Werk

Titel: Analysis

Jahr: 1942

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0026|log34

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

von der Periode 1 und auf [0, 1] von beschränkter Variation; dann gilt

$$\left|\sum_{x=1}^{N} w(f(x)) - N\int_0^1 w(t)\,dt\right| \leqq TND(N),$$

wo T die totale Variation von w auf [0, 1] bedeutet. — Dieser Satz folgt aus der Beziehung

$$\int_0^1 R_{0,t}(N)\,dw(t) = N\int_0^1 w(t)\,dt - \sum_{x=1}^{N} w(f(x)). \qquad (N \geqq 1)$$

E. Hlawka (Wien).

Ricci, Giovanni: Sull'irrazionalità del rapporto della circonferenza al diametro. (*Bologna, 4.—6. IV. 1940.*) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 147—151 (1942).

Verf. gibt einen Beweis für die Irrationalität von π und π^2 und verwendet dabei die Methode von Hermite beim Beweis der Irrationalität von e^m (m natürliche Zahl) (vgl. Koksma, Diophantische Approximationen, Kap. IV, Berlin 1936; dies. Zbl. **12**, 396). *E. Hlawka* (Wien).

Analysis.

Mengenlehre:

● **Bourbaki, N.: Éléments de mathématique. Les structures fondamentales de l'analyse. Théorie des ensembles. Livre 1. Fascicule de résultats. (Actualités scient. et industr. Nr. 846.)** Paris: Hermann & Cie. 1939. VIII, 51 pag.

Die wichtigsten Grundbegriffe, Definitionen und Sätze (ohne Beweis) aus der Mengentheorie. Der kurze Inhalt: Verknüpfungen und Grundoperationen der Mengen, Funktionen, Produktbildung, Quotientenmenge, teilweise geordnete Menge, Mächtigkeit, Strukturen. *J. Novák* (Brünn).

Geymonat, L.: Il principio di Zermelo. Saggiatore **2**, 317—323 (1941).

Besprechung der verschiedenen Stellungnahmen zum Zermeloschen Auswahlprinzip. Diese sind als Folgen der die mathematische Existenz betreffenden verschiedenen Begriffsbildungen dargestellt. *G. Hajós* (Budapest).

Stöhr, Alfred: Über zweifach geordnete Mengen und Zerlegungen in Rechtecke. 1. J. reine angew. Math. **184**, 138—157 (1942).

Diese rein abstrakte Untersuchung wurde durch die Aufgabe angeregt, eine Übersicht über die Zerlegungen eines Rechtecks in endlich viele Rechtecke zu gewinnen. — Im folgenden ist eine nichtleere Menge M gegeben; kleine lateinische Buchstaben bedeuten Elemente von M; $a = b$ bedeutet Identität. **A** = Axiom, **D** = Definition. — **A 1.** Es seien zwei Anordnungen (1) $<$, $\overset{2}{<}$ von M gegeben. D. h.: für beliebige a, b gilt genau eine der Relationen $a = b$, $a \overset{2}{<} b$, $b \overset{2}{<} a$ und die Relation $\overset{1}{<}$ ist transitiv; analog für $\overset{2}{<}$. Aus (1) leite man neue Relationen (2) $\overset{1}{<}$, $\overset{2}{<}$ wie folgt ab: **D 3.** $a \overset{1}{<} b$ heißt $a \overset{2}{<} b$ und $a \overset{2}{<} b$; $a \overset{2}{<} b$ heißt $a \overset{1}{<} b$ und $a \overset{2}{>} b$. (Zeichen wie $>$, $\leqq$, $\geqq$, $\gg$ werden mit Hilfe von $<$, $\ll$ auf übliche Weise definiert.) Dann gilt **A 2**: Für beliebige a, b gilt genau eine von den Relationen $a = b$, $a \overset{1}{<} b$, $a \overset{1}{>} b$, $a \overset{2}{<} b$, $a \overset{2}{>} b$ und die Relation $\overset{1}{<}$ ist transitiv; ebenso $\overset{2}{<}$. Umgekehrt: sind die Symbole (2) definiert und gilt **A 2**, so definiere man (1) wie folgt: **D 4.** $a < b$ heißt $a \overset{1}{<} b$ oder $a \overset{2}{<} b$; $a < b$ heißt $a \overset{1}{<} b$ oder $a \overset{2}{>} b$. Dann gelten **A 1** und **D 3.** — Verf. geht nun von **A 2** aus und definiert neue Relationen (3) $\overset{1}{\ll}$, $\overset{2}{\ll}$ wie folgt: **D 6.** $a \overset{1}{\ll} b$ bedeutet: es ist $a \overset{1}{<} b$ und es gibt kein x mit $a \overset{1}{<} x \overset{1}{<} b$; analog $\overset{2}{\ll}$ und (4) $\overset{1}{\gg}, \overset{2}{\gg}$. Verf. stellt nun einige Endlichkeitsforderungen auf (vgl. weiter unten **A 3** bis **A 8**) und prüft sie auf ihren gegenseitigen Zusammenhang hin. Dazu braucht man noch **D 7**: $\cdots \overset{1}{<} a_0 \overset{1}{<} a_1 \overset{1}{<} a_2 \overset{1}{<} \cdots$

heißt eine $\overset{1}{<}$-Kette; sie kann auch nach einer oder nach beiden Richtungen endlich sein. Eine endliche Kette $a \overset{1}{<} a_1 \overset{1}{<} a_2 \overset{1}{<} \cdots \overset{1}{<} a_{n-1} \overset{1}{<} b$ heißt eine $\overset{1}{<}$-Kette von a nach b; n ist ihre Länge. Analog für $\overset{1}{\ll}$-Ketten, $\overset{2}{>}$-Ketten usw. (Die meisten Axiome und Definitionen sind symmetrisch in bezug auf die Indizes 1, 2 und in bezug auf die Symbole $<, >$ bzw. $\ll, \gg$; ich schreibe meistens nur einen von den symmetrischen Teilen auf.) Die erwähnten Endlichkeitsforderungen sind: **A 3.** Ist $a \overset{1}{<} b$, so gibt es eine $\overset{1}{\ll}$-Kette von a nach b. **A 4.** Ist $a \overset{1}{<} b$, so gibt es unter allen $\overset{1}{<}$-Ketten von a nach b eine mit größter Länge. **A 5.** Für jedes Paar a, b gibt es höchstens endlich viele x mit $a \overset{1}{<} x \overset{1}{<} b$. **A 6.** Für jedes a gibt es höchstens endlich viele x mit $a \overset{1}{\ll} x$. **A 7.** Alle Ketten sind endlich. **A 8.** M ist endlich. — Es gelte **A 2**; dann ist **A 7** mit **A 8** äquivalent, aus **A 7** folgt **A 6** und **A 5**, aus **A 5** folgt **A 4**, aus **A 4** folgt **A 3**, aus **A 4** und **A 6** zusammen folgt **A 5**. Andere Abhängigkeiten zwischen **A 3** bis **A 8** gibt es nicht, wie durch Beispiele dargelegt wird. — Verf. setzt sich nun das Ziel, die Relationen (2) von (3) aus aufzubauen. Es seien also die Relationen (3) irgendwie definiert; man definiere (2) wie folgt: $a \overset{1}{<} b$ bedeutet, daß es eine $\overset{1}{\ll}$-Kette von a nach b gibt. Verf. stellt nun notwendige und hinreichende Bedingungen auf, welchen die Symbole (3) genügen müssen, damit folgendes gelte: Für die eben definierten Symbole (2) gilt **A 2**, **A 4**, und (3) stehen zu (2) in der Beziehung **D 6**. — Verf. führt noch folgende Axiome ein: **A 15.** (Zerlegungsaxiom.) Aus $a \overset{1}{\ll} b$, $c \overset{1}{\ll} d$, $c \overset{1}{\ll} b$ folgt $a \overset{1}{\ll} d$. (Die analoge Beziehung für den Index 2 wird hier nicht gefordert; sie folgt aus **A 2**, **A 3**, **A 15**.) **A 16.** Ist $a \overset{1}{<} b$, $c \overset{1}{<} b$, $c \overset{1}{<} d$, $a \overset{2}{<} c$, $a \overset{2}{<} d$, $b \overset{2}{<} d$, so gibt es ein e mit $c \overset{1}{<} e \overset{1}{<} b$, $a \overset{2}{<} e \overset{2}{<} d$; analog mit $\overset{2}{>}$ statt $\overset{2}{<}$. Es gilt: aus **A 2**, **A 16** folgt **A 15**; aus **A 2**, **A 3**, **A 15** folgt **A 16**. — Ist M abzählbar (dies ist z. B. sicher der Fall, wenn **A 2** und **A 4** gilt), so kann man M auf eine Punktmenge E der euklidischen Ebene so abbilden, daß folgendes gilt: jedem $a \in M$ wird ein Punkt $[\xi(a), \eta(a)]$ zugeordnet; ist $a \underset{1}{<} b$, so ist $\xi(a) < \xi(b)$; ist $a \underset{2}{<} b$, so ist $\eta(a) < \eta(b)$. Dann und nur dann kann man diese Abbildung so wählen, daß E keinen Häufungspunkt im Endlichen besitzt, wenn für die durch **D 3** definierten Relationen (2) **A 5** gilt. *Jarník.*

Carathéodory, C.: Gepaarte Mengen, Verbände, Somenringe. Math. Z. 48, 4—26 (1942).

1. Eine Menge $\mathfrak{m}$ heiße gepaart, wenn ihr eine bestimmte Teilmenge $\mathfrak{T}$ der Menge aller Paare (x, y) mit $x \in \mathfrak{m}$, $y \in \mathfrak{m}$ zugeordnet ist; dabei heißen x und y zueinander konjugiert, in Zeichen $x \circ y$. Es ist $\mathfrak{T}$ bzw. die durch $\mathfrak{T}$ bestimmte Paarung festgelegt durch Angabe ihrer charakteristischen Funktion $\mathfrak{c}(x)$, wobei $\mathfrak{c}(x)$ die Menge aller $y \in \mathfrak{m}$ ist mit $x \circ y$. Setzt man für jede Teilmenge $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{m}$ noch $\mathfrak{a}' = \mathfrak{c}(\mathfrak{a}) = \prod_{x \in \mathfrak{a}} \mathfrak{c}(x)$, so gilt: $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \to \mathfrak{c}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{c}(\mathfrak{b})$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}'' = \mathfrak{c}^2(\mathfrak{a}) = \mathfrak{c}(\mathfrak{c}(\mathfrak{a}))$. Da die Teilmengen von $\mathfrak{m}$ einen Verband bilden (alle hier betrachteten Verbände sollen „vollständig" sein), so kann $\mathfrak{a}' = \mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ auch als Abbildung $X' = F(X)$ eines Verbandes $\mathfrak{M}_0$ in sich aufgefaßt werden mit $X \subseteq Y \to Y' \subseteq X'$, $X \subseteq X''$ (jede solche Abbildung kann umgekehrt auf eine Paarung zurückgeführt werden). Es gilt: $X' = X'''$. Bezeichnet man $X \in \mathfrak{M}_0$ als normal bezüglich F, wenn $X = F^2(X) = X'' = F(F(X))$, so gilt für die Menge $\mathfrak{M}$ der normalen Elemente: Es ist $\mathfrak{M} = F(\mathfrak{M}_0)$ und $\mathfrak{M}$ ist ein durch F involutorisch auf sich selbst abgebildeter Verband, dessen Einselement M mit dem von $\mathfrak{M}_0$ identisch ist, während für das Nullelement N gilt: $N = F(M)$. — 2. Als Somenring wird bezeichnet eine Boolesche Algebra, bei welcher Vereinigung und Produkt von unendlich vielen Elementen erklärt sind. Es gilt folgende Kennzeichnung der Somenringe, welche zugleich Verbände sind: Der Verband $\mathfrak{M}$ mit dem Nullelement ν ist ein Somenring dann und nur dann, wenn (genau) eine in-

