Bedingungen für die R_1-Summierbarkeit dar, die für f und unter gewissen Einschränkungen auch für die konjugierte Funktion $\tilde{f}$ ausgesprochen werden. *Garten* (Tübingen).

Banerjee, D. P.: On the convergence of certain lacunary trigonometric series. Bull. Calcutta math. Soc. **41**, 86 (1949).

Unter Bezugnahme auf ein Ergebnis von Zygmund [On the convergence of lacunary trigonometric series, Fundam. Math., Warszawa **16**, 90—107 (1930)] gibt Verf. ein Beispiel einer trigonometrischen Lückenreihe, die fast überall divergiert und doch in einem beliebigen Intervall Punkte besitzt, in welchen sie gegen jeden vorgeschriebenen Wert konvergiert. *Garten* (Tübingen).

Spezielle Orthogonalfunktionen:

Cherry, T. M.: On expansions in Eigenfunctions, particularly in Bessel functions. Proc. London math. Soc., II. S. **51**, 14—45 (1949).

L'A. partendo dall'espressione $y = F(x, w)$ ($w = u + i v$, parametro complesso) dell'integrale dell'equazione $d^2y/dx^2 + w^2 y = w f(x)$ che soddisfa le condizioni $F(0, w) = 0$, e se $x > 0$ $F(x, w)$ limitato per $v \to +\infty$, nella sua memoria (presentata per la stampa nel 1943) stabilisce preliminarmente la formula integrale di

Fourier $$f(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{ic-\infty}^{ic+\infty}\operatorname{sen} w\,x\,dw\int_0^\infty f(t)\,e^{iwt}\,dt,\quad 0<x<\infty,$$
nell'ipotesi che $f(x)$ sia a variazione limitata in ogni intervallo finito di $0\le x<\infty$, $2f(x)=f(x+)+f(x-)$ per $x>0$, $\int_0^\infty |f(x)|\,e^{-\lambda x}\,dx<\infty$, $\lambda\ge 0$, $c\ge\lambda$. — Con analogo procedimento, operando su un particolare integrale dell'equazione
$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(w^2x^2-\nu^2)\,y=w\,x^2 f(x)$$
con opportune ipotesi su $f(x)$, l'A. perviene a due rappresentazioni integrali di $f(x)$ per le funzioni di Bessel $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ e successivamente, considerando la funzione di Nielsen $H_\nu^{(1)}(z)$ dimostra una formula del tipo di Hankel
$$f(x)=\tfrac{1}{2}\lim_{u\to\infty}\int_{ic-u}^{ic+u} J_\nu(wx)\,w\,dw\int_0^\infty H_\nu^{(1)}(wt)\,f(t)\,dt,\quad 0<x<\infty,$$
nell'ipotesi che $f(x)$ sia a variazione limitata in ogni intervallo chiuso di $0<x<\infty$, $2f(x)=f(x+)+f(x-)$, $\int_0^1 x^M|f(x)|\,dx<\infty$, $M<1/2$, $M<1-|R(\nu)|$, $\int_1^\infty \sqrt{x}\,|f(x)|\,e^{-\lambda x}\,dx<\infty$, $\lambda>0$, $c\ge\lambda$. — L'A. dà infine due teoremi sulle formule integrali di Weber e di Dini e un teorema di sviluppo in serie di funzioni Y_ν.

Giovanni Sansone (Firenze).

Bailey, W. N.: A double integral. J. London math. Soc. **23**, 235—237 (1949).

Für hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlicher besteht nach Appell und Kampé de Fériet die Beziehung

$$(1)\qquad F_2\Big[\alpha;\alpha+\tfrac12-\beta,\beta;\gamma,2\beta;\frac{x}{(1+y)^2},\frac{4y}{(1+y)^2}\Big]=(1+y)^2\,F_4\left[\alpha,\alpha+\tfrac12-\beta;\gamma,\beta+\tfrac12;x,y^2\right].$$

Andererseits fand Verf. [Quart. J. Math. (Oxford Ser.) **4**, 305 (1933); dies. Zbl. 8, 14] als Produkt von Funktionen einer Veränderlichen

$$(2)\qquad F_4[\alpha,\beta;\gamma,1+\alpha+\beta-\gamma;\xi(1-\eta),\eta(1-\xi)]=F(\alpha,\beta,\gamma;\xi)\,F(\alpha,\beta,1+\alpha+\beta-\gamma;\eta)$$

im Gebiet $|\xi(1-\eta)|^{\frac12}+|\eta(1-\xi)|^{\frac12}<1$. Mit $\sum_{n=1}^{2}k_n^2<1=k_\varrho^2+k_\varrho'^2$ für $\varrho=1,2$ setze man $k_1'-\sqrt{1-k_1^2-k_2^2}=(1+k_2')\,l_1$ und $\sqrt{(1+k_1)(k_2'+k_1)}-\sqrt{(1-k_1)(k_2'-k_1)}=(1+k_2')\,l_2$; dann findet ein Zerfall in vollständige elliptische Integrale statt:

$$\frac{1+k_2'}{2}\int_0^{\pi/2}d\varphi_1\int_0^{\pi/2}d\varphi_2\,(1-k_1^2\sin^2\varphi_1-k_2^2\sin^2\varphi_2)^{-\frac12}=\int_0^{\pi/2}d\psi_1\,(1-l_1^2\sin^2\psi_1)^{-\frac12}\int_0^{\pi/2}d\psi_2\,(1-l_2^2\sin\psi_2)^{-\frac12}.$$

Wilhelm Maier (Jena).

Bose, B. N.: On certain integrals involving Bessel functions. Bull. Calcutta math. Soc. **40**, 8—14 (1948).

Die Integrale
$$\int_0^\infty e^{-a^2t^2}J_n(t)\,\frac{dt}{t},\quad \int_0^{\pi/2}e^{-a\sin\theta}I_{n/2}(a\sin\theta)\sin^{n/2}\theta\cos\theta\,d\theta,$$
$$\int_0^{\pi/2}e^{-a\operatorname{tg}^2\theta}I_{n/2+1}(a\cos^{-2}\theta)\cos^{n-1}\theta\cdot\sin\theta\,d\theta,\quad \int_0^1 P_n(1-2y^2)\,e^{-ay^2}I_m(ay^2)\,y^{2m+1}\,dy,$$
$$\int_0^\infty e^{-a^2\operatorname{Cos}^2\varphi/4}D_{m+m'-1}(a\operatorname{Cos}\varphi)\operatorname{Sin}^{2m}\varphi\,d\varphi,\quad \int_0^\infty e^{-a^2\operatorname{Cos}^2\varphi/4}D_{2s-2m+1}(a\operatorname{Cos}\varphi)\operatorname{Sin}^{2m}\varphi\,d\varphi$$

werden unter gewissen Einschränkungen für die in ihnen enthaltenen Parameter berechnet. Ferner wird eine Reihe von Lösungen der Integralgleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\,(z+t)}{\pi\,(z+t)}\,\psi(t)\,dt = \psi(z)$$

angegeben; z. B. $\psi(t) = t^{-\nu} J_{2n+\nu}(bt)$ $(a \geqq b > 0,\ \nu > -\frac{1}{2})$,

$\psi(t) = J_{n+\frac{1}{2}}(bt)\, J_{-n-\frac{1}{2}}(bt)$ $(a \geqq 2\,b > 0)$,

$\psi(t) = (x^2+t^2)^{-(m+\nu-1)/2} J_{m+\nu+1}(b\sqrt{x^2+t^2})$ $(a \geqq b > 0,\ m > -\frac{1}{2},\ \nu > -1)$.

J. Meixner (Aachen).

Bailey, W. N.: Some integrals involving Hermite polynomials. J. London math. Soc. **23**, 291—297 (1949).

Das Integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2} H_m(a\,x)\, H_n(b\,x) \cdots dx$ kann bekanntlich durch Lauricellasche hypergeometrische Reihen allgemein dargestellt werden. Verf. untersucht einige Spezialfälle, in denen das Integral durch gewöhnliche hypergeometrische Reihen und endliche Summen aus Gammafunktionen berechnet werden kann. Z. B. ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(a\,x)\, H_n(b\,x)\, H_p(x)\,dx = \frac{(-1)^{k-p}\, m!\, p!\, 2^p\, a^{p-n}\, b^{m-p}\, \pi^{\frac{1}{2}}}{(k-p)!\,(p-n)!} F\left(\begin{matrix} n+1, -n; a^2 \\ p-n+1 \end{matrix}\right),$$

wenn $a^2 + b^2 = 1$ und $2k = m + n + p$. Vgl. auch I. W. Busbridge (dies. Zbl. **32**, 276) und E. C. Titchmarsh (dies. Zbl. **32**, 275). *W. Hahn* (Berlin).

Bohl, Johann Georg von: Zur Lösung eines von Langmuir behandelten Integrals. Arch. Math., Karlsruhe **1**, 402—407 (1949).

Die Bestimmung von Raumladungen führte J. Langmuir [Physic. Rev., Minneapolis, II. S. **33**, 958 (1929)] zur näherungsweisen Auswertung des Abelschen Integrals

$$\int_0^x dt\,\{t^{\frac{1}{2}} + \alpha\,[(1-t)^{\frac{1}{2}} - 1]\}^{-\frac{1}{2}} = j(x, \alpha)$$

für $0 < x$; $\alpha < 1$. Durch algebraische Reduktion wird $j(x, \alpha)$ auf elliptische Normalintegrale Legendres zurückgeführt. *Wilhelm Maier* (Jena).

Katterbach, Klaus und Helmut Krause: Die Logarithmen der Integralexponentialfunktionen. Z. Astrophys. **26**, 137—146 (1949).

Funktionentheorie:

Kössler, Miloš: The signification of the number sup $|a_n|^{1/n}$ in the theory of power series. Časopis Mat. Fysiky, Praha **74**, 47—52 und engl. Zusammenfassg. 52—53 (1949) [Tschechisch].

Die Tatsache, daß $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ für die Potenzreihe (1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine so große Rolle spielt, veranlaßt den Verf., danach zu fragen, ob nicht auch $\overline{\text{fin}}\sqrt[n]{|a_n|}$ für die Potenzreihe (1) von Bedeutung ist. Zur Beantwortung dieser Frage werden folgende Sätze bewiesen: 1. Ist in (1) $|a_n| = \gamma_n^n$, $n = 1, 2, \ldots, k$, und $\overline{\underset{n>k}{\text{fin}}}\sqrt[n]{|a_n|} = g$, so gilt für jede Nullstelle ζ von (1): $|\zeta| \geqq x/g$, wenn x die kleinste positive Wurzel der Gleichung $(1-x)\left(1 - \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu g^{-\nu} x^\nu\right) - x^{k+1} = 0$ bedeutet. 2. Ist in (1) $a_1 > 0$ und $\overline{\underset{n>1}{\text{fin}}}\sqrt[n]{|a_n|} = g$, so hat die zu (1) inverse Potenzreihe einen Konvergenzkreis,

der nicht kleiner als $\left(\sqrt{1+a_1/g}-1\right)^2$ ist. 3. Die Potenzreihe

$$f(z_1, z_2) = a + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu,\nu}\, z_1^{n-\nu}\, z_2^{\nu} \right)$$

der beiden komplexen Variablen z_1 und z_2 hat in $|z_k| < r$, $k = 1, 2$, mit $r = g^{-1}\left(1 - 1/\sqrt{1+a}\right)$ keine Nullstelle, wenn $a > 0$, $g > 0$ und $g = \overline{\operatorname{fin}}\, g_n$ mit $g_n = \overline{\operatorname{fin}}_{0 \leqq \nu \leqq n} \sqrt[n]{|a_{n-\nu,\nu}|}$ ist. Mit Hilfe von Satz 3 wird schließlich bewiesen: 4. Ist $a > 0$ und $g = \overline{\operatorname{fin}}_{n \geqq 1} \sqrt[n]{|a_{n+1}|}$, so ist der Radius ϱ_1 desjenigen Kreises $|z| < \varrho_1$, innerhalb dessen sich die Potenzreihe $a\,z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ konform verhält, nicht kleiner als $g^{-1}\left(1 - 1/\sqrt{1+a}\right)$. — Die in den angeführten Sätzen auftretenden Schranken sind scharf. — Am Schluß der Arbeit weist Verf. noch darauf hin, daß seine Methode eine Reihe weiterer Anwendungsmöglichkeiten besitzt, wie z. B. bei der Frage nach der Existenz implizit gegebener Funktionen oder beim Existenzbeweis für die Lösungen von Differentialgleichungen. Die Bedeutung der sich ergebenden Sätze liegt in erster Linie darin, daß die erhaltenen Schranken nicht verbesserungsfähig sind. *Lammel* (Tutzing).

Lochin, I. F.: Bemerkungen über Abschätzungen regulärer Funktionen. Mat. Sbornik, n. S. **24**, 249—262 (1949) [Russisch].

