Werk

Titel: Algebra und Zahlentheorie

Jahr: 1949

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0031|log31

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

der ersteren voraus hat, indem die Zahl kein langweilig reelles Ding, sondern lediglich ein Name ist, sauber konventionell definiert. Der Begriff der Einheit wird nicht vorausgesetzt und so die psychologische Schwierigkeit der Einführung von Brüchen vermieden. Die Addition wird durch Abbildung auf die als gegeben angesehene Reihe der natürlichen Zahlen eingeführt, ihre Kommutativität unter Berufung darauf bewiesen, daß Abzählen von links nach rechts und umgekehrt dasselbe Ergebnis liefern. — Bei 15jährigen Schülern soll ein streng logischer Aufbau von Arithmetik und Algebra bis einschließlich Wurzelziehen auf der Grundlage der gegebenen Zahlenreihe in etwa 60 Stunden erfolgen. *H. Härlen* (München).

Loria, Gino: Osservazioni e documenti relativi al fenomeno della scoperta scientifica. Boll. Un. mat. Ital., III. s. **2**, 35—45 (1947).

Verf. fragt nach den Umständen und Bedingungen, unter denen sich die wissenschaftliche Forschung und Entdeckung vollzieht. Er weist auf die Schwierigkeiten des Problems hin, die vor allem darin bestehen, daß geniale Menschen vieles wissen, ohne es studiert zu haben, während wir glauben, daß sie es ebenso gelernt haben müssen, wie wir. Das Problem ist wichtig für Psychologen und Physiologen; aber auch für den Wissenschaftshistoriker bietet es großes Interesse. Nur unter letzterem Gesichtspunkt wird es in der vorliegenden Arbeit behandelt. Verf. erörtert aus reicher Erfahrung und mit kritischer Behutsamkeit eine Reihe von Möglichkeiten, Einblick in die Wege zu bekommen, auf denen sich neue Wahrheiten entwickeln. Insbesondere weist er auf die Auswertung der zeitgenössischen Biographien, der Autographien, der Briefe und sonstigen Erklärungen großer Männer hin, wobei er aufschlußreiche Äußerungen von H. v. Helmholtz, H. Poincaré, C. F. Gauss und Joh. Kepler zitiert. Er enthüllt auf diese Weise einige charakteristische psychologische Vorgänge, die große Entdeckungen auf den Gebieten der Mathematik und der Physik auslösten oder erleichterten. In diesem Zusammenhang hätte auch auf einen Brief W. R Hamiltons an seinen Sohn (5. August 1865) hingewiesen werden können, in dem er den Augenblick beschreibt, der in ihm den Grundgedanken der Quaternionentheorie aufblitzen ließ (vgl. R. P. Graves, Life of Sir William Rowan Hamilton, Bd. II, S. 434, Dublin 1885). Schließlich macht Verf. noch einige Bemerkungen über den physischen Zustand, in dem sich die Männer befanden, die das wissenschaftliche Gedankengut der Menschheit erweiterten und vertieften. Er ist natürlich nicht der Ansicht, das verwickelte Problem erschöpfend behandeln zu können. Deshalb wünscht er, daß andere Forscher noch weitere Dokumente über die Geistesarbeit genialer Menschen sammeln, weil der erste Schritt zur Lösung eines Problems getan sei, wenn man es klar formuliert habe. *E. Loffler* (Stuttgart).

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra. Polynome:

Grascher, P.: Differentiation verallgemeinerter Matrizen. Jber. Realgymn. Judenburg, Graz **1947**, 3—11 (1947).

Unter teilweiser Beziehung auf seine nicht veröffentlichte Dissertation „Multiplikation verallgemeinerter Matrizen" entwickelt Verf. einige Sätze, wie man verallgemeinerte Matrizen $(a_{i_1 i_2 \ldots i_n})$ mit $1 \leqq i_j \leqq m_j$ entweder nach darin vorkommenden Parametern differenziert oder komplizierteren Differentialoperationen, Verallgemeinerungen des Nablaoperators, unterwerfen kann, wobei sich herausstellt, daß die Differentialoperatoren der Vektoranalysis spezielle Fälle darstellen. *Holzer* (Graz).

Blij, F. van der: Eine Parameterdarstellung für orthogonale Matrizen. Simon Stevin, wis. natuurk. Tijdschr. **26**, 74—80 (1948/49) [Holländisch].

Verf. geht aus von der Cayleyschen Parameterdarstellung für orthogonale, der Bedingung $|A+E| \neq 0$ genügende Matrizen A eines beliebigen Grades n, die er in der folgenden Form schreibt:

$$A = -E + 2d\,\frac{\overline{B+dE}}{|B+dE|} \tag{1}$$

(B = schiefsymmetrische, $\overline{B+dE}$ = adjungierte Matrix von $B+dE$). Im zweiten Term der rechten Seite von (1) entwickelt er Zähler und Nenner nach Potenzen des Parameters d und macht dann mit Unterscheidung der Fälle $n \equiv 0(2)$ bzw.

$n \equiv 0(2)$ unter gewissen Zusatzvoraussetzungen über das gleichzeitige Verhalten der Elemente von B den Grenzübergang $d \to 0$. Er gewinnt so neue Parameterdarstellungen für Scharen von orthogonalen Matrizen, unter denen auch Matrizen A mit $|A+E| = 0$ auftreten. Angeregt ist die Untersuchung durch eine Arbeit von van der Woude [Proc. Akad. Wet. Amsterdam **49**, 866—877 (1946)]. *Krull.*

Arf, Cahit: Sur la définition des déterminants. Univ. Istanbul, Fac. Sci. Rec. Mém. commém. la Pose de la première Pierre des nouv. Inst. 9—20 (1948).