volutorische Selbstabbildung $\xi' = F(\xi)$, $\xi = F(\xi')$ von $\mathfrak{M}$ auf sich existiert, für welche aus jeder der 3 Gleichungen $\xi\eta = \nu$, $\xi\eta' = \xi$, $\eta\xi' = \eta$ die beiden übrigen folgen. Alsdann ist ξ' das Komplement von ξ. — 3. Eine gepaarte Menge $\mathfrak{m}$ heiße teilweise geordnet, wenn für je zwei konjugierte Elemente a, b mindestens eine der beiden Reihenfolgen („Bindungen") von a und b ausgezeichnet ist, in Zeichen $a \subseteqq b$ oder $b \subseteqq a$ (oder beides gleichzeitig), wobei $x \subseteqq x$ für jedes $x \in \mathfrak{m}$ und $x \subseteqq y$, $y \subseteqq z \to x \subseteqq z$. Alle teilweise geordneten Mengen sollen hier mindestens ein kleinstes Element 0 enthalten. Ist $\mathfrak{n}$ die Menge aller $x \in \mathfrak{m}$ mit $x \subseteqq 0$, so ist für beliebige a, b aus $\mathfrak{m}$ jedes $y \in \mathfrak{n}$ gemeinsamer Teil von a und b. Sind umgekehrt alle gemeinsamen Teile von a und b in $\mathfrak{n}$ enthalten, so heißen a und b relativ prim. Für jede teilweise geordnete Menge $\mathfrak{m}$ existiert jetzt eine (neue) „natürliche" Paarung, erklärt durch „$a \circ b$, falls a und b relativ prim". Diese (natürliche) Paarung wird so gekennzeichnet: Es sei eine Paarung von $\mathfrak{m}$ gegeben, für welche mindestens eine der drei folgenden Behauptungen zutrifft: α) die konjugierten Elemente der Paarung können als relativ prime Elemente einer geeigneten teilweisen Ordnung von $\mathfrak{m}$ gedeutet werden; β) der Verband $\mathfrak{M}$ der normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ bildet einen Somenring; γ) aus $a \circ b$ folgt $\mathfrak{c}^2(a)\mathfrak{c}^2(b) = \mathfrak{n}$ und umgekehrt. — Dann gelten alle drei Behauptungen gleichzeitig. Unter den in α) genannten (i. a. unendlich vielen) teilweisen Ordnungen von $\mathfrak{m}$ (deren relativ prime Elemente die gleiche Paarung von $\mathfrak{m}$ erzeugen) gibt es eine gesättigte, d. h. eine solche, welche die umfassendste Menge von Bindungen enthält. — 4. Faßt man die Elemente $a, b, \ldots$ einer gepaarten Menge $\mathfrak{m}$ in Klassen zusammen, d. h. bildet man $\mathfrak{m}$ homomorph auf eine Menge $\overline{\mathfrak{m}}$ ab, so werden dabei die normalen Teilmengen von $\mathfrak{m}$ dann und nur dann sämtlich Urbildmengen von Mengen aus $\overline{\mathfrak{m}}$ sein, wenn für irgend zwei Urbilder x_1, x_2 eines Elementes von $\overline{\mathfrak{m}}$ stets gilt $\mathfrak{c}(x_1) = \mathfrak{c}(x_2)$; damit ist dann auch $\overline{\mathfrak{m}}$ gepaart derart, daß die Verbände $\mathfrak{M}$ bzw. $\overline{\mathfrak{M}}$ der normalen Elemente von $\mathfrak{m}$ bzw. $\overline{\mathfrak{m}}$ isomorph aufeinander abgebildet werden. Unter diesen Homomorphien ist diejenige ausgezeichnet, für welche die Urbildmenge eines jeden $\bar{x}_0 \in \overline{\mathfrak{m}}$ aus allen x' besteht mit $\mathfrak{c}(x') = \mathfrak{c}(x_0)$, wenn x_0 irgendein Urbild von $\bar{x}_0$, m. a. W. falls aus $\bar{\mathfrak{c}}(\bar{x}) = \bar{\mathfrak{c}}(\bar{y})$ (mit $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{m}}$, $\bar{y} \in \overline{\mathfrak{m}}$) folgt $\bar{x} = \bar{y}$; in diesem Falle heiße die Paarung von $\overline{\mathfrak{m}}$ reduziert. Diese reduzierten Paarungen werden schließlich so gekennzeichnet: Dann und nur dann ist $\bar{\mathfrak{c}}(\bar{x})$ die charakteristische Funktion einer reduzierten Paarung, wenn man jedem Paar verschiedener Elemente $\bar{x}, \bar{y}$ aus $\overline{\mathfrak{m}}$ ein nicht in $\bar{\mathfrak{n}}$ enthaltenes Element $\bar{z}$ zuordnen kann, welches Teil des einen der Elemente $\bar{x}, \bar{y}$ ist und relativ prim zum anderen. — Schließlich wird u. a. als Beispiel die Menge $\mathfrak{m}$ der offenen Mengen $x, y, \ldots$ eines euklidischen E_n betrachtet, wenn $x \circ y$, falls der mengentheoretische Durchschnitt von x und y leer ist. Der dabei entstehende Somenring der normalen Teilmengen ist einfachstes Beispiel eines vollkommenen Somenrings, dessen Elemente man nicht isomorph auf die Teilmengen einer festen Menge abbilden kann. *Haupt* (Erlangen).

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

● **Kempisty, Stefan: Fonctions d'intervalle non additives. (Actualités scient. et industr. Nr. 824. Ensembles et fonctions. Publiés de A. Denjoy III.)** Paris: Hermann & Cie. 1939. 62 pag. ffrs. 20.—.

L'A. espone con bello stile, rapido e conciso, le teorie della derivazione e integrazione delle funzioni d'intervallo e le applica poi alla totalizzazione delle funzioni e alla quadratura delle superficie. Il Cap. I contiene le prime definizioni sui sistemi d'intervalli e i lemmi di Vitali e Burkill sulla copertura di un insieme. Nel Cap. II sono considerate le funzioni additive e semiadditive; l'integrale di Burkill, con applicazioni; gl'integrali superiori e inferiori di Burkill. Il Cap. III è dedicato alla teoria della derivazione: derivata massima e minima; teorema della derivata nulla; teorema di Saks; teorema di Burkill sulle derivate d'una funzione d'intervallo lineare.

Alle funzioni a variazione limitata semi-additive, semi-regolarmente integrabili, continue e alle derivate semi-regolari di una funzione a variazione limitata è volto il Cap. IV. Nel Cap. V sono studiate ed applicate le funzioni assolutamente continue. Nei Cap. VI e VII le cose dette sono volte allo studio della lunghezza delle curve e dell'area delle superficie date mediante un'equazione cartesiana (teoremi di Tonelli; calcolo dell'area mediante un passaggio al limite) ed a quello delle funzioni semi-regolarmente risolubili e risolubili e delle rispettive totali semi-regolari e totali.

G. Scorza Dragoni (Padova).

Labocetta, Letterio: Generazione geometrica delle funzioni discontinue di variabile continua. (*Bologna, 4.—6. IV. 1940.*) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 133—138 (1942).

Durchläuft M eine Kurve, so hängt die totale Neigungswinkeländerung α der Geraden PM vom festen Punkt P ab. Durchläuft P eine andere Kurve, so ist α Funktion der die Lage von P kennzeichnenden Bogenlänge. Im Schnittpunkt oder Berührungspunkt beider Kurven weist diese Funktion Singularitäten auf. Verf. betrachtet einfache Kurven (Gerade, Kreis, Parabel) und erzeugt so einige einfache, unstetige Funktionen (z. B. $\operatorname{sgn} x$).

G. Hajós (Budapest).

Calkin, J. W.: Functions of several variables and absolute continuity. 1. Duke math. J. **6**, 170—186 (1940).

Verf. führt für die reellen oder komplexen Funktionen von n reellen Veränderlichen die Begriffe der wesentlichen und der linearen absoluten Stetigkeit ein; er vergleicht dann die wesentlich absolut stetigen (w. a. s.) Funktionen mit den Potentialfunktionen ihrer verallgemeinerten Ableitungen nach Evans [Rice Inst. Pamphlets **7**, 252—329 (1920) und Amer. J. Math. **50**, 123—126 (1928)] und mit den absolut stetigen Funktionen nach Tonelli [Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. **3**, 633—638 (1926)]. Weiterhin stellt Verf. für die w. a. s. Funktionen und für die linear absolut stetigen (l. a. s.) Funktionen Eigenschaften auf, die bei der Untersuchung gewisser Fragen aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und der Variationsrechnung nützlich sind. — Eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$, die in einem offenen Gebiet G definiert ist, heißt bezüglich x_k w. a. s., wenn 1) $f(x_1, \ldots, x_n)$ in G meßbar und in fast allen n-dimensionalen abgeschlossenen in G enthaltenen Intervallen summierbar ist; 2) es eine Funktion $g_k(x_1, \ldots, x_n)$ mit den in 1) angeführten Eigenschaften gibt, derart, daß die Gleichung

$$(1)\quad \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_{k-1}}^{b_{k-1}}\int_{a_{k+1}}^{b_{k+1}}\cdots\int_{a_n}^{b_n}[f(x_1, \ldots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)]\,dx_1\cdots dx_{k-1}\,dx_{k+1}\cdots dx_n = \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} g_k(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\cdots dx_n$$

für alle abgeschlossenen n-dimensionalen Intervalle I: $a_j \leqq x_j \leqq b_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, die in G enthalten sind, gültig ist, wobei höchstens eine Familie von Intervallen auszuschließen ist, derart, daß der Punkt $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$ in einer Menge vom Maße 0 der vom gleichen Punkt beschriebenen Menge liegt, wenn I frei in G bewegt wird. Hingegen heißt $f(x_1, \ldots, x_n)$ l. a. s. in G bezüglich x_k, wenn f und $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ summierbar in jedem n-dimensionalen abgeschlossenen in G liegenden Intervalle I sind, und wenn für jedes in G liegende I $f(x_1, \ldots, x_n)$ absolut stetig bezüglich x_k für fast alle Punkte des Bereiches $a_\nu \leqq x_\nu \leqq b_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$ ist. — Ist $f(x_1, \ldots, x_n)$ w. a. s. bezüglich x_k in G und $g_k(x_1, \ldots, x_n)$ eine Funktion, für die 1) erfüllt ist, dann hängt die Mengenfunktion $I(E; f, k) = \int_E \cdots \int g_k(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n$, die für jeden beschränkten und meßbaren Teil von G, der vom Rand von G einen positiven Abstand hat, definiert ist, lediglich von f und nicht von g_k ab; die im Lebesgueschen Sinne verstandene Ableitung von $I(E; f, k)$ ist die verallgemeinerte Ableitung $D_{x_k} f$ von f bezüglich x_k. Selbstverständlich fallen $D_{x_k} f$ und g_k fast überall in G zusammen.

Weiterhin beweist Verf. einige Sätze, die ihm zwei notwendige und hinreichende Bedingungen dafür auszusprechen gestatten, daß eine in G definierte Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ w. a. s. bezüglich $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_p}$ sei. Die erste Bedingung lautet: $f(x_1, \ldots, x_n)$ muß in G äquivalent (d. h. fast überall gleich) einer in G bezüglich $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_p}$ l. a. s. Funktion sein. Die zweite besagt, daß p in G meßbare und auf jedem n-dimensionalen abgeschlossenen in G liegenden Intervall I: $a_j \leqq x_j \leqq b_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ summierbare Funktionen $g_{k_1}, \ldots, g_{k_p}$ existieren und es für jedes I eine Funktionenfolge $f_1, f_2, \ldots$ der Klasse C' in I im Sinne von Whitney (dies. Zbl. 8, 249) gibt, so daß gilt:

$$\lim_{q\to\infty} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \left\{ |f - f_q| + \sum_{i=1}^{p} \left| g_{k_i} - \frac{\partial f_q}{\partial x_{k_i}} \right| \right\} dx_1 \cdots dx_n = 0.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist g_{k_i} äquivalent mit $D_{x_{k_i}} f$. In der angeführten Bedingung kann die Voraussetzung, daß $f_1, f_2, \ldots$ der Klasse C' angehören soll, durch die andere ersetzt werden, daß $f_1, f_2, \ldots$ l. a. s. bezüglich $x_{k_1}, \ldots, x_{k_p}$ im Innern von I und in I samt ihren partiellen Ableitungen nach $x_{k_1}, \ldots, x_{k_p}$ summierbar sein sollen. Als Funktionen der Klasse $\mathfrak{P}$ in G bezeichnet Verf. die in G bezüglich $x_1, \ldots, x_n$ w. a. s. Funktionen, als Klasse $\mathfrak{P}'$ die der bezüglich $x_1, \ldots, x_n$ l. a. s. Funktionen und schließlich als Klasse $\mathfrak{P}''$ die Gesamtheit der stetigen Funktionen aus $\mathfrak{P}'$. — Für $n = 2$ fällt $\mathfrak{P}''$ mit der Klasse der absolut stetigen Funktionen im Sinne von Tonelli zusammen. Eine Funktion zweier Veränderlicher gehört genau dann zu $\mathfrak{P}$, wenn sie Potentialfunktion ihrer eigenen verallgemeinerten Ableitungen ist; eine in G vorgegebene Funktion gehört genau dann zur Klasse $\mathfrak{P}$, wenn sie einer Funktion der Klasse $\mathfrak{P}'$ äquivalent ist; die Differenz zweier Funktionen aus $\mathfrak{P}$ mit den gleichen verallgemeinerten Ableitungen ist äquivalent einer Konstanten. Schließlich gehört $f(x_1, \ldots, x_n)$ genau dann zur Klasse $\mathfrak{P}$, wenn es n in G meßbare und in jedem in G enthaltenen n-dimensionalen Intervall I: $a_j \leqq x_j \leqq b_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ absolut integrierbare Funktionen $g_1, \ldots, g_n$ gibt, und ferner für jedes derartige Intervall eine einer Lipschitz-Bedingung genügende Funktionenfolge $f_1, f_2, \ldots$ gefunden werden kann, so daß gilt:

$$\lim_{q\to\infty} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \left\{ |f - f_q| + \sum_{k=1}^{n} \left| g_k - \frac{\partial f_q}{\partial x_k} \right| \right\} dx_1 \cdots dx_n = 0.$$

Eine Funktion der Klasse $\mathfrak{P}$ ($\mathfrak{P}'$ oder $\mathfrak{P}''$) in einer offenen Menge G_{n+m} des $S_{n+m} \equiv (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ gehört zur Klasse $\mathfrak{P}$ ($\mathfrak{P}'$ oder $\mathfrak{P}''$) als Funktion von $(y_1, \ldots, y_m)$ für fast alle Projektionspunkte $(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ von G_{n+m}. Ist $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine Funktion aus $\mathfrak{P}$ in G, R eine meßbare Menge aus G, α eine Zahl $\geqq 1$, so wird gesetzt:

$$D_\alpha(f, R) = \int_R \cdots \int \left(\sum_{k=1}^{n} |D_{x_k} f|^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} dx_1 \cdots dx_n, \quad \bar{D}_\alpha(f, R) = \int_R \cdots \int |f|^\alpha dx_1 \cdots dx_n + D_\alpha(f, R);$$

$D_\alpha(f, R)$ und $\bar{D}_\alpha(f, R)$ können dabei auch unendlich groß sein. Ist $\bar{D}_\alpha(f, R)$ endlich, so gehört f zur Klasse $\mathfrak{P}_\alpha$ bzw. zu $\mathfrak{P}'_\alpha$, $\mathfrak{P}''_\alpha$, wenn f zu $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ gehört. Verf. beweist, daß, wenn f in dem abgeschlossenen Gebiet G zur Klasse $\mathfrak{P}$ ($\mathfrak{P}'$ oder $\mathfrak{P}''$) gehört, und $D_\alpha(f, G)$ endlich ist, dann $\bar{D}_\alpha(f, R)$ für jeden offenen Teil von G, dessen abgeschlossene Hülle noch zu G gehört, ebenfalls endlich ausfällt. In der nachstehend besprochenen Arbeit von Morrey wird gezeigt, daß in diesem Satz $R = G$ gesetzt werden darf; Verf. beweist diese Tatsache nur für den Fall, daß G ein offenes n-dimensionales Intervall ist. Notwendig und hinreichend dafür, daß eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ der Klasse $\mathfrak{P}_\alpha$ in G angehöre, ist, daß das Integral $\int_G \cdots \int f dx_1 \cdots dx_n$ endlich sei

und sich n Funktionen $g_1, \ldots, g_n$ finden lassen, die mitsamt $|g_1|^\alpha, \ldots, |g_n|^\alpha$ in G summierbar sind, und zu denen sich für jedes n-dimensionale Intervall I aus G Funktionen $f_1, f_2, \ldots$ angeben lassen, deren jede einer Lipschitzbedingung in I genügt oder im Innern von I der Klasse $\mathfrak{P}'_\alpha$ angehört, so daß gilt:

$$\lim_{q\to\infty} \int_I \cdots \int \left\{ |f - f_q|^\alpha + \sum_{k=1}^{n} \left| g_k - \frac{\partial f_q}{\partial x_k} \right|^\alpha \right\} dx_1 \cdots dx_n = 0. \tag{2}$$