Es sei $f(z)$ eine im Einheitskreise reguläre analytische und $F(z)$ eine ebenda reguläre analytische schlichte Funktion. $f(z)$ wird zu $F(z)$ subordiniert genannt, wenn der Wertbereich von $f(z)$ in dem von $F(z)$ enthalten ist. Es bedeute S die Klasse aller im Einheitskreise regulären schlichten Funktionen $F(z)$ mit $F(0) = 0$ und $F'(0) = 1$, und $\bar{S}$ die Klasse aller $f(z)$ mit $f(0) = 0$, die irgendeiner $F(z) \in S$ subordiniert sind. Folgende Sätze werden bewiesen: 1. Ist $f(z) = a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \ldots \in \bar{S}$ $(m \geqq 1)$, so gilt für $|z| = r$ $(0 < r < 1)$

$$|f'(z)| \leqq \frac{(1 + r^m)\, m \cdot r^{m-1}}{(1 - r^m)^3},$$

wobei Gleichheit nur für $f(z) = z^m (1 - e^{\alpha i} z^m)^{-2}$ (α reell) stattfindet. 2. Es ist $|a_k| \leqq 1$ für $k = m, m+1, \ldots, 2m-1$ und $|a_{2m}| \leqq 2$. [Für $m = 1$ und $f(z) \in S$ geben Sätze 1 und 2 wohlbekannte Abschätzungen aus der Theorie der schlichten Abbildungen.] 3. Wenn $f(z) \in \bar{S}$ und $f(z_k) = a$, $|z_k| = r_k < 1$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, p$ ist, so ist $|f'(0)| \leqq h R^2 (1 - R)^{-1}$, wobei $h = \sum_{k=0}^{p} (1 - r_k^2)/r_k$ und $R = \prod_{k=0}^{p} r_k$ gesetzt wurde; Gleichheit gilt nur, wenn alle Punkte z_k auf der gleichen Halbgeraden durch $z = 0$ liegen. 4. Es bedeute r den Radius des größten Kreises um $z = 0$, in welchem eine gegebene Funktion $f(z) \in \bar{S}$ mit $f'(0) = a_1$ jeden Wert höchstens in p Punkten annimmt, so ist r Wurzel der Gleichung

$$(p+1)\, r^p (1 - r^2) - |a_1| (1 - r^{2p+2}) = 0.$$

Satz 4 verallgemeinert einen Satz von J. Dieudonné [Ann. sci. École norm. sup., III. S. **48**, 247—358 (1931); dies. Zbl. **3**, 119], indem die Voraussetzung $|f(z)| < 1$ durch die schwächere $f(z) \in \bar{S}$ ersetzt wird. 5. Wenn $f(z)$ zu einer solchen $F(z)$ subordiniert ist, welche den Einheitskreis auf einen schlichten und konvexen Bereich abbildet, so ist, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ gesetzt, $|a_n| \leqq 1$ für $n = 1, 2, \ldots$; Gleichheit gilt nur für $f(z) = z/(1 - e^{\alpha i} z)$ und für $f(z) = e^{\alpha i} z^n$. — Es bedeute $\bar{C}$ die Klasse aller im Einheitskreise regulären Funktionen $f(z)$, für welche $f(z_1) f(z_2) \neq 1$ für

alle z_1 und z_2, ($|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$). Es bedeute C_t die Klasse aller im Einheitskreise regulären Funktionen mit $f(0) = 0$, die der Funktion $F_t(z) = \frac{z \cdot \sin t}{1 + iz\cos t}$ subordiniert sind ($-\pi/2 \leqq t \leqq \pi/2$), ferner bedeute C die Vereinigungsmenge aller C_t. Da alle Funktionen $F_t(z)$ den Einheitskreis auf durch die Punkte $w_1 = +1$ und $w_2 = -1$ gehende Kreise abbilden, sind (aus elementargeometrischen Gründen) C_t und somit auch C in $\bar{C}$ enthalten. Verf. beweist u. a. die folgenden Sätze: 6. Für $f(z) \in \bar{C}$ mit $f(0) = 0$ gilt Satz 3 sowie Satz 4. 7. Für $f(z) \in C$ gilt für $|z| = r$

$$|f(z)| < \frac{r^m}{\sqrt{1 - r^{2m}}}, \quad \text{wenn } f(z) = a_m z^m + \cdots.$$

8. Für $f(z) \in C$ ist $|a_n| \leqq 1$, und für $f(z) \in C_t$ ist $|a_n| \leqq \sin t$ ($n = 1, 2, \ldots$). — Verf. bemerkt (bei der Korrektur), daß für $f(z) \in C$ die Ungleichung $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leqq 1$ stattfindet, in welcher Gleichheit nur für $f(z) = F_t(z)$ möglich ist. Daraus folgt, daß im Satz 8 Gleichheit nur für $f(z) = e^{i\alpha} z^n$ stattfinden kann. *A. Rényi.*

Pham, Tinh-Quat: Sur les fonctions entières périodiques. Ann. sci. École norm. sup., III. S. **65**, 11—70 (1948).

Sei $f(z)$ ($z = x + iy$) eine ganze periodische Funktion endlicher Ordnung, deren Periode 2π ist. $f(z)$ läßt sich als Produkt von zwei ganzen Funktionen nullter Ordnung darstellen, von denen die eine von e^{iz}, die andere von e^{-iz} abhängt. Verf. untersucht die Abhängigkeit des Wachstums von $f(z)$ von den Nullstellen derselben. Für $\log M(r)$ ergibt sich ein asymptotischer Ausdruck, der besonders einfach wird, falls $f(z)$ von regelmäßigem Wachstum ist. Auf der Geraden $y =$ konst. wird ein analoger Ausdruck für $\log |f(z)|$ selbst erhalten, wenn nur die Nullstellen durch gewisse Kreise ausgeschlossen werden. Falls $f(z)$ sich nicht auf eine endliche Kombination von Exponentialfunktionen reduziert, so kann kein Picardscher Ausnahmewert existieren. — In jedem Periodenstreifen existiert wenigstens eine mit der imaginären Achse parallele Häufungsgerade $x = X$ der Nullstellen von $f(z) - Z$. Sei $\varrho(X, Z)$ der Konvergenzexponent derjenigen dieser Nullstellen, die im Streifen $|x - X| < \varepsilon$ liegen. Unter den Geraden $x = X$ gibt es wenigstens eine der maximalen Ordnung ϱ, außer höchstens für zwei Z-Werte. Diese Geraden sind den Borelschen Richtungen analog. Ist die Ordnung von $f(z)$ größer als 2, so gibt es in der Richtung der maximalen Ordnung eine unendliche Folge von Kreisen C_q mit beliebig kleinem Radius, derart, daß $f(z)$ in jedem C_q jeden Wert Z wenigstens $|z_q|^{\varrho - 1 - \eta_q}$ mal ($\eta_q \to 0$ für $q \to \infty$; z_q Mittelpunkt von C_q) annimmt, außer denjenigen Z-Werten, die auf der Riemannschen Kugel in zwei Kreisen liegen, deren Radien $\to 0$ für $q \to \infty$. Die Beweise sind hauptsächlich nach Methoden von Valiron und Milloux ausgeführt. *V. Paatero* (Helsinki).

Carlson, Fritz: Sur les fonctions entières. Ark. Mat. Astron. Fysik, A **35**, Nr. 14, 18 S. (1948).

Der bekannte Satz von Jentsch, wonach jeder Punkt des (endlichen) Konvergenzkreises einer Potenzreihe Häufungspunkt der Nullstellen ihrer Abschnitte ist, wird vom Verf. auf ganze Funktionen verallgemeinert. Bei einer ganzen Funktion $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ von positiver Ordnung ϱ häufen sich die Nullstellen ihrer Abschnitte $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ gegen den unendlich fernen Punkt, und zwar in gewissem Sinn in allen Richtungen gleichmäßig. Für $\varrho = \infty$ gibt es zu jedem f eine Abschnittsfolge $\{P_{m_i}\}$ und eine Radienfolge $\{R_{m_i}\}$, so daß ($\alpha > \alpha_0 > 0$, $\delta > 0$, $0 < \Phi \leqq 2\pi$) die Nullstellenzahl von P_{m_i} in

$$(1 - \delta) R_{m_i} < |z| < (1 + \delta) R_{m_i}, \quad |\arg z - \Phi| < \alpha$$

gleich $\frac{\alpha}{\pi} m_i\,(1 + o(1))$ ist. Im Falle $0 < \varrho < \infty$ sind für die Beschreibung der Nullstellenverteilung einer gewissen Abschnittsfolge noch gewisse von ϱ abhängige Funktionen $\varphi(u)$ und $\theta(\alpha)$ nötig. Die Nullstellenzahl im Kreisring

$$R_{m_i} \cdot e^{-u} < |z| < (1 + \delta)\, R_{m_i}$$

ist dann größer als $m_i\,\varphi(u)\,(1 + o(1))$, in einem Winkelraum der Öffnung 2α größer als $m_i\,\theta(\alpha)\,(1 + o(1))$. *Pfluger* (Zürich).

Ghermanescu, Michel: Opérateurs fonctionnels périodiques. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1190—1192 (1949).

In questa nota é enunciato (e dimostrato per $p = 2$) il seguente teorema: Le sole funzioni $\theta(z)$, meromorfe in z (o in $1/z$), che si riproducono dopo p iterazioni successive, sono della forma $\theta(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, $ad - bc \neq 0$, allorquando a, b, c, d soddisfano alla condizione

$$(a + d)\,(u^{p-1} - v^{p-1}) - (ad - bc)\,(u^{p-2} - v^{p-2}) = 0,$$

dove u e v sono le radici dell'equazione

$$u^2 - (a + d)\,u + ad - bc = 0, \quad (a + d)^2 \neq 4(ad - bc).$$

L'A. osserva poi che il suddetto teorema rende applicabile un metodo di M. Parodi (questo Zbl. **29**, 400, **30**, 92, **32**, 24) per la risoluzione di certe equazioni singolari di Fredholm, a una vasta classe di esse. *F. Pellegrino* (Roma).

Iglesias, Tomás: Über die Umordnung von Dirichletschen Reihen. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. **7**, 21—40 (1947) [Spanisch].

Die Dirichletsche Reihe (1) $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$, wo $\lambda_n < \lambda_{n+1}$; $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ ist, sei für $\Re(s) > C$ konvergent, so daß für diese s die Funktion $f(s)$ analytisch ist. Werden nun die Glieder der Reihe (1) umgeordnet und wird vorausgesetzt, daß die erhaltene Reihe in jedem endlichen Gebiet innerhalb eines anderen Gebietes D, das die Halbebene $\Re(s) > C$ enthält, gleichmäßig gegen $F(s)$ konvergiert, so ist $F(s)$ die analytische Fortsetzung von $f(s)$ in dem außerhalb von $\Re(s) > C$ gelegenen Teil von D. Es wird nun bewiesen, daß notwendig dafür, daß die Reihe (1) mit reellen Koeffizienten analytisch durch Umordnung in einen Streifen $C_1 < \Re(s) \leqq C$ fortsetzbar ist, die Bedingung ist, daß die beiden Reihen, die man aus den Gliedern mit positiven Koeffizienten und aus den Gliedern mit negativen Koeffizienten einzeln bilden kann, dieselbe Konvergenzabszisse haben. Ein analoges Kriterium gibt es auch für Reihen mit komplexen Koeffizienten. In der Arbeit werden 11 Theoreme bewiesen, von denen das 8. und 11. Theorem angeführt seien. — Theorem 8: Es sei C die Konvergenzabszisse der umgeordneten Reihe und D die Konvergenzabszisse der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}|$. Weiter sei μ_n das Minimum der Exponenten $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots$ und M_n das Maximum der Exponenten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Die Partialsummen $S_{n_\nu}(s)$ der Ordnungen n_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ mögen der Ungleichung $\frac{\log |S_{n_\nu}(s)|}{M_{n_\nu}} < v(s) + \varepsilon < -\sigma + \varepsilon$ in einem Gebiet D außerhalb der Konvergenzhalbebene der umgeordneten Reihe genügen, wobei $\varepsilon > 0$ beliebig und $v(s)$ eine reelle, in D stetige Funktion der komplexen Variablen s ist. Außerdem sei für jedes ν $M_{n_\nu} < \mu_{n_\nu + 1}$. Dann konvergieren die Summen $S_{n_\nu}(s)$ für $\nu \to \infty$ gleichmäßig in einer genügend kleinen Umgebung jedes Punktes der Geraden $\Re(s) = C$, in dem $F(s)$ regulär ist. — Theorem 11: Die Dirichletsche Reihe (1) besitze eine hyperkonvergente Partialsummenfolge in einer Umgebung eines Punktes s_0 der Halbebene $\Re(s) > C$, in dem ihr n-tes Glied für $n \to \infty$ gegen 0 strebt. Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\lambda_{n_\nu + 1} - \lambda_{n_\nu + 1}|\,(n_{\nu+1} - n_\nu)\, e^{-\lambda_{n_\nu + 1} s}$ konvergiere in $\Re(s) > 0$. Die Folge

$\{\sum_{n_\nu}(s)\}$ ist dann hyperkonvergent in einer Umgebung jedes Punktes der Geraden $\Re(s) = \Re(s_0)$, deren sämtliche Punkte daher reguläre Punkte von $f(s)$ sind, und es existiert eine Umordnung von (1), die gleichmäßig konvergent ist in jedem endlichen Gebiet innerhalb einer $\Re(s) \geqq \Re(s_0)$ enthaltenden Halbebene.

E. Göllnitz (Chemnitz).

Min, Szu-Hoa: On the order of $\zeta(1/2 + it)$. Trans. Amer. mat. Soc. **65**, 448—472 (1949).

Sätze über trigonometrische Summen der Art $\sum_{n=a}^{b} \exp(f(n))$, wo $f(n)$ mehrfach differenzierbar ist, sind von Landau, van der Corput und Titchmarsh bewiesen worden und bilden mit einem Satze von Titchmarsh [Proc. London math. Soc., II. S. **38**, 96—115 (1934); dies. Zbl. **10**, 104] die Grundlage für die hier erfolgende Abschätzung von $\zeta(s)$ auf $\sigma = 1/2$. Für $a > t^{17/40} \log t^{143/176}$ und $b < t^{1/2}$ ergibt sich mit $f(n) = \log n$ die Abschätzung $O(t^{15/92} \log t^{1/58})$, für $|\zeta(\frac{1}{2} + it)|$ dann dieselbe Größenordnung als Schranke. *Hoheisel* (Köln).

Vil'ner, I. A.: Nomographie analytischer Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **63**, 99—102 (1948) [Russisch].

Vil'ner, I. A.: Die Reduktion einer nomographierbaren analytischen Abhängigkeit auf eine Normalform. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **69**, 3—6 (1949) [Russisch].

Zur nomographischen Behandlung algebraischer Funktionen vom Geschlecht Null oder Eins wird die Uniformisierung des Problems durch elliptische Funktionen herangezogen. Eingehende Diskussion von Realitätsfragen und Grenzfällen. Verweis auf die Dissertation: Nomogramme 1. Klasse analytischer Funktionen komplexer Veränderlicher, Moskau 1946 und vier weiterer Veröffentlichungen des Verf. über denselben Gegenstand [Doklady Akad Nauk SSSR, n. S. **53**, Nr. 3 (1946), **58**, 729—732 (1947); Uspechi mat. Nauk **2**, Nr. 6 (22) (1947) und dies. Zbl. **29**, 57]. *Wilhelm Maier* (Jena).

Fastperiodische Funktionen:

Levin, B.: Neuer Aufbau der Theorie der fast-periodischen Funktionen von Levitan. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **62**, 585—588 (1948) [Russisch].

Eine ε-Fastperiode τ einer stetigen Funktion $f(x)$ muß nach Bohr die Bedingung $|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$ für $-\infty < x < \infty$ erfüllen. Dagegen erklärte Levitan eine ε, N-Fastperiode τ durch $|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$ für $|x| < N$. Unter Verwendung dieser weniger scharfen Definition kam Levitan zu dem Begriff der L-fastperiodischen (Lfp) Funktionen, welcher allgemeiner ist als derjenige der Bfp Funktionen von Bohr. Die Theorie der Lfp Funktionen wurde von Levitan durchgeführt [Zapiski Charkovsk. mat. Obščest. **15**, 2 (1939)]. Verf. gibt in großen Zügen eine durchsichtige Darstellung der Theorie. — Ähnlich wie bei Bfp Funktionen kann man, ausgehend von einer Lfp Funktion $f(x)$ auf $-\infty < x < \infty$ einen Konvergenzbegriff so einführen, daß die reellen Zahlen zu einem bedingt kompakten Raum Ω_f werden, in dem $f(x)$ eine stetige Funktion ist. Jede in Ω_f stetige Funktion ist umgekehrt Lfp. Durch Einführung idealer Elemente schließt man Ω_f ab und erhält einen kompakten Raum T_f. Ist $f(x)$ Bfp, so ist $f(x)$ auf Ω_f gleichmäßig stetig und kann deshalb eindeutig so fortgesetzt werden, daß f zu einer stetigen Funktion auf T_f wird. Umgekehrt kann jede auf T_f gleichmäßig stetige Funktion als Bfp Funktion auf $-\infty < x < \infty$ gedeutet werden. Ist $f(x)$ nur Lfp, so versucht man, eine auf T_f Lebesgue-summierbare Fortsetzung von $f(x)$ zu konstruieren. [Der Begriff des Lebesgueschen Maßes und Integrales kann in T_f unter Benutzung des auf $-\infty < x < \infty$ erklärten Mittelwertes $(1/2T)\int_{-T}^{+T} \ldots dx$ eingeführt werden.]