Verf. gibt eine rekursive Definition der Determinante, so daß die Cramersche Formel für die Lösung des linearen Gleichungssystems von n Gleichungen mit n Unbekannten unmittelbar aus der Definition folgt. Er leitet sodann aus dieser Definition die üblichen Determinanteneigenschaften ab, wobei z. B. der Satz, daß eine schiefsymmetrische Determinante gerader Ordnung das Quadrat eines Polynoms in den Elementen ist, fast ohne Rechnung folgt. *Holzer* (Graz).

Erim, Kerim: Ein algebraisches Theorem. Univ. Istanbul, Fac. Sci. Rec. Mém. commém. la Pose de la première Pierre des nouv. Inst. 32—38 (1949).

Verf. beweist den bekannten Satz von Pellet: Das Polynom $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k}$ hat im Einheitskreise k Nullstellen, wenn $2|a_k| > \sum |a_k|$ ist. Die Transformation $\zeta = i\frac{1-z}{1+z}$ bildet den Einheitskreis auf die obere Halbebene ab. Durch Anwendung des Pelletschen Satzes ergibt sich ein Kriterium dafür, daß $f(z)$ in der oberen Halbebene k Nullstellen besitzt. Im Falle $n = 3$ gibt Verf. eine geometrische Interpretation. *Gy. Sz.-Nagy* (Szeged).

San Juan Lloså, Ricardo: Darstellung einiger klassischer Sätze der Galoisschen Theorie. Rev. Acad. Ci. exact fisic. natur. Madrid **42**, 71—78 (1948) [Spanisch].

Neuer, einfacher Beweis der bekannten Sätze über irreduzible, metazyklische Gleichungen von Primzahlgrad im Geiste der klassischen Gleichungs- (nicht der modernen Körper-)Algebra. *Krull* (Bonn).

Gruppentheorie:

Piccard, Sophie: Deux propositions de la théorie des groupes de substitutions. Ann. Soc. Polonaise Math. **21**, 135—146 (1948).

Es sei $\mathfrak{S}_n$ [$\mathfrak{A}_n$] die symmetrische (alternierende) Gruppe der Ziffern $\{1, 2, \ldots, n\}$. G sei eine transitive Gruppe von Permutationen der Ziffern $\{1, 2, \ldots, m\}$ mit $m \geq 2$, $m < n$; es werden Bedingungen gesucht, unter denen eine Substitution S aus $\mathfrak{S}_n$ zusammen mit allen Substitutionen aus G die Gruppe $\mathfrak{S}_n$ [$\mathfrak{A}_n$] erzeugt. S muß alle Ziffern aus $\{m+1, \ldots, n\}$ bewegen. S heißt mit G verbunden, wenn jeder Zyklus von S wenigstens je eine Ziffer aus $\{1, 2, \ldots, m\}$ und $\{m+2, \ldots, n\}$ enthält. S heißt primitiv mit G, wenn die durch S mit G erzeugte Gruppe primitiv ist. — Ist nun speziell G die symmetrische Gruppe der Ziffern $\{1, 2, \ldots, m\}$ $(m \geq 2)$ und S verbunden und primitiv mit G, dann erzeugt S mit allen Substitutionen aus G die $\mathfrak{S}_n$ $(n \geq m)$: Ist dagegen G nur die alternierende Gruppe der Ziffern $\{1, 2, \ldots, m\}$ $(m \geq 3)$, so wird durch S zusammen mit G die $\mathfrak{S}_n$ bzw. $\mathfrak{A}_n$ erzeugt, je nachdem S ungerade oder gerade ist. *Wever* (Göttingen).

Baer, Reinhold: Finiteness properties of groups. Duke math. J. **15**, 1021—1032 (1948).

Jede endliche Gruppe G hat die drei Eigenschaften: (FC) Jedes Element besitzt nur eine endliche Anzahl von Konjugierten in G. (LF) Jedes Element von G ist in einem endlichen Normalteiler von G enthalten. (FO) Es gibt nur eine endliche Anzahl von Elementen vorgegebener Ordnung in G. Aber es gibt Gruppen unendlicher Ordnung, die ebenfalls diese drei Eigenschaften besitzen. Verf. untersucht die Beziehungen der genannten drei Eigenschaften zueinander und charakterisiert diejenigen Gruppen, welche sie besitzen. (LF)-Gruppen und (FO)-Gruppen sind

(FC)-Gruppen ohne Elemente der Ordnung 0 (unendliche Ordnung). Es zeigt sich, daß G eine (LF)-Gruppe dann und nur dann ist, wenn G eine (FC)-Gruppe ohne Elemente der Ordnung 0 ist. So zieht die Eigenschaft (FO) die Eigenschaft (LF) und die Eigenschaft (LF) die Eigenschaft (FC) nach sich; die Umkehrung gilt in keinem der beiden Fälle. Verf. kann zeigen: a) G ist eine (FC)-Gruppe dann und nur dann, wenn jedes ihrer Elemente in einem aus endlich vielen Elementen erzeugbaren Normalteiler von G liegt und die Faktorgruppe nach dem Zentrum $Z(G)$ von G eine (LF)-Gruppe ist. b) G ist eine (FO)-Gruppe dann und nur dann, wenn $Z(G)$ eine (FO)-Gruppe ist und die Faktorgruppe $G/Z(G)$ zu jeder Primzahl p nur endlich viele Elemente der Ordnung p enthält. *Grün* (Berlin).

Kiokemeister, Fred: A note on the Schmidt-Remak theorem. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 957—958 (1947).

