Werk

Titel: Analysis

Ort: Berlin

Jahr: 1950

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0033|log22

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Es sei $f(x)$ die beschränkte Distanzfunktion eines Sternbereiches K $f(x) \leqq 1$ in der Ebene, und es sei Λ ein Gitter. Es werden nun alle voneinander linearunabhängigen Gitterpunktpaare p, q betrachtet, für die $K f(p) \leqq f(q)$. Es seien nun $M_1(\Lambda) = \min f(p)$, $M_2(\Lambda) = \min f(q)$ die beiden sukzessiven Minima und $M(K) = \sup M_1(\Lambda) M_2(\Lambda)$ über alle Gitter mit fester Determinante. Dann wird folgender wichtiger Satz gezeigt: Es gibt ein Gitter Λ_0 (extremes Gitter genannt), so daß $M_1(\Lambda_0) M_2(\Lambda_0) = M(K)$. Der (komplizierte) Beweis wird mit Hilfe der Begriffe und Sätze aus der bereits klassischen Arbeit des Verf. aus den Proc. R. Soc., London, A **187**, 151—187 (1946) geführt. Am Schluß der Arbeit wird ein Sternbereich mit $M(K) > 1$ angegeben, so daß also nicht jedes kritische Gitter extrem ist. Bei konvexen Körpern ist $M(K)$ stets 1, also jedes kritische Gitter extrem. Dabei sind die Gitter Λ so normiert, daß $\mathrm{Det}\,\Lambda = \Delta(K)$, wo $\Delta(K) = \inf \mathrm{Det}\,\bar{\Lambda}$, erstreckt über alle K-zulässigen Gitter $\bar{\Lambda}$. *Hlawka* (Wien).

Analysis.

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

● **Behnke, H.: Infinitesimalrechnung. I.** 3. Aufl. Münster: Aschendorffsche Verlagsbuchh. 1947. V, 309 S.

● **Behnke, H.: Infinitesimalrechnung. II.** 2. Aufl. Münster: Aschendorffsche Verlagsbuchh. 1948. V, 353 S.

Areškin, G. Ja.: Zur Frage der Möglichkeit der Vertauschung der Zeichen für Limes und vollständige Variation in der Theorie der vollständig additiven Mengenfunktionen. Uspechi mat. Nauk **4**, Nr. 3 (31), 134—135 (1949) [Russisch].

Sei $\mathfrak{R}(H)$ ein σ-Körper, $\Phi_k(H)$ eine Folge dort definierter total additiver Mengenfunktionen, welche gegen $\Phi(H)$ konvergieren. Dann ist $\Phi(H)$ notwendig wieder totaladditiv (vgl. O. Nikodym, dies. Zbl. 8, 250). (Es sind offenbar endliche Mengenfunktionen vorausgesetzt.) In $\mathfrak{R}(H)$ existiere eine größte Menge E. Bekanntlich existiert eine Zerlegung $E = E^+ + E^-$ mit $E^+ \cap E^- = 0$ in $\mathfrak{R}$, so daß für die positive und negative Funktion von Φ gilt: $\Phi^-(E^+) = \Phi^+(E^-) = 0$. Ebenso gibt es Zerlegungen $E^+ = E_\kappa^{++} + E_\kappa^{+-}$ und $E^- = E_\kappa^{-+} + E_\kappa^{--}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, so daß $\Phi_\kappa^-(E^{++}) = \Phi_\kappa^+(E^{+-}) = \Phi_\kappa^-(E^{-+}) = \Phi_\kappa^+(E^{--}) = 0$. Sei $V = \Phi^+ + \Phi^-$ die totale Variation von Φ, entsprechend V_k. Es wird der Satz bewiesen: Damit unter den o. a. Voraussetzungen aus $\Phi_k \to \Phi$ folgt $V_k \to V$, ist notwendig und hinreichend $\lim_{k\to\infty} \Phi_k(E_\kappa^{+-}) = \lim_{k\to\infty} \Phi_k(E_\kappa^{-+}) = 0$. *Schmetterer* (Wien).

Rochlin, V.: Über die Grundbegriffe der Maßtheorie. Mat. Sbornik, n. S. **25 (67)**, 107—150 (1949) [Russisch].

Cet article concerne les mesures abstraites m définies sur un ensemble M quelconque, et vérifiant $m(M) = 1$. Le § 1 est principalement consacré à étudier comment, à partir de m et d'une famille quelconque Σ d'ensembles mesurables, on peut „engendrer" une mesure (qui ne coincide pas nécessairement avec m en ce sens qu'elle permet de mesurer moins d'ensembles que m); l'A. définit aussi ce qu'il appelle les „nombres caractéristiques" de Σ; ceux-ci permettent en un certain sens de représenter de façon précise les relations d'intersection existant entre les éléments de Σ. Dans le § 2, l'A. définit les mesures „de Lebesgue", elles sont engendrées par un système dénombrable d'ensembles (permettant en outre de „séparer" les points de M) et vérifient une autre condition plus compliquée, laquelle assure que tout homomorphisme d'une mesure de Lebesgue est un isomorphisme; ces mesures sont en outre équivalentes à la mesure de Lebesgue sur [0, 1] (sous réserve naturellement qu'elles ne présentent pas de masse ponctuelle); bien entendu, toutes les mesures qu'on rencontre dans la pratique sont de Lebesgue. Le § 3 examine le

problème de la „mesure quotient", déjà traité par P. R. Halmos (ce Zbl. **31**, 407; cette note rectifie des résultats antérieurs) et J. Dieudonné (ce Zbl. **30**, 160); l'A. définit une relation d'équivalence R „mesurable" pour m par une condition qui revient à la suivante: il existe une suite de fonctions mesurables f_n telle que xRy soit équivalent à $f_n(x) = f_n(y)$ pour tout n; dans cette hypothèse, et si m est une mesure de Lebesgue, on a un théorème de décomposition analogue à ceux de Dieudonné et Halmos. Enfin, le § 4 est consacré à la classification, du point de vue de la théorie de la mesure, des relations d'équivalence mesurables; l'A. montre essentiellement que le „type" d'une telle relation est déterminé par les masses ponctuelles qui apparaissent quand on applique les résultats du § 3 — résultat évidemment subtil, et du reste d'une démonstration compliquée. Notons en terminant que l'A. utilise systématiquement la technique „mesure des ensembles", et que l'on pourrait simplifier fortement le § 3 en utilisant au contraire les méthodes „intégrales", c'est-à-dire linéaires, ainsi qu'une extension connue du théorème de Lebesgue-Nikodym aux fonctions à valeurs dans le dual d'un espace de Banach séparable. *R. Godement* (Nancy).

Eggleston, H. G.: Intersections of sets in Euclidean space. J. London math. Soc. **23**, 92—100 (1948).

Eine einparametrige Schar $\{A(t)\}$ von Teilmengen $A(t)$ des E^n heißt stetig für den Parameterwert t_0, wenn für $t \to t_0$ die Abweichung $\alpha(A(t), A(t_0)) \to 0$ geht; sie heißt rückstetig, wenn es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß aus $U(A(t_0); \delta) A(t) \neq 0$ folgt $|t - t_0| < \varepsilon$. Verf. beweist: Es sei G eine offene Menge im E^n und $\{S(t)\}$, $a \leqq t \leqq b$, eine stetige Schar von Strecken konstanter Länge L. Dann ist das lineare Maß $m(S(t)G)$ eine nach unten halbstetige Funktion von t. Wenn andererseits $\lambda(t)$ für $a \leqq t \leqq b$ eine nach unten halbstetige Funktion ist mit $0 \leqq \lambda(t) \leqq L$ und $\{S(t)\}$ außerdem rückstetig, so gibt es eine offene Menge G mit $m(S(t)G) = \lambda(t)$. Der Satz gilt auch, wenn man an Stelle von $S(t)$ und m eine Schar von k-dimensionalen kongruenten Würfeln bzw. das k-dimensionale Lebesguesche Maß setzt. Ferner wird bewiesen: Sind für $a \leqq t \leqq b$ $\{A(t)\}$ und $\{B(t)\}$ stetige Scharen von abgeschlossenen Mengen, wobei $A(t)\,B(t)$ für jedes t zusammenhängend und nicht leer ist, dann ist auch die Vereinigung aller $A(t)\,B(t)$ zusammenhängend. Anschließend einige Beispiele und Folgerungen. *Aumann* (Würzburg).

●**Rado, Tibor: Length and area. (Amer. math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 30.)** New York: American Mathematical Society, 1948. VI, 572 p. $ 6,75.

H. Lebesgue gab im Jahre 1900 in seiner Thèse eine Definition des Maßes einer Fläche S, das als ein nach unten halbstetiges Funktional in der Klasse der stetigen Flächen bei den Anwendungen und besonders in der Variationsrechnung von großer Bedeutung ist. Während es Tonelli im Jahre 1926 gelungen war, das Problem des Lebesgueschen Flächenmaßes der Flächen in nicht parametrischer Form zu lösen, hat das analoge Problem für Flächen in parametrischer Form immer beachtliche Schwierigkeiten topologischer Natur aufgewiesen. In vorliegendem Buch wird eine ausführliche Beschreibung der Untersuchungen gegeben, die Verf. seit 1928 und seine Schüler in den Kriegsjahren durchgeführt haben und in welche sich diejenigen von C. B. Morrey und G. T. Whyburn in Richtung der algebraischen Topologie einflechten. In den Kriegsjahren geschriebene Arbeiten des Ref. werden in vorliegendem Buch nicht behandelt, da dieselben erst nach Drucklegung des Buches in die Vereinigten Staaten gelangt waren, worauf Verf. in verschiedenen nachträglichen Abschnitten hinweist. ●– Das Buch zerfällt in fünf Teile, von denen jeder eine sachliche Behandlung und einen darauffolgenden Kommentar enthält, in dem auf geschichtliche Vorgänge und parallele Probleme hingewiesen wird. — In Teil I werden, ohne Beweise, topologische und analytische Begriffe und Sätze erwähnt: topologischer Raum, Peanoscher Raum (d. h. topologisch, kompakt, zusammenhängend, lokal zusammenhängend und metrisierbar), stetige Abbildungen, topologische Charakterisierung der 2-Kugel nach Kuratowski, der Franklin-Wienersche Satz über die Approximation von stetigen Abbildungen durch fast lineare Abbildungen, welche auf einer 2-Zelle oder einer 2-Kugel definiert sind; außerdem Konvergenzsätze für das Lebesguesche Integral, der Rademachersche Satz über die Differenzierbarkeit der Lipschitzschen Funktionen. — Teil II hat topologischen Charakter, und Verf. befaßt sich mit dem allgemeinen Problem der stetigen Abbildungen T, $T(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}^*$ eines

Peanoschen Raumes $\boldsymbol{P}$ in einem Peanoschen Raum $\boldsymbol{P^*}$, die eindeutig, aber nicht notwendig eineindeutig sind. Durch das Studium der Menge der Maximal-Kontinuen von $\boldsymbol{P}$, auf denen T konstant ist, gelangt man auf klare und einfache Weise zu dem Beweis, daß jede auf einer 2-Zelle oder 2-Kugel definierte Abbildung T das Produkt einer monotonen Abbildung M und einer punktmäßigen (light) Abbildung L ist, $T = LM$, $M(\boldsymbol{P}) \to \mathfrak{M}$, $L(\mathfrak{M}) \to \boldsymbol{P^*}$, und es wird die Struktur des „Mittelraumes" $\mathfrak{M}$ vollkommen charakterisiert, welcher ebenfalls ein Peanoscher Raum ist. Dieser Satz, der „Faktorisierungssatz", ist von grundlegender Bedeutung für die weiteren Ausführungen. Es werden die Äquivalenzbegriffe nach Lebesgue (L), Fréchet (F) und Kérékjárto (K) für stetige Abbildungen betrachtet, und es wird beweisen, daß die L-Äquivalenz die F-Äquivalenz zur Folge hat und daß die F-Äquivalenz die K-Äquivalenz impliziert, aber nicht umgekehrt. Diese Beziehung zwischen der F- und K-Äquivalenz wurde von J. W. T. Youngs klargestellt. — Es wird des weiteren für Funktionale, welche sehr allgemeinen Bedingungen genügen (und das Lebesguesche Flächenmaß erfüllt die Bedingungen) der zyklische Additionssatz bewiesen, welcher zum Ausdruck bringt, daß der Wert eines gegebenen Funktionals für eine Abbildung T gleich ist der Summe der Werte desselben Funktionals für die Abbildungen (höchstens in abzählbarer Menge), welche T in bezug auf die zyklischen Elemente (2-Kugeln und 2-Zellen) des Mittelraumes $\mathfrak{M}$ untergeordnet sind. Dieser Satz findet hier eine sehr einfache Behandlung. — Teil III hat analytischen Charakter und handelt vor allem von Intervallfunktionen, dem Burkillschen Integral und bezüglichen Derivationssätzen. Es werden dann Funktionen einer reellen Veränderlichen mit beschränkter und total stetiger Variation besprochen, sowie der Begriff der Vielfachheit N nach Banach und Vitali und der diesbezügliche Satz. Es folgt die Theorie der rektifizierbaren Kurven mit den grundlegenden Sätzen von Jordan und Tonelli, Sätze der Längenkonvergenz, Beziehungen zwischen einem von einer ebenen geschlossenen Kurve eingeschlossenen Flächenmaß und dem klassischen Integral über die Kurve. Für Funktionen von mehreren reellen Variablen werden die Begriffe der Funktion mit beschränkter und total stetiger Variation nach Tonelli gebracht, und es werden Sätze über ihre Derivierbarkeit, ihre Integralmittel und über die Steinersche Ungleichheit gegeben. — In Teil IV werden die metrischen Eigenschaften der ebenen stetigen Abbildungen behandelt, und, da der Begriff der Vielfachheit N nach Banach und Vitali für das Lebesguesche Flächenmaßsystem nicht geeignet ist, wird der Begriff der „wesentlichen Vielfachheit" $\mathfrak{k}$ ($\mathfrak{k} \leq N$) eingeführt. Es werden dann die Begriffe einer ebenen Abbildung „mit wesentlich beschränkter Variation" und einer „wesentlich absolut stetigen" ebenen Abbildung eingeführt sowie die Begriffe der absoluten und relativen verallgemeinerten Funktionaldeterminanten. Es werden Integraleigenschaften der ebenen Abbildungen und eine allgemeine Formel für die Transformationen der Doppelintegrale gegeben. Es werden die Beziehungen zwischen dem Lebesgueflächenmaß und dem klassischen Doppelintegral für das Flächenmaß untersucht. [Ref. hat auf ganz anderem Wege äquivalente Begriffe ebener Abbildungen mit beschränkter Variation und ebener, absolut stetiger Abbildungen mit analogen Anwendungen auf die Transformationen der Doppelintegrale und auf das Flächenmaß der Flächen eingeführt.] Es folgen Konvergenz- und Abgeschlossenheitssätze für absolut stetige Abbildungen und eine Verallgemeinerung eines Hilfssatzes von E. J. McShane für die Variationsrechnung. — Teil V ist dem Problem des Flächenmaßes der Flächen gewidmet; es wird ein Flächenmaßbegriff $\mathfrak{a}(S)$ einer Fläche S oder „unteres Flächenmaß" vom Typ des Flächenmaßes $G(S)$ eingeführt, welches schon von McShane und C. B. Morrey herangezogen wurde und für das $G(S) \leq \mathfrak{a}(S) \leq L(S)$ gilt. Dieses Flächenmaß wird mit dem Flächenmaß $L(S)$ verglichen, und es wird bewiesen, daß $\mathfrak{a}(S) = L(S)$ in sehr allgemeinen Fällen ist [wenn $L(S) < +\infty$, wenn $\mathfrak{a}(S) = 0$, wenn S eine nicht parametrische Darstellung hat]. Es werden die Flächen charakterisiert, für die $\mathfrak{a}(S) = 0$ ist. [Verf. erwähnt, daß Ref. bewiesen hat, daß immer $G(S) = L(S)$ gilt und so $G = \mathfrak{a} = L$ ist. Ref. gab eine Charakterisierung des Flächentyps, welcher von Banach und Vitali vorgeschlagen wurde, für den $L(S) < +\infty$ ist.] Es folgt der Satz von C. B. Morrey über die Darstellung der Flächen, für die der „Mittelraum" $\mathfrak{M}$ eine 2-Zelle ist, eine Behandlung der Fläche in nicht parametrischer Form bis zu den Sätzen von Tonelli, Rado, Saks, L. C. Young und Angaben über das Geöczesche Problem.