Besitzt man eine solche Fortsetzung von f, so kann man deren Fourierreihe bezüglich der stetigen Charaktere von T_f bilden. (Da die Fortsetzung von f nicht eindeutig ist, kann es mehrere Fourierreihen geben.) Den Charakteren entsprechen eindeutig Funktionen $e^{i\lambda x}$ auf $-\infty < x < \infty$. Man kann eine Fourierreihe der Lfp Funktion $f(x)$ also in üblicher Weise wie bei Bfp Funktionen hinschreiben. Eindeutigkeitssatz: Wenn eine der Fourierreihe von f mit einer der Fourrierreihen von g übereinstimmt, so sind die Lfp Funktionen f und g identisch. — Es gibt Lfp Funktionen, welche keine summierbare Erweiterung zulassen. Eine Lfp Funktion f besitzt jedoch immer eine solche Erweiterung, wenn $\lim_{T} \text{unt. Gr.}_{a} (1/2T) \int_{a-T}^{a+T} f(x)\,dx < \infty$ ist. Unabhängig von dieser Bedingung gilt stets der Approximationssatz, dessen genaue Formulierung den Verhältnissen entsprechend komplizierter als bei Bfp Funktionen ist, der jedoch aus dem Bohrschen Satz und der Definition von Lfp gefolgert werden kann. *Maak* (Hamburg).

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

Montel, Paul: Sur un système d'équations aux différences finies. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 877—879 (1948).

Hier werden die Ergebnisse der Arbeit: Montel, „Sur quelques équations aux différences mêlées", Ann. sci. École norm. sup., III. S. **65**, 337—353 (1948), dies. Zbl. **33**, 180 zusammengestellt. *Töpfer* (Köln).

Bruijn, N. G. de: The asymptotically periodic behavior of the solutions of some linear functional equations. Amer. J. Math. **71**, 313—330 (1949).

Die Lösungen $f(x)$ der mit reellen stetigen Koeffizienten $w(x)$, $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ $(x \geqq 1)$ versehenen linearen funktionalen Differentialgleichung

$$w(x)\,f'(x) + p(x)\,f(x) - q(x)\,f(x-1) = r(x)$$

werden für reelle $x \geqq 0$ betrachtet. Mit jeder beliebigen reellen, in $0 \leqq x \leqq 1$ stetigen Funktion $g(x)$ ist in $0 \leqq x < \infty$ genau eine Lösung $f(x)$ festgelegt, die in $0 \leqq x \leqq 1$ mit $g(x)$ übereinstimmt. Unter gewissen Voraussetzungen für die Koeffizienten sind die $f(x)$ in $0 \leqq x < \infty$ beschränkt, bzw. gilt bei $x \to +\infty$ für die Ableitungen $f^{(k)}(x) - \psi^{(k)}(x) \to 0$, wobei $\psi(x)$ die Periode 1 besitzt. Oder unter anderen Voraussetzungen ist für hinreichend große x:

$$\left| f^{(k)}(x) - \psi^{(k)}\left\{x - \int_{B+1}^{x} (w(t)/p(t))\,dt\right\} \right| \leqq C(k) \int_{x-1}^{\infty} \Phi(t)\,dt \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Hier ist $\psi(x)$ eine von $f(x)$ abhängende periodische Funktion mit der Periode 1 usw. — Die bei den einzelnen Sätzen vorausgesetzten Bedingungen sind nicht stets die gleichen und zum Beispiel von folgender Art: In $x \geqq 1$ gibt es eine fallende positive Funktion $\Phi(x)$, zu der eine positive Konstante A angegeben werden kann, so daß $A > \Phi(1)$ und $A > \int_{1}^{\infty} \Phi(x)\,dx$; B und D sind Konstanten. Es sei nun:
für $x \geqq 1$: $w(x) > 0$, $|p(x) - q(x)| < B\Phi(x)$, $|r(x)| \leqq D\Phi(x)$, $w^2(x) < B\Phi(x)$,
für $x \geqq k+1$: $|(w^{(k)}x)| < B\Phi(x)$, $|p^{(k)}(x)| < B\Phi(x)$, $|q^{(k)}(x)| < B\Phi(x)$,
$|r^{(k)}(x)| \leqq D\Phi(x)$,
für $x \geqq B+1$: $p(x) > 0{,}5$.
Der Zusammenhang $f(x) \to \psi(x)$ wird einer besonderen Betrachtung unterzogen. Den Abschluß bilden einige Beispiele; bemerkenswert ist dabei die Behandlung der Gleichung $G'(x) = \exp(\alpha x + \beta)\,G(x-1)$ $(\alpha > 0)$ wegen ihres Zusammenhanges mit den Untersuchungen K. Mahlers. *Töpfer* (Köln).

Knebelman, M. S.: The Wronskian for linear differential equations. Amer. math. Monthly **56**, 252—254 (1949).

Data l'equazione differenziale

$$(A_0 D^n + A_1 D^{n-1} + \cdots + A_n)\, y = 0,\ A_0 \neq 0,$$

con $A_0, A_1, \ldots, A_n$ costanti, se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sono le radici dell'equazione caratteristica

$$A_0 \varrho^n + A_1 \varrho^{n-1} + \cdots + A_n = 0,$$

con il rispettivo ordine di molteplicità $r_1, r_2, \ldots, r_k$, l'A. mostra che nella formula $w(x) = w(0) \exp(-A_1 x/A_0)$ dove $w(x)$ è il wronskiano del sistema fondamentale $e^{\alpha_i x}$, $x e^{\alpha_i x}, \ldots, x^{r_i - 1} e^{\alpha_i x}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ la costante $w(0)$ ha l'espressione $\prod_{i=1}^{k} [1!\, 2! \ldots (r_i - 1)!] \prod_{j>i} (\alpha_j - \alpha_i)^{r_i r_j}$. *Giovanni Sansone* (Firenze).

Peyovitch, T.: L'existence de solutions asymptotiques de certaines équations différentielles. Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A **1**, 88—92 (1947).

Das folgende System von Differentialgleichungen wird betrachtet:

$$\frac{dx}{dt} = -l + a_{11} e^x + a_{12} e^y;\ \frac{dy}{dt} = m + a_{21} e^x + a_{22} e^y.$$

Die Koeffizienten a_{ik} sind reelle oder komplexe Funktionen, stetig und beschränkt im Intervalle $0 < t_0 \leqq t < \infty$; l und m sind positive Konstante. Dann besitzt das System von Differentialgleichungen Lösungen, welche den folgenden Bedingungen genügen:

$$\lim_{t\to\infty} \Re\, x = -\infty;\ \lim_{t\to\infty} \Re\, y = -\infty \text{ und } \lim_{t\to\infty} \frac{dx}{dt} = -l;\ \lim_{t\to\infty} \frac{dy}{dt} = m.$$

Das System von Lösungen enthält eine beliebige Konstante. Zum Beweis benutzt Verf. die Methode der sukzessiven Approximation. Es wird noch bemerkt, das ähnliche Resultate für Systeme, welche mehr als zwei Gleichungen enthalten, mit derselben Methode bewiesen werden können. *St. Fenyö* (Budapest).

Dehousse, L.: Sur le théorème d'Auric et son extension à un système différentiel linéaire, homogène, à coefficients constants. Bull. Soc. Sci. Liége **16**, 102—107 (1947).

A. Auric [Sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants, Nouv. Ann. Math., III. S. **13**, 47—52 (1894)] provò che l'integrale $y(x)$ dell'equazione

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

che soddisfa le condizioni di Cauchy $y(0) = c_0$, $y^{(i)}(0) = c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, può ottenersi dallo sviluppo della frazione

$$\frac{c_0 + (c_1 + a_1 c_0)\, x + \cdots + (c_{n-1} + a_1 c_{n-2} + \cdots + a_{n-1} c_0)\, x^{n-1}}{1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n} = A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m + \cdots$$

convergente per $|x| < \varrho$, ove ϱ indica il minimo modulo delle radici del polinomio $1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$, ponendo

$$y(x) = A_0 + \frac{A_1}{1!} x + \frac{A_2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{A_m}{m!} x^m + \cdots.$$

L'A. dà una dimostrazione rapida e diretta del teorema e lo estende poi ai sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti. *Giovanni Sansone* (Firenze).

Greco, Donato: Su un problema ai limiti per un'equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine. Giorn. mat. Battaglini, IV. S. **78**, 216—237 (1949).

Gegeben sei die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x) \frac{dy}{dx}\right] + [\lambda A(x) + B(x)]\, y = 0 \tag{1}$$

mit in (a, b), $a < b$, stetigen $\theta(x)$, $\theta'(x)$, $A(x)$, $B(x)$, $0 < m_1 \leqq \theta(x) \leqq M_1$, $0 < m_2 \leqq A(x) \leqq M_2$, $0 < m_3 \leqq -B(x) \leqq M_3$; Verf. stellt sich die Aufgabe, die Lösungen $y(x, \lambda)$ von (1) zu bestimmen, die den Randbedingungen $(\alpha_1 \lambda + \alpha_1')\, y(a, \lambda) + (\alpha_2 \lambda + \alpha_2')\, y'(a, \lambda) = 0$, $(\beta_1 \lambda + \beta_1')\, y(b, \lambda) + (\beta_2 \lambda + \beta_2')\, y'(b, \lambda) = 0$ unter der Voraussetzung $\alpha_1 \alpha_2' - \alpha_1' \alpha_2 > 0$, $\beta_1 \beta_2' - \beta_1' \beta_2 < 0$ genügen. Als Vor-

bereitung betrachtet Verf. zwei spezielle Fälle des Problems:

$$\alpha_1 = \alpha_1' - 1 = \alpha_2 = \alpha_2' = 0, \quad \beta_1 \neq 0, \quad \beta_2 \neq 0;$$
$$\beta_1 = \beta_1' - 1 = \beta_2 = \beta_2' = 0, \quad \alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0,$$

für die die Zahlen $q_2 = -\beta_2'/\beta_2$, $q_2' = -\alpha_2'/\alpha_2$ zu zwei Intervallen gehören, die zwei verschiedene Eigenwerte von der Eigenschaft enthalten, daß die entsprechenden Eigenfunktionen dieselbe Anzahl von Nullstellen in (a, b) besitzen. Das allgemeine Problem wird auf diese beiden Spezialfälle zurückgeführt. *Giovanni Sansone.*

Germay, R.-H.: Sur une généralisation d'un théorème de Lindelöf pour les systèmes d'équations différentielles de forme normale. Bull. Soc. Sci. Liége **16**, 2—6 (1947).

Si considera il sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \ldots, y_p) \quad (j = 1, \ldots, p), \tag{1}$$

ove le funzioni f_j sono definite nel campo $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, $y_j^0 - b_j \leq y_j \leq y_j^0 + b_j$ $(j = 1, \ldots, p)$, e soddisfano alla condizione di Lipschitz

$$|f_j(x, y_1, \ldots, y_p) - f_j(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_p)| \leq \sum_{r=1}^{p} K_{jr} |y_r - \bar{y}_r| \quad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

Siano $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x)$ $(x_0 \leq x \leq x_0 + a)$ p funzioni continue per le quali è $y_j^0 - b_j \leq \varphi_j(x) \leq y_j^0 + b_j$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$, allorchè $x_0 \leq x \leq x_0 + a'$, ove $a' \leq a$. — Siano N_j, M_j rispettivamente i limiti superiori di $|y_j^0 - \varphi_j(x)|$, $|f_j(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x))|$, e si ponga $N = \sum_{j=1}^{p} N_j$, $M = \sum_{j=1}^{p} M_j$; sia K il più grande dei numeri $\sum_{j=1}^{p} K_{j,r}$, $(r = 1, \ldots, p)$ e sia b il più piccolo dei numeri b_j $(j = 1, \ldots, p)$. — L'A. stabilisce l'esistenza, la continuità e l'unicità di un sistema di integrali $\varphi_{1,\infty}(x), \ldots, \varphi_{p,\infty}(x)$ del sistema differenziale (1), con $\varphi_{1,\infty}(x_0) = y_1^0, \ldots, \varphi_{p,\infty}(x_0) = y_p^0$, nell'intervallo $(x_0, x_0 + h)$, ove h è il più piccolo dei numeri a', $\frac{1}{K} \lg\left(1 + \frac{bK}{M + NK}\right)$.

S. Cinquini (Pavia).

Čudov, L. A.: Die umgekehrte Aufgabe von Sturm-Liouville. Mat. Sbornik, n. S. **25** (67), 451—456 (1949) [Russisch].

G. Borg hat den folgenden Satz bewiesen [Acta Math., Uppsala **78**, 1—96 (1945)]: Mögen die beiden Eigenwertaufgaben

$$\text{a)}\ y'' + \varphi(x)\, y = \lambda\, y, \quad \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0, \quad \gamma y(\pi) + \delta y'(\pi) = 0,$$
$$\text{b)}\ z'' + \psi(x)\, z = \lambda\, z, \quad \alpha z(0) + \beta z'(0) = 0, \quad \gamma' z(\pi) + \delta' z'(\pi) = 0$$

dasselbe Spektrum besitzen (φ und ψ sind gegebene Lebesgue-integrierbare Funktionen); ferner sei die Bedingung (B) $\delta\delta' = 0$, $|\delta| + |\delta'| > 0$ erfüllt. Dann gilt, fast überall in $[0, \pi]$: $\varphi(x) = \psi(x)$. — Verf. zeigt, daß dieser Satz auch dann besteht, wenn man die Bedingung (B) durch die folgende allgemeinere ersetzt: (B') $\begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix} \neq 0$. Der Beweis wird begründet auf einer Untersuchung der Lösung $y(x, \lambda)$ des Anfangswertsproblems $y'' + \varphi(x)\, y = \lambda y$, $y(0, \lambda) = a_1$, $y'(0, \lambda) = a_2$, als ganze analytische Funktion von λ. *Béla Sz.-Nagy* (Szeged).

Wintner, Aurel: Linear differential equations and the oscillatory property of Maclaurin's cosine series. Math. Gaz., London **33**, 26—28 (1949).

Ausgehend von der Tatsache, daß die Teilsummen $C_n(t) = \sum_{m=0}^{n} (-t^2)^m/(2m)!$ der Potenzreihe für $\cos t$ abwechselnd im ganzen unendlichen Intervall $0 < t < \infty$ größer als $\cos t$ bzw. kleiner als $\cos t$ sind, werden allgemeiner bei $x'' + f(t) \cdot x = 0$ mit $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ die durch schrittweise Näherungen entstehenden Funk-

tionen $$x_n(t) = x(0) + x'(0)\,t - \int_0^t (t-s)\,f(s)\,x_{n-1}(s)\,ds$$

untersucht, wobei von $x_0(t) = x(0) + x'(0)\,t$ ausgegangen wird. Ist $f(t)$ stetig, positiv und monoton wachsend für $0 < t < \infty$, so gilt dort $x_n(t) > x(t)$ für $n = 2, 4, 6, \ldots$ und $x_n(t) < x(t)$ für $n = 1, 3, 5, \ldots$ *Collatz* (Hannover).