Verf. beweist einen Satz, der eine Abwandlung des Satzes von Remak-Schmidt bedeutet. Von den dort vorausgesetzten beiden Bedingungen des Doppelkettensatzes wird hier nur die Minimalbedingung unverändert übernommen [vgl. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie, Leipzig 1937; dies. Zbl. **18**, 9]. An Stelle der Maximalbedingung tritt eine „modifizierte Maximalbedingung", die besagt, daß in einer Gruppe G mit Operatorenbereich Ω die Kette von Untergruppen $H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H \neq G$ endlich ist, wenn die H_i gegenüber Ω zulässige Untergruppen sind. Es sei nun G eine Gruppe mit Operatorenbereich Ω, der die inneren Automorphismen enthalte, und $G = A_1 \times A_2 \times \cdots$ eine Remaksche Zerlegung in unzerlegbare Faktoren A_i, die gegenüber Ω zulässig sind. Dann gilt unter den beiden obigen Bedingungen: Eine zweite Zerlegung $G = B_1 \times B_2 \times \cdots$ in unzerlegbare Faktoren besitzt genau soviel Faktoren wie die erste, bei geeigneter Anordnung der A_i ist $A_i \cong B_i$, und schließlich für jedes j:

$$G = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_j \times A_{j+1} \times A_{j+2} \times \cdots .$$

Zum Beweise werden noch zwei Hilfssätze herangezogen, die aussagen,wann ein Operator ein Automorphismus ist. *Wever* (Göttingen).

Lyndon, Roger C.: The cohomology theory of group extensions. Duke math. J. **15**, 271—292 (1948).

Kohomolgiegruppen $H^n(G, K)$ einer beliebigen Gruppe G über einer abelschen Koeffizientengruppe K wurden von Eilenberg und MacLane eingeführt. [Ann. Math., Princeton, II. s. **46**, 480—509 (1945); vgl. ferner H. Hopf, Comment. math. Helvetici **17**, 39—79 (1944) und B. Eckmann, Comment. math. Helvetici **17**, (1944).] Hier werden diese Kohomologiegruppen für ein direktes Produkt $G = A \times B$ und fernerhin für eine Gruppenerweiterung einer Gruppe B mit einer Gruppe A, so daß $G/B = A$ ist, in ihrer Abhängigkeit von den Kohomologiegruppen von A und B untersucht. Besonders wird der Fall betrachtet, daß sowohl A wie B abelsche Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden sind. In diesem Falle können die $H^n(G, K)$ bekanntlich als Homologiegruppen von topologischen Produkten allgemeiner Tori uud von geeigneten Linsenräumen dargestellt werden; hier werden explizite Formeln für diese Homologiegruppen aufgestellt. Allgemein wird bewiesen: $H^n(A \times B, K)$ enthält eine Kette von Untergruppen $H^n = \overline{H}^0 \supset \overline{H}^1 \supset \cdots \supset \overline{H}^n \supset \overline{H}^{n+1} = 0$ mit einem natürlichen Isomorphismus von $\overline{H}^\lambda / \overline{H}^{\lambda+1}$ in eine Faktorgruppe von $H^\lambda(A, H^{n-\lambda}(B, K))$. Es werden Übertragungen dieses Resultats auf den Fall allgemeiner Gruppenerweiterungen angegeben. *Franz.*

Kaloujnine, L.: Sur le groupe P_∞ des tableaux infinis. C. r. Acad. Sci., Paris **224**, 1097—1099 (1947).

Verf. behandelt p-Gruppen nach einer Methode, deren Kern sich anschaulich so darstellen läßt. Auf einem großen Kreise befinden sich die Mittelpunkte von p (= ungerade Primzahl) kleinen Kreisen, deren jeder wieder p kleinere Kreise trägt usw. Jeder dieser Kreise könne unabhängig von den übrigen rotieren. Die Bewe-

gungen dieses Systemes, welche die Kreise miteinander zur Deckung bringen, bilden eine p-Gruppe. Man erhält für m (= 1, 2, ...) derartige „Etagen" von Kreisen als Gruppe gerade die p-Sylowgruppe von S_m. In obiger Note wird diese Methode ausgebaut und für $m = \infty$ definiert. Durch Einführung eines geeigneten Umgebungsbegriffes wird die Gruppe topologisiert. Sie erweist sich als vollständig und kompakt. Es gelingt, einige Struktursätze darüber aufzustellen. *Grün.*

Ringe. Körper:

Johnson, R. E.: Equivalence rings. Duke math. J. **15**, 787—793 (1948).