Lamberto Cesari (Bologna).

Reichelderfer, Paul V.: Law of transformation for essential generalized Jacobians. Duke math. J. **16**, 73—83 (1949).

Es seien zwei Koordinatensysteme $x_1\, x_2\, x_3$, $x_1'\, x_2'\, x_3'$ gegeben, welche ähnlich in einem euklidischen dreidimensionalen Raum E_3 orientiert sind; es gelten die Beziehungen (1) $x_i' = c_i + \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\, x_j$, $i = 1, 2, 3$, wo die Matrix $||a_{ij}||$ normal und orthogonal ist und $|a_{ij}| = 1$. Wenn wir eine Fréchet-Fläche S in E_3 haben und eine Abbildung von S: $x_i = x_i(u, v)$, $i = 1, 2, 3$, $(u, v) \in R$, wobei R ein beschränktes, einfaches Jordan-Gebiet in der uv-Ebene ist, dann erlauben die Beziehungen (1) eine weitere Abbildung von S: $x_i' = x_i'(u, v)$, $i = 1, 2, 3$, $(u, v) \in R$. Wenn S endliches

Lebesguesches Flächenmaß hat, dann ist es auf verschiedene Art möglich, Begriffe verallgemeinerter Funktionaldeterminanten $J_i(u, v)$, $J_i'(u, v)$, $i = 1, 2, 3$, der Paare $x_2 x_3$, $x_2' x_3'$, $x_3 x_1$, $x_3' x_1'$, $x_1 x_2$, $x_1' x_2'$ der Funktionen $x_i(u, v)$, $x_i'(u, v)$ einzuführen. Diese verallgemeinerten Funktionaldeterminanten existieren fast überall in R^0, wobei R^0 die Menge der inneren Punkte von R ist (vgl. T. Rado, vorsteh. Referat und L. Cesari, Sui fondamenti geometrici etc., Atti Accad. Italia, Mem., IV. S. **13**, 1432 (1942) und dies. Zbl. **31**, 15]. Mit Hilfe der verallgemeinerten Radoschen Funktionaldeterminanten beweist Verf., daß für jede Fläche S von endlichem Lebesgueschem Flächenmaß fast überall in R^0 die klassischen Beziehungen

$$J_i'(u, v) = a_{i1} J_1(u, v) + a_{i2} J_2(u, v) + a_{i3} J_3(u, v), \quad i = 1, 2, 3,$$

gelten. — Ein analoges Ergebnis unter denselben Bedingungen wurde von Ref. für die Cesarischen verallgemeinerten Funktionaldeterminanten zusammen mit anderen Tangentialeigenschaften erhalten (s. dies. Zbl. **31**, 15). [Untersuchungen sind im Gange, zu beweisen, daß die verallgemeinerten Funktionaldeterminanten von Rado und Cesari fast überall identisch sind (Ref.).] *L. Cesari* (Bologna).

Rado, Tibor: Convergence in area. Duke math. J. **16**, 61—71 (1949).

Es seien S, S_n, $n = 1, 2, \ldots$, Fréchet-Flächen im xyz-Raum von endlichem Lebesgueschen Flächenmaß $L(S)$, $L(S_n)$; es seien T_i, T_{in}, $i = 1, 2, 3$, $n = 1, 2, \ldots$, die ebenen Abbildungen (ebene Flächen), die man als Projektionen der Flächen S, S_n auf die Ebenen yz, zx, xy erhält. Verf. beweist, daß wir, wenn $S_n \to S$, $L(S_n) \to L(S)$ gilt, auch $L(T_{in}) \to L(T_i)$, $i = 1, 2, 3$, haben. Wie Verf. bei der Korrektur der Arbeit hinzufügte, wurde derselbe Satz schon früher vom Ref. bewiesen. Vorliegender Beweis ist einfacher als der des Ref., weil er nicht von einem von Ref. bewiesenem Satz Gebrauch macht, jedoch in beiden Fällen ist es erforderlich, daß Beziehungen wie $\alpha(S) = L(S)$ oder $G(S) = L(S)$ schon bewiesen sind, die im Kern der Theorie stecken. Die von Rado herangezogenen Funktionen g, α sind jedoch nicht wesentlich erforderlich, da man seine Überlegung auch mit den vom Ref. herangezogenen Funktionen G, g wiederholen kann. *L. Cesari* (Bologna).

Helsel, R. G.: Convergence in area and convergence in volume. Duke math. J. **16**, 111—118 (1949).

Es sei S eine geschlossene orientierte Fréchet-Fläche im xyz-Raume R. S ist also das eindeutige aber, nicht notwendig eineindeutige stetige Bild einer orientierten Kugeloberfläche U. Es sei $L(S)$ das Lebesguesche Flächenmaß von S und $[S]$ die Menge der Punkte (x, y, z) der Fläche S im xyz-Raum. Es sei $i(x, y, z)$ der topologische Index der Fläche S, wobei $i(x, y, z) = 0$ in allen Punkten von $[S]$ ist. Nennen wir $V(S)$ oder von der Fläche S eingeschlossenes Volumen die Zahl $V(S) = \iiint_R |i(x, y, z)|\, dx\, dy\, dz$, wenn $i(x, y, z)$ L-integrierbar ist; $V(S) = +\infty$, wenn $i(x, y, z)$ nicht L-integrierbar ist. Das Volumen $V(S)$ ist ein nach unten halbstetiges Funktional, welches auch von T. Rado in einem neueren Beweis der bekannten isoperimetrischen Ungleichheit herangezogen wurde [Trans. Amer. math. Soc. **61**, 530—555 (1947)]. Verf. beweist folgenden Satz: Wenn S_n eine Folge geschlossener Fréchet-Flächen ist, wenn $S_n \to S$, $L(S_n) \to L(S)$, wenn ferner $[S]$ eine dreidimensionale Nullmenge ist, dann gilt auch $V(S_n) \to V(S)$. *L. Cesari.*

Karamata, J.: Inégalités relatives aux quotients et à la différence de $\int fg$ et $\int f \int g$. Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A **2**, 131—143 u. serb. Zusammenfassung 144—145 (1948).

Verf. gibt einen, von A. Bilimović stammenden, direkten Beweis für jene Verallgemeinerung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung, welche Spezialfall eines vom Verf. früher gefundenen Satzes [Complément au premier théorème de la moyenne, Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A **1**, 97—106 (1933); dies.

Zbl. 8, 345] ist. Diese Verallgemeinerung lautet:

$$\frac{A\,b(B-G)+a\,B(G-b)}{A(B-G)+a(G-b)}\cdot F \leqq \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt \leqq \frac{a\,b(B-G)+A\,B(G-b)}{a(B-G)+A(G-b)}\cdot F,$$

wo $0 < a \leqq f(t) \leqq A$, $b \leqq g(t) \leqq B$ $(0 \leqq t \leqq 1)$; $F = \int_0^1 f(t)\,dt$, $G = \int_0^1 g(t)\,dt$ ist. Der Beweis beruht auf der einfachen Tatsache, daß es zwischen a und A zwei Werte y_1 und y_2 gibt, für welche $\int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt = b\,F + (G-b)\,y_1 = B\,F - (B-G)\,y_2$ ist. — Aus diesem Satze bzw. Hilfssatze leitet Verf. folgende Abschätzung für den Quotienten bzw. für die Differenz von $\int_0^1 fg$ und $\int_0^1 f \cdot \int_0^1 g$ ab:

$$\left(\frac{\sqrt{a\,B}+\sqrt{A\,b}}{\sqrt{a\,b}+\sqrt{A\,B}}\right)^2 \leqq \frac{\int_0^1 fg}{\int_0^1 f \int_0^1 g} \leqq \left(\frac{\sqrt{a\,b}+\sqrt{A\,B}}{\sqrt{aB}+\sqrt{Ab}}\right)^2$$

bzw.

$$\left|\int_0^1 fg - \int_0^1 f \int_0^1 g\right| \leqq \min\left[\frac{(A-F)(F-a)(B-b)}{A-a},\ \frac{(B-G)(G-b)(A-a)}{B-b}\right]$$

(in der ersten Formel sind a und b beide als positiv vorausgesetzt, in der zweiten keines der beiden). — Die Ergebnisse des Verf. verallgemeinern die Sätze von G. Grüss [Math. Z. **39**, 215—226 (1934); dies. Zbl. **10**, 16], E. Landau [Math. Z. **39**, 742—744 (1935); dies. Zbl. **10**, 396] und K. Knopp [Math. Z. **39**, 768—776 (1935); dies. Zbl. **11**, 12] sowie von G. Kowalewski [Ein Mittelwertsatz für ein System von n Integralen, Z. Math. Phys. **42**, 153 (1897) und **43**, 118 (1898)].

Aczél (Szeged).

Dwinas, S.: Eine Anwendung der Theorie der Stichproben auf Integraltheorie. Rev. math. Hisp.-Amer , IV. S. **7**, 234—238 (1947) [Spanisch].

Es sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Das Intervall (x_i, x_{i+1}) wird in p gleiche Teile δ_{ij} $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1;\ j = 1, 2, \ldots, p)$ geteilt. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} p \cdot \int_{\delta_{ij}} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

wobei aus jedem Intervall ein beliebiges Teilstück gewählt werden kann. Verf. wurde zur Betrachtung dieses Satzes durch die Vorgangsweise bei geschichteter Stichprobenwahl angeregt. — Dieses Resultat ist bereits in einer Arbeit von Adams and Morse [Bull. Amer. math. Soc. **45**, 442—447 (1939); dies. Zbl. **21**, 303] enthalten und ist seither verallgemeinert worden. *S. Vajda.*

Aczél, John: New proof and extension of St. Fenyö's theorem on mean values of functions. Norske Vid. Selsk. Forhdl. **22**, Nr. 1, 4 S. (1949).

Sich auf frühere Arbeiten stützend (insb. dies. Zbl. **30**, 27 und 301) beweist Verf. die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von St. Fenyö [Norske Vid. Selsk. Forhdl. **21**, Nr. 38 (1948)]: Das Funktional $U(f(x))$, definiert für Funktionen $f(x)$, $0 \leqq x \leqq 1$, mit Unstetigkeiten höchstens erster Art, habe die folgenden Eigenschaften: a) $U(f_n) \to U(f)$ für f_n gleichmäßig $\to f$, b) $U(f) > U(g)$, wenn $f \geqq g$ und mindestens in einem Teilintervall $f > g$, c) $U_y[U_x(F(x,y))] = U_y[U_x(H(x,y))]$, wo $H(x,y) = F(y,x)$ für $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$ und $c \leqq x \leqq d$, $a \leqq y \leqq b$, und $H(x,y) = F(x,y)$ für alle übrigen (x,y). Dann gilt $U(f(x)) = u^{-1}\left(\int_0^1 u(f(x))\,dw(x) + C\right)$ mit stetig wachsendem $u(t)$, wachsendem $w(x)$ und konstantem C. *Aumann* (Würzburg).

Aczél, Jean, István Fenyö et Jean Horváth: Sur certaines classes de fonctionnelles. Portugaliae Math. **8**, 1—11 (1949).

Charakterisierung von Mittelwerten der Form $\varphi^{-1}\left(\int_0^1 \varphi(f(x))\,dx\right)$ bzw. $\varphi^{-1}\left(\int_0^1 \varphi(f(x))\,\alpha(x)\,dx\right)$ und von Funktionalen $\varphi^{-1}\left(\int_0^1 \varphi(f(x))\,\alpha(x)\,dx + C\right)$. Vgl. J. Aczél, vorsteh. Referat, St. Fenyö, Norske Vid. Selsk. Forhdl. **21**, Nr. 38 (1948), J. Horváth, ebenda **21**, 45—51 (1948). *Aumann* (Würzburg).

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Laasonen, Pentti: Einige Sätze über Tschebyscheffsche Funktionensysteme. Ann. Acad. Sci. Fennicae, A I, Nr. **52**, 24 S. (1949).