Gehört f zur Klasse $\mathfrak{P}''_\alpha$, so kann man eine ganz entsprechende notwendige und hinreichende Bedingung angeben, in der $f_1, f_2, \ldots$ einer Lipschitzbedingung genügen und an die Stelle von (2) die folgende Beziehung tritt:

$$\lim_{q\to\infty} \int_I \cdots \int \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left| g_k - \frac{\partial f_q}{\partial x_k} \right|^\alpha \right\} dx_1 \cdots dx_n = 0.$$

Weiterhin gilt der folgende Satz: Ist für die Folge $f_1, f_2, \ldots$ von Funktionen der Klasse $\mathfrak{P}_\alpha$ in G der Grenzwert $\lim_{p,\,q\to\infty} \bar{D}_\alpha(f_p - f_q, G) = 0$, so gibt es in G eine Funktion f der Klasse $\mathfrak{P}'_\alpha$ derart, daß $\lim_{q\to\infty} \bar{D}_\alpha(f - f_q, G) = 0$ gilt. Hieraus folgt, daß $\mathfrak{P}_\alpha$ ein Banach-Raum ist, wenn äquivalente Funktionen identifiziert werden. Analog gilt: Ist für die Funktionenfolge $f_1, f_2, \ldots$ der Klasse $\mathfrak{P}_\alpha$ in G die Beziehung $\lim_{p,\,q\to\infty} \bar{D}_\alpha(f_p - f_q, I) = 0$ gültig für jedes in G liegende abgeschlossene n-dimensionale Intervall I, so gibt es eine Funktion f aus $\mathfrak{P}'$ in G, und aus $\mathfrak{P}'_\alpha$ in jedem offenen Teil R von G, dessen abgeschlossene Hülle zu G gehört, derart, daß $\lim_{q\to\infty} \bar{D}_\alpha(f - f_q, R) = 0$ gilt. Sind darüber hinaus die Funktionen $f_1, f_2, \ldots$ gleichmäßig stetig, und gehören sie in jedem Intervalle I zur Klasse $\mathfrak{P}''$, so konvergieren sie in jedem derartigen Intervall gleichmäßig gegen eine Funktion der Klasse $\mathfrak{P}''$. *G. Scorza Dragoni* (Padova).

Morrey, jr., C. B.: Functions of several variables and absolute continuity. 2. Duke math. J. **6**, 187—215 (1940).

Die Arbeit schließt sich an die vorangehend besprochene von Calkin an; es werden die gleichen Bezeichnungen verwendet. Verf. beginnt mit dem Begriff der Transformationen k-ter Klasse einer Menge T des Raumes $(y_1, \ldots, y_n)$ in eine Menge S des Raumes $(x_1, \ldots, x_n)$. θ sei eine Abbildung von T in S und werde durch die Gleichungen $x_j = x_j(y_1, \ldots, y_n)$, $j = 1, \ldots, n$ beschrieben; θ heißt von k-ter Klasse, wenn sie stetig und eineindeutig ist, und wenn die Funktionen $x_j(y_1, \ldots, y_n)$ und ihre Umkehrfunktionen in jedem abgeschlossenen Teilbereich von T bzw. S einer Lipschitzbedingung genügen; sind $x_j(y_1, \ldots, y_n)$ und ihre Umkehrfunktionen sogar in ganz T bzw. S einer Lipschitzbedingung unterworfen, so heißt θ regulär. Hierauf erweitert Verf. den Satz über die Ableitung zusammengesetzter Funktionen auf die verallgemeinerten Ableitungen einer Funktion, die mittels einer Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ der Klasse $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{P}''$ und mittels der eine Ableitung k-ter Klasse definierenden Funktionen $x_j(y_1, \ldots, y_n)$ zusammengesetzt ist; dann gehört auch die zusammengesetzte Funktion $f(x_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_n(y_1, \ldots, y_n))$ zur Klasse $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{P}''$, und ihre verallgemeinerte Ableitung nach y_k ist gleich $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} D_{x_i} f$, wobei für die Gültigkeit dieser letzten Gleichung vorausgesetzt werden soll, daß die $x_j(y_1, \ldots, y_n)$ total differenzierbar seien. Verf. beweist, daß eine in einem offenen Gebiet G zur Klasse $\mathfrak{P}$ gehörige Funktion einer Funktion der Klasse $\mathfrak{P}'$ in G äquivalent ist, welche bezüglich jedes aus dem ursprünglichen, mittels einer Transformation k-ter Klasse hervorgehenden Koordinatensystems ebenfalls zu $\mathfrak{P}'$ gehört. Hierauf definiert Verf., was unter den Randwerten einer in G zu $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{P}'$ gehörigen Funktion auf dem Rand G^* eines offenen Gebietes G

zu verstehen sein soll; diese Frage ist nicht trivial, da eine Funktion aus $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{P}'$ nicht stetig ist. Verf. beantwortet die Frage unter der Annahme, daß G von k-ter Klasse sei, d. h. im wesentlichen, daß $\overline{G} = G + G^*$ durch eine endliche Anzahl von Mengen überdeckbar sein soll, die aus einer n-dimensionalen Kugel oder Halbkugel durch eine Transformation der k-ten Klasse entstehen; er stützt sich dabei wesentlich auf zweckmäßige Fassungen der Konvergenz im Mittel. Ist $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine Funktion aus $\mathfrak{P}_\alpha$ in einem Gebiet der Klasse K, so gibt es eine in $\overline{G}$ Lipschitzsche Funktionenfolge $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots$ mit $\lim_{q\to\infty}(f_q - f, G) = 0$ und weiter eine Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ der Klasse L_α in G^* derart, daß $f_1, f_2, \ldots$ auf G^* im engeren Sinne L_α-konvergieren gegen φ; φ besitzt noch weitere Eigenschaften, die wir nicht wiedergeben; φ stellt die Randwerte von f auf G^* dar. Weiterhin dehnt Verf. die genannten Begriffe auf willkürliche beschränkte Bereiche aus, wobei er eine von Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik II, Kap. 7, § 1 (dies. Zbl. **17**, 397), verwendete Methode verfolgt. Weiter untersucht Verf. die Familien und Funktionenfolgen der Klassen $\mathfrak{P}_\alpha$ ($\alpha \geqq 1$) und $\mathfrak{P}$. Er führt den Begriff der schwachen Konvergenz in Übereinstimmung mit den entsprechenden Begriffen in einen Banachraum ein (wie oben gesagt, kann $\mathfrak{P}_\alpha$ als Banachraum gedeutet werden). Eine Familie von Funktionen $\{z(x_1, \ldots, x_n)\}$, für die die Größen $\overline{D}_\alpha(z, G)$ gleichmäßig beschränkt sind, ist bezüglich der schwachen Konvergenz kompakt, wenn $\alpha > 1$ ist. Dies gilt auch noch, wenn $\alpha = 1$ ist, unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Funktionen der Familie gleichmäßig absolut stetig sein müssen. Ist G von k-ter Klasse, so zieht die schwache Konvergenz von $z_1, z_2, \ldots$ gegen z im Raum $\mathfrak{P}_\alpha$ die stetige Konvergenz im Raum L_α der z_q gegen z in G und der Randwerte von z_q gegen diejenigen von z auf G^* nach sich. Schließlich gibt Verf. mehrere hinreichende Bedingungen für die Kompaktheit einer Funktionenfamilie im Raum $\mathfrak{P}_\alpha$ an. *G. Scorza Dragoni* (Padova).

Lebesgue, Henri: Une fonction continue sans dérivée. Enseignement Math. **38**, 212—213 (1942).

Remarquant que la fonction de Weierstrass conviendrait mal pour un enseignement élémentaire, l'A. se propose d'améliorer cet exemple qui, dit-il, „utilisant le développement en série de Fourier, a le grand avantage, de montrer que des fonctions non dérivables peuvent se présenter au cours d'un calcul d'allure tout à fait normale".

Soit, par exemple, la fonction, évidemment continue, $f(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} \sin 2^{n^2} x$, on a:

$$(1) \qquad \frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] = \sum_1^\infty \frac{1}{2^n h}[\sin 2^{n^2}(x+h) - \sin 2^{n^2} x].$$

La valeur absolue de la somme des $m-1$ premiers termes de (1) et au plus

$$\sum_1^{m-1} \frac{1}{2^n} 2^{n^2} = \sum_1^{m-1} 2^{n^2-n} < 2^{(m-1)^2-(m-1)+1} = 2^{m^2-3m+3},$$

car chaque terme 2^{n^2-n} est inférieur à la moitié du suivant. Donnant à h les quatre valeurs $h_1 = \frac{\pi}{2^{m^2+1}}$, $h_2 = \frac{-\pi}{2^{m^2+1}}$, $h_3 = \frac{3\pi}{2^{m^2+1}}$, $h_4 = \frac{-3\pi}{2^{m^2+1}}$, (1) se réduit à ses m premiers termes et la valeur absolue du $m^{\text{ième}}$ est au moins $2^{m^2-m+1} : 3\pi$, soit pour h_1 et h_4, soit pour h_2 et h_3, avec tel signe que nous voudrons. En résumé, on aura:

$$\left|\frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)]\right| > 2^{m^2-m+1} : 3\pi - 2^{m^2-3m+3}.$$

La fonction $f(x)$ n'a donc en aucun point une dérive déterminée, ni finie, ni infinie.

Frédéric Roger (Paris).

Kimball, W. S.: Partial derivatives of derivatives. 1. The partial derivatives of the slope of a straight line. Philos. Mag., VII. s. **30**, 190—222 (1940).

Verf. ist der Ansicht, eine neue Definition des Differentialquotienten gefunden zu haben, welche er als Definition des Physikers der klassischen Definition des Mathematikers gegenüberstellt. Er versucht, den Unterschied beider Begriffsbildungen und die Vorteile seines neuen Begriffes an Hand von Linienintegrale betreffenden Beispielen klarzulegen. Ref. ist nicht imstande, einen Unterschied der Begriffe feststellen zu können oder in der Begriffsbildung etwas Neues aufzufinden. *G. Hajós.*

Allgemeine Reihenlehre:

Lösch, Friedrich: Über die restringierte Limitierung von Doppelfolgen nach den Verfahren von Cesàro, Hölder und Euler-Knopp. Math. Z. 48, 105—127 (1942).

In der vorliegenden, Herrn K. Knopp zum 60. Geburtstag gewidmeten Arbeit greift Verf. z. T. auf die Dissertation des Jubilars zurück, indem er einige dort für die gewöhnliche Limitierung von einfachen Zahlenfolgen erzielte Ergebnisse auf die restringierte Limitierung von Doppelfolgen überträgt. Eine Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ heißt nach C. N. Moore „restringiert konvergent" zum Wert s $\left(\text{in Zeichen: } [\lim]_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu} = s\right)$, wenn für jedes ϑ aus $0<\vartheta<1$ die $s_{\mu\nu}$ mit (1) $\vartheta\nu<\mu<\nu/\vartheta$ den einzigen Häufungswert s besitzen; sie heißt „restringiert $\{A, B\}$-limitierbar" zum Wert S (in Zeichen: $\{A, B\}$-$[\lim]_{\mu,\nu\to\infty} s_{\mu\nu} = S$), wenn für ihre $\{A, B\}$-Transformation $S_{m,n} = \sum_{\mu}\sum_{\nu} a_{m\mu} b_{n\nu} s_{\mu\nu}$, die ihr mittels zweier den Toeplitzschen Bedingungen genügender Dreiecksmatrizen $a_{m\mu}$ und $b_{m\mu}$ zugeordnet wird, die Beziehung $[\lim]_{m,n\to\infty} S_{mn} = S$ besteht. Verf. führt darüber hinaus den Begriff der restringierten Beschränktheit ein. Die Doppelfolge $s_{\mu\nu}$ heißt „restringiert beschränkt", wenn der größte Häufungswert der Beträge aller der $s_{\mu\nu}$, deren Indizes den Ungleichungen (1) genügen, für $\vartheta \downarrow 0$ unterhalb einer endlichen Schranke bleibt; entsprechend heißt $s_{\mu\nu}$ „restringiert $\{A, B\}$-beschränkt", wenn ihre $\{A, B\}$-Transformation S_{mn} restringiert beschränkt ist. Die restringierte Konvergenz (bzw. $\{A, B\}$-Limitierbarkeit) zieht die restringierte Beschränktheit (bzw. $\{A, B\}$-Beschränktheit) nach sich. Es werden zunächst drei Permanenzsätze bewiesen von der gemeinsamen Form: Eine restringiert konvergente Doppelfolge $s_{\mu\nu}$ ist dann und nur dann auch restringiert $\{A, B\}$-limitierbar, wenn sie restringiert $\{A, B\}$-beschränkt ist. Ist die Doppelfolge $s_{\mu\nu}$ zugleich restringiert konvergent und restringiert $\{A, B\}$-limitierbar, so gilt $\{A, B\}$-$[\lim] s_{\mu\nu} = [\lim] s_{\mu\nu}$. Dies wird im einzelnen bewiesen: 1) für die Cesàroschen Verfahren, wenn $A = C_r$, $B = C_s$ (r, s ganz $\geqq 0$) und $(C_p) = \binom{m-\mu+p-1}{p-1} \Big/ \binom{m+p}{p}$ gesetzt wird; 2) für die Hölderschen Verfahren, wenn $A = H_r$, $B = H_s$ (r, s ganz $\geqq 0$), $(H_p) = (u^{(p)}_{m\mu})$ mit der rekursiven Beziehung

$$u^{(p)}_m = \frac{1}{m+1}\sum_{\nu=\mu}^{m} u^{(p-1)}_{\nu\mu}, \quad u^{(0)}_{m\mu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = m \\ 0 & \text{für } \mu \neq m \end{cases} \quad (p = 1, 2, \ldots)$$

ist; 3) für die Euler-Knoppschen Verfahren, wenn $A = E_r$, $B = E_s$ (r, s ganz $\geqq 0$) und $(E_p) = \binom{m}{\mu}(2^p - 1)^{m-\mu}/2^{pm}$ ($p = 0, 1, 2, \ldots$) ist. — Schließlich wird der Knopp-Schneesche Satz von der Äquivalenz der C- und H-Verfahren gleicher Ordnung auf die restringierte Limitierung von Doppelfolgen übertragen: Eine restringiert (C, r, s)-limitierbare Doppelfolge $s_{\mu\nu}$ ist dann und nur dann auch restringiert (H, r, s)-limitierbar, wenn sie restringiert (H, r, s)-beschränkt ist, entsprechend umgekehrt (r, s ganz $\geqq 0$). Ist die Doppelfolge $s_{\mu\nu}$ zugleich restringiert (C, r, s)- und (H, r, s)-limitierbar, so gilt

$$(C, r, s)\text{-}[\lim] s_{\mu\nu} = (H, r, s)\text{-}[\lim] s_{\mu\nu}.$$

Hiernach bleibt für restringierte Limitierung die Äquivalenz wenigstens in demselben abgeschwächten Sinne wie bei gewöhnlicher Limitierung von Doppelfolgen bestehen.
Garten (Leipzig).