Verf. nennt einen Ring $\mathfrak{R}$ einen Äquivalenzring, wenn für zwei beliebige Elemente a, b aus $\mathfrak{R}$ stets entweder eine Gleichung $a = p \cdot b \cdot q$ oder eine Gleichung $b = p \cdot a \cdot q$ (p, q in $\mathfrak{R}$) gilt. Der Äquivalenzring $\mathfrak{R}$ heißt 1-Äquivalenzring, wenn für jedes Elementepaar $a \neq 0$, $b \neq 0$ aus $\mathfrak{R}$ stets $b = p_1 \cdot a \cdot q_1$, $a = p_2 \cdot b \cdot q_2$ (p_i, q_i in $\mathfrak{R}$) wird. Die 1-Äquivalenzringe zeigen nahe Verwandtschaft zu den Schiefkörpern; ein 1-Äquivalenzring ist dann und nur dann ein Schiefkörper, wenn er nullteilerfrei ist und ein von 0 verschiedenes Idempotent enthält. Die nullteilerfreien kommutativen Äquivalenzringe mit Einheitselement sind identisch mit den Bewertungsringen (im allgemeinsten Sinne des Wortes). Wie unmittelbar zu sehen, ist der Ring aller Matrizen eines festen Grades n über einem Schiefkörper D stets ein Äquivalenzring. Darüber hinaus zeigt Verf., daß der Automorphismenring $\mathfrak{R}$ eines beliebigen Moduls $\mathfrak{M}$ mit einem Schiefkörper D als Multiplikatorenbereich immer ein Äquivalenzring sein muß. Ferner beweist er, gewissermaßen als abschließendes Ergebnis der ganzen Note, den Satz: Ein nichttrivialer einfacher Ring [im Sinne von N. Jacobson, Trans. Amer. math. Soc. **57**, 228—245 (1945)] ist entweder ein regulärer Äquivalenzring mit minimalen Rechtsidealen oder ein Unterring eines regulären 1-Äquivalenzringes. (Dabei heißt ein Ring $\mathfrak{R}$ regulär, wenn er zu jedem a ein b enthält, derart, daß $a = a \cdot b \cdot a$ wird.) — Für die Untersuchung eines regulären Äquivalenzringes $\mathfrak{R}$ erweist es sich als zweckmäßig, jedem Element $a \neq 0$ das System F_a aller der b zuzuordnen, für die zwar die Gleichung $\xi \cdot a \cdot \eta = b$, aber nicht die Gleichung $\xi \cdot b \cdot \eta = a$ in $\mathfrak{R}$ lösbar ist. Setzt man $F_a < F_c$, falls F_a echte Untermenge von F_c, und bezeichnet man mit $\cup$ bzw. $\cap$ die Bildung von Summe und Durchschnitt im Sinne der Mengenlehre, so stellt die Gesamtheit aller F_a hinsichtlich der Operationen $\cup$ und $\cap$ einen relativ der Beziehung $<$ linear geordneten Verband L dar, der zu einem vollständigen linear geordneten Verband L^* wird, wenn man alle unendlichen Durchschnitte $\cup_S F_a$ (S beliebige Untermenge von $\mathfrak{R}$) hinzunimmt. Man erhält nun leicht die Sätze: Es ist dann und nur dann $L = L^*$, wenn L wohlgeordnet ist. Die Menge aller $\mathfrak{R}$-Ideale stellt einen vollständigen Teilverband von L^* dar. Ist $L = L^*$, so ist jedes $\mathfrak{R}$-Ideal mit einem der Systeme F_a identisch. *Krull* (Bonn).

Kaplansky, Irving: Topological rings. Bull. Amer. math. Soc. **54**, 809—826 (1948).

Ein sehr wertvoller, knapper, aber inhaltsreicher Bericht über die Entwicklung der Theorie der topologischen Ringe von den grundlegenden Arbeiten van Dantzigs bis zum heutigen Stand. Das beigefügte Literaturverzeichnis, das im übrigen keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt, umfaßt 83 Nummern. Die besprochenen Arbeiten sind in 3 Gruppen eingeteilt: Topologische Schiefkörper, lokal kompakte Ringe, normierte Algebren (die in einer normierten Algebra für jedes Element definierte Norm $||a||$ muß hinsichtlich der Multiplikation der Bedingung $||a \cdot b|| \leqq ||a|| \cdot ||b||$ genügen). — Aus dem Bericht geht deutlich hervor, daß unter den topologischen Ringen die normierten Algebren, insbesondere die im Sinne der Topologie vollständigen Banachschen Algebren zur Zeit im Vordergrunde des Interesses stehen. Vor allem verspricht nach Ansicht des Verf. die weitere Untersuchung der

zu den Banachschen Algebren gehörigen, den lokal kompakten Gruppen zugeordneten Gruppenalgebren zu Ergebnissen von größter Bedeutung zu führen.
Krull (Bonn).

Kochendörffer, Rudolf: Über einen speziellen Matrizenring. Math. Nachr., Berlin **1**, 345—349 (1948).

Es sei k ein Körper der Charakteristik $p \geqq 0$ und $\mathfrak{M}$ die Algebra aller h-reihigen Matrizen (m_{ik}) über k, für welche $s(m_{ik}) = \sum_{k=1}^{h} m_{ik}$ und $z(m_{ik}) = \sum_{i=1}^{h} m_{ik}$ von i bzw. k unabhängig ausfallen. $\mathfrak{N}$ sei die Teilalgebra der (m_{ik}) mit $s(m_{ik}) = z(m_{ik}) = 0$; sie bildet ein zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{M}$. Für $p = 0$ oder $(p, h) = 1$ ist $\mathfrak{N}$ ein direkter Summand und $\cong$ der Matrixalgebra vom Grade $h - 1$; der komplementäre Summand ist $\cong k$. Für p/h ist die Restklassenalgebra $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ die direkte Summe zweier zu k isomorpher Körper. Die Restklassenalgebra von $\mathfrak{N}$ nach dem Radikal von $\mathfrak{N}$ ist $\cong$ der Matrixalgebra vom Grade $h - 2$. *Eichler.*

Levi, F. W.: Pairs of inverse modules in a skewfield. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 1177—1182 (1947).

Ein Untermodul eines Schiefkörpers heißt J-Modul, wenn er mit zwei verschiedenen Elementen $a, b \neq 0$ stets $(a^{-1} - b^{-1})^{-1}$ enthält, und S-Modul, wenn er das Einselement sowie zu $a \neq 0$ stets a^{-1} enthält. Satz 1: Ein Untermodul ist J-Modul genau dann, wenn er mit $a, b \neq 0$ auch $ab^{-1}a$ enthält. Folgerungen: Ein J-Modul, der das Einselement enthält, ist S-Modul. Jeder J-Modul kann in der Form aS mit S als S-Modul geschrieben werden. Satz 2: Wenn ein S-Modul die Elemente a, b und ab enthält, so umfaßt er den von a, b erzeugten Unterschiefkörper (= Durchschnitt aller Unterschiefkörper, welche a und b enthalten). Satz 3: Jeder endliche S-Modul ist ein Galois-Feld. *G. Pickert* (Tübingen).

Banerjee, D. P.: On the selfinverse module. Math. Student, Madras **15**, 17—18 (1947).