Es seien $n+1$ für $a < x < b$ beschränkte und stetige Funktionen $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ gegeben. Die linearen Aggregate

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x)$$

bilden ein Tschebyscheffsches Funktionensystem, wenn bei beliebiger Wahl der $n+1$ Punkte $x_1, \ldots, x_{n+1}$ im offenen Intervall (a, b) die Determinante $|\varphi_i(x_n)|$ von Null verschieden ist. Verf. untersucht einige einfache Eigenschaften solcher Systeme, insbesondere die Existenz und Kennzeichnung „adjungierter" Funktionen — das sind Funktionen, die zusammen mit dem gegebenen System $(n+1)$-ter Ordnung ein solches $(n+2)$-ter Ordnung bilden. Er zeigt: Es gibt für das System $n+1$ feste Punkte derart, daß jede adjungierte Funktion $\psi(x)$ am wenigsten von derjenigen Funktion $\varphi(x)$ des Systems abweicht, mit der sie in diesen festen Punkten übereinstimmt. Dabei ist die „Abweichung" anders als sonst üblich durch das Integral $\int_b^a |\psi(x) - \varphi(x)|\,dx$ erklärt. Genauer wird der Fall behandelt, daß das System aus Polynomen höchstens n-ten Grades besteht. Schließlich wird gezeigt, daß man gewiß dann zu einem Tschebyscheffschen System eine Funktion adjungieren kann (sie wird sogar angegeben), wenn an Stelle der obigen Determinante die Wronskische Determinante $|\varphi_i^{(k)}(x)|$ als nirgends verschwindend vorausgesetzt wird.
W. Hahn (Berlin).

Wang, Fu Traing: On Riesz summability of Fourier series. III. Proc. London math. Soc., II. S. **51**, 215—231 (1949).

Es sei (1) $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)$, $a_0 = 0$, die Fourrierreihe einer mit der Periode 2π periodischen, in $(0, 2\pi)$ L-integrierbaren Funktion $f(x)$. Es seien $\tau > 0$, $\beta > 0$, $\omega \geq 2$ reelle Zahlen, und wir betrachten, für ein gegebenes x, die Rieszschen Summen und Mittel

$$C_{\beta,\tau}(\omega) = \sum_{n<\omega} \{\exp(\log\omega)^\beta - \exp(\log n)^\beta\}^\tau A_n(x),\quad m_{\beta,\tau}(\omega) = [1 : \exp(\tau\log\omega)^\beta] C_{\beta,\tau}(\omega)$$

Wir sagen, daß (1) im Punkt x $(R, \exp(\log\omega)^\beta, \tau)$ - summierbar mit der Summe s ist, wenn $m_{\beta,\tau}(\omega) \to s$ bei $\omega \to +\infty$. Man beachte, daß es sich um Rieszsche Summen und Mittel handelt in bezug auf die mit ω „schnell zunehmende" Funktion $\exp[\tau(\log\omega)^\beta]$. [Für weitere neuere Untersuchungen über die Rieszsche Summierbarkeit in bezug auf diese und andere Funktionstypen sei auf F. T. Wang, Proc. London math. Soc., II. S. **47**, 308—325 (1942); J. London math. Soc. **17**, 98—107 (1942); **18**, 155—160 (1943); J. M. Hyslop, J. London math. Soc. **24**, 91—100 (1949); dies. Zbl. **33**, 112 verwiesen.] Im folgenden eines der vom Verf. erhaltenen Ergebnisse. Setzen wir

$$\Phi(t) = [f(x+t) + f(x-t) - 2s]/2,\quad \Phi_\alpha(t) = \Gamma^{-1}(\alpha)\int_0^t (t-u)^{\alpha-1}\Phi(u)\,du,\quad t > 0,$$

wobei α eine gegebene Zahl ist. Wenn $\Phi_\alpha(t) = o\,[t^\alpha : \log(1/t)]$ für $t \to 0$, dann ist (1) $(R, \exp[(\log\omega)^{1+1/\alpha}], \alpha + 1)$-summierbar mit der Summe s. *L. Cesari.*

Picone, Mauro: Vedute matematiche sull'analisi dei periodi. Rend. Sem. mat., Torino **8**, 5—6 (1949).

Kurzer Bericht über einen Vortrag über das Problem, unter welchen Bedingungen eine für alle reellen t definierte, aber nur für $0 < t < T$ bekannte Funktion sich mit hinreichender Annäherung in der Form $f(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{z_k t}\ (-\infty < t < +\infty)$ darstellen läßt, wo c_k, z_k reelle oder komplexe Konstante sind. Die Annäherung in dem endlichen Intervall ist bekanntlich möglich und wird z. B. durch die Methoden von Labrouste und Vercelli erzielt. Für den gesamten Definitionsbereich ist das Problem nur lösbar, wenn $f(t)$ die Lösung einer gewöhnlichen linearen und homogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ist. *K. Stumpff.*

Funktionentheorie:

Al'per, S. Ja.: Über die Vollständigkeit eines Systems analytischer Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **66**, 1029—1032 (1949)[Russisch].

Ein System von Funktionen $\{f_n(z)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ der komplexen Veränderlichen z, die in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G analytisch sind, wird in G vollständig genannt, wenn jede in G analytische Funktion $F(z)$ in jeder ganz im Inneren von G liegenden abgeschlossenen Menge G sich durch Summen der Form $\sum_{k=1}^{n} A_k f_k(z)$ gleichmäßig approximieren läßt. Wenn G den Kreis $|z| < R$ enthält und jede in $|z| < R$ reguläre $F(z)$ durch eine gleichmäßig konvergierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} B_k f_k(z)$ darstellbar ist, so wird das System $\{f_n(z)\}$ eine Basis in $|z| < R$ genannt. Es bedeute $K_{B'}$ die Klasse aller in einem den Punkt $z = 0$ im Innern enthaltenden einfach zusammenhängenden Gebiet B' (welches den Punkt $z = \infty$ nicht als inneren Punkt enthält) analytischen Funktionen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k \neq 0$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ Wenn B' ein Kreis $|z| < R$ ist, so sagen wir, daß $f(z)$ zur Klasse K_R gehört, und wenn noch $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1/R$ gilt, so heiße $f(z)$ zur Klasse K'_R gehörend. Verf. beweist folgenden Satz: 1. Wenn die Funktionen

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(n)} z^k \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

in einem den Punkt $z = 0$ enthaltenden Gebiet G analytisch sind und $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ zur Klasse $K_{B'}$ gehört, so ist das System der Funktionen

$$F_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k^{(n)} z^k \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

in jedem einfach zusammenhängenden Gebiet G'', das keinen Punkt der Form ab enthält wo a Randpunkt von G und b singulären Punkt von $f(z)$ bedeutet, vollständig. — Die folgenden Sätze werden behauptet: 2. Wenn die Funktionen (1) im Kreise $|z| < R_1$ analytisch sind und $f(z)$ zur Klasse K'_R gehört, so bilden die Funktionen (2) eine Basis im Kreise $|z| < R_1 R$. 3. Wenn $f(z)$ zu K_R gehört, setzen wir

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(n)} a_k z^k \qquad \text{und} \qquad K_{n,s} = \frac{\sum_{k=s+1}^{\infty} |c_k^{(n)}|}{|c_s^{(n)}|}. \tag{3, 4}$$

Wenn für $s = 0, 1, 2, \ldots$ die Bedingung $\liminf_{n\to\infty} K_{n,s} = 0$ erfüllt ist, so bilden

die Funktionen (3) ein vollständiges System in $|z| < R$. 4. Wenn $f(z)$ zu $K_{G'}$ gehört, so ist das System $\{z^n f^n(z)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ vollständig in G'. 5. Wenn $f(z)$ zu $K_{G'}$ gehört und $\lim \alpha_n = \alpha$ existiert und endlich ist, so ist das System $\{f(\alpha_n z)\}$ vollständig in jedem Bereich, in dem $f(\alpha z)$ analytisch ist und der den Punkt $z = \infty$ nicht im Innern enthält. 6. Wenn $f(z)$ zu $K_{G'}$ gehört und

$$R_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k \tag{5}$$

gesetzt wird, so ist das System $R_n(z)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ vollständig in G'. 7. Wenn $f(z)$ zu K'_R gehört, so bilden die Funktionen (5) eine Basis in $|z| < R$. 8. Wenn $f(z)$ zu K_R gehört, so ist das System der Funktionen $f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} z^{kn}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ vollständig in $|z| < R$. *A. Rényi* (Budapest).

Friedman, G. A.: Zum Koeffizientenproblem der Funktionen der Klassen H_δ. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **C5,** 805—808 (1949) [Russisch].

Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ im Kreise $|z| < 1$ regulär. Wenn $\int_0^{2\pi} |f(r e^{i\varphi})|^\delta \, d\varphi$ für $r < 1$ beschränkt bleibt, so sagt man, daß $f(z)$ zur Klasse H_δ gehört; wenn $f(z)$ zu H_δ gehört, sei

$$C_f = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\varphi})|^\delta \, d\varphi \right)^{1/\delta}$$

gesetzt. Verf. beweist, daß, wenn $f(z)$ zu H_δ, $0 < \delta \leqq 1$, gehört, gilt:

$$|a_n| \leqq C_f \cdot (n+1)^{1/\delta - 1} \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{(n+1)^{1/\delta - 1}} = 0.$$

Ferner wird eine hinreichende Bedingung für $f(z) \in H_\delta$ bewiesen. *A. Rényi.*

Rényi, Alfréd: On the coefficients of schlicht functions. Publ. Math., Debrecen **1,** 18—23 (1949).

Die Funktion $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ sei im Kreise $|z| < 1$ regulär und bilde denselben auf ein Gebiet G ab, dessen Randdrehung α endlich ist, d. h. für welches der Richtungswinkel der Randtangente eine Funktion von beschränkter Schwankung ist. [Vgl. Ref., Ann. Acad. Sci. Fennicae A **33**, Nr. 9 (1931); dies. Zbl. **1**, 143.] Verf. beweist, daß

$$|a_n| \leqq \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{\alpha - 2\pi}{k\pi}\right) \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Hieraus folgt $|a_n| \leqq n^{(\alpha - 2\pi)/\pi}$, welches im Falle $\alpha = 3\pi$ die Bieberbachsche Vermutung für schlichte Funktionen (1) $|a_n| \leqq n$ ergibt. Falls $\alpha \leqq 4\pi$, in welchem Fall das Bildgebiet notwendig schlicht ist, so existiert wenigstens eine Richtung derart, daß jede mit dieser parallele Gerade höchstens ein einziges Segment mit G gemeinsam hat. Dann gilt (1) nach einem Resultat von M. S. Robertson (dies. Zbl. **14**, 120). *V. Paatero* (Helsinki).

Goodman, A. W.: Note on regions omitted by univalent functions. Bull. Amer. math. Soc. **55,** 363—369 (1949).

Als Beitrag zur Verzerrungstheorie beweist Verf. mit Hilfe eines Satzes von Pick und R. Nevanlinna, daß, wenn die im Einheitskreis regulär-schlichte Funktion $w = z + a_2 z^2 + \cdots$ daselbst die Werte w mit $|w - c| \leqq R$ ausläßt, $R \leqq |c|\,(4|c| - 1) : (4|c| + 1)$ ist. Die Existenz von Extremalfunktionen zeigt, daß die Ungleichung die bestmögliche ist. Zu weniger scharfen Resultaten gelangt Verf. in bezug auf die Größe desjenigen Bruchteiles des w-Einheitskreises, den das Bild des z-Einheitskreises wenigstens bedecken muß. Mit Hilfe einer Hölderschen Integralgleichung wird gezeigt, daß der betreffende Flächeninhalt wenigstens die Hälfte des Kreises ausmacht. Durch Betrachtung spezieller Funktionen wird der Minimalinhalt der Fläche nach oben abgeschätzt. *G. af Hällström* (Åbo).

Pastidès, Nicolas: Sur quelques équations fonctionnelles. Ann. sci. École norm. sup., III. S. **65**, 277—298 (1948).

Im Mittelpunkt steht die Behandlung der Schröderschen Funktion $s = F(z)$ (hier Koenigssche Funktion genannt) bei einem rational indifferenten Fixpunkt $z_0 = f(z_0)$ einer bei $z = z_0$ analytischen Funktion mit $f'(z_0) = \exp[2\pi i k/n]$, wobei k und n natürliche Zahlen sind. Durch $F(z)$ wird die Schrödersche Funktionalgleichung erfüllt: $F(f(z)) = f'(z_0) F(z)$. Notwendig und hinreichend für deren Existenz ist bekanntlich, daß unter den Iterierten $f_\nu(z)$ von $f(z)$ die Identität vorkommt. Ist die Schrödersche Funktion im Falle $0 \neq |s| \neq 1$ abgesehen von einer multiplikativen Konstanten stets eindeutig vorhanden, so lassen sich hier aus einer Lösung $F_I(z)$ zahlreiche andere gewinnen: $\sum_{\nu=M}^{N} c_\nu [F_I(z)]^{\nu n+1}$; bei geeigneter Wahl der c_ν kann $M = -\infty$, $N = +\infty$ werden und noch eine konvergente Lösung entstehen. — Falls $f(z_0) = z_0$, $g(z_0) = z_0$ und natürliche Zahlen m und n existieren, so daß die Iterierten $f_m(z) \equiv z$, $g_n(z) \equiv z$ erfüllen, so gibt es gewisse notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß $f(g(z)) = g(f(z))$ ist; dies kann auf endlich viele Funktionen $f(z), g(z), \ldots, h(z)$ übertragen werden. Weiter wird die Funktionalgleichung $H(f(z)) = g(H(z))$ gelöst. Zuletzt wird eine Lösung $\Psi(z)$ der Funktionalgleichung $\Psi(f(z)) = g(\Psi(z))$ unter Anwendung der Schröderschen und Boettcherschen Funktion angegeben. Die Deduktionen bleiben funktionentheoretisch elementar; die den vorliegenden Gegenstand betreffenden Methoden und Ergebnisse von Cremer, Fatou, Julia, Lyche, Pfeiffer, Siegel und Tschebotarev werden nicht aufgegriffen. *Töpfer* (Köln).

Haselgrove, C. B.: A connection between the zeros and the mean values of $\zeta(s)$. J. London math. Soc. **24**, 215—222 (1949).