Hartman, Philipp and Aurel Wintner: A separation theorem for continuous spectra. Amer. J. Math. **71**, 650—662 (1949).

Let $p = p(t) > 0$ and $q(t)$ be real-valued on $0 \leqq t < \infty$ and consider the differential equation $(p\,x')' + (q + \lambda)\,x = 0$, where λ is a real parameter. Suppose that the equation is of „Grenzpunkt" type, i. e. that it does not possess two linearly independent solutions $x(t) \in L^2(0, \infty)$; this requirement being satisfied for every λ if it is satisfied for a single λ. [See H. Weyl, Math. Ann., Berlin **68**, 222—260 (1910).] A boundary condition (α): $x(0)\sin\alpha - p(0)\,x'(0)\cos\alpha = 0$ (α a real number) determines therefore an eigenvalue problem in $L^2(0, \infty)$. The following separation theorem is proved: If, for the boundary condition (α), λ' and λ'' $(\lambda' < \lambda'')$ are isolated eigenvalues and if the open interval (λ', λ'') does not contain any point of the spectrum, then this interval contains exactly one point of the spectrum of the problem for any other boundary condition (α'), $\alpha' \neq \alpha$. *Béla Sz.-Nagy.*

Avakumović, Vojislav G.: Sur l'équation différentielle de Thomas-Fermi. I, II. Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A **1**, 101—113 (1947), A **2**, 223—233 u. serb. Zusammenfassg. 234—235 (1948).

Es handelt sich um die Verallgemeinerung (1) $y'' = f(x)\,y^\lambda$ [$\lambda > 1$ eine Konstante; $f(x)$ eine gegebene, bei konstantem $a \geqq 0$ für $x \geqq a$ definierte positive und stetige Funktion] der Differentialgleichung $y'' = y^{3/2}\,x^{-1/2}$ [vgl. E. Fermi, Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VI. S. **6**, 602—607 (1927); L. H. Thomas, Proc. Cambridge philos. Soc. **23**, 542—548 (1927); vgl. ferner V. Bush und S. H. Caldwell, A. Sommerfeld, C. Miranda; dies. Zbl. **3**, 268; **4**, 393; **8**, 353], mit der man in der Fermischen Statistik Potential und Dichte im Atominnern beschreibt. Unter der Voraussetzung, daß eine Lösung $y(x)$ von (1) mit (2) $y(x) \to 0$ für $x \to \infty$ existiert, wird das asymptotische Verhalten von $y(x)$ für $x \to \infty$ genauer untersucht. — Die für $x > a$ erklärte Funktion $\varrho(x)$ gehöre der Klasse $R - O$ an, d. h. sie sei positiv, in jedem endlichen Intervall beschränkt, und es sollen die Konstanten δ $(0 < \delta < 1)$, m_ϱ und M_ϱ $(0 < m_\varrho \leqq M_\varrho)$ vorhanden sein, so daß die Ungleichung $m_\varrho \leqq \varrho(t\,x)/\varrho(x) \leqq M_\varrho$ erfüllt ist für alle t mit $\delta < t < 1$ und alle in Betracht kommenden $x \geqq a$; weiter sei $f(x) \geqq \varrho(x)$ für hinreichend großes x und $y(x)$ eine (2) erfüllende Lösung von (1); dann existiert eine Konstante $\bar{A} = \bar{A}(\lambda, m_\varrho, M_\varrho) > 0$, so daß $(x^2\varrho(x))^\gamma\,y(x) < \bar{A}$ mit $\gamma = (\lambda - 1)^{-1}$ für hinreichend großes x ist. Beim Beweis werden zwei Hilfssätze über Funktionen der Klasse $R - O$ benützt (vgl. Verf., dies. Zbl. **11**, 207). Im Satz 2 wird $y(x)$ in ähnlicher Weise nach unten abgeschätzt. — Im Satz 3 wird vorausgesetzt, daß $\varrho(x)$ regulär wachsend im Sinne von J. Karamata (vgl. dies. Zbl. **8**, 8) ist. Dies soll heißen, daß $\varrho(x)$ positiv ist und daß $\varrho(tx)/\varrho(x)$ bei $x \to \infty$ für jedes $t > 0$ einem Grenzwert $h(t)$ zustrebt [woraus $h(t) = t^v$ mit reellem v folgt]. Es sei nun $v > 2$, $f(x) \sim \varrho(x)$ [d. h. $f(x)/\varrho(x) \to 1$ für $x \to \infty$] und $y(x)$ eine (2) erfüllende Lösung von (1). Dann ist $y(x) \sim C(x^2\varrho(x))^{-\gamma}$. Dabei ist C diejenige leicht in λ und v ausdrückbare Konstante, die sich durch die Forderung ergibt, daß $y = C\,x^{-(2+v)\gamma}$ Lösung von $y'' = x^v\,y^\lambda$ ist. Die Hauptarbeit beim Beweis verursacht der folgende Hilfssatz: Für die für $x \geqq 0$ zweimal differenzierbare abnehmende und konvexe Funktion $p(x)$ mit $p(0) = 1$ und $\lim_{x\to\infty} p(x) = 0$ sei

$$\frac{p^2(x)}{x}\int_0^x \frac{dt}{p^2(t)} > \text{const} \quad \text{und} \quad x^2\frac{p''(x)}{p(x)} > \text{const}$$

für hinreichend großes x, ferner $p''(x) \sim f(x)\, p^{\lambda}(x)$; ist dann $y(x)$ eine (2) erfüllende Lösung von (1), so ist $y(x) \sim p(x)$. — Der Beweis dieses Hilfssatzes wird eingeleitet durch die Substitution $y(x) = p(x)\, z(\varphi(x))$, wo $\varphi(x)$ Lösung der Bernoullischen Gleichung $p\,\varphi'' + 2p'\,\varphi' + \alpha\, p\,\varphi'^2 = 0$ ($\alpha > 0$ konstant) ist mit $\varphi(0) = \xi$ und $\varphi'(0) = 1/\eta$ (ξ und η geeignete Konstante). Mit den Abkürzungen $\chi = p''\, z/p\,\varphi'^2$, $\Omega = f\, p^{\lambda}/p''$ geht (1) über in (3) $z_{\varphi\varphi} - \alpha\, z_{\varphi} = \chi\,(\Omega\, z^{\lambda-1} - 1)$. Daran knüpft Verf. in der zweiten Arbeit an. Man kann den Hilfssatz, wie sein Beweis zeigt, folgendermaßen formulieren. Satz 1_2: Sei $\chi > \beta\, z$ ($\beta > 0$ konstant) und $\Omega \to 1$ für $x \to \infty$, ferner $z = z(\varphi)$ eine Lösung von (3) mit $z = o\,(e^{\alpha\varphi})$ für $\varphi \to \infty$; dann hat man $1 > z \to 1$ für $\varphi \to \infty$. — Das Hauptgewicht der zweiten Arbeit liegt auf einer Verbesserung der Aussage über das asymptotische Verhalten von $z(\varphi)$. Unter den Voraussetzungen, daß $z(\varphi)$ eine Lösung von (3) und $\chi = \beta\, z + O\,(e^{c n \varphi})$, $\Omega = 1 + O\,(e^{c n \varphi})$, $0 < z = o\,(e^{\alpha\varphi})$ für $\varphi \to \infty$ ist ($\beta > 0$ konstant; $n \geqq 2$ ganz, konstant; $2c = \alpha - [\alpha^2 + 4\,(\lambda - 1)\,\beta]^{\frac{1}{2}}$), schließt der Satz 2_2 auf

$$z = 1 - \sum_{\nu=1}^{n-1} A_{\nu}\,(Ce^{c\varphi})^{\nu} + O\,(e^{cn\varphi}) \quad \text{für } \varphi \to \infty,$$

wobei die A_{ν} durch gewisse Gleichungen in c, α, β, λ, ν, A_{ν} definiert werden und C eine geeignete Konstante ist. — In einer demnächst erscheinenden Arbeit [vgl. Glas Srp. Akad. Nauka] will Verf. Existenzsätze für die Differentialgleichung (1) untersuchen. Schon jetzt wird ein solcher formuliert: Für eine geeignete Zahl $w > -2$ sei $f(x)\,(x-a)^{-w} < \infty$, sofern $x - a$ hinreichend klein, $f(x)\, x^{-w} > \text{const} > 0$, sofern x hinreichend groß ist; ist dann b eine vorgegebene positive Konstante, so besitzt (1) eine eindeutige Lösung $y(x)$, sofern noch $y(a) = b$ und $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ gefordert wird. Daraus ergibt sich z. B., daß die Existenz einer (2) erfüllenden Lösung $y(x)$ von (1) aus den übrigen Voraussetzungen des Satzes 3 der ersten Arbeit folgt. Ferner läßt sich damit aus dem Satz 2_2 ein Satz 3_2 ableiten, welcher besagt, daß der Quotient $y(x)/p(x)$ für $x \to \infty$ dieselbe Darstellung in φ zuläßt wie $z = z(\varphi)$ im Satz 2_2, sofern neben anderen Voraussetzungen $y(x)$ und $p(x)$ Integrale von (1) mit $y(x) \to 0$ und $p(x) \to 0$ bei $x \to \infty$ sind. Dies wird auf die Differentialgleichung $y'' = x^{v}\, y^{\lambda}$ angewandt, speziell auch in dem physikalisch interessanten Fall $v = -1/2$, $\lambda = 3/2$. *Meyer-König* (Stuttgart).

Karamata, J.: Sur l'application des théorèmes de nature tauberienne à l'étude des valeurs asymptotiques des équations différentielles. Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A **1**, 93—96 (1947).

Die im vorangehenden Referat gestellte Frage nach dem asymptotischen Verhalten einer (2) erfüllenden Lösung $y(x)$ von (1) behandelt Verf. mit Hilfe eines früher [vgl. dies. Zbl. **12**, 350] aufgestellten Satzes Tauberscher Art: Ist $F(x)$ von einer Stelle an zweimal differenzierbar, so folgt aus $F(x) \to 0$, daß auch $x\,F'(x) \to 0$ strebt für $x \to \infty$, wenn für geeignete Werte von C und $M > 0$ von einer Stelle an $C\,x\,F'(x) + x^2\,F''(x) > M$ (oder auch $< -M$) ist. Es sei $f(x) > C\,x^{-\vartheta}$ (C, ϑ konstant, $C > 0$, $0 < \vartheta < 2$). Durch Spezialisierung und wiederholte Anwendung des genannten Satzes ergibt sich für $x \to \infty$ die Abschätzung $y(x) = o\,(x^{-\theta+\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$, wobei $\theta = (2 - \vartheta)/(\lambda - 1)$ ist. Verf. weist darauf hin, daß dieses Resultat nicht so scharf ist wie das von Avakumović gewonnene [aus dessen Satz 1 nämlich $y(x) = O(x^{-\theta})$ folgt], daß es ihm vielmehr darauf ankommt zu zeigen, daß und wie man Taubersche Sätze von der Art des zu Hilfe genommenen Satzes bei einer Fragestellung, wie sie hier vorliegt, nutzbar machen kann.

Meyer-König (Stuttgart).

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Sbrana, Francesco: Sugli operatori funzionali multipli. Boll. Un. mat. Ital., III. S. **4**, 34—40 (1949).

Dans ce travail l'A. expose quelques applications aux équations différentielles aux dérivées partielles, linéaires et à coefficients constants, du type parabolique, de la méthode des opérateurs multiples, développée par l'A. dans des autres travaux surtout pour les équations du type elliptique [v. F. Sbrana, Atti Soc. Ital. Progr. Sci. $\mathbf{21}_{\mathrm{II}}$, 129—138 (1933); Sulla integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti, Atti Soc. Sci. Lett. Genova **13**, (1948); et d'autres travaux sous presse dans les „Atti Soc. Sci. Lett. Genova"]. — Par cette méthode on représente la fonction inconnue au moyen d'intégrales impropres de fonctions exponentielles et d'une fraction rationnelle dont le dénominateur est un polynome ayant les mêmes coefficients de l'équation à résoudre. On étend à ces intégrales multiples un théorème de Sommerfeld et l'on vérifie, à l'aide d'une représentation du zéro, donnée par l'A., qu'elles satisfont effectivement à l'équation donnée. — Dans cette note les calculs sont développés pour l'équation de la chaleur et pour les équations analogues du type $\partial^n u/\partial x^n - \partial u/\partial y = f(x, y)$. *F. Pellegrino* (Rome).

Amerio, Luigi: Su un metodo di integrazione delle equazioni differenziali lineari a derivate parziali. Rend. Sem. mat. fisico Milano **18**, 114—123 (1948).

Verf. führt eine auf M. Picone (dies. Zbl. **29**, 295, 296) zurückgehende Integrationsmethode weiter fort unter besonderer Berücksichtigung des Dirichletschen Problems; d. h. es werden Lösungen einer elliptischen Differentialgleichung

$$E(u) = \sum a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \tag{1}$$

gesucht, die am Rand σ des Definitionsgebietes τ vorgeschriebene Werte annehmen, wobei die a_{ik}, b_i, c, f Funktionen von $x_1, \ldots, x_m$ sind. Das Lösungsverfahren in seiner bisherigen Form führt unter Benutzung der Greenschen Formel auf zwei Integralgleichungssysteme von Fischer-Riesz, von denen das eine zur Bestimmung der konormalen Ableitung $\partial u/\partial \nu$ auf σ und anschließend das andere zur Bestimmung von u in τ dient, wobei die Kenntnis zweier auf σ bzw. in τ abgeschlossener Folgen von Lösungen der zu (1) adjungierten homogenen Differentialgleichung (2) $E^*(v) = 0$ sowie die Existenz und Eindeutigkeit von u vorausgesetzt wird. Unter Verwendung eines geeigneten Vektorbegriffes kann Verf. die beiden Fischer-Rieszschen Systeme in ein einziges zusammenfassen, welches die gleichzeitige Bestimmung von $\partial u/\partial \nu$ und u gestattet. Falls die Koeffizienten von (1) sich in einer Umgebung τ' von τ fortsetzen lassen und daher die Fundamentallösung von (1) in τ' existiert, d. h. eine Funktion $F(N, R)$, die als Funktion von N der Gleichung (2) und als Funktion von R der Gleichung (1) genügt, wenn ferner nur Lösungen einer Klasse Γ betrachtet werden, die unter Benutzung der zwei Greenschen „Fundamentalformeln" passend definiert wird, kommt Verf. u. a. zu folgendem Resultat: Die unbekannten Funktionen u in τ und $\partial u/\partial \nu$ auf σ werden als Komponenten eines Vektors $\mathfrak{G}$, die Funktionen $-E^*(w_r)$ in τ und w_r auf σ als Komponenten eines Vektors $\mathfrak{R}_r$ aufgefaßt, wobei w_r folgendermaßen gewählt werden kann: $w_r = x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m} (\alpha_i = 0, 1, \ldots)$. Dann genügt $\mathfrak{G}$ dem System (3) $(\mathfrak{G}, \mathfrak{R}_r) = \int_\sigma u\,(\partial w_r/\partial \nu - L\,w_r)\,d\sigma - \int_\tau f\,w_r\,d\tau$ mit $L = \sum \cos(n\,x_i)\{b_i - \sum \partial a_{ik}/\partial x_k\}$. Wenn das Eindeutigkeitstheorem für die Lösungen von (1) gilt, so ist $\{\mathfrak{R}_r\}$ abgeschlossen und liefert die eindeutige Lösung. Gilt dieses Theorem nicht, so sind die Eigenlösungen die zur Folge $\{\mathfrak{R}_r\}$ orthogonalen Vektoren. Falls das Dirichletsche Problem keine Lösung besitzt, so ist dies auch für das System (3) der Fall. *M. J. de Schwarz* (Roma).