Ein Modul A heißt nach F. W. Levi [J. Indian math. Soc. **3**, 295—306 (1939); dies. Zbl. **22**, 302] selbstinvers, wenn mit a stets auch a^{-1} zu M gehört. Verf. beweist auf rechnerischem Wege einige Ergänzungsbemerkungen zu der genannten Levischen Arbeit, die sich im wesentlichen auf den zu einem selbstinversen Modul A gehörigen Multiplikationrenbereich $M(A)$ bzw. Divisionsbereich $Q(A)$ beziehen.
Krull (Bonn).

Vinograde, B.: Note on an invariant of commutative algebras. Jowa College, J. Sci., **23**, 101—102 (1949).

Eine Algebra heißt „gespalten" (cleft), wenn sie direkte Modulsumme ihres Radikals und einer anderen Unteralgebra ist. Ist N das Radikal einer primären kommutativen Algebra über dem Körper K der Charakteristik $p > 0$, welcher als maximaler separabler Unterkörper von A gewählt sei, $A/N = K(C_1, \ldots, C_n)$ mit C_i als Restklasse mod. N von $c_i \in A$, $g_i(x)^{r_i}$ das Minimalpolynom von c_i mit $r_i > 1$ und $g_i(x) = x^{p^{e_i}} - k_i$ irreduzibel über K, so ist A nicht gespalten in den Fällen: (1) $g_i(c_i) \not\equiv 0 \bmod N^{p^{e_i}}$ für ein i, (2) $N^{p^{e_i}} = 0$ für ein i. Weitere Sätze: A. Ein irreduzibles Polynom $g(x)$ ist genau dann separabel, wenn es ein Polynom $h(x)$ mit $g(h(x)) \equiv 0 (g(x)^2)$ gibt. B. Eine Polynomalgebra ist genau dann gespalten, wenn jeder irreduzible Faktor im Minimalpolynom ihres erzeugenden Elementes separabel ist. C. Ist eine kommutative Algebra A über K mit Einselement mod. N (= Radikal) eine direkte Summe einfacher Erweiterungen, so ist sie genau dann nicht gespalten, falls es in ihr ein Element $d \notin N$ so gibt, daß $d + n$ für kein $n \in N$ in einem K enthaltenden Unterkörper von A liegt. — Zu verbessern: In B muß es statt „Faktor" heißen: „mehrfache Faktor"; in C ist die angegebene Bedingung hinreichend für Nichtgespaltensein nur bei primären Algebren. *G. Pickert* (Tübingen).

Karpelevič, F. I.: Pseudonormen im Ring der ganzen Zahlen. Uspechi mat. Nauk **3**, 174—177 (1948) [Russisch].

Die von K. Mahler [Acta math., Uppsala **66**, 79—119 (1936); dies. Zbl. **13**, 51] eingeführte reellwertige Pseudobewertung (P.B.) $\varphi(x)$ der Elemente x eines Ringes ist durch I. $\varphi(x) > 0$ für $x \neq 0$; $\varphi(0) = 0$; II. $\varphi(x + y) \leqq \varphi(x) + \varphi(y)$; III. $\varphi(xy) \leqq \varphi(x)\varphi(y)$ erklärt. Es seien k und l natürliche Zahlen und $0 < \varrho < 1$. Dann wird durch $\varphi_{k,l}(x) = 1$, wenn $k \nmid x$, $\varphi_{k,l}(x) = \varrho^{\alpha}$, wenn $k \mid x$ und l^{α} die genaue in x steckende Potenz von l, eine P.B. des Ringes R der ganzen Zahlen definiert. Jede P.B. von R ist äquivalent entweder einer P.B. $\varphi_{k,l}$ oder der Bewertung durch den gewöhnlichen absoluten Betrag. Dieser ebenfalls schon bei Mahler (a. a. O.) stehende Satz wird vom Verf. nochmals bewiesen. *H. L. Schmid* (Berlin).

Gröbner, W.: Über die Syzygientheorie der Polynomideale. Mh. Math., Wien **53**, 1—16 (1949).

In 1. und 2. wird unter Benutzung der Matrizenschreibweise ein neuer, einfacher Beweis für das Abbrechen der Syzygienkette eines Formenideals in $n+1$ Variabeln $x_0, \ldots, x_n$ nach höchstens $n+1$ Gliedern gegeben. Den Kernpunkt bildet der folgende, durch einen eleganten Induktionsschluß bewiesene Hilfssatz: Ist der Vektor (die Spalte) S eine Syzygie aus dem k-ten Syzygienmodul U^k des Formenideals a und läßt sich S für irgendein $j < k$ in der Gestalt $S = \varphi_1 \cdot S_1 + \cdots + \varphi_j \cdot S_j$ darstellen, wobei die S_i Vektoren, die φ_i Formen sind und das Ideal $(\varphi_1, \ldots, \varphi_j)$ der Hauptklasse angehört (also die projektive Dimension $n - j$ besitzt), so gibt es eine ausgezeichnete Darstellung $S = \varphi_1^* S_1^* + \cdots + \varphi_j^* S_j^*$, bei der die S_i^* zu U^* gehören, und es kann infolgedessen S nicht Element einer Minimalbasis von U^k sein. — Aus den beim Beweise des Syzygien-Kettensatzes benutzten Überlegungen ergibt sich in 3. leicht weiter: Ein Formenideal a der projektiven Dimension d ist dann und nur dann perfekt im Sinne von Macaulay [d. h. im wesentlichen, es lassen sich dann und nur dann die Formen $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ so bestimmen, daß $(a, \varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ ungemischt nulldimensional wird], wenn die Syzygienkette von a genau $n - d$ Glieder besitzt. — Dieses Resultat gestattet, wie in 4. gezeigt wird, gewisse Anwendungen auf die algebraische Geometrie. Nennt man eine algebraische Kurve im 3-dimensionalen Raum perfekt, wenn sie das Nullstellengebilde eines perfekten Formenideals ist, so erhält man den Satz, daß eine Raumkurve dann und nur dann perfekt ist, wenn sie durch ein Matrizenideal im Sinne von Macaulay definiert wird. Weiter ergibt sich, daß die perfekten Raumkurven dadurch ausgezeichnet sind, daß auf sie, aber auch nur auf sie der Noethe sche Fundamentalsatz der ebenen algebraischen Geometrie ohne Änderung des Wortlautes übertragen werden kann. — Die Sätze der vorliegenden Note finden sich — mit etwas ausführlicheren Beweisen und teilweise allgemeiner Fassung der geometrischen Anwendungen — auch im letzten Kapitel des kürzlich erschienenen Lehrbuchs des Verf. (Moderne Algebraische Geometrie. I. Die idealtheoretischen Grundlagen. Wien und Innsbruck, Springer-Verlag 1949). *Krull* (Bonn).