Ist $d_k(n)$ in der für $\Re(s) > 1$ konvergenten Dirichletreihe $\zeta(s)^k$ der Koeffizient von n^{-s}, so wird hier für $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ und alle positiven k mit $2k\,\mu(\sigma) + \nu^*(\sigma) < 1$ bewiesen, daß für $T \to \infty$

$$\frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k}\,dt \to \sum d_k^2(n)\, n^{-2\sigma}. \tag{1}$$

Bezeichnet $k(\sigma)$ die obere Grenze aller k, für die diese Beziehung gilt, so ist $1 \geqq 2\mu(\sigma)\cdot k(\sigma) \geqq 1 - \nu^*(\sigma)$ (2). Dabei ist $\mu(\sigma) = \underline{\text{fin}}$ aller ξ mit $\zeta(\sigma + it) = O(t^\xi)$ für $t \to \infty$, $\nu(\sigma) = \underline{\text{fin}}$ aller ξ mit $N(\sigma, T) = O(T^\xi)$ für $T \to \infty$ und $\nu^*(\sigma) = \nu(\sigma - 0)$. Es ist ν eine monoton abnehmende Funktion und bewiesen $\nu(\beta) < 1$ für $\frac{1}{2} < \beta \leqq 1$. Aus der Beschränktheit der linken Seite von (1) folgt [E. C. Titchmarsh, The zeta-function of Riemann, Cambridge 1930, § 6. 14, S. 94] $\mu(\sigma) \leqq (2k)^{-1}$. Aus besseren Abschätzungen von $\mu(\sigma)$ und $\nu^*(\sigma)$ ergibt sich (1) für

$$\sigma > \max\left(1 - 2^{1-q},\ 1 - \frac{q+1}{2k + (4c+2)(q+1)}\right),$$

wodurch ein für ganze k bewiesenes Resultat von Davenport [J. London math. Soc. **10**, 136—138 (1935); dies. Zbl. **11**, 294] verbessert wird. Beweismittel ist folgender Satz: wenn für feste β, σ $(\frac{1}{2} < \beta < \sigma < 1)$ und $T > 10$ in $\Re(s) > \beta$, $T - \log^2 T < \Im(s) < T + \log^2 T$ $\zeta(s) \neq 0$ ist, wenn $k > 0$ und $0 < \eta < 1$ ist, so gibt es ein festes $\varphi > 0$, für das

$$\zeta^k(\sigma + iT) - \sum d_k(n)\, e^{-\delta n}\, n^{-(\sigma + iT)} = O(T^{-\varphi})$$

gilt, wenn $T^{-1} < \delta < T^{-\eta}$ ist. *Hoheisel* (Köln).

Lammel, E.: Über eine zur Laplaceschen Differentialgleichung in drei Veränderlichen gehörige Funktionentheorie. I. Math. Z. **51**, 658—689 (1949).

Die der Laplace-Gleichung $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$ genügenden reellen homogenen Polynome n-ten Grades $U_n(x, y, z)$ bilden einen $(2n+1)$-dimensionalen linearen Vektorraum

$\mathfrak{U}^{2n+1}$. Verf. legt in $\mathfrak{U}^{2n+1}$ eine spezielle Basis $\mathfrak{B}^{(n)} = \{t_\varkappa^{(n)}; u_\lambda^{(n)}; v_\mu^{(n)}; w_\nu^{(n)}\}$ fest, bestehend aus geeignet gewählten harmonischen Polynomen $t_\varkappa^{(n)}(x, y, z)$, $u_\lambda^{(n)}(x, y, z)$, $v_\mu^{(n)}(x, y, z)$, $w_\nu^{(n)}(x, y, z)$ mit $1 \leq \varkappa \leq [n/2] + 1$, $1 \leq \lambda, \nu \leq [(n+1)/2]$, $1 \leq \mu \leq [n/2]$. Zur Berechnung der $t_\varkappa^{(n)}$, $u_\lambda^{(n)}$, $v_\mu^{(n)}$, $w_\nu^{(n)}$ stehen Rekursionsformeln zur Verfügung; insbesondere wird eine Formel angegeben, die die Elemente der Basis $\mathfrak{B}^{(m+n)}$ aus den Elementen von $\mathfrak{B}^{(m)}$ und $\mathfrak{B}^{(n)}$ zu berechnen gestattet. Dieser Zusammenhang zwischen den Basen verschiedenen Grades legt die Einführung eines besonderen Kalküls mit geordneten $(2n+1)$-tupeln reeller Zahlen nahe. Unter einer „komplexen Zahl n-ter Stufe" $Z^{(n)}$ wird für $n = 0$ eine reelle Zahl, für $n = 1, 2, \ldots$ ein geordnetes $(2n+1)$-tupel reeller Zahlen $(a_\varkappa^{(n)}; b_\lambda^{(n)}; c_\mu^{(n)}; d_\nu^{(n)})$ mit $1 \leq \varkappa \leq [n/2]+1$, $1 \leq \lambda, \nu \leq [(n+1)/2]$, $1 \leq \mu \leq [n/2]$ verstanden; die $a_\varkappa^{(n)}$, $b_\lambda^{(n)}$, $c_\mu^{(n)}$, $d_\nu^{(n)}$ heißen die Komponenten von $Z^{(n)}$. Zwei komplexe Zahlen n-ter Stufe sind gleich, wenn ihre Komponenten übereinstimmen. Die Summe zweier komplexer Zahlen n-ter Stufe $Z_\alpha^{(n)} = (a_{\alpha\varkappa}^{(n)}; b_{\alpha\lambda}^{(n)}; c_{\alpha\mu}^{(n)}; d_{\alpha\nu}^{(n)})$, $\alpha = 1, 2$, wird als Vektorsumme

$$Z_1^{(n)} + Z_2^{(n)} = (a_{1\varkappa}^{(n)} + a_{2\varkappa}^{(n)}; b_{1\lambda}^{(n)} + b_{2\lambda}^{(n)}; c_{1\mu}^{(n)} + c_{2\mu}^{(n)}; d_{1\nu}^{(n)} + d_{2\nu}^{(n)})$$

erklärt. Jeder komplexen Zahl n-ter Stufe $Z_1^{(n)}$ kann eindeutig eine komplexe Zahl m-ter Stufe $\tilde{Z}_1^{(m)}$ $(m > n)$ zugeordnet werden, dadurch, daß den Komponenten von $Z_1^{(n)}$ geeignet viele Nullen als neue Komponenten hinzugefügt werden; $Z_1^{(n)}$ und $\tilde{Z}_1^{(m)}$ heißen gleich. Unter der Summe der komplexen Zahlen $Z_1^{(n)}$ und $Z_2^{(m)}$ $(m > n)$ wird sodann die komplexe Zahl $\tilde{Z}_1^{(m)} + Z_2^{(m)}$ verstanden. Schließlich wird zwei komplexen Zahlen beliebiger Stufen $Z^{(m)}$ und $Z^{(n)}$ eine komplexe Zahl $(m+n)$-ter Stufe $Z^{(m+n)}$ als ihr Produkt $Z^{(m+n)} = Z^{(m)} \cdot Z^{(n)}$ zugeordnet, und zwar werden die Komponenten von $Z^{(m+n)}$ aus denen von $Z^{(m)}$ und $Z^{(n)}$ nach der gleichen Vorschrift bestimmt, die den Zusammenhang zwischen den Basen $\mathfrak{B}^{(m+n)}$, $\mathfrak{B}^{(m)}$ und $\mathfrak{B}^{(n)}$ herstellt. Es zeigt sich, daß mit den so definierten Verknüpfungen die komplexen Zahlen beliebiger Stufen einen Integritätsbereich bilden. — Nach diesen Vorbereitungen werden Funktionen einer komplexen Veränderlichen (x, y, z) betrachtet, wobei das System der reellen Veränderlichen (x, y, z) als Variable über dem Raum $\mathfrak{B}^3$ der komplexen Zahlen 1. Stufe angesehen wird. Unter einer Funktion n-ter Stufe $f_n[(x, y, z)]$ wird eine Abbildung einer Punktmenge von $\mathfrak{B}^3$ in den Raum $\mathfrak{B}^{2n+1}$ der komplexen Zahlen n-ter Stufe verstanden; $f_n[(x, y, z)]$ wird also gegeben durch ein geordnetes $(2n+1)$-tupel reeller Funktionen $(t_\varkappa(x, y, z); u_\lambda(x, y, z); v_\mu(x, y, z); w_\nu(x, y, z))$ mit $1 \leq \varkappa \leq [n/2]+1$, $1 \leq \lambda, \nu \leq [(n+1)/2]$, $1 \leq \mu \leq [n/2]$. Beispiel: $f_n[(x, y, z)] = (x, y, z)^n$; als Komponentenfunktionen ergeben sich genau die harmonischen Polynome $t_\varkappa^{(n)}$, $u_\lambda^{(n)}$, $v_\mu^{(n)}$, $w_\nu^{(n)}$, also die Elemente der Basis $\mathfrak{B}^{(n)}$ von $\mathfrak{U}^{2n+1}$. — Eine Funktion n-ter Stufe $f_n[(x, y, z)]$ heißt an der Stelle (x, y, z) differenzierbar, wenn es eine Funktion $(n-1)$-ter Stufe $f_{n-1}^*[(x, y, z)]$ gibt, so daß für eine hinreichend kleine Umgebung von (x, y, z)

$$f_n[(x+h,\ y+k,\ z+l)] - f_n[(x, y, z)] = f_{n-1}^*[(x, y, z)] \cdot (h, k, l) + \Omega^{(n)}$$

wird, wobei $\Omega^{(n)} = (\alpha_\varkappa^{(n)}; \beta_\lambda^{(n)}; \gamma_\mu^{(n)}; \delta_\nu^{(n)})$ eine Größe n-ter Stufe ist, deren Komponenten Funktionen von x, y, z, h, k und l sind, welche beim Grenzübergang $(h, k, l) \to (0, 0, 0)$ von höherer Ordnung als $\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$ Null werden. Als notwendig und hinreichend für die Differenzierbarkeit von $f_n(x, y, z)]$ stellt sich heraus, daß die Komponentenfunktionen $t_\varkappa(x, y, z)$, $u_\lambda(x, y, z)$, $v_\mu(x, y, z)$, $w_\nu(x, y, z)$ differenzierbare Funktionen von x, y, z sind und daß sie folgenden, den Cauchy-Riemannschen entsprechenden Differentialgleichungen genügen:

$$\frac{\partial T_\varkappa}{\partial x} = \frac{\partial U_\varkappa}{\partial y} = \frac{\partial W_\varkappa}{\partial z};\quad \frac{\partial T_\varkappa}{\partial y} = \frac{\partial U_{\varkappa-1}}{\partial x} = \frac{\partial V_{\varkappa-1}}{\partial z};\quad \frac{\partial T_\varkappa}{\partial z} = -\frac{\partial W_\varkappa}{\partial x} - \frac{\partial W_{\varkappa-1}}{\partial x};$$

$$\frac{\partial U_\lambda}{\partial z} = -\frac{\partial V_\lambda}{\partial x} - \frac{\partial V_{\lambda-1}}{\partial x};\quad \frac{\partial W_\nu}{\partial x} = \frac{\partial V_\nu}{\partial y};\quad \frac{\partial W_\nu}{\partial y} = \frac{\partial V_{\nu-1}}{\partial x},$$

wobei $1 \leq \varkappa \leq [n/2]+1$, $1 \leq \lambda, \nu \leq [(n+1)/2]$ ist und T_α mit t_α, U_β mit u_β, V_γ mit v_γ und W_δ mit w_δ übereinstimmt, wenn $1 \leq \alpha \leq [n/2]+1$, $1 \leq \beta, \delta \leq [(n+1)/2]$ und $1 \leq \gamma \leq [n/2]$ ist, sonst aber Null sind. — Schließlich werden Kurvenintegrale über Funktionen n-ter Stufe eingeführt. Es ergibt sich das folgende Analogon zum Cauchyschen Integralsatz: Ist $f_n[(x, y, z)]$ in allen Punkten eines einfach zusammenhängenden Gebietes G des (x, y, z)-Raumes differenzierbar, so verschwindet das Kurvenintegral $\oint_C f_n[(x, y, z)]\, d(x, y, z)$ längs jeder in G verlaufenden geschlossenen rektifizierbaren Kurve C.

Stein (Münster/Westfalen).

Cicco, John de: Functions of several complex variables and multiharmonic functions. Amer. math. Monthly **56**, 315—325 (1949).

Eine komplexe Funktion $w = \Phi(u_1, \ldots, u_n) + i\,\Psi(u_1, \ldots, u_n)$ ist eine polygene Funktion der n komplexen Variablen $u_k = x_k + i\,y_k$, wenn die reellen Funktionen Φ und Ψ stetig sind und stetige erste partielle Ableitungen nach den reellen Variablen x_k und y_k besitzen. Sie heißt speziell analytisch polygen, falls Φ und Ψ als Funktionen der reellen Variablen x_k und y_k analytisch sind; in diesem Fall können x_k und y_k auch als komplexe Variable aufgefaßt und die Funktion w zu einer Funktion von $2n$ komplexen Variablen fortgesetzt werden. Dieser einfache Gedanke erlaubt es, zu einer reellen multiharmonischen Funktion, d. h. einer Funktion, die den n^2 Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\,\partial x_k} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y_i\,\partial y_k} = 0; \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\,\partial y_k} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_k\,\partial y_i} = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, n)$$

genügt, die konjugierte Funktion Ψ so zu konstruieren, daß $\Phi + i\,\Psi$ eine monogene Funktion der komplexen Variablen $u_k = x_k + i\,y_k$ wird. Ist Φ rational, algebraisch oder ganz, so gilt dasselbe für Ψ. Notwendige und hinreichende Bedingungen für multiharmonische Funktionen und Anwendungen auf Systeme von n polygenen Funktionen bilden den Schluß der Arbeit. *Kriszten* (Zürich).

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Cohn, Richard M.: A theorem on difference polynomials. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 595—597 (1949).

Es wird gezeigt: Ist J ein Differenzenkörper, der ein Element t enthält, das von allen Transformierten beliebig hoher Ordnung verschieden ist, so besitzt jedes perfekte Ideal im Ringe $J[y_1, \ldots, y_n]$ eine Basis von $n + 1$ Differenzenpolynomen. Der Beweis folgt in den Hauptlinien einem kurzen und eleganten Beweise des entsprechenden, für Differentialgleichungen gültigen Theorems, der in der in Kürze erscheinenden, revidierten Ausgabe des Buches „Differentialgleichungen vom algebraischen Standpunkt“ (Amer. math. Soc. Colloquium Publications **14**) von J. F. Ritt zu finden sein wird. *Krull* (Bonn).