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Foà, Alberto: Sulla sommabilità assoluta (C, α) delle serie di Fourier di una funzione sommabile L^p con $p > 1$. (*Bologna, 4.—6. IV. 1940.*) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 152—153 (1942).

Die Resultate der vorliegenden Note finden sich bereits in früheren Arbeiten des Verf. (siehe dies. Zbl. **20**, 112; **23**, 220; **25**, 159). *L. Cesari* (Pisa).

Wang, Fu-Traing: A note on the summability of lacunary partial sums of Fourier series. Quart. J. Math. **12**, 57—60 (1941).

$f(x)$ sei eine periodische Funktion der Periode 2π, die im Intervall $(0, 2\pi)$ L-integrierbar ist, und $S_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ seien die Partialsummen ihrer Fourierreihe. A. Kolmogoroff [Fundam. Math. **4**, 324—328 (1923)] hat die Existenz einer Funktion $f(x)$ bewiesen, für die die Folge (*) $S_{n^2}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, fast überall divergiert. Z. Zalcwasser (dies. Zbl. **15**, 255) hat hingegen festgestellt, daß für jede Funktion $f(x)$ die Folge (*) fast überall gegen die Funktion $f(x)$ $(C, 1)$-konvergiert; Verf. rundet dieses Ergebnis durch den Beweis ab, daß für jede Funktion $f(x)$ und für jedes $0 \leqq \alpha \leqq 1$ die Folge (*) fast überall (C, α)-konvergiert. *L. Cesari* (Pisa).

Sicardi, Francesco: Sulla convergenza in media di talune serie di funzioni reali di quadrato sommabile. Atti Accad. Sci. Torino **76**, 531—540 (1941).

$\{\varphi_n(x)\}$ sei ein vollständiges orthonormiertes System reeller, in T quadratisch summierbarer Funktionen:

$$\int_T \varphi_n \varphi_m dx = 0 \quad (n \neq m); \qquad \int_T \varphi_n^2 dx = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

$\{\psi_n(x)\}$ stelle eine weitere Folge reeller, in T quadratisch summierbarer Funktionen dar, welche den Bedingungen

$$\int_T \psi_n \varphi_m dx = 0, \qquad \int_T \psi_n \varphi_n dx = 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \int_T |\psi_n - \varphi_n|^2 dx < +\infty$$
$$(m = 1, 2, \ldots, n-1;\ n = 1, 2, \ldots)$$

genügen. Verf. beweist: Ist $f(x)$ eine in T quadratisch summierbare Funktion und ist die Folge der Konstanten $\{c_n\}$ durch das rekurrente System

$$\int_T f \varphi_1 dx = c_1; \qquad \int_T f \varphi_n dx = \sum_{\nu=1}^{n-1} c_\nu \int_T \psi_\nu \varphi_n dx + c_n \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

erklärt, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_T \left| f(x) - \sum\limits_{\nu=1}^{n-1} c_\nu \psi_\nu(x) \right|^2 dx = 0$, d. h. die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \psi_\nu(x)$ konvergiert im Mittel zweiter Ordnung gegen $f(x)$. *Giovanni Sansone* (Firenze).

Spezielle Orthogonalfunktionen:

Mogno, Roberto: Nota su una formula approssimata per il calcolo di $n!$ Metron **14**, 409—411 (1941).

Es wird bewiesen, daß der vom Verf. angegebene (Su una formula approssimata per il calcolo di $n!$ e le sue applicazioni [Metron **14**, 67—77 (1940)]) Näherungswert für $n!$,

$$n! \sim n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{6}}$$

unterhalb von $n!$ liegt. *M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

Sansone, G.: Su una immediata limitazione delle derivate dei polinomi di Legendre. Boll. Un. Mat. ital., II. s. **4**, 145—147 (1942).

Geht man von der Formel $(1 - 2xt + t^2)^{1/2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$, $|x| \leqq 1$, $|t| < 1$ aus, so kommt man üblicherweise (vgl. z. B. M. Picone, Appunti di analisi superiore 1940,

S. 237; dies. Zbl. 24, 23) durch k-malige Ableitung nach x zu

$$(1) \qquad (2k-1)!!\,(1-2xt+t^2)^{-(k+1/2)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+k}^{(k)}(x)\,t^n$$

und hieraus für $x=1$ zur Abschätzung $|P_n^{(k)}(x)| \leqq |P_n^{(k)}(1)| < n^{2k}/k!$, $(|x| \leqq 1)$. Hierzu ist der Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz der rechten Seite von (1) bei festem t in $|x| \leqq 1$ erforderlich. Verf. erbringt ihn elementar so: In $P_n(x) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_i x^{n-2i}$ ist $|a_i| \leqq 2^{2n-2}$, $|P_n^{(k)}(x)| \leqq 2^{2n-2} \cdot n \cdot \binom{n}{k} k!$, also konvergiert die rechte Seite von (1) für $|t| < \frac{1}{4}$ gleichmäßig in x. *Harald Geppert* (Berlin).

Leemans, J.: Sur les fonctions de Bessel. Mathesis **54**, 242—261 (1940).

Der erste Teil der Arbeit enthält Integrale, deren Integranden aus Zylinderfunktionen, Produkten von Potenzen, Logarithmen und Zylinderfunktionen oder auch Produkten von Zylinderfunktionen gebildet sind. Im zweiten Teil sind Integrale angegeben, die sich durch Zylinderfunktionen ausdrücken lassen. Die mitgeteilten Ergebnisse werden durchweg mittels partieller Integration und ähnlicher elementarer Hilfsmittel gewonnen. *Gran Olsson* (Trondheim).

Straubel, Rudolf: Unbestimmte Integrale mit Produkten von Zylinderfunktionen. Ing.-Arch. **13**, 14—20 (1942).

In dieser Mitteilung werden Integralbeziehungen und Integrale mit Produkten von Zylinderfunktionen für proportionales Argument angegeben, während die frühere Mitteilung ähnliche Beziehungen für gleiches Argument enthielt (dies. Zbl. **26**, 116). *Gran Olsson* (Trondheim).

Funktionentheorie:

● **Knopp, Konrad: Funktionentheorie. 2. Tl.: Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie. 5., neu bearb. Aufl. (Samml. Göschen. Bd. 703.)** Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1941. 130 S. u. 7 Fig. geb. RM. 1.62.

Die Überarbeitungen zur 5. Auflage des bewährten Büchleins betreffen die Bestimmung des Exponentialfaktors in der Produktdarstellung des Sinus (S. 28), einige Zusätze über die Gammafunktion (S. 47—49) und eine völlige Umgestaltung des § 14 über Stetigkeit und Differenzierbarkeit bei algebraischen Funktionen. *Ullrich.*

Sz. Nagy, Gyulá: Über einen Satz von J. Dieudonné. Mat. természett. Értes. **60**, 700—714 u. dtsch. Zusammenfassung 715—716 (1941) [Ungarisch].

In Erweiterung eines Ergebnisses von J. Dieudonné [Ann. of Math. (2) **31**, 79 bis 116 (1930)] beweist Verf. den folgenden Satz: $f(z)$ sei eine, für reelle z reellwertige, ganze Funktion vom Geschlecht 0 oder 1 mit nur reellen Nullstellen; a_k, a_{k+1} bezeichne zwei aufeinanderfolgende Nullstellen vom Abstand $\leqq 2R$, $R>0$. Ist Q eine weitere beliebige reelle Konstante, so betrachtet man die Funktion $F(z) = f(z) \cdot \exp[(Q+iR^{-1})z]$ und deren Ableitung $F'(z)$. Jede imaginäre Nullstelle von $F'(z)$ liegt oberhalb der reellen Achse, und folgende Bereiche der oberen Halbebene enthalten genau eine imaginäre Nullstelle von $F'(z)$: 1) der Halbkreis über $\overline{a_k a_{k+1}}$; 2) der kleinere Abschnitt eines Kreises mit Halbmesser R und $\overline{a_k a_{k+1}}$ als Sehne; 3) der Bereich, der von $\overline{a_k a_{k+1}}$ und einem Bogen der bizirkularen Quartik

$$(*) \qquad \{(x-a_k)^2+y^2\}^{-1} + \{(x-a_{k+1})^2+y^2\}^{-1} = R^{-1}y^{-1}$$

begrenzt wird. (*) begrenzt einen endlichen Bereich, der keine Nullstellen von $F'(z)$ enthält, selbst wenn $\overline{a_k a_{k+1}} > 2R$ ist. *Harald Geppert* (Berlin).

● **Ghermanescu, Michel: Les combinaisons exceptionnelles des fonctions entières et les fonctions algébroïdes. (Actualités scient. et industr. Nr. 889. Exposés sur la théorie des fonctions. Publiés par Paul Montel. XV.)** Paris: Hermann & Cie. 1940. 35 pag.

Zusammenstellung einiger Hauptpunkte aus Montels Theorie der linearen Scharen über einer Basis von $k+1$ ganzen Funktionen, über die Anzahl der darin enthaltenen

Ausnahmeverbindungen; Anwendung dieser Dinge bei der Untersuchung der Anzahl der Picardschen Ausnahmewerte einer k-deutigen Algebroiden — besonders unter Bezug auf Linearabhängigkeit der (ganzen) Koeffizienten $g_\varkappa(z)$ in der definierenden Gleichung $\sum_{\varkappa=0}^{k} g_\varkappa(z) w^\varkappa = 0$ der Algebroide. Verf. hat an einigen Punkten Verbesserungen anbringen können. Literaturübersicht. *Ullrich* (Gießen).

Helmer, Olaf: Theorems of the Picard type. Duke math. J. **6**, 38—47 (1940).

Verf. behandelt den Grenzexponenten der Nullstellenfolge für Linearkombinationen $A(z)f(z) + B(z)g(z)$ von zwei ganzen Funktionen f, g mit ganzen (wachstumskleineren) A, B. Die Ergebnisse sind ebenso wie die Methoden längst bekannt und weit überholt. Dem Verf. ist die Literatur unbekannt. [Vgl. vorstehendes Referat und die dort genannten Arbeiten. Ferner H. Cartan, Ann. École norm. sup., III. s. **45**, 255—346 (1929); P. Csillag, Math. Ann. **100**, 367—383 (1928); G. Valiron, dies. Zbl. **19**, 419, um nur einiges zu nennen.] *Ullrich* (Gießen).

Shah, S. M.: On integral functions of perfectly regular growth. J. London Math. Soc. **14**, 293—302 (1939).

Eine ganze Funktion $g(z)$ der endlichen Ordnung ϱ heißt nach Verf. von vollkommen regelmäßigem Wachstum, wenn der bei der Bestimmung ihres Wachstumstypus τ gewöhnlich erscheinende limsup sogar als lim vorhanden ist:

$$\tau = \lim \frac{\log M(r, g)}{r^\varrho}.$$

Verf. belegt durch Beispiele, daß daraus nicht die Existenz von

$$\lim \frac{n(r, 0)}{r^\varrho}$$

($n(r, 0)$ = Nullstellenanzahl von g) zu folgen braucht; auch die Umkehrung kann widerlegt werden. *Ullrich* (Gießen).

Hervé: Sur quelques applications de la notion d'ordre précisé. Bull. Sci. math., II. s. **66**, 17—24 et 31—48 (1942).

Gelfond (voir Gontcharoff, ce Zbl. **18**, 74) a montré qu'une fonction entière d'ordre fini ϱ, $\varrho \geqq \frac{1}{2}$, ayant une indicatrice de Lindelöf $h(\theta)$ finie dans l'angle $|\theta| \leqq \frac{\pi}{2\varrho}$ et telle que $h\left(\pm\frac{\pi}{2\varrho}\right) < \pi$, est identiquement nulle si elle s'annule aux points $a_n = n^{1/\varrho}$, n entier positif. L'A., employant la même méthode, étend le résultat au cas où l'on remplace les nombres ϱ par des ordres précisés généraux (voir Valiron, Lectures on the general theory of integral functions, Cambridge 1923, 64—67), ordres ne tendant pas nécessairement vers l'ordre lorsque la variable croît indéfiniment. Il donne d'abord, pour ces ordres $\varrho(x)$ (on a $\overline{\lim}\,\varrho(x) = \varrho$, $\underline{\lim}\,\varrho(x) = \beta$) des propositions étendant les propriétés des ordres L (pour lesquels $\beta = \varrho$). Il montre que: Si $\varrho(x)$ est tel que $\beta > \frac{1}{2}$, $\varrho < 4\beta$, si $f(z)$ est holomorphe et d'ordre inférieur ou égal à ϱ pour $|\arg z| < \gamma$ avec $2\beta\gamma > \pi$, si l'indicatrice de $f(z)$, soit $h(\theta)$, relative à cet ordre, ne prend pas la valeur $+\infty$ au voisinage de $\theta = \pm\frac{\pi}{2\varrho}$ et $\pm\frac{\pi}{2\beta}$, et s'il existe un nombre p, $\varrho < p \leqq 4\beta$, tel que

$$h(\theta) < \pi \varlimsup_{r=\infty} \frac{\cos\left[\left|\theta - \frac{\pi}{p}\right| \varrho(r)\right]}{\sin\frac{\pi\varrho(r)}{p}}, \qquad \frac{\pi}{2\varrho} \leqq |\theta| \leqq \frac{\pi}{2\beta},$$

alors, $f(z)$ est identiquement nulle si $f(a_n) = 0$, $a_n = \sigma(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, $\sigma(x)$ étant la fonction inverse de $x^{\varrho(x)}$. Des cas particuliers sont étudiés. L'A. généralise d'une façon analogue des théorèmes de Ganapathy Iyer (voir ce Zbl. **14**, 25, 267). Il compare ensuite les résultats obtenus par les deux méthodes: celle de Ganapathy Iyer demande une vérification de condition difficile à effectuer et serait moins féconde que celle de Gelfond. *G. Valiron* (Paris).