Zahlentheorie:

Ward, Morgan: Euler's problem on sums of three fourth powers. Duke math. J. **15**, 827—837 (1948).

Verf. zeigt, daß eine Gleichung $x^4 + y^4 + z^4 = w^4$ mit natürlichem x, y, z, w für $w < 10^4$ unmöglich ist. *Holzer* (Graz).

Palamá, G.: Metodi per avere soluzioni parametriche della $a_1, \ldots, a_p \overset{2,4}{=} b_1, \ldots, b_p$, nei casi $p = 3$, $p = 4$. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. s. **6**, 48—64 (1947).

Die Bezeichnungen sind die vom Verf. normierten [vgl die Besprechung seiner Arbeit dies. Zbl. **31**, 10]. Sei ein System

$$a_1, a_2, a_3 \overset{x}{=} b_1, b_2, b_3$$

mit $x = (2, 4)$ gegeben und ist $a_3 = a_1 + a_2$, $b_3 = b_1 + b_2$, so gilt für beliebige nicht verschwindende, voneinander verschiedene p, q

$$a_1 p - a_2 q,\ a_2 p + a_3 q,\ a_3 p + a_1 q \overset{x}{=} b_1 p - b_2 q,\ b_2 p + b_3 q,\ b_3 p + b_1 q.$$

In ähnlicher Weise werden noch weitere Sätze gegeben. *Holzer* (Graz).

Palamà, G.: Generalizzazione di due teoremi sulle uguaglianze multigrade, su delle trasformazioni di esse e sulle multigrade a catena. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. s. **6**, 95—120 (1947).

Unter Verwendung der vom Verf. normierten Bezeichnungen gelte: (1) n und r seien natürliche Zahlen, $r > n$. (2) Sei $a_1, \ldots, a_r \overset{n}{=} b_1, \ldots, b_r$. (3) Seien S_i, T_i die i-ten Potenzsummen der a_i, bzw. b_i (also $S_i = T_i$ für $i \leqq n$). (4) a' (Verf. schreibt a al 1°) soll heißen, der Vektor rechts entstehe aus dem Vektor links durch Vertauschung der a_i und b_i. (5) Sei $k = 2\,(T_{n+2} - S_{n+2})/[(n+2)\,(T_{n+1} - S_{n+1})]$ (durch Druckfehler entstellt). Dann gelten folgende Sätze: 1. Ist n ungerade, so wird $a_1, \ldots, a_r,\ k - b_1,\ k - b_2, \ldots, k - b_r \overset{n+2}{=} a'$. 2. Bei geradem n gilt $a_1, \ldots, a_r,\ k - a_1, \ldots, k - a_r \overset{n+2}{=} a'$. Weiter gilt stets: 3. $a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_r,\ a_2 + a_3, \ldots, a_{r-1} + a_r \overset{n}{=} a'$, wo links und rechts ein $\binom{r}{2}$-dimensionaler Vektor steht. 4. Sei $s = p!$. Es ist $A_1, \ldots, A_s \overset{n}{=} B_1, \ldots, B_s$, wo $A_1, \ldots, A_s$ die s innern Produkte eines beliebigen r-dimensionalen festen Vektors $(m_1, \ldots, m_r)$ mit den s Vektoren sind, die aus $(a_i) = a_1, \ldots, a_r$ durch Vertauschung der Koordinaten entstehen und die B_j analog aus (b_i) gebildet sind. 5. Mit der unter 4. eingeführten Vektorabkürzung, wo noch die Klammer weggelassen werde, gilt für beliebiges λ, α: $\lambda a_i + \alpha \overset{n}{=} \lambda b_i + \alpha$. Hierbei ist Addition einer Zahl zu einem Vektor Addition zu jeder Koordinate. 6. Sind je m Größen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ (nicht alle null) gegeben, so gilt folgendes „fortlaufende Tarry-Escott-System" (multigrada a catena): $\lambda_1 a_i + \alpha_1, \ldots,\ \lambda_m a_i + \alpha_m \overset{n}{=} \lambda_1 c_i + \alpha_1,\ \lambda_2 c_i' + \alpha_2, \ldots, \lambda_m c_i^{(m-1)} + \alpha_m$, wo $c_i, c_i', c_i'', \ldots$ entweder a_i oder b_i sind. 7. Gilt das fortlaufende Tarry-Escott-System $a_{1i} \overset{n}{=} a_{2i} \overset{n}{=} \cdots \overset{n}{=} a_{mi}$ und sind $h_1, \ldots, h_m$ nicht durchwegs verschwindende Parameter, so ist $a_{1i} + h_1, \ldots, a_{mi} + h_m \overset{n}{=} a_{1i} + h_{j+1}, \ldots, a_{mi} + h_{j+m}$, indem $h_{m+1} = h_1$, $h_{m+2} = h_2, \ldots$ sei. *Holzer* (Graz).