Cohn, Richard M.: Inversive difference fields. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 597—603 (1949).

Zu der vorliegenden Arbeit (ebenso wie zu der unmittelbar vorher besprochenen) vergleiche man die große Abhandlung: Manifolds of difference polynomials (dies. Zbl. **31**, 304), sowie die ergänzende Note: A note on the singular manifolds of a difference polynomial [Bull. Amer. math. Soc. **54**, 917—922 (1948)]. — In einem abstrakten Differenzenkörper F bildet die Menge aller ersten Transformierten einen Differenzenunterkörper F_1, und es wird dabei F durch die Zuordnung der Elemente zu ihren ersten Transformierten umkehrbar eindeutig und isomorph auf F_1 abgebildet. Aus dieser Bemerkung folgt mühelos, daß jeder abstrakte Differenzenkörper F in einen „invertierbaren“ Differenzenkörper F^* eingebettet werden kann, der dadurch ausgezeichnet ist, daß jedes seiner Elemente die erste Transformierte eines anderen, gleichfalls zum Körper gehörigen Elementes darstellt. Der Einbettungssatz seinerseits läßt sich, wie Verf. an zwei wichtigen, die gewöhnlichen und die wesentlich singulären Mannigfaltigkeiten eines Differenzenpolynoms A betreffenden Beispielen zeigt, systematisch benützen, um jedem Satz über Differenzengleichungen einen korrespondierenden gegenüberzustellen, in dem die Rollen, die die höchsten und die niedersten Transformierten der Unbekannten spielen, gerade vertauscht sind. *Krull* (Bonn).

Ionesco, D. V.: Sur une équation de récurrence à deux indices. Disqu. math. physic., Bucureşti **6**, 49—80 (1948).

Zu einer differenzierbaren reellen Funktion $Y(x)$ und zu den beiden beliebigen reellen Konstanten λ und μ werden die Funktionen

$$Y_1(x) = \frac{d}{dx}\,[x^{1+\lambda+\mu}\,Y(x)]\,, \qquad Y_n(x) = \frac{d}{dx}\,[x^{1+\lambda}\,Y_{n-1}(x)] \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

definiert. Wird gesetzt:

$$Y_n = x^{n\lambda+\mu} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n+1}^{\nu+1}\, x^{\nu}\, Y^{(\nu)} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

so erfüllen die Koeffizienten A_q^p $(1 \leqq p \leqq q \leqq 2)$ die Rekursionsformeln:

$$A_{n+1}^1 = (\lambda + \mu + 1)\,(2\lambda + \mu + 1) \cdots (n\lambda + \mu + 1), \quad A_{n+1}^{n+1} = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

und für $2 \leqq p \leqq n$: $A_{n+1}^p = (n\lambda + \mu + p)\,A_n^p + A_n^{p-1}$. Die Untersuchung der von $Y(x)$ unabhängigen Koeffizienten A_q^p geschieht durch Einsetzen der speziellen Funktion $Y(x) = (1-x)^{p-1}$. — Ohne Bezugnahme auf ein Funktionenproblem der oben angegebenen Art wird die Lösung des Rekursionssystems

$$A_{n+1}^p = (n\lambda + \mu + p\,\sigma)\,A_n^p + A_n^{p-1} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

behandelt, wobei σ eine weitere reelle Konstante ist. In der Matrix der A_q^p lassen sich gewisse Stellen als Anfangsbedingungen beliebig vorgeben. Es werden sechs derartige Fälle behandelt (z. B.: $A_k^k = 1$ für ein k, $A_p^p = 0$ für $p \neq k$, $A_n^0 = 0$ für $n = 0, \pm 1, \ldots$), auf die man allgemeinere Ansätze reduzieren kann. *Töpfer.*

Montel, Paul: Sur quelques équations aux différences mêlées. Ann. sci. Ecole norm. sup., III. S. **65**, 337—353 (1948).

Falls $h = \eta + i\,\eta'$ ist, so sei für die stetige Funktion $f(x, y)$ die Differenz erster Ordnung mit $\Delta_h[f(x, y)] = f(x + \eta, y + \eta') - f(x, y)$ und diejenige n-ter Ordnung mit $\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\cdots\Delta_{h_n}[f(x, y)] = \Delta_{h_1}\{\Delta_{h_2}\cdots\Delta_{h_n}[f(x, y)]\}$ definiert. Drei verschiedene Spannen h, k, l heißen unabhängig, wenn die Menge aller $mh + nk + pl$ (m, n, p durchlaufen alle ganzen Zahlen) in der komplexen Zahlenebene überall dicht ist. Mittels vollständiger Induktion wird gezeigt, daß eine Lösung des Differenzensystems

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\cdots\Delta_{h_n}[f(x, y)] = 0\,,\ \Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\cdots\Delta_{k_n}[f(x, y)] = 0\,,\ \Delta_{l_1}\Delta_{l_2}\cdots\Delta_{l_n}[f(x, y)] = 0,$$

bei dem jedes Spannentripel h_i, k_j, l_s $(i, j, s = 1, 2, \ldots, n)$ unabhängig ist, ein Polynom vom Grade m darstellt. Falls ein einziges Tripel h_i, k_j, l_s nicht unabhängig ist, gibt es neben Polynomen auch andere Lösungen. Falls $m < n$ ist, bedarf es keiner Einschränkung für $f(x, y)$. Bei $m \geqq n$ aber wird das Problem auf homogene Funktionen $f(x, y)$ zurückgeführt, und unter Anwendung apolarer Polynome findet man $m \leqq 2(n-1)$. Für jeden m-Bereich $n \leqq m \leqq \frac{3}{2}(n-1)$ bzw. $\frac{3}{2}(n-1) < m \leqq 2(n-1)$ ergeben sich verschiedene homogene Polynomtypen bzw. zusätzliche Bedingungen, die im einzelnen beschrieben werden. — Falls $f(x, y)$ eine analytische Funktion zweier komplexer Variablen und eine Lösung des Differenzensystems

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\cdots\Delta_{h_n}[f(x, y)] = 0,\ \Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\cdots\Delta_{k_n}[f(x, y)] = 0,\ \Delta_{l_1}\Delta_{l_2}\cdots\Delta_{l_n}[f(x, y)] = 0$$
$$\Delta_{u_1}\Delta_{u_2}\cdots\Delta_{u_n}[f(x, y)] = 0,\ \Delta_{v_1}\Delta_{v_2}\cdots\Delta_{v_n}[f(x, y)] = 0$$

ist [wobei die komplexen Spannen $\eta = \eta_1 + i\,\eta_2$, $\eta' = \eta_3 + i\,\eta_4$ zu vierdimensionalem $h = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ führen und die h_i, k_j, …, v_s im vierdimensionalen Raum einen von zwei bestimmten Unabhängigkeitsgraden besitzen], so handelt es sich um ein Polynom. Die im Reellen gewonnenen Ergebnisse finden sich modifiziert wieder. *Töpfer* (Köln).

Dufresnoy, Jacques: Sur certains systèmes d'équations différentielles. Bull. Sci. math., II. S. **71**$_{\text{I}}$, 51—62 (1947).

L'A. considera sistemi di p equazioni differenziali ordinarie lineari in n funzioni incognite con $p < n$

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}(x)\, z_j'(x) + b_{ij}(x)\, z_j(x)\} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

per i quali stabilisce tre teoremi, di cui riportiamo il seguente: Si consideri una particolare famiglia di soluzioni del sistema (1), caratterizzate dai loro valori per $x = \alpha$. Se tutte le soluzioni della famiglia verificano per $x = \beta$ $(\alpha < \beta)$ una medesima relazione della forma $\sum_{j=1}^{n} C_j\, z_j(\beta) = 0$, allora esistono n funzioni $c_j(x)$ per le quali è $\sum_{j=1}^{n} c_j(x)\, z_j(x) = 0$ per $\alpha \leqq x \leqq \beta$. — Di tali teoremi l'A. fa applicazione al problema di Mayer per i sistemi di Monge e alla ricerca delle condizioni di integrabilità completa per i sistemi di Pfaff. *S. Cinquini* (Pavia).

Ansoff, H. I. and J. A. Krumhansl: A general stability criterion for linear oscillating systems with constant time lag. Quart. appl. Math. **6**, 337—341 (1948).

In der Schwingungsgleichung mit Verzögerungsglied

$$(1) \qquad J y''(t) + R y'(t) + \chi y(t) = -S y^{(n)}(t - \tau)$$

seien J, R, χ, S, τ gegebene positive Konstante und $n \geqq 0$ ganzzahlig. Mit Hilfe der Laplace-Transformation wird die Stabilitätsfrage auf die Untersuchung der Nullstellen p von

$$(2) \qquad f(p) = -1 \quad \text{mit} \quad f(p) = \frac{S p^n e^{-p\tau}}{J p^2 + R p + \chi}$$

zurückgeführt. Die genaue Bedingung für die Stabilität lautet, daß (2) keine Wurzel p mit positivem Realteil hat. Für $n \geqq 3$ ist das System stets instabil. Für $n = 0, 1, 2$ ist die Stabilität gesondert zu untersuchen, wobei Verff. $|f(i\alpha)| = 1$ betrachten, nach den möglichen Werten von α fragen, im allgemeinen vier kritische α-Werte erhalten und nach der Lage der α eine Reihe verschiedener Fälle unterscheiden. *Collatz* (Hannover).

Levinson, Norman: Criteria for the limit-point case for second order linear differential operators. Časopis Mat. Fysiky, Praha **74**, 17—20 und tschechische Zusammenfassg. 20 (1949).

In der Differentialgleichung (D) $(pu')' + qu = 0$ seien $p'(x)$, $q(x)$ stetig und $p(x) > 0$ für große x. Die Funktion $M(x) > 0$ sei nicht abnehmend, und für alle $x \geqq x_0$ gelte:

$$q(x) < K \cdot M(x), \quad \int^{\infty} (p(x)\, M(x))^{-1/2}\, dx = \infty, \quad \overline{\lim_{x \to \infty}}\, p^{1/2}(x) \cdot M'(x) \cdot M^{-3/2}(x) < \infty.$$

Dann hat (D) höchstens eine unabhängige Lösung $u(x)$, die der Bedingung $\int^{\infty} |u|^2\, dx < \infty$ genügt (Grenzpunktfall). Beweismittel: Schwarzsche Ungleichung und eine Bemerkung von A. Wintner. Das Resultat enthält hinreichende Kriterien von Wintner und Hartmann für das Zutreffen des Grenzpunktfalles. *Wittich* (Karlsruhe).

Babkin, B. N.: Über eine Modifikation der Methode des Akademiemitgliedes S. A. Čaplygin für die angenäherte Integration. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **67**, 213—216 (1949) [Russisch].

Verf. knüpft an eine Arbeit von S. A. Čaplygin [Tr. CAGI, V. 130 (1932)] und eine eigene Arbeit (s. dies. Zbl. **32**, 170) an. Wiederum wird das Anfangswertproblem der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ behandelt. Dabei seien $f(x, y)$ und $\partial f/\partial y$ stetig in einem gewissen, den Punkt $A(x_0, y_0)$ enthaltenden Gebiet. Der Differentialgleichung werden zwei Differentialungleichungen für zwei Funktionen $z(x)$ und $t(x)$ zugeordnet mit $z(x_0) = t(x_0) = y_0$, und es wird eine neue Methode

zur Konstruktion zweier Funktionenfolgen $z_n(x)$ und $t_n(x)$ angegeben, die $y(x)$ von unten bzw. oben approximieren. Die gleichmäßige Konvergenz der Folge der Unter- bzw. Oberfunktionen wird bewiesen. Die angegebene Methode erfordert im Gegensatz zu der von Čaplygin selbst angewandten keine Voraussetzungen über $\partial^2 f/\partial y^2$. *Reutter* (Karlsruhe).

Magenes, Enrico: Problemi di valori al contorno per l'equazione differenziale $y^{(n)} = \lambda f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. **27**, 39—74 (1948).

Es wird das Randwertproblem für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y^{(n)} = \lambda f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

betrachtet, wo λ ein Parameter ist, von dem ein Wert $\bar{\lambda}$ so bestimmt werden soll, daß (1) für $\lambda = \bar{\lambda}$ wenigstens ein Integral besitzt, das Randbedingungen, die ein Polynom vom Grade n bestimmen, erfüllt. — In Kap. I wird ein Existenzsatz für die Gleichung (1) für den Spezialfall aufgestellt, in dem von den $n + 1$ Randbedingungen n sich auf ein und denselben Punkt beziehen, und eine weitere auf einen anderen Punkt. Der Beweis gründet sich auf ein Verfahren, das von Tonelli für Funktionalgleichungen vom Volterraschen Typus eingeführt worden ist [Bull. Calcutta math. Soc. **20**, 31—48 (1928)]. Ein zweiter Existenzsatz für die Gleichung (1) wird im Falle $n = 2$ für ganz allgemeine Randbedingungen aufgestellt, indem das Problem in eine nicht-lineare Integralgleichung transformiert und das Prinzip von Birkhoff-Kellogg-Caccioppoli benutzt wird. — Um den Fall eines beliebigen n und ganz allgemeiner Randbedingungen anzugreifen, stellt Verf. in Kap. II einige Sätze über Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit der Lösungen auf, von denen wir den folgenden anführen: Die Funktion $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ sei in dem Bereich C_∞: $a \leqq x \leqq b$, $|y| < +\infty$, $|y'| < +\infty, \ldots, |y^{(n-1)}| < +\infty$ definiert, $p(x)$ sei eine in (a, b) integrierbare, fast überall positive Funktion von der Eigenschaft, daß $p(x) \leqq f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ in C_∞ gilt. Für jedes Punktepaar $(x, y_1, \ldots, y_1^{(n-1)})$, $(x, y_2, \ldots, y_2^{(n-1)})$ sei die Ungleichung

$$\begin{aligned} |f(x, y_1, \ldots, y_1^{(n-1)}) - f(x, y_2, \ldots, y_2^{(n-1)})| &\leqq \alpha(x)\, \varphi(y_1^{(n-1)} - y_2^{(n-1)}) \\ &+ \varphi_1(y_1^{(n-1)} - y_2^{(n-1)})\, [\omega_0(y_1 - y_2)\, |y_1' - y_2'| + \cdots \\ &+ \omega_{n-2}(y_1^{(n-2)} - y_2^{(n-2)})\, |y_1^{(n-1)} - y_2^{(n-1)}| + \beta(x)] \end{aligned}$$

erfüllt; darin sind $\alpha(x)$, $\beta(x)$ zwei in (a, b) integrierbare, nicht-negative Funktionen; die $\omega_j(u)$ $(j = 0, 1, \ldots, n-2)$ sind in $(-\infty, +\infty)$ definiert, nicht-negativ und in jedem endlichen Intervall integrierbar; $\varphi(u)$ und $\varphi_1(u)$ sind zwei in $0 < u < \infty$ stetige Funktionen mit $\varphi(u) > 0$, $\varphi_1(u) \geqq 0$ und von der Eigenschaft, daß es ein $K > 0$ gibt, für das $\varphi_1(u) \leqq K\, \varphi(u)$ ist, und für $u_0 > \varepsilon > 0$ gilt: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{u_0} \dfrac{du}{\varphi(u)} = +\infty$.