Faedo, Sandro: Un nuovo metodo per l'analisi esistenziale e quantitativa dei problemi di propagazione. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fisic. mat., III. S. **1**, 1—41 (1949).

Verf. behandelt die Ausbreitungsgleichung

$$L(u) = -u_{xx} + a_1 u_{xt} + a_2 u_{tt} + a_3 u_x + a_4 u_t + a_5 u = f$$

mit $a_2 > 0$, wobei die a_i und f im Halbstreifen (S) $0 \leq x \leq c$, $t \geq 0$ definierte Funktionen von x und t sind unter den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = g(x)$, $u_t(x, 0) = g_1(x)$ $(0 \leq x \leq c)$ und den Randbedingungen $u(0, t) = f_1(t)$, $u(c, t) = f_2(t)$ $(t \geq 0)$. Zunächst wird gezeigt, daß, wenn die a_i und $\partial a_1/\partial x$, $\partial a_2/\partial x$ in (S) stetig sind, höchstens eine — stetige und zweimal stetig differenzierbare — Lösung des Problems existiert. Unter gewissen Kompatibilitätsbedingungen für die Funktionen $g(x)$, $g_1(x)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ kann das Problem immer auf den Fall zurückgeführt werden, in dem diese Funktionen verschwinden. Um die Lösung der in dieser Weise umgeformten Differentialgleichung zu konstruieren, bedient sich Verf. der sogenannten Momentenmethode, d. h. er setzt Näherungsfunktionen in der Form $v_n(x, t) = \sum_{i=1}^{n} c_{in}(t)\, \varphi_i(x)$ an, wobei die Koeffizienten $c_{in}(t)$ folgendem System von n linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\int_0^c \{L(v_n) - f\}\, \varphi_s(x)\, dx = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

mit den Anfangsbedingungen $c_{in}(0) = 0$, $c'_{in}(0) = 0$ genügen und die $\varphi_i(x)$ unter den Systemen zu wählen sind, die nach der sogenannten Variationsmethode [M. Picone, Rend. Accad. Sci. fisic. mat., Napoli, IV. S. **6**, 217—235 (1936); dies. Zbl. **16**, 176; Verf.: Ulteriori contributi alla teoria del metodo variazionale, Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. Fisic. Mat., II. S. **12**, 99—116 (1943)] als Entwicklungsfunktionen zugelassen sind. Z. B. kann $\varphi_i(x) = \sin(\pi i\, x/c)$ gewählt werden, wie es Verf. beim Existenzbeweis für die Lösung $u(x, t)$ tut, unter Verwendung von in der Variationsrechnung üblichen Gedankengängen (Theorem von G. Ascoli). Es folgen noch Aussagen über die Existenz und absolute Stetigkeit der Ableitungen 2. und 3. Ordnung sowie Abschätzungen des absoluten Betrages von $u(x, t)$ und seiner Derivierten. Wie auch die Entwicklungsfunktionen $\varphi_i(x)$ gemäß der Variationsmethode gewählt sind, immer konvergieren die damit gebildeten Näherungsfunktionen $u_n(x, t)$ in jedem Rechteck $0 \leq x \leq c$, $0 \leq t \leq T$ gleichmäßig gegen die Lösung $u(x, t)$. *M. J. de Schwarz* (Roma).

Riesz, Marcel: L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy. Acta math., Uppsala **81**, 1—223 (1949).

L'A. apporte ici une contribution originale et essentielle à la discussion du problème de Cauchy, posé pour les équaitons du type hyperbolique: on verra, toutefois, que la méthode peut rendre des services dans l'analyse du cas elliptique. — Au chap. I, l'A. rappelle certaines propriétés de l'intégrale de Riemann-Liouville:

$$(1) \qquad I^\alpha[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)\, (x-t)^{\alpha-1}\, dt.$$

Plaçons-nous, pour simplifier, dans le champ réel et admettons que $a > -\infty$; $f(t)$ étant une fonction continue, α un paramètre. Le second membre de (1) converge pour $\alpha > 0$ et définit, comme on le sait, une fonction holomorphe de α dans le domaine $\alpha > 0$. Mais si $f^{(n)}(x)$ est bornée et continue $(n \leq p)$, on a la formule:

$$I^\alpha[f(x)] = \sum_1^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(\alpha + k + 1)} (x-a)^{\alpha+k} + I^{\alpha+n}[f^{(n)}(x)]; \quad n \leq p,$$

qui définit le prolongement analytique de $I^\alpha[f(x)]$ pour $\alpha > -p$. Dans la suite, nous attribuerons toujours à l'opérateur $I^\alpha[f(x)]$ — et aux opérateurs analogues — le sens ci-dessus pour $\alpha < 0$; il est entendu que des précautions supplémentaires sont à prendre pour justifier ces définitions dans le voisinage des valeurs entières et non positives de α; on arrive ainsi aux relations: $I^{-n}[f(x)] = f^{(n)}(x)$; $I^0[f(x)] = f(x)$. L'A. peut alors justifier la formule de composition: (2) $I^\beta\{I^\alpha[f(x)]\} = I^{\alpha+\beta}[f(x)]$. — L'idée de l'A. consiste à construire pour chaque type d'équation aux dérivées partielles un opérateur jouissant, en gros, des mêmes propriétés que (1) et assujetti en outre, à satisfaire à des équations aux dérivées partielles convenables. — Au chap. II, l'A. définit divers opérateurs de cette nature, susceptibles de servir dans l étude des équations elliptiques; cette partie du mémoire se présente plutôt comme l'amorce d'une vaste recherche et ses

liens avec le corps de l'ouvrage paraissent lâches. Voici quelques unes des définitions de l'A. Appelons Ω l'espace euclidien (entier) à m dimensions, muni de la métrique euclidienne: $r_{PQ}^2 = \sum_1^m (x_i - \xi_i)^2$, r_{PQ} étant la distance de deux points $P(x_i)$ et $Q(\xi_i)$. L'A. prouve que l'opérateur:

$$(3) \qquad I^\alpha[f(x)] = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_\Omega f(Q)\, r_{PQ}^{\alpha-m}\, d\tau_Q, \qquad H_m(\alpha) = \frac{\pi^{m/2}\, 2^\alpha\, \Gamma(\alpha/2)}{\Gamma((m-\alpha)/2)}$$

[où $f(Q)$ est la densité cubique de la matière au point courant Q, assujettie à diverses conditions de régularité, et où $d\tau_Q$ est l'élément de volume en Q] possède les propriétés énumérées ci-dessus; on a, de plus, en désignant par Δ le laplacien: $\Delta\{I^{\alpha+2}[f(P)]\} = -I^\alpha[f(P)]$. — Si $\alpha = 2$, on en tire: $\Delta I^2 = -f$, ce qui permet de regarder l'opérateur (3) comme une généralisation du potentiel logarithmique moyennant l'hypothèse: $\int_\Omega f(Q)\, d\tau_Q = 0$. — De même, on peut définir les potentiels généralisés de simple et de double couche; et l'A. renvoie à d'autres publications pour justifier l'utilité des notions ainsi introduites dans la théorie des équations du type elliptique. — Le chap. III nous ramène au cas hyperbolique. — L'A. expose d'abord les principes de la géométrie lorentzienne de Ω [c'est-à-dire de Ω doué de la métrique:

$$r_{PQ}^2 = (x_1 - \xi_1)^2 - \sum_2^m (x_i - \xi_i)^2].$$

Soient: C^P, la nappe rétrograde du cône de lumière: $r_{PQ} = 0$, de sommet P; D^P, le domaine limité par C^P; S une variété à $m-1$ dimensions (surface), assez régulière de Ω (telle, notamment, que l'intersection de $r_{MQ} = 0$ $(M \in S)$ avec le plan tangent à S en M, se réduit à M); S^P la portion de S intérieure à D^P; D_S^P, la portion de D^P limitée par S^P; n, le vecteur de la conormale — ou normale lorentzienne — dûment orientée de S. L'A. construit alors la géométrie tant finie que différentielle dans Ω lorentzien, en définissant les notions telles que les produits scalaires de vecteurs, dérivées d'une fonction scalaire dans une direction, élément d'aire lorentzien dS de S, élément de volume lorentzien d'une variété à un nombre quelconque de dimensions; etc. — L'A. peut, des lors, développer d'une manière synthétique la théorie d'une transformation analogue à celle de Green: il aboutit ainsi à l'identité:

$$(4) \qquad \int_{D_S^P} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\, d\tau_Q = -\int_{S^P} \left(u\frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn}\right) dS$$

où u et v sont des fonctions scalaires assez régulières, où $d\tau_Q$ est l'élément lorentzien de volume et où: $\Delta = \frac{\partial}{\partial x_1^2} - \sum_2^m \frac{\partial}{\partial x_i^2}$ gardera désormais le sens de l'opérateur des ondes. Posons alors:

$$H_m(\alpha) = \pi^{(m-2)/2}\, 2^{\alpha-1}\, \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+2-m}{2}\right), \quad (5) \qquad I^\alpha[f(P)] = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{D_S^P} f(Q)\, r_{PQ}^{\alpha-m}\, d\tau_Q,$$

$$I_*^\alpha[f(P), g(P), h(P)] = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{D_S^P} f(Q)\, r_{PQ}^{\alpha-m}\, d\tau_Q + \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{S^P} \left[g(Q)\, r_{PQ}^{\alpha-m} - h(Q)\frac{dr_{PQ}^{\alpha-m}}{dn}\right] dS.$$

L'opérateur (5) vérifie encore les propriétés imposées au symbole I^α. Faisons alors $v = r_{PQ}^{\alpha+2-m}/H_m(\alpha+2)$ dans (4); il viendra:

$$(6) \qquad I^\alpha[u(P)] = I_*^{\alpha+2}\left[\Delta u, \frac{du}{dn}, u(P)\right].$$

— Nous omettons d'énoncer les hypothèses de régularité moyennant lesquelles les conclusions précédentes sont valables; nous ne pouvons, d'autre part, songer à analyser ici le détail des minutieuses discussions de l'A. destinées 1) à préciser, au moyen de prolongements convenables, le sens de chacun des symboles introduits pour toutes les valeurs utiles de α et de β [Cf (2)]. 2) à fixer les conditions de dérivabilité sous le signe $\int$ de I^α. Il s'agit là de raisonnements très fins, exigeant des calculs délicats et laborieux. — L'A. est désormais en mesure d'aborder (chapitre IV) la solution du problème de Cauchy, qui revient à déterminer $u(P)$, solution de $\Delta u = f(P)$ connaissant $u = h(Q)$, $\frac{du}{dn} = g(Q)$, $Q \in S$, $(f, h, g$ étant des données). Comme $I^0[u] = u$, on a encore, en posant $\alpha = 0$ dans (6): (7) $u(P) = I_*^2[f, g, h]$. — Tout revient, dès lors, à verifier a posteriori que (7) fournit bien la valeur cherchée de $u(P)$. L'A. donne à ce sujet quelques indications sommaires (Cf. le § 60), en notant que sa méthode n'exige que la vérification des conditions aux limites, l'équation $\Delta u = f$ étant satisfaite d'elle-même. — L'A. compare ensuite son procédé de résolution à celui

de ses prédécesseurs, en tête desquels il faut citer Volterra et Hadamard. L'inconvénient des formules de l'A. semble consister en ce que les intégrales figurant au second membre de (7) ne permettent guère le calcul effectif de $u(P)$, tout au moins dans le cas général; ces opérateurs n'ont de sens, rappelons-le, que moyennant les prolongements analytiques convenables — que l'A. d'ailleurs réussit à expliciter dans une certaine mesure. En revanche, la formule (7) se prête d'une manière très remarquable à l'étude qualitative, théorique des solutions. En particulier, elle est valable quelque soit la parité de m ce qui n'est pas le cas des solutions dues à Hadamard. Signalons, toutefois, que le cas $m = 2$ soulève des difficultés spéciales que l'A. élucide avec soin. — D'autre part, les expressions de l'A. offrent le caractère invariantif qui les met à l'abri des critiques que Hadamard formulait à l'égard des solutions classiques de Kirchhoff et Volterra (cas $m = 3$ et $m = 4$); celles-ci font intervenir, en effet, des singularités étrangères au problème. — Enfin, (7) permet une discussion aisée du rôle que joue la parité de m; notamment, l'incidence de cette parité sur la validité du principe de Huygens, la mise en évidence du phénomène de diffusion. — Ce qui précède montre bien l'intérêt qu'offrent les solutions explicites du problème, ne fût-ce que pour des valeurs particulières de m. Citons dans cet ordre d'idées les formules résolutives de l'A. pour $m = 3$, puis celles valables dans le cas de $m = 4$, formées au moyen des potentiels retardés — que l'A. retrouve à l'aide de ses méthodes. Notons aussi — en anticipant sur la suite — que l'A. consacre le chap. V de son travail à l'étude approfondie du cas $m = 4$. Il arrive à une solution explicite du problème d'une rare élégance:

$$u(P) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{S^P} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u - \frac{d_\nu u}{dR} \right] dS,$$

ou R_1, R_2 sont des longueurs convenables et ou $d_\nu u/dR$ représente la derivée de u prise suivant la direction ν choisie d'une manière appropriée. Faute de place, nous ne pouvons préciser davantage. — Le chap. IV se termine par l'étude des cas où la surface S, portant les données frontières, ne remplit plus les conditions énumérées ci-dessus: citons la discussion relative aux surfaces S caractéristiques (c. a. d. telles que la normale en chaque point de S est isotrope — au sens lorentzien). Ici, les résultats de l'A. sont sommaires; seul le cas où S se réduit au cône caractéristique est étudie à fond. — Les deux derniers chapitres, bien que copieux, seront analysés très brièvement. L'un est consacré à la théorie relativiste de l'électron, l'autre à l'extension des méthodes de l'A. au cas des équations hyperboliques à coefficients variables. L'A. construit en vue de cette généralisation une géométrie lorentzienne des espaces de Riemann et compare son procédé à celui de Hadamard. — Le mémoire est rédigé d'une manière très accessible. Voici donc un travail d'une grande portée, d'un contenu très riche en aperçus nouveaux, qui peut aussi être utilisé comme une monographie du problème de Cauchy. *J. Kravtchenko.*

Miranda, C.: Sull' approssimazione delle funzioni armoniche in tre variabili. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. **4**, 530—533 (1948).