Palamà, G.: Teoremi relativi alle uguaglianze multigrade. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. s. **6**, 366—394 (1947).

Verf. beweist: Das Bestehen eines Tarry-Escott-Systems (vgl. die Normierung der Bezeichnung in den vorsteh. Referaten über Arbeiten des Verf.) $a_i \overset{x}{=} b_j$ hat bei $x = 1, 3, \ldots, 2n - 1$ das eines Systems

$$a_i + r,\ -b_j + r,\ -a_i + s,\ b_j + s \overset{2n+1}{=} a'$$

zur Folge, hingegen für $x = 2, 4, \ldots, 2n$

$$a_i + r,\ -a_i + r,\ b_j + s,\ -b_j + s \overset{2n+2}{=} a'.$$

Hierbei brauchen a_i und b_j nicht gleichdimensionale Vektoren zu sein, r und s sind beliebige voneinander verschiedene Zahlen. — Ein weiterer Teil der Arbeit ist der Umkehrung von Tarry-Escott-Sätzen gewidmet, d. h. der Frage, inwieweit die bei bisher gefundenen Sätzen neu gebildeten Systeme umgekehrt die Systeme der Voraussetzung nach sich ziehen. *Holzer* (Graz).

Lehmer, D. H.: On the partition of numbers into squares. Amer. math. Monthly **55**, 476—481 (1948).

$P_k(n)$ bezeichne die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von $n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2$ mit $x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_a \geqq 0$. Wann $P_k(n) = 0$ ist, ist seit langem bekannt. Verf. untersucht, wann $P_k(n) = 1$ ist. — $k = 2$: Es gibt unendlich viele n mit $P_2(n) = 1$; diese n hat bereits Euler alle angegeben. $k = 3$: Verf. gibt unendlich viele n mit $P_3(n) = 1$ an; ob seine Liste vollständig ist, hängt von einer bisher unbewiesenen Vermutung über die Klassenzahl quadratischer Formen ab. $k = 4$: Verf. gibt unter Benutzung der Jacobischen Formel für die Darstellung

einer Zahl als Summe von 4 Quadraten alle n mit $P_4(n) = 1$ und außerdem alle n mit $P_4(n) = 2$ an; es gibt ja unendlich viele solche n. $k \geqq 5$ ist nahezu trivial; es gibt dann nur endlich viele n mit $P_k(n) = 1$, die alle angegeben werden. Für $k \geqq 7$ erfüllen genau $n = 1, 2, 3$ die Bedingung $P_k(n) = 1$. *Stöhr.*

Sprague, R.: Über Zerlegungen in ungleiche Quadratzahlen. Math. Z. **51,** 289—290 (1948).

Verf. zeigt: Jede ganze Zahl > 128 ist Summe von paarweise verschiedenen Zahlen aus einer Teilfolge der Quadratzahlen; es gibt unendlich viele Teilfolgen der Quadratzahlen mit dieser Eigenschaft. Der Beweis erfolgt in sehr einfacher Weise dadurch, daß eine genügend lange Folge aufeinanderfolgender Zahlen, von denen jede als Summe von paarweise verschiedenen Quadratzahlen $< q^2$ darstellbar ist, durch Hinzufügen des Summanden q^2 zu den Summendarstellungen zu einer längeren derartigen Folge ergänzt werden kann; dies Verfahren kann unbegrenzt iteriert werden. *Stöhr* (Hamburg).

Bouwkamp, C. J.: On the dissection of rectangles into squares. (Second communication). Proc. Akad. Wet. Amsterdam **50,** 58—71 (1947).

Verf. betrachtet die Zerlegungen von Rechtecken in Quadrate bzw. diejenigen ebenen Netzwerke, die nach der grundlegenden Arbeit von Brooks, Smith, Stone und Tutte [Duke Math. J. **7**, 312—340 (1940); dies. Zbl. **24**, 165] den Zerlegungen zugeordnet sind. Er gibt eine Aufstellung derjenigen ebenen Netzwerke mit höchstens 14 Drähten, bei denen keine zwei Drähte parallel oder in Serie liegen. Jedem Netzwerk wird eine „Komplexität" zugeordnet, d. i. die Anzahl der im Netzwerk enthaltenen Bäume, die alle Knotenpunkte des Netzwerkes enthalten. Verf. gibt ohne Beweis an, daß die Komplexität auch als der gemeinsame Absolutbetrag aller ersten Unterdeterminanten einer gewissen dem Netzwerk zugeordneten Matrix bestimmt werden kann, sowie daß jedes einem Netzwerk zugeordnete Rechteck, das in Quadrate mit ganzzahligen Seitenlängen zerlegt ist, eine Summe der Seitenlängen besitzt, die in der Komplexität aufgeht. Verf. gibt ferner eine Tabelle aller „einfachen" Rechteckszerlegungen in 9 bis 13 nichtverschwindende Quadrate (8 Druckseiten Umfang; eine Zerlegung heißt einfach, wenn keine echte Teilmenge der darin vorkommenden Quadrate bereits selbst ein Rechteck bildet). *Stöhr.*

Bouwkamp, C. J.: On the dissection of rectangles into squares. (Third communication). Proc. Akad. Wet. Amsterdam **50,** 72—78 (1947).