Unter diesen Voraussetzungen gibt es höchstens einen Wert des Parameters λ, dem eine einzige samt $y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)$ absolut stetige Funktion $y(x)$ entspricht, die fast überall Lösung der Gleichung (1) mit den Randbedingungen

$$y(x_i) = y_{i,0}, \quad y'(x_i) = y_{i,1}, \ \ldots, \ y^{(\nu_i - 1)}(x_i) = y_{i,\nu_i - 1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{2}$$

ist; darin sind $x_1, \ldots, x_k$ $k (\leqq n + 1)$ verschiedene, der Reihe nach im Intervall (a, b) gegebene Punkte; $\nu_1, \ldots, \nu_k$ sind k positive, ganze Zahlen mit $\nu_1 + \cdots + \nu_k = n + 1$, und die $y_{i,h}$ $(h = 0, 1, \ldots, \nu_i - 1;\ i = 1, 2, \ldots, k)$ sind $n + 1$ beliebige reelle Zahlen. — In Kap. III gelangt Verf. zu dem folgenden bemerkenswerten Existenz- und Eindeutigkeitssatz (von dem er noch einige Erweiterungen, die auch für Systeme von Differentialgleichungen gelten, angibt): Die Funktion $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ sei im Bereich C_∞ definiert, quasistetig in x und stetig in $(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, und es existieren zwei fast überall positive, integrierbare Funktionen $p(x), q(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$, so daß in C_∞ gilt: $p(x) \leqq f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \leqq q(x)$.

Außerdem genüge $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ Bedingungen, die die Eindeutigkeit der Lösung des Problems (1), (2) sichern. Dann gibt es einen einzigen Wert von λ, dem eine samt ihren Ableitungen bis zur $(n-1)$-ten Ordnung absolut stetige Funktion $y_0(x)$ entspricht, die Lösung des Problems (1), (2) ist. *S. Cinquini.*

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Janet, Maurice: Sur la relation entre „équations canoniques" et „problème de calcul des variations" et sur certains systèmes différentiels du second ordre en involution. Bull. Sci. math., II. S. **71$_{\text{I}}$**, 62—72 (1947).

L'A. considera il sistema di equazioni differenziali canoniche

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ove $H(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n; t)$ è una funzione nota, e studia il caso in cui l'Hessiano costituito dalle derivate parziali del secondo ordine della funzione H rispetto alle variabili y_i è identicamente nullo. *S. Cinquini* (Pavia).

Aronszajn, N.: Recherches sur les fonctions harmoniques dans un carré. J. Math. pur. appl., Paris, IX. S. **27**, 87—175 (1948).

Als Gegenstück zu den in einem Kreisgebiet harmonischen Funktionen untersucht Verf. die in einem quadratischen Gebiet R: $|x| < \pi$, $|y| < \pi$ harmonischen Funktionen. Als einfachste harmonische Funktionen dieser Art bieten sich die folgenden dar:

(1) $\cos mx \cosh my$, $\cos mx \sinh my$, $\sin mx \cosh my$, $\sin mx \sinh my$;

(1′) $\cosh nx \cos ny$, $\cosh nx \sin ny$, $\sinh nx \cos ny$, $\sinh nx \sin ny$.

Ist $z = x + iy$, so besitzen die Funktionen (1) die Periode 2π, die Funktionen (1′) die Periode $2\pi i$. Die Entwicklung einer harmonischen Funktion $h(z)$ nach den Funktionen des Systems (1) bzw. (1′) bedingt eine Zerlegung in eine Summe von zwei harmonischen Funktionen,

(2) $$h(z) = h_1(z) + h_2(z), \qquad z \in R,$$

wobei $h_1(z)$ in dem Horizontalstreifen $|y| < \pi$ die Periode 2π besitzt, $h_2(z)$ in dem Vertikalstreifen $|x| < \pi$ die Periode $2\pi i$. Das Ziel der Arbeit ist, solche Zerlegungen und die aus ihnen folgenden Entwicklungen nach den Funktionen (1) und (1′) zu studieren; es werden dabei Ergebnisse der gemeinsam mit G. H. Hardy verfaßten Abhandlung „Properties of a class of double integrals" [Ann. Math., Princeton, II. S. **46**, 220—241 (1945)] benutzt. — In einem ersten Abschnitt werden die Eigenschaften der einfach- und doppeltperiodischen harmonischen Funktionen beschrieben. Der Nachweis der Möglichkeit einer Zerlegung (2) wird erbracht; dies geschieht über die analytische Funktion $f(z)$, deren Realteil $h(z)$ ist. Auch das Verhalten der Komponenten h_1 und h_2 am Rand von R wird untersucht. Hieran schließen sich Betrachtungen über die harmonischen, auf R summierbaren Funktionen. Unter Benutzung eines Lemmas von Zaremba über die Entwicklung von h in eine Fouriersche Doppelreihe wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Harmonizität von h angegeben. Es folgen Untersuchungen über Funktionen h, deren p-te Potenz auf R summierbar ist. Je nach dem Typ (μ, ν) der Funktion h werden verschiedene Entwicklungen erhalten. Dabei sind die vier Typen (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) zu unterscheiden, je nachdem $h(x + iy)$ eine gerade (ungerade) Funktion in x, eine gerade (ungerade) Funktion in y ist. Es gibt hier Zerlegungen (2) mit beschränkten ersten Ableitungen. Die p-ten Potenzen der h_k sind zwar auf R summierbar, jedoch sind sie im allgemeinen im abgeschlossenen Quadrat nicht stetig, nicht einmal immer beschränkt. Der folgende Abschnitt handelt von den auf R quadratisch summierbaren Funktionen h. Für die Typen (0, 0) und (1,1) kann eine Zerlegung (2) angegeben werden, so daß die h_k selbst wieder quadratisch summierbar

sind. Für den Typus (0, 1) wird an Hand eines Gegenbeispiels gezeigt, daß eine Zerlegung in Funktionen der angegebenen Art nicht immer möglich ist. Es folgen eine Diskussion der Eigenschaften der Fourierkoeffizienten der h_k und Bemerkungen über die Bestimmung der Konstanten der Entwicklungen der h_k nach den Funktionen (1) und (1'). Im letzten Abschnitt werden Ergänzungen und Bemerkungen über die Möglichkeiten der Verallgemeinerung der erhaltenen Ergebnisse mitgeteilt, u. a. Einiges über die Lösung des Dirichletschen Problems bei quadratischem Gebiet. *Quade* (Hannover).

Amerio, Luigi: Sui problemi di Cauchy e di Dirichlet per l'equazione di Laplace in due variabili. Rend. Sem. mat., Torino **8**, 57—70 (1949).

Es bilde die Funktion $z = \varphi(\tau)$ eine Umgebung des Kreises $|\tau| = 1$ der komplexen τ-Ebene umkehrbar eindeutig und konform auf eine gewisse Umgebung der Kurve S: (1) $z = \varphi(\tau)$ ($|\tau| = 1$) der Ebene $z = x + i\,y$ ab. Dann hat dort die Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems für die Gleichung $\Delta u = 0$ mit den Vorgaben $U(\tau) = (u)_S$, $U_n(\tau) = (\partial u/\partial n)_S$ für $|\tau| = 1$ die Gestalt:

$$u(x, y) = \tfrac{1}{2}\{U[g(\bar{z})] + U[f(z)]\} + \tfrac{1}{2}\{\omega[g(\bar{z})] - \omega[f(z)]\}$$

mit

$$\omega(\tau) = i \int U_n(\tau) \sqrt{\varphi'(\tau)\psi'(\tau)}\, d\tau.$$

Hierbei ist (2) $\bar{z} = \psi(\tau)$ und es sind $\tau = f(z)$ und $\tau = g(\bar{z})$ die Umkehrungen von (1) und (2). Um nun hieraus die Lösung des Dirichletschen Problems für das von S umschlossene Gebiet C herzuleiten, ist ω derart zu bestimmen, daß sich $u(x, y)$ harmonisch in ganz C hinein fortsetzen läßt. An den Beispielen der Ellipse und der der Gleichung $z = A\,\tau + \sum_{k=1}^{N} B_k\,\tau^{-k}$ ($|\tau| = 1$) entsprechenden Kurve wird dies (z. T. nur skizziert) dargestellt; die Lösungen ergeben sich explizit in Form unendlicher Reihen. Die gleichen Lösungen kann man, wie am Beispiel der Ellipse gezeigt wird, auch aus den in der üblichen Weise als Potentiale von Doppelbelegungen dargestellten Lösungsformen erhalten. *Maruhn* (Dresden).

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Germay, R.-H.-J.: Sur des fonctions généralisant les noyaux itérés des équations intégrales de Volterra, de seconde espèce. Bull. Soc. Sci. Liége **16**, 268—275 (1947).

In der Volterraschen Integralgleichung für $\psi(x)$:

$$\psi(x) = f_\infty(x) + \lambda \int_{x_0}^{x} K_\infty(x, s)\,\psi(s)\,ds$$

seien f_∞ und K_∞ als Grenzwerte der gleichmäßig konvergenten Folgen der Funktionen $f_k(x)$ ($k = 0, 1, \ldots$; stetig in $x_0 \leqq x \leqq x_0 + h$) und $K_l(x, s)$ ($l = 1, 2, \ldots$; stetig in $x_0 \leqq x \leqq x_0 + h$, $x_0 \leqq s \leqq x$) gegeben. Verf. konstruiert die sukzessiven Näherungen

$$\psi_{n+1}(x) = f_{n+1}(x) + \lambda \int_{x_0}^{x} K_{n+1}(x, s)\,\psi_n(s)\,ds,\ \psi_0(x) = f_0(x) \quad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

und formt sie mit Hilfe von Funktionen um, die als Verallgemeinerung der üblichen iterierten Kerne angesehen werden können. Entsprechende Betrachtungen werden auch für Integralgleichungen für Funktionen zweier Veränderlichen durchgeführt. *Maruhn* (Dresden).

Germay, R.-H.-J.: Sur la résolution des systèmes d'équations intégrales. Bull. Soc. Sci. Liége **17**, 2—5 (1948).

Verf. konstruiert zur Lösung des Systems Volterrascher Integralgleichungen

$$\varphi_k(x) = f_k(x) + \lambda \int_a^x \{K_{k1}(x,s)\,\varphi_1(s) + K_{k2}(x,s)\,\varphi_2(s) + K_{k3}(x,s)\,\varphi_3(s)\}\,ds \quad (k = 1,2,3)$$

die sukzessiven Approximationen $\varphi_k^{(0)}(x) = f_k(x)$,

$$\varphi_1^{(n+1)}(x) = f_1(x) + \lambda \int_a^x \{K_{11}(x,s)\,\varphi_1^{(n)}(s) + K_{12}(x,s)\,\varphi_2^{(n)}(s) + K_{13}(x,s)\,\varphi_3^{(n)}(s)\}\,ds,$$

$$\varphi_2^{(n+1)}(x) = f_2(x) - \lambda \int_a^x \{K_{21}(x,s)\varphi_1^{(n+1)}(s) - K_{22}(x,s)\varphi_2^{(n)}(s) - K_{23}(x,s)\varphi_3^{(n)}(s)\}ds,$$

$$\varphi_3^{(n+1)}(x) = f_3(x) + \lambda \int_a^x \{K_{31}(x,s)\varphi_1^{(n+1)}(s) + K_{32}(x,s)\varphi_2^{(n+1)}(s) + K_{33}(x,s)\varphi_3^{(n)}(s)\}ds,$$

[$K_{kr}(x,s)$ stetig in $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq x$] und zeigt die gleichmäßige Konvergenz für alle λ. *Maruhn* (Dresden).

Charles, Henri: Sur une certaine classe d'équations intégro-différentielles. Bull. Soc. Sci. Liége **16**, 291—295 (1947).

Verf. zeigt, daß die Integro-Differentialgleichung

$$\frac{dy(x)}{dx} = f[x, y(x)] + \int_{x_0}^x K(x,s)\,\Phi[s, y(s)]\,ds$$

[f, Φ stetig in $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$, $y_0 - b \leqq y \leqq y_0 + b$, $K(x,s)$ stetig in $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$, $x_0 \leqq s \leqq x_0 + a$] in dem Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_0 + h$ ($h > 0$, hinreichend klein) mindestens eine Lösung $y(x)$ mit $y(x_0) = y_0$ besitzt. Der Beweis beruht darauf, daß die Funktionen f und Φ in ihrem Definitionsbereich als Grenzwerte gleichmäßig konvergierender Folgen von Polynomen aufgefaßt werden können und daß für solche Polynome der Satz bereits bekannt ist. An einem Beispiel wird ferner gezeigt, daß unter den genannten Voraussetzungen nicht notwendig Unität vorliegen muß. *Maruhn* (Dresden).

Parodi, Maurice: Sur la détermination d'une famille de noyaux réciproques. Bull. Sci. math., II. S. **72**$_1$, 66—68 (1948).

Nella classe dei nuclei $K(x,t)$ le cui trasformate di Laplace sono della forma: $\varrho(p)\,e^{-x\psi(p)}$ con $\Re[\psi(p)] > 0$ e $\psi(p)$ funzione periodica di ordine due, si determinano quei nuclei che sono reciproci: cioè tali che dalla relazione:

$$g(t) = \int_0^\infty K(x,t)\,f(x)\,dx \quad \text{segua:} \quad f(t) = \int_0^\infty K(x,t)\,g(x)\,dx$$

e reciprocamente. *C. Miranda* (Napoli).