Ganapathy Iyer, V.: The Phragmén-Lindelöf theorem in the critical angle. J. London Math. Soc. **14**, 286—292 (1939).

In einem Winkelraum $\mathfrak{W}$ der Breite $\frac{\pi}{2\varrho}$ sei $g(z)$ regulär, auf dem Rande beschränkt $\leqq G$; innen gelte für das Betragmaximum

$$k = \underline{\lim} \frac{\log M(r, g, \mathfrak{W})}{r^{\varrho}} < \infty;$$

$k \leqq 0$ sichert die neuere Fassung des Phragmén-Lindelöfschen Satzes: $|g|$ ist dann in $\mathfrak{W}$ überall $\leqq G$. Ist aber $k > 0$, so kann durch Zusatzannahmen über $|g(z_n)|$ in einer passenden, nicht zu dünnen Punktfolge $z_n \to \infty$ in $\mathfrak{W}$ Gleiches erzielt werden. Verf. gibt darüber einen Satz, der sich auf die Verteilung der $\arg z_n$ anwenden läßt; in dem angenommenen Fall der Verknüpfung von Winkelbreite und Potenzexponent in r^{ϱ} brauchen diese nicht dicht zu liegen, wie bei früheren Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. **19**, 221). — Die Arbeiten von Junnila (dies. Zbl. **15**, 215) sind übersehen, in denen die Fragestellung eingehendst behandelt wird. *Ullrich* (Gießen).

Dufresnoy, Jacques: Sur les cercles de remplissage des fonctions méromorphes. C. R. Acad. Sci., Paris **214**, 467—469 (1942).

Aus einem Satze seiner Thèse [Ann. École norm. sup. **58**, 179—259 (1941); dies. Zbl. **25**, 322], der den sphärischen Flächeninhalt einer Riemannschen Fläche bei Scheibensatzvoraussetzungen schätzt, gewinnt Verf. eine Schätzung der Kugelableitung der erzeugenden, gebrochenen Transzendenten und von da aus Zugänge zu Eigenschaften im Ideenkreis der cercles de remplissage. *Ullrich* (Gießen).

Wolff, J.: Domaines d'univalence et d'étoilement des fonctions holomorphes à partie réelle positive dans un demi-plan. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **44**, 1210—1213 (1941).

$C(\lambda, \mu)$ bezeichne diejenige Klasse von Funktionen mit positivem Realteil in der rechten Halbebene, für welche λ die Winkelableitung ist, also $w(z) = \lambda z + H(z)$ und $\mu = \lim_{x \to \infty} x \cdot \Re H(x + iy)$; es ist $\lambda \geqq 0$, $0 < \mu \leqq \infty$; doch werde im folgenden die Gleichheit ausgeschlossen. Verf. zeigt, daß alle Funktionen der Klasse $C(\lambda, \mu)$ die Halbebene $x > \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$ sternig in bezug auf ∞ abbilden (also schlicht) und daß das nur bei

$$w(z) = \lambda z + \frac{\mu}{z - ki} \qquad -\infty < k < \infty$$

die größte Halbebene dieser Art ist. *Ullrich* (Gießen).

Ferrand, Jaequeline: Sur les conditions d'existence d'une dérivée angulaire dans la représentation conforme. C. R. Acad. Sci., Paris **213**, 638—640 (1941).

Ein ζ-Gebiet Δ mit erreichbarem Randpunkt über ∞, dessen konforme Abbildung $\zeta = \zeta(z)$ in eine rechte z-Halbebene mit $\infty \leftrightarrow \infty$ untersucht wird, heißt tauglich, wenn die Winkelableitung $\lim \zeta(z) : z$, bei Annäherung $z \to \infty$ im Winkel, vorhanden und von 0, ∞ verschieden ist [Grootenboer, Diss. Utrecht 1932 und Bull. Soc. Math. France **61**, 128—140 (1933); vgl. dies. Zbl. **7**, 121]. Dafür ist hinreichend, daß Δ ein taugliches Gebiet Δ_1 enthalte und selbst in einem solchen Δ_2 enthalten sei. Verf. konstruiert spezielle Δ_1 und Δ_2 und kommt durch deren geometrische Kennzeichnung zu neuen hinreichenden Bedingungen für die Existenz der Winkelableitung, die etwas weiter sind als die von Grootenboer und früheren Verff. gegebenen. Näheres muß bis zur Veröffentlichung in extenso zurückstehen. — Vgl. auch dies. Zbl. **25**, 260. *Ullrich* (Gießen).

Wolff, J.: La représentation conforme au voisinage d'un point frontière. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **45**, 169—170 (1942).

Der bekannte Satz über die Stetigkeit der Abbildungsfunktion in einem erreichbaren Randpunkte wird durch eine einfache Wendung des Beweises auf Primenden erweitert: Winkelgrenzwert ist der im Primende enthaltene erreichbare Randpunkt. *Ullrich* (Gießen).

Rengel, Ewald: Verzerrung des Randes bei schlichter konformer Abbildung. 1. Dtsch. Math. **6**, 370—378 (1942).

Rengel, Ewald: Verzerrung des Randes bei schlichter konformer Abbildung. 2. Dtsch. Math. **6**, 379—393 (1942).

Das Äußere des Einheitskreises werde schlicht und normiert abgebildet, in ein Gebiet $\mathfrak{U}$, dessen Komplement $C\mathfrak{U}$ sei. Enthält $C\mathfrak{U}$ gewisse, in bezug auf eine Achse symmetrische Bestandteile (z. B. Kreis, Ellipse, Kreisbogen, in II auch eine Strecke senkrecht zur Symmetrieachse), so lassen sich daraus quantitative Folgerungen über den Durchmesser des Bildrandes auf der Symmetrieachse herleiten, teils als Schätzungen, teils als scharfe Schranken. So folgt z. B.: Die Äußeren zweier Ellipsen, $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$, sind dann und nur dann schlicht normiert ineinander abbildbar, wenn für die Halbachsen $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ gilt. Verwandte Aussagen für die Abbildung von $|z| < 1$ und von zweifach zusammenhängenden Gebieten. *Ullrich* (Gießen).

Monna, A. F.: Sur quelques inégalités de la théorie des fonctions et leurs généralisations spatiales. 1. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **45**, 43—50 (1942).

Monna, A. F.: Sur quelques inégalités de la théorie des fonctions et leurs généralisations spatiales. 2. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **45**, 165—168 (1942).

Der Koebesche Verzerrungssatz läßt eine rein potentialtheoretische Formulierung zu, die es nahelegt, zu fragen, ob eine Übertragung auf die Potentialtheorien einer Dimension $n \neq 2$ möglich ist. Verf. zeigt an Hand der harmonischen Maße, warum das nicht möglich ist, von Ungleichungen für ganz enge Sonderfälle abgesehen, die zusammen mit mehreren einschlägigen Beispielen erörtert werden. *Ullrich.*

Martinelli, E.: Intorno alla teoria delle funzioni biarmoniche e delle funzioni analitiche di due variabili complesse. (*Bologna, 4.—6. IV. 1940.*) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 162—167 (1942).

Siehe eine vorangehende Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **25**, 405). Insbesondere wird die sehr schöne Formel

$$U(Q) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Phi} \left\{ u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^2} + \frac{\Delta_z^2 u}{r^2 \varrho^3 L(\varphi)} \right\} d\Phi$$

angegeben, die gestattet, die Werte einer biharmonischen Funktion U im Punkte Q eines Bereiches durch die Werte u auf dem Rande Φ des Bereiches auszudrücken (Analogon zur Greenschen Formel). n ist dabei die Normale im einzelnen Punkte von Φ, $\Delta_z^2 u$ ein Differentialoperator auf Φ, $\varphi = 0$ eine Darstellung des Randes, $L(\varphi)$ der Levische Ausdruck, ϱ^{-2} gleich der Quadratsumme der ersten Ableitungen von φ, r die Entfernung vom einzelnen Integrationspunkte bis Q. *Behnke.*

Spampinato, Nicolò: Caratterizzazione delle funzioni di variabile ipercomplessa analitiche secondo Ringleb fra le funzioni a derivata caratteristica. (*Bologna, 4.—6. IV. 1940.*) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 91—95 (1942).

Verf. beweist, daß die analytischen Funktionen einer Veränderlichen über einer reellen oder komplexen Algebra, die von Ringleb (dies. Zbl. **9**, 118) betrachtet wurden, eine Funktionenklasse darstellen, die in der der Funktionen mit charakteristischer Ableitung enthalten ist und die beiden Klassen der Funktionen mit totaler rechter bzw. linker Ableitung enthält, die vom Verf. in vorangehenden Arbeiten (dies. Zbl. **12**, 101 u. **13**, 340) betrachtet wurden. Ist $y(x) = \sum_1^n y_k(x_1, \ldots, x_n) u_k$ eine Funktion der hyperkomplexen Veränderlichen $x = \sum_1^n x_k u_k$, in der die $u_1, \ldots, u_n$ die Einheiten der Algebra bezeichnen, so sind innerhalb der Gesamtheit der Funktionen mit charakteristischer Ableitung die von Ringleb untersuchten Funktionen durch die Relation $J(y) = (\mu_z' \mu_q'')_{-1}$ gekennzeichnet, in der $J(y)$ die Funktionalmatrix der $y_1, \ldots, y_n$ und μ_z', μ_q' die linke bzw. rechte Matrix zweier allgemeiner Elemente z, q der Algebra bezeichnen. Weiterhin beweist Verf., daß die Klasse der Ringlebschen Funktionen mit der Gesamtheit der total derivierbaren Funktionen zusammenfällt, wenn die Algebra

kommutativ ist, daß sie sich hingegen mit der Klasse der Funktionen mit charakteristischer Ableitung deckt, wenn die Algebra regulär oder direktes Produkt einer regulären Algebra mit der Quaternionenalgebra ist. *E. Martinelli* (Roma).

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

Rainville, E. D.: The factorization of certain second order polynomial differential operators. Amer. Math. Monthly **48**, 519—521 (1941).

Verf. hat in einer vorangehenden Arbeit (dies. Zbl. **15**, 18) einige notwendige Bedingungen dafür angegeben, daß die Riccatische Differentialgleichung

$$z' = B_0(x) + B_1(x)z + B_2(x)z^2,$$

in der $B_0(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$ Polynome in x bedeuten, eine Polynomlösung besitzt. Verf. untersucht jetzt die Frage der Zerlegung des Differentialoperators $D^2+a_1(x)D+a_2(x)$ mit $a_1(x)$, $a_2(x)$ Polynomen in x, $D=d/dx$ in das symbolische Produkt $(D+b)(D+c)$ mit Polynomen b, c in x und zeigt, unter wesentlicher Heranziehung der Ergebnisse seiner früheren Note, daß eine derartige Zerlegung nicht möglich ist, wenn $\Delta = a_1^2 - 4a_0 + 2a_1'$ ein Polynom ungeraden Grades ist, während, falls Δ den Grad $2m$ hat und $\sqrt{\Delta} = x^m \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{m-\nu} x^{-\nu}$ gilt, die einzig mögliche Zerlegung für

$$c = \tfrac{1}{2}\left(a_1 \pm x^m \sum_{\nu=0}^{m} b_{m-\nu} x^{-\nu}\right)$$

eintritt. Verf. untersucht auch den Fall des Operators $a_0(x)D^2+a_1(x)D+a_2(x)$ mit $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ Polynomen in x. *Giovanni Sansone* (Firenze).

Müller, Max: Über die Existenz periodischer Lösungen bei gewissen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung. Math. Z. **48**, 128—135 (1942).

In einer Differentialgleichung $y'=f(x, y)$ oder, allgemeiner, in einem Differentialsystem $y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ sollen die rechten Seiten in x die Periode ω besitzen. In der Arbeit werden in Form von Ungleichungen Voraussetzungen angegeben, unter welchen das System mindestens eine periodische Lösung hat. Diese Voraussetzungen besagen, grob gesprochen, daß die rechten Seiten der Form $f_i = p_i(x)y_i + q_i(x)$ nicht zu sehr abweichen, wobei p_i, q_i die besagte Periode haben, und wo die über die Periode erstreckten Integrale der $p_i(x)$ alle ungleich Null sind. *E. Hopf* (Leipzig).

Barnett, I. A., and H. Reingold: Invariants of a system of linear homogeneous differential equations of the second order. Duke math. J. **6**, 141—147 (1940).

En employant le calcul des matrices, on donne une nouvelle méthode, plus simple que celle de Wilczinsky, pour trouver les invariants d'un système de n équations du second ordre

$$y_i'' + \sum_{j=1}^{n} L_{ij}(x)\, y_j' + \sum_{j=1}^{n} M_{ij}(x)\, y_j = 0, \qquad \left(y_i' = \frac{dy_i}{dx}\right)$$

par rapport au groupe projective

$$y_i = \eta_i + \sum_{j=1}^{n} K_{ij}(x)\eta_j .$$

Si l'on indique par L, M les matrices des coefficients L_{ij}, M_{ij}, on démontre que les premières n traces successives de la matrice $2L' - 4M + L$, sont des invariants indépendants et tous les invariants qui dépendent des L_{ij}, L_{ij}', M_{ij}, peuvent s'exprimer en fonction de ces invariants. Un résultat analogue est obtenu, concernant les invariants dépendants des L_{ij}, L_{ij}', L_{ij}'', M_{ij}, M_{ij}'. *G. Vranceanu* (Bucureşti).

Caligo, Domenico: Un criterio sufficiente di stabilità per le soluzioni dei sistemi di equazioni integrali lineari e sue applicazioni ai sistemi di equazioni differenziali lineari. (*Bologna, 4.—6. IV. 1940.*) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 177—185 (1942).

Inhaltsangabe der in dies. Zbl. **24**, 207 besprochenen Arbeit. *L. Cesari* (Pisa).