Die Approximation einer in einem abgeschlossenen beschränkten Bereich D stetigen, im Innern harmonischen Funktion, geschieht hier durch eine Linearkombination von Kugelfunktionen (mit auf- und absteigenden Potenzen) nach je einem beliebigen Punkt in einem der (endlichvielen) Gebiete von CD. Die Arbeit bezieht sich u. a. auf Arbeiten von Ghika [C. r. Acad. Sci., Paris **199**, 560—562 (1934)], Fichera (dies. Zbl. **29**, 297) sowie eine Arbeit des Verf. zum Dirichletschen Prinzip [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. **3**, 55—59 (1947)].
H. Hornich (Graz).

Variationsrechnung:

Giuliano, Landolino: Sulla continuità degli integrali curvilinei del calcolo delle variazioni. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fisic. mat., III. S. **1**, 161—187 (1949).

Verf. setzt seine Untersuchungen (dies. Zbl. **30**, 33) über die Kurvenintegrale der Variationsrechnung

$$I_C = \int\limits_C M(x, y, z)\, dx + N(x, y, z)\, dy + P(x, y, z)\, dz$$

fort und gibt einen Stetigkeitssatz für das Integral I_C über eine absolut stetige Kurve C_0: $y = y_0(x)$, $z = z_0(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$, für den Fall, daß die Kurve C_0 nicht vollständig im Innern des Definitionsbereichs A der Funktionen $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$, $P(x, y, z)$ enthalten ist. Für die genaue Formulierung der Voraus-

setzungen, unter denen Verf. die ernsten Schwierigkeiten des Beweises überwunden hat, verweisen wir auf die Arbeit selbst. Ein interessantes Beispiel hebt die Notwendigkeit der vom Verf. gemachten Voraussetzungen hervor. *S. Cinquini.*

Viola, Tullio: Sulla ricerca delle estremanti d'un integrale in forma ordinaria, alla frontiera d'un campo dello spazio funzionale lagrangiano del prim'ordine. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fisic. mat., III. S. **1**, 101—160 (1949).

Verf. setzt seine frühere Untersuchung (dies. Zbl. **20**, 307; **22**, 234) über Integrale in der gewöhnlichen Form $I = \int_a^b f(x, y, y')\,dx$ fort, indem er ein neues analytisches Verfahren entwickelt. Es sei A die Menge der Funktionen $y(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$, die samt ihren Ableitungen erster Ordnung stetig sind und für jedes Wertepaar x_1, x_2 von (a, b) der Ungleichung $|y'(x_1) - y'(x_2)| \leqq \int_{x_1}^{x_2} L(x)\,dx$ genügen, worin $L(x)$ eine quasistetige, nicht negative und integrierbare Funktion auf (a, b) ist. A^0 sei die Menge, die aus denjenigen Funktionen $y = \varphi(x)$ von A besteht, die man erhält, wenn man (a, b) in eine endliche Anzahl von Intervallen unterteilt und in diesen abwechselnd $\varphi''(x) = +L(x)$, $\varphi''(x) = -L(x)$ setzt. E sei die Menge, die aus allen und nur den Funktionen von A besteht, für die $p_i \leqq y(x_i) \leqq P_i$, $p_j' \leqq y'(x_j') \leqq P_j'$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n)$ gilt; dabei sind die x_i, x_j' $(a \leqq x_1 < x_2 < \cdots < x_m \leqq b,\ a \leqq x_1' < x_2' < \cdots < x_n' \leqq b;\ m \geqq 1,\ n \geqq 1$ oder $m \geqq 2,\ n = 0)$ $m + n$ Punkte (wobei nicht ausgeschlossen ist, daß einige oder alle x_i mit den x_j' zusammenfallen können), und die p_i, P_i, p_j', P_j' sind $2(m + n)$ Konstante. In der vorliegenden Arbeit gelangt Verf. zu einer hinreichenden Bedingung dafür, daß das Integral I in E sein absolutes Maximum (oder sein absolutes Minimum) annimmt, im Zusammenhang mit einer gewissen Funktion von $E^0 = A^0 E$.

S. Cinquini (Pavia).

Bilimovitch, Anton: Sur l'accroissement pur de la forme différentielle et son application. Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A **1**, 49—57 (1947).

Si considera la forma lineare $\Phi = \sum_{i=1}^{n} X_i\,dx_i$, ove $X_1, \ldots, X_n$ sono funzioni delle n variabili $x_1, \ldots, x_n$, e si definiscono le sue derivate parziali pure

$$\frac{\partial^0 \Phi}{\partial^0 x_j} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - dX_j \quad (j = 1, \ldots, n),$$

le quali hanno lo stesso ufficio delle derivate parziali di una funzione di più variabili. — Di esse l'A. fa applicazione al problema di Calcolo delle variazioni relativo all'integrale $I = \int_a^b f(x, y, y')\,dx$ quando si consideri la classe delle funzioni passanti per i punti (a, y_a) (b, y_b), pervenendo alla seguente regola per la determinazione dell'estremo di I: Considerato l'integrale di Hilbert corrispondente a I

$$J = \int_a^b \left[f(x, y, k) + (y' - k)\frac{\partial f}{\partial k} \right] dx,$$

e posto

$$\Phi = \left[f(x, y, k) - k\frac{\partial f}{\partial k} \right] dx + \frac{\partial f}{\partial k}\,dy,$$

si uguagliano a zero le derivate parziali pure di Φ rispetto alle variabili x, y, k.

S. Cinquini (Pavia).

Franchis, Franco de: Sur les trajectoires des problèmes variationnels. Bull. Sci. math., II. S. **72**$_{\text{I}}$, 150—160 (1948).

Nello spazio $(x_1, \ldots, x_n)$ si considerano ∞^{2n-1} traiettorie definite sotto forma variazionale dalla condizione $\delta \int L'(x, dx, E) = 0$ (1), ove $L'(x, dx, E)$ è una

funzione nota dipendente dalle variabili x_ϱ, dai differenziali dx_ϱ e dal parametro E, la quale è omogenea di grado uno nei differenziali dx_ϱ ed è continua insieme con le proprie derivate parziali dei primi due ordini. — Introdotta una nuova variabile t, l'A. prova che la legge di percorso delle traiettorie definita dall'equazione $dt = \partial L(x, dx, E)/\partial E$ (2) è l'unica legge che si possa associare alla condizione (1) per essere equivalente a una condizione variazionale della forma $\delta \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x})\, dt = 0$, ove t_1 e t_2 sono limiti fissi e la condizione (1) caratterizza le traiettorie corrispondenti al fascio relativo al valore E della costante delle forze vive; la funzione lagrangiana L dipendente dalle variabili x_ϱ e dalle derivate $\dot{x}_\varrho = dx_\varrho/dt$ è univocamente determinata dalla funzione $L'(x, dx, E)$. — L'A. fa applicazione di tale risultato alla legge di gravitazione della teoria della relatività dedotta dal ds^2 di Schwarzschild. *S. Cinquini* (Pavia).

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Parodi, Maurice: Sur une conséquence des propriétés de l'équation intégrale de Schlömilch. Bull. Sci. math., II. S. 72_{I}, 7—8 (1948).

Folgende Integralgleichung wird gelöst:

$$\varphi(p) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \psi\left(\frac{p}{\sin\theta}\right) d\theta .$$

$\varphi(p)$ bedeutet eine gegebene Funktion von der Form $a + \mu(p)/p$ [a ist eine Konstante, $\mu(p)$ eine holomorphe Funktion, welche beschränkt ist in jeder Halbebene $\Re(p) > \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ beliebig], und ψ ist die unbekannte Funktion. Die Lösung dieser Gleichung ist:

$$\psi(p) = a - p \int_0^{\pi/2} \frac{d}{dq}\left(\frac{\mu(q)}{q}\right)_{q=(p/\sin\theta)} \frac{d\theta}{\sin\theta} .$$

Verf. benutzt die Laplacesche Transformation. Die betrachtete Gleichung und die vom Verf. angegebene Lösung ist die Laplacesche Transformierte der Schlömilchschen Integralgleichung (Whittaker-Watson: Modern Analysis. 1946. p. 229) bzw. ihrer Lösung. *St. Fenyö* (Budapest).

● **Jaeger, J. C.: An introduction to the Laplace transformation, with engineering applications.** (Methuen's Monographs on physical Subjects.) London: Methuen and Co. Ltd. 1949. VIII, 132 p. 7s. 6d. net.

Bei dieser Einführung handelt es sich um eine möglichst elementare Darstellung der L-Transformation, vor allem bestimmt für Studierende der Physik und Elektrotechnik. Da nur die einfachsten Kenntnisse aus der Differential- und Integralrechnung ohne Funktionentheorie vorausgesetzt werden, sind beispielsweise nur die einfachsten Faltungssätze, und zwar ohne Beweis wiedergegeben. — Inhaltsverzeichnis: I. Fundamental Theory, S. 1—25, II. Electric Circuit-Theory, S. 26—81, III. Further Theorems and their Applications, S. 82—99, IV. Partial Differential Equations, S. 100—131. Angesichts der knappen und klaren Darstellung der einfachsten Sätze über die L-Transformation, illustriert durch viele gutgewählte Beispiele aus der Technik, dürfte das Büchlein seinem Zwecke gerecht werden, eine erste Einführung in die L-Transformation für technisch interessierte Studierende zu geben. *Saxer* (Zürich).

Avakumović, Vojislav, G.: Contribution à la théorie des intégrales de Laplace. Acad. Serbe Bull. Acad. Sci. math. natur., A **2**, 91—105 u. serb. Zusammenfassg. 105—107 (1948).

Es sei $J(s) = s \int_0^\infty e^{-su} A(u)\, du$ konvergent für $\Re(s) > 0$ und gleichmäßig beschränkt in einem konvexen Bereich D_k, der die imaginäre Achse von der Ordnung $k-1$ ($k \geq 1$) berührt. Die Grenzfunktion von $J(s)$, wenn der zugehörige Punkt

$P(s)$ gegen die Peripherie von D_k strebt, werde mit $Q(t)$ bezeichnet. Es sei

$$H(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(y\,t)}{t}\,Q(t)\,dt.$$

Verf. gibt verschiedene Sätze über das asymptotische Verhalten von $H(y)$ und $A(u)$, wenn das eine bekannt ist. — Beispiel: Wenn

$$H(y)=Q(0)+o(y^{-\beta}),\ y\to\infty,\ \text{so gilt}\ A(u)=Q(0)+o(u^{-\beta}),\ u\to\infty,$$

sofern $A(u)$ eine gewisse Konvergenzbedingung erfüllt. *Saxer* (Zürich).

Lebedev, N. N.: Ein Analogon zum Parsevalschen Satz für eine Integraltransformation. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **68**, 653—656 (1949) [Russisch].

Verf. beschäftigt sich mit der Integraltransformation

$$G(\tau)=\int_0^\infty g(x)\,p(x,\tau)\,dx;\quad g(x)=\int_0^\infty G(\tau)\,p(x,\tau)\,d\tau,$$

wo $p(x,\tau)=\pi^{-1}(2x^{-1}\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau)^{\frac{1}{2}}K_{i\tau}(x)$ und $K_\nu(x)$ die Macdonaldsche Funktion bedeutet. Satz: Wenn $g(x)\,x^{-\frac{1}{2}}\in L(0,\infty)$ und $g(x)\in L^2(0,\infty)$, dann $\int_0^\infty G(\tau)^2\,d\tau=\int_0^\infty g(x)^2\,dx$. Der Beweis ist auf die Relation

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^\infty G(\tau)^2\,(\mathrm{ch}\,\pi\,\delta\tau)^{-1}\,d\tau=\int_0^\infty G(\tau)^2\,d\tau$$

und auf eine Formel von A. L. Dixon und W. L. Ferrar [Quart. J. Math. (Oxford Ser.) **4**, 193—208 (1933); dies. Zbl. **7**, 412] gegründet. *Gál* (Paris).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Šilov, G. E.: Über reguläre, normierte Ringe. Akad. Nauk SSSR, Trudy mat. Inst. Steklov Nr. **21**, 118 S. (1947) [Russisch].

Freundlich, Marianne: Completely continuous elements of a normed ring. Duke math. J. **16**, 273—283 (1949).

In einer kommutativen Banachalgebra R werden vollstetige Elemente betrachtet, d. h. solche r, für die jede beschränkte Menge B in eine Menge rB mit kompakter Hülle abgebildet wird. Die Riesz-Banachschen Sätze übertragen sich unmittelbar darauf und ergeben eine Reihe algebraischer Resultate, z. B.: Ist R irreduzibel, so liegt jedes vollstetige Element im Radikal von R. Ist R irreduzibel und gilt $J=J^2$ für alle abgeschlossenen Ideale in R, so ist kein Hauptideal von R abgeschlossen. Einige Aussagen über schwach vollstetige Elemente werden ebenfalls abgeleitet. *G. Köthe* (Mainz).

Godement, Roger: Sur la transformation de Fourier dans les groupes discrets. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 627—628 (1949).

L'A. désigne par G un groupe discret, Δ un sous-groupe abélien de G, par L l'ensemble des $f\in C^G$ nulles en dehors d'un ensemble fini, par L^2 l'espace de Hilbert formé par les $f\in C^G$ telles que $\sum_{s\in G}|f(s)|^2<\infty$, $U_s f(x)=f(s^{-1}x)$ et $V_s f(x)=f(xs)$ les représentations régulières de G dans L^2. Si $\chi\in\mathrm{Hom}(\Delta,T)$, on pose

$$\varphi_{f,g}(\chi)=\sum_{\delta\in\Delta}(V_\delta f,g)\,\overline{\chi(\delta)}.$$

A tout $\chi\in\mathrm{Hom}(\Delta,T)$, on peut associer un espace de Hilbert $\mathfrak{H}_\chi$, une application $f\to f_\chi$ de L dans $\mathfrak{H}_\chi$ et une représentation unitaire de $s\to U_{\chi;s}$ de G dans $\mathfrak{H}_\chi$ telles que $\varphi_{f,g}(\chi)=(f_\chi,g_\chi)$ et $U_{\chi;s}f_\chi=(U_s f)_\chi$. On obtient ainsi une décomposition de la représentation $\{L^2,U_s\}$ en somme continue de représentations $\{\mathfrak{H}_\chi,U_{\chi;s}\}$ deux à deux distinctes. Pour que les $(\mathfrak{H}_\chi,U_{\chi;s})$ soient irréductibles, il faut et

il suffit que toute classe à gauche (mod. Δ), $\neq \Delta$, rencontre une infinité de classes à droite (mod. Δ) distinctes. Δ est alors un sous-groupe abélien maximal de G; dans L^2, le sous-anneau d'opérateurs engendré par les V_δ ($\delta \in \Delta$) est un sous-anneau commutatif maximal du sous-anneau engendré par les V_s; l'A. indique un rapport entre ces résultats et ceux de F. I. Mautner (ce Zbl. **29**, 305) et Gelfand et Neumark (ce Zbl. **29**, 5). On peut, avec ces résultats, réaliser la transformation de Fourier sur le groupe modulaire arithmétique, par exemple. *J. Braconnier.*

Cohen, L. W. and Casper Goffman: A theory of transfinite convergence. Trans. Amer. math. Soc. **66**, 65—74 (1949).