Bruwier, L.: Sur l'application du calcul symbolique à la résolution d'équations fonctionnelles. Bull. Soc. Sci. Liége **17**, 230—245 (1948).

Ein System von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten wird bekanntlich durch den symbolischen Kalkül (Laplace-Transformation) auf ein System von linearen algebraischen Gleichungen reduziert. Verf. verallgemeinert dies auf ein System von Funktionalgleichungen der Form

$$\frac{dx_r}{dt} + \sum_{s=1}^n a_{rs}\,x_s(j\,t) = f_r(t) \qquad (r = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

wo $j^m = 1$ ist (m positiv ganz). Dazu muß man das symbolische Abbild von $x_s(j\,t)$ durch das von $x_s(t)$ ausdrücken. Nun besteht für die durch $H(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} h(t)\,dt$, abgekürzt $H(p) \doteqdot h(t)$, geschaffene Korrespondenz bei reellem a bekanntlich der sog. Ähnlichkeitssatz $h(a\,t) \doteqdot \frac{1}{a} H\left(\frac{p}{a}\right)$. Ist $h(t)$ eine ganze Funktion vom Exponentialtyp [also $H(p)$ im Unendlichen holomorph], so gilt dieser Satz auch für

komplexe a. Macht man für die x_s diese Voraussetzung, so entspricht dem System (1) das System

$$p\,X_r(p) + \sum_{s=1}^{n} a_{rs}\,X_s\left(\frac{p}{j}\right) = F_r(p) + p\,x_r(0). \tag{2}$$

Systeme dieser Art löst der Verf. zunächst in verallgemeinerter Form und wendet die Lösung dann auf den obigen Fall an. Sind die $X_r(p)$ bestimmt, so erhält man die x_r in bekannter Weise durch Umkehrung der Laplace-Transformation: $x_r(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{p}\,e^{tp}\,X_r(p)\,dp$, wo C eine Kurve der komplexen Ebene ist, die alle Singularitäten von $X_r(p)$ einschließt. *Doetsch* (Freiburg i. Br.).

Mitra, S. C.: On certain selfreciprocal functions. Bull. Calcutta math. Soc. **41**, 1—5 (1949).

Es werden mehrere Funktionen angegeben, die hinsichtlich der Hankel- bzw. Sinus-Transformation selbstreziprok sind. Die Funktionen sind durch Reihen definiert, die nach Zylinderfunktionen fortschreiten. *Doetsch* (Freiburg i. Br.).

Oswald, Jacques: Sur quelques propriétés des signaux à spectre limité. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 21—22 (1649).

Es handelt sich in vorliegender Arbeit um eine rein mathematische Untersuchung einer Funktion $x(t)$, die quadratisch summierbar ist und deren Fouriersche Zugeordnete $X(f)$ außerhalb eines endlichen Intervalls $(-f_1, f_1)$ verschwindet. Die Funktion läßt sich in eine Reihe nach orthogonalen Funktionen $(\sin(2\pi f_1 t - n\pi))/(2\pi f_1 t - n\pi)$ entwickeln, wobei die Koeffizienten $x_n = x(n/2f_1)$ Funktionen von $n/2f_1$ sind. Es wird auf einige weitere Eigenschaften solcher Funktionen hingewiesen, insbesondere, daß sich die „charakteristischen Größen" von $x(t)$ durch die Koeffizienten x_n ausdrücken lassen und daß auch alle Transformationen des $x(t)$ mit Hilfe der x_n untersucht werden können, wie näher ausgeführt wird. Anschließend werden einige Beispiele von Operatoren gebracht, u. zw. der Translations-Operator sowie der Ableitungsoperator d/dt. Es folgt ein kurzer Hinweis auf eine physikalische Anwendung: Einem verlustfreien Filter, dessen Durchlässigkeitsbereich größer oder gleich f_1 ist und das irgendwelche Phasenänderungen bewirkt, entsprechen die Einheitsoperatoren. Einem verlustfreien Filter, dessen Durchlässigkeit außerhalb des Intervalls $(0, f_1)$ liegt, entspricht ein Hermitescher Operator. *Picht.*

Babenko, K. I.: Über konjugierte Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **62**, 157—160 (1948) [Russisch].

Die Note enthält zunächst das Theorem I: Sei $f(x)$ L-integrierbar in $(-\pi, \pi)$ und periodisch mit der Periode 2π, sowie

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\,|x|^\alpha\,dx < \infty \qquad (p > 1; -1 < \alpha < p-1). \tag{1}$$

Dann gilt

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f}(x)|^p\,|x|^\alpha\,dx\right\}^{1/p} \leq A\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\,|x|^\alpha\,dx\right\}^{1/p}, \tag{2}$$

wobei A nur von p und α abhängt. $\bar{f}(x)$ ist die Konjugierte zu $f(x)$. Für $\alpha = 0$ ist dies ein bekannter Satz von M. Riesz [Sur les fonctions conjugées, Math. Z. **27**, 218—244 (1927)]. Für $\alpha = -1$ vgl. Hardy-Littlewood (dies. Zbl. **14**, 214). I wird auf ein unendliches Intervall ausgedehnt, wobei an Stelle von $f(x)$ die Transformierte $g(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t}\,dt$ tritt. Genauer gilt Theorem II:

$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^p\,|x|^\alpha\,dx\right\}^{1/p} < C\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\,|x|^\alpha\,dx\right\}^{1/p} \left(C = \frac{A_p}{p-\alpha-1}\right)$$

unter Voraussetzung des Analogons zu (1). A_p hängt nur von p ab. Der Beweis wird für $0 \leqq \alpha < p-1$ angedeutet unter Verwendung des entsprechenden Rieszschen Ergebnisses für $\alpha = 0$. Soviel Ref. sieht, impliziert dies $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ als Zusatzvoraussetzung. Verf. führt weiter an, daß durch geeignete Beispiele gezeigt werden kann, daß C für $\alpha \to -1$ oder $\alpha \to p-1$ beliebig groß werden kann. — Sei $F(x) = \sup\limits_{0<|t|\leqq\pi} \frac{1}{t} \int\limits_x^{x+t} |f(u)|\,du$. Dann wird ohne Beweis Theorem III formuliert: Aus (1) folgt

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |F(x)|^p\,|x|^\alpha\,dx\right\}^{1/p} \leqq B\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\,|x|^\alpha\,dx\right\}^{1/p}, \tag{3}$$

B nur von p und α abhängig. — Mittels eines Lemmas von Hardy-Littlewood [A maximal theorem with function-theoretic applications, Acta math., Uppsala **54**, 81—116 (1930)] folgt aus (3) die zu (2) analoge Ungleichung mit $\bar{F}(x)$ statt $\bar{f}(x)$, $\bar{F}(x) = \sup\limits_{0<h\leqq\pi} -\frac{1}{\pi}\int\limits_h^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg} t/2}\,dt$, wie ohne Beweis festgestellt wird. — Schließlich beantwortet Verf. eine Fragestellung von N. Bary, ob jede Grundmenge des Hilbertschen Raumes vom Rieszschen Typus ist [vgl. N. Bary, Sur les bases dans l'espace de Hilbert, Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **54** (1946)], gestützt auf (2), negativ. Zum Schluß wird das Theorem IV ausgesprochen: $F(x)$ sei die Fourier-Transformierte von $f(x)$, $|f(x)|^p x^{p-2} \in L(-\infty, \infty)$, $p \geqq 2$, $f(x,a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} F(t)e^{-ixt}\,dt$. Dann ist $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)-f(x,a)|^p\,|x|^{p-2}\,dx = o(1)$, $a \to \infty$. *Schmetterer* (Wien).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Kaplansky, Irving: Normed algebras. Duke Math. J. **16**, 399—418 (1949).

L'A. utilise la terminologie et les résultats bien connus de Gelfand, Raïkov et Segal pour démontrer les propriétés suivantes des *-algèbres. Dans ce qui suit, A est une *-algèbre [i. e. une algèbre de Banach, munie d'un antiautomorphisme involutif $x \to x^*$ tel que $(\lambda x)^* = \lambda x^*$ si $\lambda \in R$]. A est dite symétrique (resp. c-symétrique) si tout xx^* a un quasi-inverse (resp. si toute sous-algèbre commutative, self-adjointe et fermée de A est symétrique). Toute *-algèbre symétrique est c-symétrique. Si A est complexe et si $||xx^*|| \geq k\,||x|| \cdot ||x^*||$, ou bien si A est réelle et si $||xx^* + yy^*|| \geq ||x||^2$, A est c-symétrique. Si A est c-symétrique et si tout idéal à gauche régulier maximal est l'annulateur d'un idéal à droite minimal, A est symétrique. Une b^*-algèbre (resp. c^*-algèbre) est une algèbre c-symétrique (resp. symétrique) A telle que $||xx^*|| = ||x||^2$ pour tout $x \in A$. L'algèbre obtenue en ajoutant une unité à une c^*-algèbre est symètrique. Soit A une b^*-algèbre; si φ est un *-isomorphisme de A sur une sous-algèbre partout dense d'une b^*-algèbre B, φ est une isométrie de A sur B; si T est la sous-algèbre de A engendrée par un élément self-adjoint, et si I est un idéal fermé de A, l'homomorphisme canonique de $T/(T \cap I)$ dans A/I est une isométrie. Une c^*-algèbre est isomorphe à une sous-algèbre fermée et self-adjointe de l'algèbre des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert complexe. Si A est une b^*-algèbre (resp. c^*-algèbre), un idéal fermé I de A est self-adjoint et A/I est une b^*-algèbre (resp. une c^*-algèbre). Si une b^*-algèbre possède un idéal à droite minimal, c'est une c^*-algèbre. Si (A_ι) est une famille de b^*-algèbres, la sous-algèbre A de ΠA_ι, formée des (x_ι) tels que $||x_\iota|| < +\infty$ et normée par $||(x_\iota)|| = \sup ||x_\iota||$ est appelée le b^*-produit des A_ι; la sous-algèbre A' de A formeé par les (x_ι) tels que $||x_\iota|| \leq \varepsilon$ pour tout ι sauf un nombre fini, est appelée la b^*-somme des A_ι; A et A' sont des b^*-algèbres. Si $P(A)$ est l'espace obtenu en munissant l'ensemble des idéaux primitifs de A de la topologie de Stone,

pour que $P(A)$ (A étant une b^*-algèbre) soit discret, il faut et il suffit que A soit b^*-somme de b^*-algèbres simples. Il en résulte que, si A est une b^*-algèbre complètement continue (i. e. telle que $x \to yx$ et $x \to xy$ soient des opérateurs complètement continus), A est b^*-somme d'algèbres de dimensions finies et réciproquement; si A est une b^*-algèbre duale (cf. I. Kaplansky, ce Zbl. **31**, 344), A est b^*-somme d'une famille d'algèbres des opérateurs complètement continus d'espaces de Hilbert sur les réels, les complexes ou les quaternions, et réciproquement. Une b^*-algèbre A est dite centrale si quels que soient les idéaux primitifs P et Q de A $P \cap Z = Q \cap Z$ entraine $P = Q$ (Z centre de A). Si A est une b^*-algèbre centrale, $P(A) = P(Z)$ est localement compact, et compact dans le seul cas où A possède une unité. Soit A une b^*-algèbre centrale satisfaisant à une identité polynomiale; il existe une b^*-algèbre simple de dimension finie M, un espace localement compact E et une représentation $g \to u_g$ du groupe G des $*$-automorphismes de M dans le groupe des homéomorphismes de E tels que A soit isomorphe à l'algèbre des applications continues f de E dans M nulles à l'∞, satisfaisant à $f(u_g(x)) = g(f(x))$ ($x \in E$ et $g \in G$). L'A. indique qu'on peut étudier à partir de ces résultats toutes les c^*-algèbres satisfaisant à une identité polynomiale. Ce travail est complété par des exemples et une bibliographie. *J. Braconnier* (Lyon).

Cartan, Henri et Roger Godement: Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts. Ann. sci. École norm. sup., III. S. **64**, 79—99 (1947).

Es wird eine Darstellung der harmonischen Analyse auf beliebigen lokalkompakten Abelschen Gruppen G gegeben. L^1 sei der Raum der bezüglich des Haarschen Maßes auf G summierbaren Funktionen mit der Norm $||f||_1 = \int |f(x)|dx$, L^∞ der Raum der auf G beschränkten und auf jeder kompakten Teilmenge summierbaren Funktionen mit $||f||_\infty = \sup_{x \in G} |f(x)|$. L^∞ ist zu L^1 dual: $\varphi \in L^\infty$ erklärt die Linearfunktion $(f, \varphi) = \int f(x)\,\overline{\varphi(x)}\,dx$ auf L^1. Zuerst werden die Hauptsätze der Gelfand-Raikovschen Theorie der Funktionen von positivem Typus auf G dargestellt, gleich für nichtabelsche Gruppen; im Abelschen Fall ergibt sich daraus, daß jede konvexe, im Sinn der schwachen Topologie von L^∞ abgeschlossene Teilmenge von L^∞, die 0 und alle Charaktere von G enthält, mit der Menge P_0 aller Funktionen φ von positivem Typus und $\varphi(e) \leqq 1$ (e die Einheit von G) übereinstimmt. $\hat{G}$ sei die Gruppe der Charaktere von G, $(x, \hat{x})$ der Wert des Charakters $\hat{x}$ auf $x \in G$. Jedem $f \in L^1$ wird die Fouriertransformierte $\hat{f}(\hat{x}) = \int \overline{(x, \hat{x})}\, f(x)\,dx$ zugeordnet. Diese Fouriertransformierten bilden auf dem durch Hinzunahme der 0 zu einem kompakten Raum G' ergänzten $\hat{G}$ einen Ring von stetigen Funktionen, die alle für $\hat{x} = 0$ verschwinden. Es wird der Satz von Bochner bewiesen, daß die Funktionen von P_0 die Fouriertransformierten der positiven Maße von der Gesamtmasse $\leqq 1$ auf $\hat{G}$ sind. V sei die Menge der komplexen Linearkombinationen von Funktionen von positivem Typus auf G, $V^1 = V \cap L^1$, $V^2 = V \cap L^2$; auf $\hat{G}$ heißt es entsprechend $\hat{V}^1$, $\hat{V}^2$. Auf $\hat{G}$ läßt sich der willkürliche Faktor des Haarschen Maßes $d\hat{x}$ so wählen, daß sich aus der Fouriertransformierten $\hat{f}(\hat{x}) = \int \overline{(x, \hat{x})}\, f(x)\,dx$ eines $f \in V^1$ umgekehrt $f(x)$ zurückgewinnen läßt als $f(x) = \int (x, \hat{x})\, \hat{f}(\hat{x})\,d\hat{x}$ (Fouriersches Umkehrtheorem). Die Fouriertransformierte von $f \in V^1$ gehört zu $\hat{V}^1$. Diese Zuordnung läßt sich zu einer Isomorphie von V^2 auf $\hat{V}^2$ fortsetzen (Satz von Plancherel). In einfacher Weise ergeben sich schließlich daraus die Sätze der Pontrjagin-van Kampenschen Dualitätstheorie der lokalkompakten Abelschen Gruppen, z. B. daß $\hat{\hat{G}}$ isomorph zu G ist. *G. Köthe* (Mainz).