Sansone, Giovanni: Studi asintotici sulle equazioni differenziali lineari nel campo reale. (*Bologna, 4.—6. IV. 1940.*) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 39—55 (1942).

Der vorliegende Vortrag ist eine Darlegung von Problemen asymptotischer Natur

bei linearen Differentialgleichungen. Diese Probleme spiegeln sich in zahlreichen verschiedenen Zweigen der Mathematik und ihren Anwendungen zugehörenden Fragen wieder: asymptotische Berechnung der Eigenwerte und der zugehörigen Eigenfunktionen; Probleme der Eigenwerte, wie sie bei der Charakterisierung des asymptotischen Verhaltens der Integrale auftreten; asymptotische Berechnung der Lösungen von Differentialgleichungen für große Werte der unabhängigen Veränderlichen; asymptotische Reihen für die Integrale der Differentialgleichungen; lineare Differentialgleichungen, deren Koeffizienten sich für große Werte der unabhängigen Veränderlichen jenen einer gegebenen Differentialgleichung nähern; asymptotische Darstellung der Nullstellen der Lösungen von Differentialgleichungen usw. Erwähnt werden die klassischen Untersuchungen von Liouville, die asymptotischen Formeln von E. W. Hobson, welche in letzter Zeit von J. L. Walsh zum Studium der Konvergenz der Sturm-Liouvilleschen Reihen angewandt worden sind, einige Ergebnisse des Verf. über die Tschebychef-Hermiteschen und Tchebychef-Laguerreschen Gleichungen, die Stekloff-Liouvillesche Methode, die Methode der (semikonvergenten) asymptotischen Reihen, welche von Poincaré studiert worden sind und die zahlreiche Anwendungen gefunden haben. Endlich werden noch die Untersuchungen von U. Dini, O. Perron, A. Kneser über die Differentialgleichungen, deren Koeffizienten sich denen einer gegebenen Gleichung nähern, und jene von A. Wiman, S. Armellini, L. Tonelli, G. Sansone über die Gleichung $y''+A(x)y=0$, wenn $\lim_{x\to\infty} A(x) = +\infty$ gilt, dargelegt. Das Hervorheben allgemeiner Ideen, das die Leitlinie der vorliegenden Untersuchungen darstellt und sie untereinander verkettet (z. B. das immer wiederkehrende Zurückgreifen in vielen Fragen auf die Volterraschen linearen Integralgleichungen zweiter Art), machen diese Ausführungen interessant und aufschlußreich.

L. Cesari (Pisa).

Seifert, H.: Zur asymptotischen Integration von Differentialgleichungen. Math. Z. 48, 173—192 (1942).

Bei der genäherten Integration der Differentialgleichung

(1) $$y''+p(x)y'-[\varrho^2 q(x)+r(x)]y=0 \quad (\varrho \text{ ein positiver Parameter})$$

durch einen Ansatz

(2) $$y = e^{\varrho g(x)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\varrho^{-\nu}h_\nu(x)$$

für große ϱ erhält man bekanntlich, wenn $q(x)$ eine Nullstelle hat, zu beiden Seiten dieser Nullstelle für die Lösung Darstellungen verschiedenen Charakters (aperiodisch für $q>0$, oszillatorisch für $q<0$). Verf. untersucht, was man auf Grund der einen Darstellung über die andere aussagen kann. Dabei wird vorausgesetzt, daß q nur eine einfache Nullstelle hat. — I. In einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{G}$ der komplexen x-Ebene seien p, q, r regulär analytisch, und es sei $q(x)\neq 0$ in $\mathfrak{G}$. Geht man mit dem Ansatz (2) in (1) hinein, so erhält man für g und die h_ν ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung, die nacheinander gelöst werden können und

$$g=\int\sqrt{q}\,dx, \qquad h_0 = cq^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx} \qquad (c\neq 0)$$

ergeben. Die bei der Berechnung der h_ν auftretenden Integrationskonstanten und die Zweige der mehrdeutigen Funktionen werden irgendwie, aber fest gewählt. Für festes $m\geqq 0$ wird

$$\mathfrak{y}(x,\varrho) = e^{\varrho g}\sum_{\nu=0}^{m}\varrho^{-\nu}h_\nu$$

gesetzt. $\mathfrak{y}(x,\varrho)$ gilt als asymptotische Darstellung einer Lösung $y(x,\varrho)$ in einem Punkt x_0, wenn die beiden Gleichungen

$$y(x_0,\varrho)=\mathfrak{y}(x_0,\varrho)+\varrho^{-m-1}e^{\varrho g(x_0)}\cdot O(1), \qquad y'(x_0,\varrho)=\mathfrak{y}'(x_0,\varrho)+\varrho^{-m}e^{\varrho g(x_0)}\cdot O(1)$$

für alle hinreichend großen ϱ erfüllt sind. — Satz 1: Wird $y(x,\varrho)$ im Punkt x_0 durch $\mathfrak{y}(x,\varrho)$ asymptotisch dargestellt, so gilt dasselbe in jedem Punkt x_1 von $\mathfrak{G}$, den man

von x_0 aus auf einer in $\mathfrak{G}$ verlaufenden Kurve erreichen kann, längs welcher der Realteil von g nirgends abnimmt. — II. Jetzt seien p, q, r in einer Umgebung von $x = 0$ regulär analytisch und für reelle x reell; q habe in $x = 0$ eine einfache Nullstelle und sei für hinreichend kleine positive x selber positiv. $\mathfrak{G}$ sei ein Gebiet, das aus einem konvexen, den Punkt $x = 0$ enthaltenden Gebiet durch Entfernen der negativ-imaginären Achse entsteht und so gewählt ist, daß in ihm $q \neq 0$ und keine singuläre Stelle von p, q, r enthalten ist. Entsprechend den beiden möglichen Werten der Wurzel wird

$$g = g^+ = \int_0^x \sqrt{q(\xi)}\, d\xi, \qquad g^- = -g$$

gesetzt, wobei die Wurzel für positive ξ positiv gewählt wird. Entsprechend den beiden Funktionen g gibt es zwei Funktionenfolgen h_ν^+ und h_ν^-, die bei passender Wahl der Integrationskonstanten für $x > 0$ reelle Werte haben. Damit erhält man zwei asymptotische Lösungen

$$\mathfrak{y}^+(x, \varrho) = e^{\varrho g(x)} \sum_{\nu=0}^{m} \varrho^{-\nu} h_\nu^+(x), \qquad \mathfrak{y}^-(x, \varrho) = e^{-\varrho g(x)} \sum_{\nu=0}^{m} \varrho^{-\nu} h_\nu^-(x).$$

Sind x_p, x_n Punkte in $\mathfrak{G}$ auf der positiven bzw. negativen reellen Achse, so gilt Satz 2: Ist $y^-(x, \varrho)$ eine für reelle x reellwertige Lösung von (1), die im Punkt x_p asymptotisch durch $\mathfrak{y}^-(x, \varrho)$ dargestellt wird, so besteht für den Punkt x_n die Darstellung

$$y^-(x_n, \varrho) = 2\Re\mathfrak{y}^-(x_n, \varrho) + \varrho^{-m-1} \cdot O(1), \qquad y^{-\prime}(x_n, \varrho) = 2\Re\mathfrak{y}^{-\prime}(x_n, \varrho) + \varrho^{-m} \cdot O(1).$$

Satz 3: Ist $y^+(x, \varrho)$ eine für reelle x reellwertige Lösung von (1), die im Punkt x_n die Darstellung

$$y^+(x_n, \varrho) = \Re\mathfrak{y}^+(x_n, \varrho) + \varrho^{-m-1} \cdot O(1), \qquad y^{+\prime}(x_n, \varrho) = \Re\mathfrak{y}^{+\prime}(x_n, \varrho) + \varrho^{-m} \cdot O(1)$$

hat, so besteht für den Punkt x_p die Darstellung

$$y^+(x_p, \varrho) = \mathfrak{y}^+(x_p, \varrho) + \varrho^{-m-1} e^{\varrho g(x_p)} \cdot O(1), \quad y^{+\prime}(x_p, \varrho) = \mathfrak{y}^{+\prime}(x_p, \varrho) + \varrho^{-m} e^{\varrho g(x_p)} \cdot O(1).$$

Es folgt noch ein Satz über die gleichmäßige Gültigkeit der asymptotischen Darstellungen. *Kamke* (Tübingen).

Marchente, Emma: Teoremi di confronto per problemi al contorno relativi a sistemi di due equazioni differenziali del primo ordine. Rend. Semin. mat. Univ. Padova **12**, 81—88 (1941).

Verf. geht von einem von G. Scorza Dragoni (dies. Zbl. **26**, 222) bewiesenen Eindeutigkeitssatz für das System $y' = f(x, y, z)$, $z' = g(x, y, z)$ zu einem Satz über, der die Lösungen $y = p(x)$, $z = r(x)$ des Systems $y' = f(x, y, z)$, $z' = g(x, y, z)$ mit den Lösungen $y = \pi(x)$, $z = \varrho(x)$ des Systems $y' = \varphi(x, y, z)$, $z' = \psi(x, y, z)$ zu vergleichen gestattet. Sie setzt voraus, daß f, g, φ, ψ für $a \leqq x \leqq b$, $|y| < +\infty$, $|z| < +\infty$ definiert sind, f und φ einer Lipschitzbedingung in y, g und ψ einer solchen in z genügen; f bzw. g seien nicht abnehmend in z bzw. y; φ bzw. ψ nicht wachsend in z bzw. y; aus den Randbedingungen $p(a) \leqq \pi(a)$, $r(b) \leqq \varrho(b)$ leitet Verf. in (a, b) die Ungleichungen $p(x) \leqq \pi(x)$, $r(x) \leqq \varrho(x)$ ab. *Giovanni Sansone* (Firenze).

Zwirner, Giuseppe: Su un problema di valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie di ordine n. Rend. Semin. mat. Univ. Padova **12**, 114—122 (1941).

Verf. beweist durch eine topologische Bemerkung, die man Caccioppoli [Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. **13**, 498—502 (1931); dies. Zbl. **2**, 32] verdankt, einen von ihm (dies. Zbl. **25**, 324) und Cinquini (dies. Zbl. **22**, 339) angegebenen Existenzsatz über die Randwertaufgabe $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$, $y(x_1) = c_1, \ldots, y(x_n) = c_n$. *G. Scorza Dragoni* (Padova).

Muggli, H.: Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung. Comment. math. helv. **14**, 381—393 (1942).

L'Aut. étudie les équations différentielles d'ordre infini de la forme (*) $Lf(z) = g(z)$ où $Lf(z)$ est un opérateur à coefficients constants, $Lf(z) = l_0 f(z) + l_1 f'(z) + l_2 f''(z) + \cdots$ tel que $L(z) = l_0 + l_1 z + l_2 z^2 + \cdots$ soit une fonction entière d'ordre inférieur à un,

et $l_0 \neq 0$. Il déduit du théorème sur le minimum du module des fonctions entières et de résultats de Pólya [Math. Z. **29**, 549—640 (1929); p. 600] que, si la demi-droite $\Phi = \arg z = \text{const.}$, $|z| \geqq 0$, est telle que la distance des zéros de $L(-z)$ à cette demi-droite admette une borne inférieure positive, chaque intégrale

$$\Psi_{-n}(z) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty \frac{e^{-z\zeta}\zeta^{n-1}}{L(-\zeta)}\,d\zeta, \qquad \arg\zeta = \Phi, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

converge uniformément en z dans tout domaine complètement intérieur au demi-plan $R(ze^{i\Phi}) > 0$ et y définit une solution holomorphe de (*) correspondant à $g(z) = \frac{1}{z^n}$. Il s'ensuit que l'équation (*), où $g(z) = \sum_0^\infty a_n z^{-n-1}$ est holomorphe autour du point à l'infini, admet la solution

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n \Psi_{-n-1}(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-z\zeta}G(\zeta)}{L(-\zeta)}\,d\zeta, \qquad \arg\zeta = \Phi, \qquad G(\zeta) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n!}\zeta^n;$$

$G(z)$ est la transformée de Borel-Pólya de $g(z)$. A $g(z)$ correspond un diagramme conjugué de Pólya (loc. cit.) et une fonction de contact $k(\varphi)$; la solution $f(z)$ vaut pour $R(ze^{i\Phi}) > k(-\Phi)$. L'Aut. étudie la relation entre deux solutions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ correspondant à deux directions Φ_1 et Φ_2. On passe de l'une à l'autre par prolongement analytique si l'un des angles de Φ_1 et Φ_2 ne contient pas de zéros de $L(-z)$; on utilise les fonctions $f(z)$ relatives aux directions Φ comprises entre Φ_1 et Φ_2. Si l'angle de Φ_1 et Φ_2 est supérieur à π, le domaine de validité n'est pas simple (schlicht). L'Aut. étudie ensuite le cas particulier où les zéros de $L(z)$, tous simples, ont le même argument, et un écart mutuel borné inférieurement. *G. Valiron* (Paris).

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Kerékjártó, B. de: Sur les groupes intégrables d'ordre trois. Mat. természett. Értes. **60**, 683—698 u. franz. Zusammenfassung 699 (1941) [Ungarisch].

Deckt sich mit der in dies. Zbl. **26**, 224 besprochenen Arbeit des Verf.

Harald Geppert (Berlin).

Perron, Oskar: Über eine für die Invariantentheorie wichtige Funktionalgleichung. Math. Z. **48**, 136—172 (1942).