ξ^* sei eine Ordnungszahl, die nicht als Limeszahl einer transfiniten Folge ξ_η von Ordnungszahlen $< \xi^*$, $\eta < \eta^* < \xi^*$, darstellbar ist, z. B. eine reguläre Anfangszahl. Es werden topologische Räume S betrachtet mit einem Umgebungssystem $U_\xi(x)$, $\xi < \xi^*$, das die Eigenschaften hat: 1. Der Durchschnitt aller $U_\xi(x)$ ist x, 2. ist $\xi_1 < \xi_2$, so ist $U_{\xi_1}(x) \supset U_{\xi_2}(x)$, 3. zu jedem $\eta < \xi^*$ gibt es ein $\xi(\eta)$ mit $\eta \leqq \xi(\eta) < \xi^*$, so daß aus $U_{\xi(\eta)}(y) \cap U_{\xi(\eta)}(x) \neq 0$ stets $U_{\xi(\eta)}(y) \subset U_\eta(x)$ folgt, 4. ist $\eta^* < \xi^*$ und folgt aus $\eta_1 < \eta_2 < \eta^*$ stets $U_{\xi\eta_1}(x_{\eta_1}) \supset U_{\xi\eta_2}(x_{\eta_2})$, so ist $\bigcap_{\eta<\eta^*} U_{\xi\eta}(x_\eta)$ nicht leer. Eine Folge x_ξ, $\xi < \xi^*$, in S heißt fundamental, wenn zu jedem $\eta < \xi^*$ ein $y_\eta \in S$ und ein $\xi(\eta) < \xi^*$ existiert, so daß aus $\xi(\eta) \leqq \xi < \xi^*$ stets $x_\xi \in U_\eta(y_\eta)$ folgt. x_ξ hat dann den Limes x, wenn zu jedem $\eta < \xi^*$ ein $\xi(\eta) < \xi^*$ existiert, so daß $x_\xi \in U_\eta(x)$ gilt für $\xi(\eta) \leqq \xi$. Damit ist der Begriff der ξ^*-Vollständigkeit von S gegeben. S ist von der ersten ξ^*-Kategorie, wenn S die Vereinigung einer Folge N_ξ, $\xi < \xi^*$, in S nirgendsdichter Mengen ist. Es gilt nun, daß jeder ξ^*-vollständige Raum S von zweiter ξ^*-Kategorie ist. Ist Ξ^* die Kardinalzahl von ξ^*, so heißt S Ξ^*-separabel, wenn die Limeshülle einer Menge von Punkten x_ξ, $\xi < \xi^*$, gleich S ist. S heißt Ξ^*-kompakt, wenn jedes $M \subset S$ der Mächtigkeit Ξ^* einen Limes in S hat. Es gilt folgendes Analogon zum Borel-Lebesgueschen Überdeckungssatz: Eine Teilmenge M eines Ξ^*-separablen S ist dann und nur dann Ξ^*-kompakt, wenn jede Überdeckung von M durch offene Mengen eine Teilüberdeckung durch weniger als Ξ^* Mengen enthält. Als Beispiel wird die Ordnungsabschließung eines geeigneten nichtarchimedisch geordneten Körpers von formalen Potenzreihen $\sum_{\varrho<\sigma} a_\varrho t^{\alpha_\varrho}$ gebracht, die a_ϱ reell, die α_ϱ aus einer nichtarchimedisch geordneten additiven Gruppe von reellen Linearkombinationen von Unbestimmten u_ξ, $\xi < \xi^*$. *G. Köthe* (Mainz).

Yood, Bertram: Banach algebras of bounded functions. Duke math. J. **16**, 151—163 (1949).

Ist $B(S)$ die Banachalgebra aller komplexwertigen beschränkten Funktionen auf S, so besteht eine eineindeutige Beziehung $x^* \leftrightarrow \mathfrak{A} \leftrightarrow M \leftrightarrow \mu$ zwischen den multiplikativen linearen Funktionalen x^* auf $B(S)$, den maximalen additiven Idealen $\mathfrak{A}$ des distributiven Verbandes aller Teilmengen von S, den Maximalidealen M von $B(S)$ und den additiven Mengenfunktionen μ auf S mit den Werten 0 und 1, so daß $\mathfrak{A}$ die Menge aller $E \subset S$ mit $\mu(E) = 1$ ist, ferner x^* dargestellt werden kann als $x^*(f) = \int_S f(t)\, d\mu$, M die Menge der Nullstellen von x^* ist und $\mathfrak{A}$ das System aller Mengen $S(f, \varepsilon)$ ist, wobei $t \in S(f, \varepsilon)$, wenn $|f(t)| \leqq \varepsilon$ für $f \in M$. Dies ist ein Spezialfall des in der Arbeit bewiesenen allgemeinen Satzes über die Menge der Maximalideale der Banachalgebren $S: B(S)$, die aus allen beschränkten $f(t)$ bestehen, t in der Menge S, $f(t)$ in einer kommutativen B^*-Algebra $B(t)$ [zur Definition vgl. C. E. Rickart, Ann. Math., Princeton, II. S. **47**, 528—550 (1946)] mit Einheit. Auch in diesem Fall gilt die eineindeutige Zuordnung zu den multiplikativen Funktionalen, und es wird für diese eine Integraldarstellung gegeben. Dagegen braucht man zur Charakterisierung der Maximalideale in $B(S)$ neben einem Maximalideal $\mathfrak{A}$ des Verbandes der Teilmengen von S noch eine Äquivalenzklasse des Produktraums

der Räume der maximalen Ideale der $B(t)$. Ferner wird das folgende verallgemeinerte Weierstraßtheorem bewiesen: Es sei B eine kommutative B^*-Algebra mit der Einheit e und A eine B^*-Teilalgebra mit derselben adjungierten Operation wie B. Es sei P eine Teilmenge von A. Ist $e \notin A$ bzw. $e \in A$, so erzeugt P bzw. $P \cup e$ dann und nur dann die Algebra A, wenn zu jedem $a \in A$ mit $a(M_1) \neq a(M_2)$ für zwei Maximalideale M_1 und M_2 aus B auch ein Element aus P mit derselben Eigenschaft existiert. Mit diesen Methoden wird ein neuer Beweis für die Stonesche Darstellung distributiver Verbände durch die Menge der bikompakten offenen Teilmengen eines geeigneten lokalbikompakten Hausdorffschen Raumes gegeben und eine Verschärfung des Satzes von Ulam und Tarski [vgl. A. Tarski, Fundam. Math., Warszawa **15**, 42—50 (1930)] über die Existenz zweiwertiger Maßfunktionen abgeleitet. *G. Köthe* (Mainz).

Milgram, A. N.: Multiplicative semigroups of continuous functions. Duke math. J. **16**, 377—383 (1949).

Es seien X und X' bikompakte Hausdorffsche Räume, σ ein Isomorphismus der multiplikativen Halbgruppe $C(X)$ der stetigen reellen Funktionen auf X mit der entsprechenden Halbgruppe $C(X')$. Dann gibt es eine Homöomorphie H von X auf X', eine positive Funktion $p(x)$ in $C(X)$, eine endliche Anzahl von isolierten Punkten $x_1, \ldots, x_n \in X$ und Automorphismen $\tau_1, \ldots, \tau_n$ der multiplikativen Halbgruppe der reellen Zahlen, so daß für jedes $f \in C(X)$ gilt, daß

$$\sigma f(H(x)) = \operatorname{sgn} f(x)\, |f(x)|^{p(x)}$$

für alle $x \neq x_i$, $i = 1, \ldots, n$ und $\sigma f(H(x_i)) = \tau_i (f(x_i))$. *G. Köthe* (Mainz).

Myers, S. B.: Spaces of continuous functions. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 402—407 (1949).

Es sei X ein vollständig regulärer topologischer Raum, $B(X)$ der Banachsche Raum der reellen beschränkten Funktionen auf X. Eine Teilmenge G von $B(X)$ heißt vollständig regulär auf X, wenn es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge K von X und jedem $x_0 \notin K$ ein $b \in G$ gibt mit $b(x_0) = \|b\|$ und $\sup_{x \in K} |b(x)| < \|b\|$. Ein Banachscher Raum B heißt vollständig regulär auf X, wenn er einem auf X vollständig regulären, abgeschlossenen Teilraum von $B(X)$ äquivalent ist. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß B vollständig regulär auf einem kompakten X ist unter Verwendung der Resultate einer früheren Arbeit. Ist X speziell die Einheitskugel eines Hilbertschen Raumes H beliebiger unendlicher Dimension, so gibt es einen abgeschlossenen reflexiven Teilraum L von $B(X)$, der vollständig regulär über X und zu H isomorph ist. Ferner gilt, daß X dann und nur dann ein endlichdimensionaler separabler metrischer Raum ist, wenn $B(X)$ einen endlichdimensionalen über X vollständig regulären Teilraum besitzt. X ist dann und nur dann separabel und metrisch, wenn $B(X)$ einen separablen vollständig regulären Teilraum über X besitzt. Die Ergebnisse beruhen auf Sätzen einer früheren Arbeit des Verf. [Ann. Math., Princeton, II. S. **49**, 132—140 (1948); dies. Zbl. **29**, 304)]. *G. Köthe* (Mainz).

Nachbin, Leopoldo: A characterization of the normed vector ordered spaces of continuous functions over a compact space. Amer. J. Math. **71**, 701—705 (1949).

S sei ein normierter, halbgeordneter, reeller linearer Raum. S ist dann und nur dann isomorph einem normierten, halbgeordneten Teilraum des Raumes $C(E)$ der reellen, stetigen Funktionen auf einem kompakten Raum E, wenn jedes Element von S entweder halbpositiv oder halbnegativ ist (x heißt halbpositiv, wenn aus $y \geqq x$ stets $\|y\| \geqq \|x\|$ folgt, halbnegativ, wenn aus $y \leqq x$ stets $\|y\| \geqq \|x\|$ folgt) und die Menge der positiven Elemente von S abgeschlossen ist. Ist die Bedingung erfüllt, so wird gezeigt, daß S isomorph der Menge der Funktionen auf der kompakten Menge E aller positiven linearen Funktionale f aus S vom Betrag $\leqq 1$

ist, die durch $X(f) = f(x)$ für irgendein $x \in S$ erklärt sind. Wird S als normierter Vektorverband vorausgesetzt, so ist S dann und nur dann isomorph einem normierten Teilvektorverband von $C(E)$, E kompakt, wenn wieder jedes Element von S halbpositiv oder halbnegativ ist und $||x|| \geqq ||x \vee (-x)||$ gilt. *G. Köthe* (Mainz).

Abdelhay, J.: On a theorem of representation. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 408—417 (1949).

Let C be the space of all continuous functions $x(P)$ on a topological space with the norm $||x|| = \sup |x(P)|$. It is observed that the norm may be expressed also by means of the „unilateral" bound $\varphi(x) = \min\{0, \inf[x(P)]^-\}$. By this latter functional one can, moreover, characterize also the partial ordering of the space C. — The properties of the functional $\varphi(x)$ are axiomatized; linear spaces having such a functional are called S-spaces. These spaces, their compatible metrics and partial orderings are studied, the concept of an S-ring is introduced; and by its means, a characterization is given of the ring of those bounded continuous real functions of a locally compact Hausdorff space, which vanish at infinity. *Béla Sz.-Nagy.*

Diliberto, Stephen P.: Special properties of measure preserving transformations. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 554—562 (1949).

L'A. démontre le théorème suivant: Une condition nécessaire et suffisante pour que mouvement fluide défini par le système (1) $dx_i/dt = P_i(x_1, \ldots, x_n), i = 1, \ldots, n$, où les P_i sont holomorphes, conserve les volumes euclidiens pour la dimension p (où p donné avec $1 < p < n-1$) est que $\partial P_i/\partial x_j = -\partial P_j/\partial x_i$; c'est à dire que le mouvement est un déplacement. — La démonstration est faite directement en exprimant que le groupe de transformations défini par (1) laisse invariant l'élément de volume $\Sigma(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p)^2$. Une forme plus générale du théorème est énoncée dans le cas $n = 3$. *Reeb* (Saverne).

Nikolaev, V. F.: Über Operatoren, die Polynome auf Funktionen beziehen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **68**, 9—11 (1949) [Russisch].

Es sei $U_n^m(f)$ ein linearer Operator, der den Banachschen Raum $\tilde{C}$ der stetigen, 2π-periodischen Funktionen in der Weise auf sich abbildet, daß der Wert von $U_n^m(f)$ stets ein trigonometrisches Polynom vom Grade $\leqq n + m$ ist und die Polynome vom Grad $\leqq n$ invariant bleiben. Verf. zeigt durch elementare Mittel, daß

$$||U_n^m|| \geqq \left| \sum_{k=1}^{n} b_k \right| / 2 ||T|| \, \tilde{C}$$

gilt für $T(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(m+k)\, x + b_k \sin(m+k)\, x\}$. Einige Anwendungen werden angegeben. Ähnliche Sätze wurden von Lozinskij [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **61**, 193—196 (1948)] bewiesen. *G. G. Lorentz* (Toronto).

Schmeidler, Werner: Über normalisierbare Operatoren. Arch. Math., Karlsruhe **1**, 340—347 (1949).

Eine endliche Matrix A wird linksnormalisierbar genannt, wenn sie in der Form $A = DL$ darstellbar ist, wobei D Hermitesch und positiv definit ist und L der Bedingung $LDL^* = L^*DL$ genügt. Ist $A = LD$, so heißt A rechtsnormalisierbar. Es wird gezeigt, daß jede linksnormalisierbare Matrix auch rechtsnormalisierbar ist und umgekehrt, und daß genau diese Matrizen die Eigenschaft haben, zu Diagonalmatrizen ähnlich zu sein. Diese Begriffsbildungen lassen sich auf beschränkte lineare Transformationen des Hilbertschen Raumes übertragen, nur muß man dann die Existenz und Beschränktheit von D^{-1} eigens voraussetzen. *Béla Sz.-Nagy.*

Levitan, B. M.: Korrektur zur Arbeit „Verallgemeinerte Operationen der Verschiebung und unendliche hyperkomplexe Systeme". Mat. Sbornik, n. S. **24** (66), 501—502 (1949) [Russisch].

Betrifft die in Mat. Sbornik, n. S. **17** (59), 9—44 (1945) erschienene Arbeit.

Praktische Analysis:

Turing, A. M.: Rounding-off errors in matrix processes. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford **1**, 287—308 (1948).