Motchane, Léon: Sur la représentation paramétrique des ensembles de vecteurs dans l'espace de Hilbert. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 353—355 (1949).

Pour donner un critère de convergence d'une suite de vecteurs d'un espace d'Hilbert, qui soit adapté à la topologie faible et à la topologie forte, l'A. introduit la notion de fonction représentative d'un ensemble de vecteurs. Soit (X^n) une suite de vecteurs, (c_i^n) les coordonnées de X^n par rapport à un système orthonormé complet (e_i); soit $(x_i(t))$ une suite de fonctions continues définies dans un intervalle $[a, b]$ telles que, t_n étant une suite croissante dans $[a, b]$, on ait: $x_i(t_n) = c_i^n$ pour $i = 1, 2, \ldots$, $x_i(t)$ monotone pour $t_n < t < t_{n+1}$, $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i(t)|^2$ convergente pour $t_1 \leq t < t_0 = \sup t_n$. La fonction représentative de (X^n) est $X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(t)\, e_i$. Si, pour une suite partielle (t_{n_p}), $X(t_{n_p})$ converge faiblement $\left[\text{vers } X^0 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(t_0)\, e_i\right]$ quand $t_{n_p} \to t_0$, on dira que (X^n) „converge faiblement au sens de Hilbert" vers X^0. La convergence faible habituelle correspond au cas où cette condition est vérifiée pour toute suite partielle. La convergence est forte ou faible suivant que $X(t)$ est continue ou discontinue en t_0. L'oscillation de $X(t)$ permet de retrouver les quatre cas de convergence (forte ou faible) signalés par G. Julia. Plus généralement, l'A. considère une fonction représentative d'un ensemble de vecteurs, $X(T) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(T)\, e_i$, où $T = (t_1, \ldots, t_k)$ est le point générique d'un domaine $D \subset R^k$ et $x_i(T)$ est une fonction continue séparément par rapport à chacun des $t_1, \ldots, t_k$. En utilisant les résultats de sa note „Sur la répartition des points de continuité ..." [C. r. Acad. Sci., Paris **199**, 17—18 (1934); ce Zbl. **9**, 245], il déduit, de la convergence de $\sum |x_i(T)|^2$, quelques propriétés de l'ensemble des points de convergence forte. *A. Pereira Gomes* (Paris).

Plans y Sanz de Bremond, Antonio: Lineare Operatoren im Hilbertschen Raum und ihr Spektrum. Rev. Acad. Ci. exact. fisic. natur. Madrid **42**, 309—392 (1949) [Spanisch].

Dans la suite de deux articles „Espacio de Hilbert de n dimensiones" et „Espacio de Hilbert", parus dans la même revue [Rev. Acad. Ci. exact. fisic. natur. Madrid **40** (1946) et ce Zbl. **30**, 130], l'A. fait un exposé de notions et résultats fondamentaux concernant les opérateurs linéaires de l'espace de Hilbert séparable et leur spectre, en suivant de près soit le livre de B. v. Sz.-Nagy „Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes", Berlin 1942; ce Zbl. **27**, 227 (de p. 13 à 27 pour le premier et les deux derniers paragraphs), soit le livre de G. Julia „Introduction mathématique aux théories quantiques" Paris 1936; ce Zbl. **14**, 335 (pour le second paragraph), soit encore celui de M. H. Stone „Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis" New York 1932; ce Zbl. **5**, 400 (de p. 128 à 150, pour le troisième paragraph). L'article termine avec une analyse détaillée de la classification du spectre des opérateurs normaux et hilbertiens. *A. Pereira Gomes* (Paris).

Haefeli, Hans Georg und Franco Pellegrino: Die Reihe von Fantappiè und die Stetigkeit der analytischen nicht linearen Funktionale. Comment. math. Helvetici **23**, 153—173 (1949).

In questa Memoria gli autori proseguono le proprie ricerche (questo Zbl. **30**, 34) sui funzionali analitici secondo Fantappiè e pervengono al seguente notevole risultato: — Ogni funzionale analitico F non lineare che sia limitato in un intorno (A, σ) di una funzione $y_0(t)$ è continuo in $y_0(t)$. — La dimostrazione di questa proposizione è basata sullo sviluppo del funzionale F in serie di Fantappiè, nonchè su altre proprietà stabilite nel lavoro in questione. Tra queste citiamo la seguente estensione ai funzionali analitici del noto teorema di Liouville per le funzioni trascendenti intere: Ogni funzionale analitico trascendente intero che sia limitato in tutto il suo campo di esistenza si riduce a una costante. *S. Cinquini* (Pavia).

Praktische Analysis:

Lohman, John B.: An iterative method for finding the smallest eigenvalue of a matrix. Quart. appl. Math. **7**, 234 (1949).

Ist a ein Näherungswert für die dem Betrage nach kleinste charakteristische Zahl der Matrix A, so wendet Verf. das übliche Iterationsverfahren (Bilden der Vektoren v, Bv, B^2v, ... mit einem willkürlich gewählten Vektor v) an auf die Matrix $B = (A - a\,E)^{-1}$ oder $(A - a\,E)^{-1} - b\,E$ mit E als Einheitsmatrix und b als einer geeignet gewählten Zahl, derart, daß bei B die größte charakteristische Zahl möglichst stark überwiegt. *Collatz* (Hannover).

Herzberger, M.: The normal equations of the method of least squares and their solution. Quart. appl. Math. **7**, 217—223 (1949).

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems wird nach Erwähnung einiger bekannter Verfahren die Methode nach Schur, Banachiewicz und Dwyer, bei der im wesentlichen die Koeffizientenmatrix als Produkt zweier Dreiecksmatrizen dargestellt wird, einheitlich mit Vektoren beschrieben und die Vektorenvorstellung zur geometrischen Deutung der Operationen herangezogen. Für die numerische Rechnung empfiehlt Verf., die aus den Spalten der Koeffizientenmatrix gebildeten Vektoren erst in Einheitsvektoren überzuführen, um nach Möglichkeit Genauigkeitsverluste zu vermeiden. *Collatz* (Hannover).

Hartree, D. R.: Notes on iterative processes. Proc. Cambridge philos. Soc. **45**, 230—236 (1949).

Eine Gleichung $y = f(y)$ mit einer Lösung Y soll durch ein Iterationsverfahren gelöst werden, wobei y eine Zahl, einen Vektor oder eine Matrix bedeuten kann. Ist η_n der Fehler des Resultates nach n-maliger Wiederholung des Verfahrens, so nennt der Verf. ein Iterationsverfahren von k-ter Ordnung, wenn für η_{n+1} gilt: $\eta_{n+1} = a_1\,\eta_n + a_2\,\eta_n^2 + a_3\,\eta_n^3 + \cdots$, wobei $a_\lambda = f^{(\lambda)}(Y)/\lambda!$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ und $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k-1} = 0$, $a_k \neq 0$. Es wird gezeigt, daß, wenn für eine gegebene Gleichung ein Iterationsverfahren $(k+1)$-ter Ordnung existiert, es mehr als ein Verfahren k-ter Ordnung gibt; und umgekehrt ist es allgemein möglich, aus 2 verschiedenen Verfahren k-ter Ordnung $f_I(y)$ und $f_{II}(y)$ ein solches $(k+1)$-ter Ordnung $f_{III} = \varrho\,f_I + (1-\varrho)\,f_{II}$ bei geeignet gewähltem ϱ abzuleiten. — Als Beispiel wird unter anderem für das bekannte Newtonsche Verfahren (hier als Newton-Raphsonsches Verfahren bezeichnet) $y_{n+1} = y_n - \Phi(y_n)/\Phi'(y_n)$ gezeigt, daß es von 2. Ordnung ist. Für die Gleichung $z = a^{1/p}$ mit positiv oder negativ ganzzahligem p werden Formeln für Verfahren 2. und 3. Ordnung hergeleitet. — An einem Beispiel wird auch für eine Differentialgleichung 3. Ordnung mit Randbedingungen ein Iterationsverfahren behandelt. — Die Untersuchung und Herleitung geeigneter Iterationsverfahren, speziell auch für Differential- und Integralgleichungen, wird besonders im Hinblick auf große automatische Rechenanlagen wie die ENIAC hervorgehoben und als dringende Aufgabe gefordert. *R. Ludwig* (Braunschweig).

Domb, C.: On iterative solutions of algebraic equations. Proc. Cambridge philos. Soc. **45**, 237—240 (1949).

Der Verf. setzt die Ausführungen von Hartree über Iterations-Verfahren fort (s. vorsteh. Referat) und wendet sie auf algebraische Gleichungen der Form $\Phi(y) = \Psi(y)$ an, wobei $\Phi(y)$ und $\Psi(y)$ Polynome sind. Das Iterationsverfahren soll die Form $y_{n+1} = g(y_n)/h(y_n)$ haben, wobei $g(y)$ und $h(y)$ ebenfalls Polynome sind. Indem man das konstante Glied auf die rechte Seite der Gleichung bringt, kann man $\Phi(y)$ durch y teilbar voraussetzen, also $\Phi(y) = y\,\chi(y)$, und erhält, wenn $p(y)$ ein willkürlich wählbares Polynom und

$$q(y) = p'(y)\,[y\,\chi(y) - \Psi(y)] + p(y)\,[y\,\chi'(y) - \Psi'(y)]$$

ist, die beiden Polynome

$$h(y) = p(y)\,\chi(y) + q(y), \quad g(y) = p(y)\,\Psi(y) + y\,q(y).$$

Als Beispiel ergibt sich für die Bestimmung der Quadratwurzel $y^2 = a$ bei der Wahl von $p(y) = 1$ das Newtonsche Verfahren $y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + a/y_n)$ als Iterationsverfahren 2. Ordnung und bei der Wahl von $p(y) = y$ eine auch von Hartree angegebene Formel $y_{n+1} = 2y_n^3/(3y_n^2 - a)$. In einem anderen Beispiel für die reduzierte kubische Gleichung ergibt sich mit $p(y) = 1$ wieder das Newtonsche Verfahren. Auch für nichtalgebraische Gleichungen wie $y = e^{\lambda y}$ lassen sich Iterationsformeln nach derselben Methode herleiten. — Eine weitere Methode liefert Iterationsverfahren von beliebiger Ordnung. In einem Zahlenbeispiel für die reduzierte kubische Gleichung wird gezeigt, daß bereits y_3 auf 15 Dezimalen richtig ist.
R. Ludwig (Braunschweig).

Sponder, Erich: Ein Näherungsverfahren zur Lösung algebraischer Gleichungen 4. Grades. Elemente Math., Basel **4**, 116—117 (1949).

Ein Polynom vierten Grades mit reellen Koeffizienten a_ν wird in ein Produkt zweier quadratischer Polynome zerlegt, wo bei der Zerlegung ein Koeffizient P geschätzt wird, die übrigen Koeffizienten der Zerlegung sich aus P und den a_ν berechnen lassen und dann P so zu variieren ist, daß die Zerlegung stimmt.
Collatz (Hannover).

Thomas, Joseph Miller: Nomographic disjunction. Duke math. J. **16**, 419—432 (1949).

Die Bedingung, unter welcher eine Funktion $F(x, y, z)$ sich in die bekannte Massausche Determinantenform bringen und durch eine Fluchtentafel darstellen läßt, wird eingehend untersucht. Das geschieht in Vervollständigung und Erweiterung der Duporcqschen Untersuchungen, wobei Differentiationen vermieden werden. Die Anwendung der erzielten, für die Nomographie bemerkenswerten, Ergebnisse bleiben einer späteren Veröffentlichung vorbehalten. *Nyström* (Helsinki).

Greenwood, Robert E. and Masil B. Danford: Numerical integration with a weight function x. J. Math. Physics, Massachusetts **28**, 99—106 (1949).

Eine Approximation $\int_0^1 x f(x)\,dx \approx \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i,n})$ erweist sich anwendbar für $n = 1, 2, 3$ aber nicht für $n = 4, \ldots, 10$. Dagegen gibt es mehrere Approximationen der Form

$$\int_{-1}^{+1} x f(x)\,dx \approx k_m \sum_{i=1}^{m} [f(x_{im}) - f(-x_{im})],$$

die für $m = 2, 3, 4$ angeführt werden. Diese Formeln können etwa bei der Berechnung von Momenten empirischer Verteilungsfunktionen mit Vorteil angewandt werden. *Nyström* (Helsinki).

Hartley, H. O.: Tests of significance in harmonic analysis. Biometrika, Cambridge **36**, 194—201 (1949).

In der Periodogrammanalyse ist es üblich, die Realitätskriterien für verborgene Periodizitäten aus der a priori-Hypothese abzuleiten, daß die Glieder der zu untersuchenden Reihe um ihren Mittelwert nach den Gesetzen des Zufalls streuen. In der Praxis wird man es vielfach mit Problemen zu tun haben, in denen man a priori bereits mit systematischen Bestandteilen des vorgelegten Untersuchungsmaterials zu rechnen hat. Das Niveau, an dem die Bedeutung (significance) der Periodogrammintensitäten abzuschätzen ist, wird dann nicht durch den Mittelwert aller Intensitäten gebildet, sondern durch die Reststreuung, die nach Aussonderung der systematischen Bestandteile (etwa derjenigen harmonischen Ordinaten, die schon bekannten Periodizitäten angehören) übrig bleibt. Die Theorie stützt sich auf frühere Arbeiten des Verf. und anderer Autoren, die in einem Literaturverzeichnis zusammengestellt werden. Ein einfaches Beispiel aus der Meteorlogie erläutert die Anwendung. *Stumpff.*