$\Phi(X)$ sei eine ν-reihige Matrix, deren (komplexe) Koeffizienten von den Elementen x_{pq} der n-reihigen Matrix X abhängen. Es wird nach allen in der Umgebung von $X = E$ analytischen Lösungen $\Phi(X)$ der Funktionalgleichung (1) $\Phi(X)\Phi(Y) = \Phi(XY)$ gefragt, d. h. der Matrizen $\Phi(X)$, deren Koeffizienten Potenzreihen in den Variablen $x_{pq} - e_{pq}$ sind. Eine spezielle Lösung von (1) ist immer (*) $|X|^A = e^{A\log|X|} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(A\log|X|)^k}{k!}$, A eine konstante Matrix. Beschränkt man sich auf irreduzible Lösungen, so muß stets $\Phi(E) = E$ sein [die Matrix E in $\Phi(E)$ ist n-reihig, die rechte ν-reihig]. Jede Lösung von (1) genügt einem Differentialgleichungssystem (2) $|X|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial x_{sq}} = \sum_{p=1}^n \frac{\partial|X|}{\partial x_{sp}}\Phi(X)A^{pq}$ $(s, q = 1, \ldots, n)$ mit konstanten ν-reihigen Matrizen A^{pq}. Genügen die A^{pq} den Integrabilitätsbedingungen (3) $A^{pq}A^{rs} - A^{rs}A^{pq} = e_{rq}A^{ps} - e_{ps}A^{rq}$ $(p, q, r, s = 1, \ldots, n)$, so hat (2) genau eine Lösung mit $\Phi(E) = E$, die auch Lösung von (1) ist. Sie läßt sich als Reihe schreiben:

$$\Phi(X) = E + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k!}\Big(\sum_{\substack{p_1,\ldots,p_k\\ q_1,\ldots,q_k}} A^{p_1q_1;\ldots;p_kq_k}(x_{p_1q_1} - e_{p_1q_1})\cdots(x_{p_kq_k} - e_{p_kq_k})\Big),$$

wobei die $A^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k}$ durch die Rekursionsformel

$$A^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k; p q} = A^{p q} A^{p_1 q_1; \ldots; p_k q_k} - e_{p_1 q} A^{p q_1; p_2 q_2; \ldots; p_k q_k} - e_{p_2 q} A^{p_1 q_1; p q_2; \ldots; p_k q_k} - \ldots - e_{p_k q} A^{p_1 q_1; \ldots; p q_k}$$

bestimmt sind. Durch genaue Untersuchung der Bedingungen (3) gelingt es, zu schärferen Aussagen zu kommen. Ist $\frac{\nu^2}{4} < n - 1$, so hat (1) keine anderen Lösungen mit $\Phi(E) = E$ als (*). Ist $\nu = 2$, so hat (1) nur im Fall $n = 2$ eine von (*) verschiedene irreduzible Lösung, nämlich $\Phi(X) = |X|^{\alpha} X$, α komplex (und die zu dieser Lösung durch Transformation mit einer festen, konstanten Matrix äquivalenten). Ist $\nu = 3$, so hat (1) nur für $n = 2, 3$ von (*) verschiedene irreduzible Lösungen. Im Fall $n = 2$

$$\Phi(X) = |X|^{\alpha} \begin{pmatrix} x_{11}^2 & 2x_{11}x_{12} & x_{12}^2 \\ x_{11}x_{21} & x_{11}x_{22} + x_{12}x_{21} & x_{12}x_{22} \\ x_{21}^2 & 2x_{21}x_{22} & x_{22}^2 \end{pmatrix},$$

im Fall $n = 3$ $\Phi(X) = |X^{\alpha}| X$ und $\Phi(X) = |X|^{\alpha+1} X'^{-1}$, wobei X' die zu X transponierte Matrix bedeutet. *G. Köthe* (Gießen).

Cimmino, Gianfranco: Su alcuni sistemi lineari omogenei di equazioni alle derivate parziali del primo ordine. Rend. Semin. mat. Univ. Padova **12**, 89—113 (1941).

Untersuchungen über lineare homogene Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die nur durch harmonische Funktionen gelöst werden können, wobei die Anzahl der unbekannten Funktionen und der unabhängig Veränderlichen dieselbe ist. Verf. beweist, daß alle Systeme dieser Art mit zwei Gleichungen und zwei unbekannten Funktionen den Cauchy-Riemannschen Gleichungen äquivalent sind; Systeme mit drei Gleichungen und drei unbekannten Funktionen existieren nicht. Den Schwerpunkt der Arbeit bilden Untersuchungen betreffend das folgende System (S):

$$X_x - Y_y + Z_z - T_t = X_y + Y_x - Z_t - T_z = X_z - Y_t - Z_x + T_y = X_t + Y_z + Z_y + T_x = 0,$$

wobei die diesbezüglichen Sätze des Verf. Eigenschaften der Lösungen von S beschreiben, die den klassischen Sätzen von Cauchy, Morera und Looman-Menchoff über analytische Funktionen entsprechen. Ähnliche Resultate werden ferner für das folgende System von $\frac{1}{2}n(n-1) + 1$ Gleichungen mit n unbekannten Funktionen $X^{(k)}$ bewiesen: $\partial X^{(k)}/\partial x_i = \partial X^{(i)}/\partial x_k$, $\sum_{k=1}^{n} \partial X^{(k)}/\partial x_k = 0$ $(i, k = 1, \ldots, n;\ i \neq k)$ und teilweise auch allgemeiner für Systeme mit m Gleichungen und n unbekannten Funktionen $(m \geqq n)$. *O. Borůvka* (Brünn).

Picone, Mauro: Applicazione della trasformata r^{pla} di Laplace ai problemi d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali con coefficienti costanti. (*Bologna, 4.—6. IV. 1940.*) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 221—229 (1942).

(1) $$E[u] = \sum_{k_1 + \cdots + k_r \leqq n} a_{k_1 \ldots k_r}(X) \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_r} u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_r^{k_r}}$$

sei ein linearer partieller Differentialausdruck (l. p. D.), dessen Vorzahlen von $x_1, \ldots, x_r$ (kurz: X) abhängen, $E^*[v]$ der ihm adjungierte. Verf. behandelt die Integration der Differentialgleichung (2) $E[u] = f(X)$ in einem dem r-stufigen Raume der x_h $(h = 1, \ldots, r)$ angehörigen Gebiete D mit dem Raumelement dX; der Rand von D heiße FD, und das Oberflächenelement von FD sei $d\sigma$. u, v, f seien in D und auf FD mit geeigneten Stetigkeits- und Integrierbarkeitseigenschaften versehen. Unter $l_1, \ldots, l_{n-1}$ verstehe man $n - 1$ von dem auf FD veränderlichen Punkte X ausgehende, FD berührende Achsen; man setze $(\partial^k u/\partial l_k^k)|^{FD} = U_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Die Greensche Formel zeigt dann, daß sich u in ganz D aus den U_k berechnen läßt (Satz $\mathfrak{U}$). Die Zahl der dazu nötigen U_k kann man noch einschränken, wenn es (Bedingung $\mathfrak{B}$) eine

passende Gesamtheit von Lösungen der Gleichung $E^*[u] = 0$ gibt. Verf. erörtert auch die Eindeutigkeit der Lösung von (2). — Seine weiteren Ausführungen gelten dem Sonderfalle, daß die a_k in (1) fest sind. Der Ansatz $v = \exp\left(-\sum_h \xi_h x_h\right)$ führt $E^*[v]$ in den Malwert von v und dem zu $E(u)$ gehörigen „kennzeichnenden Polynome" (k. P.) $P(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ über. Satz II läßt sich auf die Lösung von (2) anwenden. $u \exp\left(\sum \xi_h x_h\right)$ wird dabei in eine nach Polynomen der x_h fortschreitende Reihe entwickelt. Verf. gibt für u auch eine Fouriersche Reihe an. Einen neuen Gesichtspunkt liefert die endliche r-stufige Laplacesche Abbildung

$$W^*(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \int_D W(X) \exp\left(-\sum \xi_h x_h\right) dX.$$

Bedeuten E_k gewisse, im Oberflächenintegral der Greenschen Formel auftretende l. p. D. der Ordnung $n - 1 - k$, so erweist sich bei jeder Lösung u die ganze Funktion

$$f^*(\xi_1, \ldots, \xi_r) + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{F_D} U_k E_k [\exp\left(-\sum \xi_h x_h\right)] d\sigma$$

der komplexen Veränderlichen $\xi_1, \ldots, \xi_r$ als durch das k. P. teilbar. Die Frage, wann diese Teilbarkeit zum Vorhandensein der Lösung hinreicht, kann man in manchen Einzelfällen bejahen. Hier betrachtet Verf. den Fall, daß das k. P. in Faktoren ersten Grades zerfällt; die Teilbarkeit läuft dann darauf hinaus, daß die Bedingung $\mathfrak{B}$ erfüllt ist. *Koschmieder* (Graz).

Kostitzin, Vladimir A.: Sur l'équation de la chaleur dans le cas d'une sphère stratifiée avec des sources distribuées sur les surfaces de discontinuité. C. R. Acad. Sci., Paris **214**, 461—464 (1942).

Der Zustand der Himmelskörper, etwa der Erde und des Mondes, nötigt dazu, bei der Wärmeleitung Unstetigkeitsflächen und wärmeerzeugende Schichten in Betracht zu ziehen. Einen besonderen Fall dieser Art betrifft die vorliegende Arbeit, die sich zwei früheren Mitteilungen des Verf. über die Wärmeleitung (dies. Zbl. **26**, 225) anreiht. Er untersucht in ihr eine Kugel, die aus einem in sich gleichartigen kugeligen Kerne $\mathfrak{K}$ und einer ihn umgebenden, in sich gleichartigen Hülle $\mathfrak{H}$ mit derselben Mitte O besteht. Die Gleichung $\mathfrak{W}$ der Wärmeleitung sieht in $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{H}$ verschieden aus, da dort die Werte der spezifischen Wärme, der Wärmeleitfähigkeit und der Dichte voneinander abweichen. In den Strahlungsbedingungen äußert sich die Unstetigkeit des Wärmezustandes an der Trennungsfläche von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{H}$ und die Stetigkeit des Wärmeflusses. Verf. integriert die beiden Gleichungen $\mathfrak{W}$ wie a. a. O. Die Vorzahlen der nach Kugelfunktionen entwickelten Temperatur enthalten in $\mathfrak{K}$ Besselsche, in $\mathfrak{H}$ Besselsche und Neumannsche Funktionen einer dem Abstande von O verhältnisgleichen Größe [in der ersten der Gleichungen (12) lies zwischen Gleichheitszeichen und folgender Klammer $\mathfrak{D}_n r^{\frac{3}{2}} I_{n+\frac{1}{2}}$]. — Verf. schließt mit der Bemerkung, daß sich ähnlich Aufgaben behandeln lassen, bei denen mehr gleich- oder verschiedenartige Schichten vorkommen. *Koschmieder* (Graz).

Cimmino, G.: Nuove proprietà caratteristiche per le soluzioni delle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico del secondo ordine. (*Bologna, 4.—6. IV. 1940.*) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 198—204 (1942).

Verf. hat in früheren Arbeiten (vgl. dies. Zbl. **17**, 113; **18**, 25) die Lösung einer elliptischen Differentialgleichung $L(u) = 0$ durch eine Mittelwerteigenschaft (1) $u(x_0, y_0) = \int_{E_0(r)} K(x, y, x_0, y_0, r) u(x, y) dx dy$ gekennzeichnet, wo $E_0(r)$ das Innere der Ellipse $r^2 = c_0(x - x_0)^2 + 2b_0(x - x_0)(y - y_0) + a_0(y - y_0)^2$ bedeutet. Aus der Gültigkeit von (1) für $r \leqq \varrho$ folgt $[L(u)]_{x_0, y_0} = 0$. Verf. zeigt jetzt für den Fall, daß $L(1) = 1$ ist: Damit in einem gewissen Bereiche D $L(u) = 0$ ist, genügt es, daß (1) für jeden Punkt (x_0, y_0) in D und für nur eine zu (x_0, y_0) gehörige Ellipse, für welche

$K \geqq 0$ ist, gilt. Außerdem läßt sich mittels (1) durch einen direkten Grenzübergang ein Operator $L^*(u)$ definieren, der dem Operator von Blaschke bei $\Delta u = 0$ entspricht, und der auch bei bloßer Stetigkeit von u seinen Sinn behält. Allerdings treten dann auch die Ableitungen der Koeffizienten auf. Existiert $L(u)$, so ist $L^*(u) = L(u)$.

Tautz (Breslau).

Biben, Georges: Sur la généralisation de la méthode de Schwarz. C. R. Acad. Sci., Paris **214**, 350—352 (1942).

Aufstellung des Eigenwertproblems für die elliptische partielle Differentialgleichung $\Delta_2 \psi + tP\psi = 0$ $(P > 0)$ in einem Gebiete D einer beliebigen Mannigfaltigkeit bei verschwindenden Randwerten; Beweis der Ungleichung $\int\limits_D \Delta_1 \psi dT - t \int\limits_D P\psi^2 dT > 0$ für hinreichend kleine Parameterwerte t, wobei dT eine „tensorielle Dichte" darstellt.

G. Cimmino (Bologna).

Giunti, Vittoria: Sviluppi in serie tipo Fourier di un vettore, secondo autovettori di un certo problema, e applicazione all'integrazione dell'equazione lineare a derivate parziali del 4° ordine competente al moto delle sbarre vibranti, dotate d'inerzia rotatoria. Rend. Circ. mat. Palermo **63**, 65—90 (1941).