Verf. betrachtet zunächst eine Reihe bekannter direkter Methoden zur Auflösung linearer Gleichungssysteme bzw. zur Berechnung der Kehrmatrix unter dem übergeordneten Gesichtspunkt der „Dreiecksauflösung", d. i. der Zerlegung der n-reihigen Koeffizientenmatrix $\mathfrak{A}$ in ein Produkt zweier Dreiecksmatrizen, so insbesondere die Gaußsche Elimination, das Jordan- und das „unsymmetrische Cholesky-Verfahren" (= Verfahren von Banachiewicz, vgl. Arbeit des Ref., dies. Zbl. **31**, 314). Mit Hilfe der Norm $N(\mathfrak{A}) = (\text{Spur } \mathfrak{A}'\mathfrak{A})^{\frac{1}{2}}$ und des Maximalkoeffizienten $M(\mathfrak{A}) = \text{Max } |a_{ij}|$ werden sodann zwei Kennzahlen $n^{-1} N(\mathfrak{A}) N(\mathfrak{A}^{-1})$ und $n M(\mathfrak{A}) M(\mathfrak{A}^{-1})$ für die „Bösartigkeit" (ill-condition) einer Matrix (eines Gleichungssystems) hinsichtlich der Empfindlichkeit der numerischen Auflösung gegen Abrundungsfelder angegeben. Für Auflösungsergebnis (bei der Gauß-Elimination) und Kehrmatrix (bei Jordan und Cholesky-Banachiewicz) werden in Weiterführung einer Arbeit von Neumann und Goldstine (dies. Zbl. **31**, 314) Abschätzungen der durch Abrundungen entstehenden Fehler, vornehmlich unter Benutzung der Größe $M(\mathfrak{A}^{-1})$, durchgeführt. Insbesondere wird gezeigt, daß bei der Gauß-Elimination bei Beachtung der üblichen Vorsichtsmaßregeln (Auswahl des betragsgrößten Spaltenkoeffizienten zum Leitelement) im allgemeinen auch bei schlechtgearteter (ill-conditioned) Matrix nicht, wie Abschätzungen von Hotelling [Ann. math. Statist., Baltimore Md. **14**, 34 (1943)] befürchten lassen, ein exponentielles Anhäufen der Abrundungsfehler eintritt. Dies ist allenfalls bei schlechtgearteten Gleichungen, jedoch auch bei ihnen nur unter ganz bestimmten, selten zutreffenden Bedingungen möglich. — Besonders vorteilhaft in Arbeitsaufwand und Abrundungsfehler erweist sich infolge Auflaufenlassen der Zwischenprodukte in der Rechenmaschine das Verfahren von Cholesky-Banachiewicz. Hier ist bei Berechnung der Kehrmatrix das Hauptglied für den maximalen Fehler gleich $n^2 \varepsilon [M(\mathfrak{A}^{-1})]^2$ mit dem Betrag ε der maximalen Abweichung der Matrix $\mathfrak{A}$ vom Produkt der beiden Dreiecksmatrizen, in die sie zerlegt wird. *R. Zurmühl* (Darmstadt).

Redheffer, Raymond: Errors in simultaneous linear equations. Quart. appl. Math. **6**, 342—343 (1948).

Für das Gleichungssystem $\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = b_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, n)$ möge die Näherungslösung $x_\nu + E_\nu$ die rechten Seiten $b_\mu + e_\mu$ liefern. Dann folgt aus $\sum_{\varrho,\sigma} (\sum_{\nu} a'_{\varrho\nu} a_{\nu\sigma}) E_\varrho E_\sigma = \sum_{\mu} e_\mu^2$ mit dem kleinsten Eigenwert λ von $(\sum_{\nu} a'_{\varrho\nu} a_{\nu\sigma})$ die Fehlerabschätzung: $\lambda \cdot \sum_{\nu} E_\nu^2 \leqq \sum_{\mu} e_\mu^2$. *R. Schmidt* (München).

Fox, L., H. D. Huskey and J. H. Wilkinson: Notes on the solution of algebraic linear simultaneous equations. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford **1**, 149—173 (1948).

Es werden mehrere Methoden zur Auflösung linearer Gleichungssysteme $Ax = b$ (Matrix A, Vektoren x, b) vom Standpunkt des praktischen Rechners und hinsichtlich der Anwendbarkeit maschineller Methoden, besonders mit Hilfe von Hollerithmaschinen, betrachtet; nach einigen Arten von Eliminationsverfahren, wobei besonders die pivotal condensation hervorgehoben wird (Herausgreifen des absolut größten Koeffizienten bei jedem Eliminationsschritt) wird für symmetrische Matrizen A die Methode der orthogonalen Vektoren beschrieben, bei der man Vektoren x_r mit $x'_r A x_s = 0$ für $r \neq s$ verwendet und mit $\alpha_r = x'_r b / x'_r A x_r$ die Lösung in $\sum_{1}^{n} \alpha_r x_r$ erhält; auch die reziproke Matrix A^{-1} kann damit bequem erhalten werden. Es folgt die Methode von Choleski, bei der die symmetrische

Matrix A in der Gestalt LL' geschrieben wird mit L als Dreiecksmatrix. Mit $A^{-1} = L'^{-1} L^{-1}$ läßt sich das Gleichungssystem lösen und die Eigenwertaufgabe $(A\lambda - B)\, x = 0$ bei positiv definiten symmetrischen Matrizen A, B auf die Form $(\lambda I - C)\, x = 0$ mit symmetrischer Matrix C zurückführen. Verff. halten die Methode von Choleski, die sich auch auf unsymmetrische Matrizen übertragen läßt, für die schnellste und genaueste. *Collatz* (Hannover).

Black, A. N.: Further notes on the solution of algebraic linear simultaneous equations. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford **2**, 321—324 (1949).

Zur Auflösung eines linearen Gleichungssystems $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, x_k = b_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ wird ein Schema aufgestellt, welchem die Auflösungsart nach der abgekürzten Doolittleschen Methode zugrunde liegt; es werden bei symmetrischer Matrix A zwei weitere Dreiecksmatrizen C, D schrittweise nach

$$c_{rs} = a_{rs} + \sum_{t=1}^{r-1} c_{ts}\, d_{tr}, \quad d_{rs} = -\,c_{rs}/c_{rr} \quad \text{für} \quad s > r$$

berechnet, wobei von $c_{1r} = a_{1r}$ ausgegangen wird. Durch geeignetes Falten des Papiers, auf dem die Matrix D steht, wird erreicht, daß stets miteinander zu multiplizierende Zahlen nebeneinander stehen. Ein Vergleich mit der Methode von Choleski ergibt für die Methode des Verf. eine geringere Anzahl nötiger Rechenoperationen. *Collatz* (Hannover).

Bickley, W. G.: Finite difference formulae for the square lattice. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford **1**, 35—42 (1948).

In einem quadratischen Gitter der Maschenweite a (Gitterpunkte x_j, y_k, Funktionswerte f_{jk}) werden für die Ausdrücke

$$S_1 = f_{0,1} + f_{1,0} + f_{0,-1} + f_{-1,0}, \quad S_2 = f_{1,1} + f_{1,-1} + f_{-1,1} + f_{-1,-1},$$
$$S_3 = f_{0,2} + f_{2,0} + f_{0,-2} + f_{-2,0}$$

mit Benutzung der Operatoren $\xi = a\,\partial/\partial x$, $\eta = a\,\partial/\partial y$, $f_{1,0} = e^{\xi} f_{0,0}$, $\xi^2 + \eta^2 = a^2 \nabla^2$, $\xi\,\eta = a^2 D^2$ Taylorentwicklungen aufgestellt und Kombinationen, wie z. B.

$$4S_1 + S_2 = 20\, f_{0,0} + 6a^2 \nabla^2 f_{0,0} + \tfrac{1}{2} a^4 \nabla^4 f_{0,0} + \tfrac{1}{60} a^6 (\nabla^4 + 2D^2) \nabla^2 f_{0,0} + \cdots$$

angegeben, die für das Differenzenverfahren bei der Laplaceschen Differentialgleichung vorteilhaft sind. Für die Ableitung $\partial f/\partial x$ wird der Ausdruck

$$f_{1,1} - f_{-1,1} + 4\,(f_{1,0} - f_{-1,0}) + f_{1,-1} - f_{-1,-1} = 12\, a \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{0,0} + 2a^3 \nabla^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{0,0} + O\,(a^5)$$

hergeleitet. Es folgen Formeln für angenäherte Auswertung von Doppelintegralen

$$J(c) = \int_{x_0 - c}^{x_0 + c} \int_{x_0 - c}^{x_0 + c} f\, dx\, dy, \quad J(a) = \frac{a^2}{45}(88 f_0 + 16 S_1 + 7 S_2) - \frac{a^6}{45} \nabla^4 f_0 + O\,(a^8),$$

$$J\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{1440}(1244 f_0 + 38 S_1 + 11 S_2) - \frac{17}{5760} a^6 \nabla^4 f_0 + O\,(a^8),$$

und ein kritischer Vergleich mit einfachen, bisher oft benutzten Näherungsausdrücken (z. B. des durch Übertragung der Simpsonschen Regel erhältlichen Ausdrucks). *Collatz* (Hannover).

Salzer, Herbert E.: Coefficients for repeated integration with central differences. J. Math. Physics, Massachusetts **28**, 54—61 (1949).

Bei der Formel für die k-fache Integration

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x_1} \cdots \int_{x_0}^{x}}_{k\text{-fach}} \int_{x_0}^{x} f(x)\, (dx)^k = h^k \left[A_0^{(k)} f_0 + B_0^{(k)} f_1 + \sum_{s=1}^{m} \left(A_{2s}^{(k)} \delta_0^{2s} + B_{2s}^{(k)} \delta_1^{2s} \right) \right] + R_{2m}$$

[mit den üblichen Bezeichnungen $f_0 = f(x_0)$, $f_1 = f(x_1)$, $h = x_1 - x_0$, δ_0^{2s} und δ_1^{2s} zentrale Differenzen, R_{2m} Restglied] werden die Koeffizienten $A_{2s}^{(k)}$, $B_{2s}^{(k)}$ durch die

Bernoullischen Polynome $B_\nu^{(n)}(x)$ vom ν-ten Grade und n-ter Ordnung ausgedrückt, z. B.

$$A_{2s}^{(2)} = \frac{1}{(2s+2)!}\left[B_{2s+2}^{(2s+2)}(s+2) - B_{2s+2}^{(2s+1)}(s+1)\right]$$

und in Tabellen die Werte der $A_{2s}^{(k)}$, $B_{2s}^{(k)}$ tabellarisch angegeben und zwar für $k = 2$ bis $2s = 48$ und für $k = 3, 4, 5, 6$ bis $2s = 20$. *Collatz* (Hannover).

Fox, L. and E. T. Goodwin: Some new methods for the numerical integration of ordinary differential equations. Proc. Cambridge philos. Soc. **45**, 373—388 (1949).

Es handelt sich um die Differentialgleichungen (1) $y' = f(x)\,y + g(x)$; (2) $y' = fy + gz$, $z' = Fy + Gz$, (3) $y'' + fy' + gy = 0$ und (4) $y'' = fy$. Bedeutet h eine Schrittweite und $a(x)$ eine beliebige Funktion von x, so werde zur Abkürzung $a(kh) = a_k$ gesetzt. Ferner bedeute $\delta a_k = a_{k+\frac{1}{2}} - a_{k-\frac{1}{2}}$; $\mu a_k = \frac{1}{2}(a_{k+\frac{1}{2}} + a_{k-\frac{1}{2}})$. Man kann nun Rekursionsformeln für die näherungsweise Lösung der obigen Differentialgleichungen aufstellen, derart, daß man eine Tabelle für $y_1, y_2, \ldots$ bzw. $z_1, z_2, \ldots$ berechnen kann. Beispielsweise haben Hausmann und Schwarzschild für die Gleichung (1) Rekursionsformeln $y_1 = (1 + A)\,y_0 + B$ benutzt, die man aus der Taylorentwicklung von y_1 an der Stelle $x = 0$ und der Berechnung der darin vorkommenden Ableitungen $y^{(n)}(0)$ aus der Gleichung (1) ableiten kann. Verff. vergleichen eine dieser Formeln mit anderen Rekursionsformeln. Entsprechende Vergleiche werden auch für die anderen oben genannten Differentialgleichungen angestellt und an numerischen Beispielen demonstriert. Insgesamt handelt es sich um die Formeln, die aus

$$\text{(I)}\quad y_1 = \left[1 + h f_0 + \frac{h^2}{2}(f_0^2 + f_0')\right] y_0 + \left[h g_0 + \frac{h^2}{2}(f_0 g_0 + g_0')\right] + \Delta y_0, \quad \text{mit}$$

$$\Delta = \tfrac{1}{6}\mu\,\delta^3 + \tfrac{1}{24}\delta^4 + \cdots,$$

$$\text{(II)}\quad \left(1 - \frac{h}{2} f_1\right) y_1 = \left(1 + \frac{h}{2} f_0\right) y_0 + \frac{h}{2}(g_0 + g_1) + \Delta y_{\frac{1}{2}} \text{ mit } \Delta = -\tfrac{1}{12}\delta^3 + \tfrac{1}{120}\delta^5 + \cdots,$$

$$\text{(III)}\quad \left(1 - \frac{h}{3} f_1\right) y_1 = \frac{4}{3} h f_0 y_0 + \left(1 + \frac{h}{3} f_{-1}\right) y_{-1} + \frac{h}{3}(g_1 + 4g_0 + g_{-1}) + \Delta y_0 \text{ mit}$$

$$\Delta = \tfrac{1}{90}\mu\,\delta^5 + \tfrac{1}{315}\mu\,\delta^7 + \cdots$$

durch Fortlassen der Δ-Glieder für die Gleichung (1) aufgestellt werden können, sowie um die Übertragung der Formeln (II) und (III) auf das System (2) und die Gleichungen (3) und (4), wenn diese auf die Form des Systems (2) gebracht werden. Außerdem werden noch die Formeln

$$\left(1 + \frac{h}{2} f_0\right) y_1' = (2 - h^2 g_0)\,y_0 - \left(1 - \frac{1}{2} h f_0\right) y_{-1} + \Delta y_0 \quad \text{für (3) mit}$$

$$\Delta = \tfrac{1}{6} h f_0 \mu\,\delta^3 + \tfrac{1}{12}\delta^4 + \cdots$$

und

$$\left(1 - \frac{h^2}{12} f_1\right) y_1 = \left(2 + \frac{5}{6} h^2 f_0\right) - \left(1 - \frac{h^2}{12} f_{-1}\right) y_{-1} + \Delta y_0 \quad \text{mit} \quad \Delta = -\tfrac{1}{240}\delta^6 + \cdots$$

für (4) betrachtet. Die Arbeit schließt mit einigen Bemerkungen über die Verallgemeinerung auf nichtlineare Gleichungen eines bestimmten Typs und mit Hinweisen auf die Fortpflanzung von Fehlern. *Hans Bückner* (Minden).

Cooper, J. L. B.: The solution of natural frequency equations by relaxation methods. Quart. appl. Math. **6**, 179—183 (1948).

Die Note enthält eine Erörterung der „relaxation method" von Southwell [siehe R. V. Southwell, Relaxation methods. Oxford University Press 1940, sowie Pellew and Southwell, Proc. R. Soc., London, A **175**, 262—290 (1940); dies. Zbl.