Verf. sucht in der in Teil II seiner Arbeit (s. vorstehendes Referat) mitgeteilten Tabelle Paare von kongruenten oder ähnlichen Rechtecken, die auf verschiedene Weise in Quadrate mit ganzzahligen teilerfremden Seiten zerlegt sind. U. a. findet er ein Paar von kongruenten Rechtecken, wo in beiden Zerlegungen zusammengenommen lauter verschiedene Quadrate auftreten, sowie ein Paar von kongruenten Rechtecken, wo in beiden Zerlegungen völlig die gleichen Quadrate auftreten, während bei jeder einzelnen dieser Zerlegungen diese Quadrate paarweise verschieden sind. Die vom Verf. für diese Vorkommnisse gegebenen Beispiele haben dabei die geringstmögliche Anzahl von Quadraten. — Verf. macht ferner einige Bemerkungen über die Konstruktion von Quadraten, die in lauter verschiedene Quadrate zerlegt sind; vgl. dazu die Berichtigungen in den beiden nachstehend referierten Arbeiten. *Stöhr* (Hamburg).

Bouwkamp, C. J.: On the construction of simple perfect squared squares. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **50,** 1296—1299 (1947).

Verf. gibt in ausführlicher Form eine Berichtigung seiner Bemerkungen über die Konstruktion von Quadraten, die in lauter verschiedene Quadrate zerlegt sind (s. vorsteh. Referat). Er berichtigt ferner einen Fehler in der in Teil II seiner Arbeit (s. oben) gegebenen Tabelle. *Stöhr* (Hamburg).

Brooks, R. L., C. A. B. Smith, A. H. Stone and W. T. Tutte: A simple perfect square. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **50,** 1300—1301 (1947).

Die Verf. hatten [Duke Math. J. 7, 312—340 (1940); dies. Zbl. 24, 165] ein Quadrat angegeben, das „kreuzungsfrei" in paarweise verschiedene Quadrate zerlegt ist. Sie klären nun ein Mißverständnis, das Herrn Bouwkamp bei einer Kritik dieser Arbeit unterlaufen war (vgl. die beiden vorstehenden Referate). *Stöhr.*

Richardson, A. R.: The composition of cubic forms. Duke math. J. **14,** 27—30 (1947).

Hier wird das Theorem von Gauß über die Duplikation der quadratischen Formen auf binäre kubische Formen erweitert. *Hofreiter* (Wien).

Rankin, R. A.: On sums of powers of linear forms. III. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **51,** 846—853 (1948).

Es seien $L_1, \ldots, L_n$ n Linearformen in $x_1, \ldots, x_n$ mit einer Determinante $D \neq 0$. Es sei weiter

$$g_\beta = \{\sum |L_i|^\beta\}^{1/\beta} \qquad (1 \leqq \beta \leqq 2),$$

und es soll $M_\beta = \operatorname{Min} g_\beta$, erstreckt über alle Gitterpunkte $(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, abgeschätzt werden. Der Minkowskische Fundamentalsatz liefert ja sofort eine Abschätzung. Verschärfungen dieser Abschätzung wurden angegeben von Blichfeldt, Hua, Mullender, Rankins und dem Ref. Dem Verf. gelingt es nun in interessanter Weise, die bisher erhaltenen Resultate weiter zu verschärfen. Er zeigt z. B. folgendes: Ist δ eine beliebige Zahl mit $\frac{1}{2} \leqq \delta \leqq \alpha \leqq 1$, $\delta = \frac{1}{3}(1 + a) < 1$, wo $\alpha\beta = 1$, so ist

$$M_\beta \leqq n^\alpha |D|^{1/n} / A_5,$$

wo für großes n

$$A_5 \sim 2^{1-\alpha} \left(\frac{2-\delta}{1-\delta}\right)^{\alpha-\delta} \left(\frac{e}{\delta}\right)^{\delta} \Gamma(1+\delta).$$

Ein bemerkenswertes Resultat ist noch folgendes: Es gibt ganze Zahlen $(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, so daß

$$|L_1 \ldots L_n|^{1/n} < |D|^{1/n} / 3,6593.$$

Dies ist besser als das Resultat von Davenport, „The product of n homogenous linear forms", Proc. Akad. Wet. Amsterdam **49,** 2—8 (1946). *Hlawka* (Wien).

Macbeath, A. M.: Non-homogeneous linear forms. J. London math. Soc. **23,** 141—147 (1948).

Sind $L_1 = ax + by + e$, $L_2 = cx + dy + f$ zwei reelle lineare Formen und ist $ad - bc = 1$, so gibt es nach Minkowski ganze Zahlen x, y, so daß für sie $|L_1 L_2| \leqq \frac{1}{4}$. Der Verf. gibt für diesen bereits mehrfach bewiesenen Satz zwei weitere geometrische Beweise, die mit den Beweisen von Mordell und Chalk verwandt sind. *Hofreiter* (Wien).

Blaney, Hugh: Indefinite quadratic forms in n variables. J. London math. Soc. **23,** 153—160 (1948).

Bekanntlich gibt es zu jeder indefiniten binären quadratischen Form $Q(x, y)$ und zu beliebigen reellen Zahlen x_0, y_0 ganze Zahlen x, y, so daß

$$|Q(x + x_0,\ y + y_0)| \leqq \tfrac{1}{4}|\Delta| \quad (\Delta = \text{Diskriminante von } Q).$$

Verf. beweist: Es gibt eine Zahl l_n, z. B. $l_n = 2^{n-2}$, und ganze Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so daß für jede indefinite quadratische Form Q und beliebige reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$|Q(x_1 + a_1, \ldots, x_n + a_n)| \leqq l_n |D|^{1/n}$$

(D = Determinante von Q) ist. Noch allgemeiner gilt:

$$\gamma |D|^{1/n} < Q(x_1 + a_1, \ldots, x_n + a_n) \leqq \Gamma |D|^{1/n}.$$

Dabei ist Γ zu gegebenem γ bestimmbar. Für homogene Formen gilt eine analoge Approximation, und zwar

$$c |D|^{1/n} < Q(x_1, \ldots, x_n) \leqq C |D|^{1/n}. \qquad \textit{Hofreiter} \text{ (Wien).}$$