Für die gewöhnliche, vom Parameter λ abhängende Differentialgleichung 4. Ordnung $(\theta y'')'' + \{(\lambda A_1 - B_1) y'\}' - (\lambda A_0 - B_0) y = 0$ in einem Intervalle $a \leqq x \leqq b$, in welchem θ zweimal stetig differentiierbare, A_1, B_1 einmal stetig differentiierbare, A_0, B_0 stetige Funktionen und $\theta > 0$, $B_0 \geqq 0$, $B_1 \geqq 0$, $A_0 \geqq 0$, $A_1 \geqq 0$ ($A_0 A_1$ aber mindestens in einem Punkte > 0) sind, existieren bekanntlich unendlich viele positive Eigenwerte λ_k und zugehörige Eigenfunktionen $u_k(x)$ bei den Randbedingungen $u_k(a) = u_k'(a) = u_k(b) = u_k'(b) = 0$; zu jedem Eigenwert gehören höchstens zwei linear unabhängige Eigenfunktionen und bei passender Normierung gilt $\int\limits_a^b (A_1 u_h' u_k' + A_0 u_h u_k) dx = 0$ oder 1, je nachdem $h \neq k$ oder $h = k$ ist. Ist $y(x)$ in $a \leqq x \leqq b$ totalstetig und $y'^2(x)$ summierbar, so definiert Verf. als Fouriersche Reihe des Vektors $Y \equiv (y, y')$ nach den Eigenvektoren $U_k \equiv (u_k, u_k')$ das Reihenpaar $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \int\limits_a^b (A_1 u_k' y' + A_0 u_k y) dx \cdot u_k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \int\limits_a^b (A_1 u_k' y' + A_0 u_k y) dx \cdot u_k'$. Falls $y(x)$ in $a \leqq x \leqq b$ viermal stetig differentiierbar ist und die Randbedingungen $y(a) = y'(a) = y(b) = y'(b) = 0$ befriedigt, wird die Entwickelbarkeit des Vektors $Y \equiv (y, y')$ in eine Fouriersche Reihe des genannten Typus unter Benutzung der Greenschen Funktion festgestellt. Die Vollständigkeitsrelation $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left[\int\limits_a^b (A_1 y' u_k' + A_0 y u_k) dx \right]^2 = \int\limits_a^b (A_1 y'^2 + A_0 y^2) dx$ wird für jede totalstetige Funktion $y(x)$, für die $y'^2(x)$ summierbar ist, bewiesen. Als Anwendung wird die partielle Differentialgleichung $w_{xxxx} - B w_{xx} + A_0 w_{tt} - A_1 w_{xxtt} = f(x, t)$ (B, A_0, A_1 konstant) mit den Randbedingungen $w(0, t) = w_x(0, t) = w(l, t) = w_x(l, t) = 0$, $w(x_1, 0) = w_t(x_1, 0) = 0$ $(0 \leqq x \leqq l,\ 0 \leqq t)$ betrachtet. Nach Piconeschen Methoden (dies. Zbl. **23**, 41) und auf Grund einer Reihenentwicklung (im oben erklärten Sinne) nach den Eigenvektoren der gewöhnlichen Differentialgleichung $y'''' + (\lambda A_1 - B) y'' - \lambda A_0 y = 0$, wird die Eindeutigkeit der Lösung und (unter Annahme der Existenz) die folgende Lösungsformel hergeleitet: $w(x, t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^l f(\xi, \tau) \Gamma(x, t; \xi, \tau) d\tau d\xi$, wobei $\Gamma = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(x) u_k(\xi)}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k}(t - \tau)$ ist. Treten an die Stelle der Bedingungen $w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0$ die anderen $w(x, 0) = w(x, \tau) = 0$, so ist das Problem sicher nicht immer lösbar, sondern es treten Lösbarkeitsbedingungen auf, bei deren Erfülltsein die Lösung von gewissen willkürlichen Konstanten abhängt.

G. Cimmino.

Lewis, T.: On the solution of two dimensional problems of the Dirichlet and Neumann type. Quart. J. Math. **12**, 30—32 (1941).

Gegenstand der Note ist die Darstellung des komplexen Potentials für einen Zylinder von beliebigem Querschnitt, wenn die Stromfunktion auf seinem Rand willkürlich vorgeschrieben wird und im Unendlichen verschwindet. *Garten* (Leipzig).

Somigliana, C.: Il campo gravitazionale della terra. (*Bologna, 4.—6. IV. 1940.*) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 72—87 (1942).

Verf. entwickelt summarisch die Theorie des Erdschwerefeldes nach Newton, Clairaut, Stokes, Darwin, Helmert, Pizzetti und ihm selbst. Besonders verweilt er bei dem Problem der Bestimmung der Masse und der geometrischen Elemente des ellipsoidischen Geoids mittels Schweremessung an der Oberfläche des Geoids. Dieses zuerst von Clairaut betrachtete Problem kann heute wenigstens theoretisch als vollständig gelöst betrachtet werden. Verf. setzt das Geoid als Ellipsoid mit drei verschiedenen Achsen voraus und führt zu seiner Untersuchung neue transzendente Funktionen ein; die Reihenentwicklungen nach diesen wurden im Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo berechnet. *Mauro Picone* (Roma).

Makai, E.: A property of mean of harmonic functions. Rend. Circ. mat. Palermo **63**, 33—40 (1941).

Verf. beweist auf direkte Weise den von L. Ásgeirsson (dies. Zbl. **15**, 18) aus allgemeineren Betrachtungen abgeleiteten Satz: Liegen 2 konfokale $(n-1)$-dimensionale Ellipsoide E_1 und E_2 mit ihren Innengebieten $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ ganz in einem Gebiete des $(x_1, \ldots, x_n)$-Raumes, in dem eine reguläre Potentialfunktion $u(x_1, \ldots, x_n)$ gegeben ist, so sind die Mittelwerte von u über $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ einander gleich. Besonders einfach gestalten sich die Darlegungen im Falle $n = 2$, die auf P. Turàn zurückgehen; als Folgerung ergibt sich eine bemerkenswerte Formel, die ein Doppelintegral auf ein einfaches zurückführt. *Volk* (Würzburg).

Variationsrechnung:

Cinquini, Silvio: Sopra una nuova estensione dei moderni metodi del calcolo delle variazioni. (*Bologna, 4.—6. IV. 1940.*) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 129—132 (1942).

Die Ergebnisse vorliegender Mitt. sind in der in diesem Zbl. **24**, 44 besprochenen Arbeit enthalten. Verf. teilt einige singuläre Beispiele mit, in denen das Minimum des Integrals $\int_a^{+\infty} f(x, y(x), y'(x))\,dx$ nicht existiert, und gibt ohne Beweis einen Satz wieder, der auf die Existenz des Minimums in allgemeinen Fällen zu schließen erlaubt. *L. Cesari* (Pisa).

Amerio, Luigi: Su alcune questioni di calcolo delle variazioni relative agli integrali doppi. (*Bologna, 4.—6. IV. 1940.*) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 186—192 (1942).

Verf. teilt einige Ergebnisse mit, die er mittels der bekannten direkten Methode von Tonelli für die Doppelintegrale der Variationsrechnung

$$J_D[z] = \iint_D F(x, y, z, p, q)\,dx\,dy, \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

erhalten hat. Er gibt hinreichende Bedingungen an für die Halbstetigkeit und Existenzsätze für das absolute Extremum und das Extremum im Kleinen des Integrals $J_D[z]$. Resultate und Beweise finden sich bereits in der in dies. Zbl. **24**, 327 besprochenen Arbeit des Verf. *S. Cinquini* (Pavia).

Cinquini, Silvio: L'estremo assoluto degli integrali doppi dipendenti dalle derivate di ordine superiore. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **10**, 215—248 (1941).

Verf. betrachtet die Klasse $C^{(2)}$ der Funktionen $z = z(x, y)$, die zusammen mit ihren ersten Ableitungen p, q absolut stetig im Sinne von Tonelli sind (und, wie vom Verf. gezeigt und benutzt wird, auch zweidimensional absolut stetig im Sinne von

Vitali sind) und die ein endliches, positiv quasireguläres Lebesguesches Integral

$$J_D^{(2)}[z] = \iint_D F(x, y, z, p, q, r, s, t)\,dx\,dy,$$

also mit der Weierstraßschen Funktion $E \geqq 0$, besitzen. Gesucht ist das absolute Minimum von $J_D^{(2)}[z]$. Zu Beginn wird eine hinreichende Bedingung für die Halbstetigkeit von $J_D^{(2)}[z]$ angegeben. Dann folgen unter verschiedenen Voraussetzungen zehn Theoreme über die Existenz einer Extremalen in $C^{(2)}$, für die $J_D^{(2)}[z]$ sein absolutes Minimum annimmt. Den Schluß bilden zwei Sätze über die Existenz des Extremums bei nicht beschränktem Gebiet D. — Es liegt an der Kompliziertheit des hier behandelten Problems, daß die Voraussetzungen der Sätze einschränkender sind als beim Extremalintegral $J_D[z]$ mit nur ersten Ableitungen; die vom Verf. geleistete Übertragung der Tonellischen Beweismethode ist an sich sehr allgemein und einfach.

E. Hölder (Braunschweig).

Cinquini-Cibrario, Maria: Relazioni fra integrali doppi e soluzioni di equazioni a derivate parziali. (*Bologna, 4.—6. IV. 1940.*) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 112—118 (1942).

Bezeichnet man mit D ein ebenes Gebiet, mit $\bar{D}$ die abgeschlossene Hülle von D, mit $J(z)$ das Doppelintegral $\iint_D f(x, y, z, p, q)\,dx\,dy$, so gibt Verf. als hinreichende Bedingungen dafür, daß $J(z_0)$ einen endlichen Wert annimmt, wenn z_0 eine in D (nach Tonelli) totalstetige, in $\bar{D}$ stetige Lösung der Lagrangeschen Gleichung $f_z - \frac{\partial}{\partial x} f_p - \frac{\partial}{\partial y} f_q = 0$ bedeutet, die folgenden an: 1. $f(x, y, z, p, q) \geqq 0$ für xy in D, z, p, q beliebig; 2. $f_{pp}\lambda^2 + 2f_{pq}\lambda\mu + f_{qq}\mu^2 + 2f_{pz}\lambda\nu + 2f_{qz}\mu\nu + f_{zz}\nu^2 \geqq 0$ für xy in D, $z, p, q, \lambda, \mu, \nu$ beliebig; 3. $|f_z|$ beschränkt für xy in D, $|z|$ beschränkt, p, q beliebig; 4. $J(z)$ endlich für irgendeine in D totalstetige, in $\bar{D}$ stetige Funktion $z(x, y)$. Hieraus leitet Verf. einige Folgerungen her, die sich besonders auf die Existenz der Ableitungen der beiden ersten Ordnungen für eine totalstetige, in irgendeiner Funktionenklasse das genannte Integral zum Minimum machende Funktion beziehen. *G. Cimmino.*

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

San Juan, R.: Corrections à la note: Caractérisation de la transformation de Laplace. Portugaliae Math. **2**, 299 (1941).

Es werden einige Druckfehler einer früheren Note (dies. Zbl. **25**, 183) berichtigt und eine kurze Ergänzung angebracht. *H. Hadwiger* (Bern).

Fox, C.: A class of Fourier kernels. J. London Math. Soc. **14**, 278—281 (1939).

Wie bekannt, ist die Resultante $m(x)$ zweier Fourierkerne $h(x)$ und $k(x)$, die sich aus der Integralrelation

$$\int_0^x m_1\left(\frac{1}{u}\right) du = \int_0^\infty h_1(xu)\,k_1(u)\,\frac{du}{u^2}, \qquad h_1(x) = \int_0^x h(u)\,du$$

ergibt, unter gewissen Bedingungen wieder ein Fourierkern. Verf. betrachtet die zu

$$h(x) = u^{\frac{1}{2}} J_{2n+\frac{1}{2}}(u) \quad \text{und} \quad k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin u$$

bzw.

$$h(x) = u^{\frac{1}{2}} J_{2n+\frac{1}{2}}(u) \quad \text{und} \quad k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos u$$

gehörende Resultante und einige Entartungsfälle. *H. Hadwiger* (Bern).

Mohan, Brij: A note on self-reciprocal functions. Bull. Calcutta Math. Soc. **31**, 77—79 (1939).

Eine Funktion heiße von der Art R_μ, wenn sie bei der Hankelschen Abbildung J_μ ihr eigenes Bild ist. Seine früheren Ergebnisse (unter dem Namen Mehrotra, Brij Mohan veröffentlicht; vgl. dies. Zbl. **10**, 24) verallgemeinernd, beweist Verf.: Ist $f(x)$

von der Art R_μ, so ist

$$g(x) = \int_0^\infty y^{2\varrho} F(\tfrac{3}{4} + \varrho + \tfrac{1}{2}\nu, \tfrac{1}{2} + 2\varrho; \tfrac{3}{4} + \varrho + \tfrac{1}{2}\mu; -y^2) f(xy)\,dy$$

von der Art R_ν. Sonderfälle: I. $\varrho = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mu$. II. $\mu = \nu$. III. $\varrho = \frac{1}{4}$, $\mu = 2$, $\nu = 0$.

Koschmieder (Graz).

Nardini, Renato: Sulla risoluzione di un'equazione funzionale del tipo misto. (*Bologna, 4.—6. IV. 1940.*) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 193—197 (1942).

Verf. gibt an, in welcher Weise man auf die Untersuchung der Funktionalgleichung

$$(1) \qquad \psi(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_0^b K(x, y, z)\psi(x, z)\,dz + A\left[x, y, \psi\begin{pmatrix} x & b \\ t & z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right],$$

wo $\psi(x, y)$ die unbekannte Funktion ist, ein von Tonelli (Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra [Bull. Calcutta Math. Soc. **20**, 31—48 (1930)]) entwickeltes Verfahren ausdehnen kann. Er gibt Sätze über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (1) an, die unter entsprechenden Voraussetzungen wie bei Tonelli (a. a. O.) gelten.

S. Cinquini (Pavia).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Wuytack, F.: Verallgemeinerung des symbolischen Rechnens. 2. Wis- en Natuurkdg Tijdschr. **11**, 1—19 (1942) [Flämisch].

In der ersten Mitt. (dies. Zbl. **25**, 412) hat Verf. eine Definition des Produktes zweier analytischer Operatoren unter der Voraussetzung angegeben, daß die zugehörigen Reihen konvergent sind. Hier soll diese Produktdefinition derart erweitert werden, daß die assoziative Eigenschaft auch gilt, wenn die weitere Voraussetzung nicht erfüllt ist. Insbesondere definiert Verf. zunächst die Konvergenz einer unendlichen Reihe von Matrizen. Hierauf geht er von einer Produktdefinition zweier Operatoren durch das Produkt der zugehörigen unendlichen Reihen aus und stellt insbesondere die Bedingung dafür auf, daß ein Operator normal sei. Er beweist dann, daß normale Operatoren unter bestimmten Voraussetzungen analytisch sind. Solche normalen Operatoren haben nach einem nächsten Satz die assoziative Eigenschaft. Als Erweiterung der bisherigen Definition linearer Integraloperatoren untersucht Verf. jetzt Operatoren, bei denen die Kernfunktion des Integrals vorgegeben ist. Für den Fall, daß zwei nichtanalytische Operatoren gegeben sind, definiert Verf. ihre Summe. Nach einer weiteren Verallgemeinerung der Operatorendefinition und der entsprechenden Summendefinition wendet Verf. sich der kommutativen Eigenschaft zweier Operatoren zu und behandelt den Fall analytischer und nichtanalytischer Operatoren. Im Falle von Integro-Differentialoperatoren und gemischten Integraloperatoren sind neue Begriffe der bedingten Kommutativität erforderlich. Schließlich betrachtet Verf. die Inversion von Operatoren. Zunächst behandelt er die Inversion analytischer Operatoren, welche analytisch oder nichtanalytisch sein dürfen. Diese Inversionsregeln werden z. B. auf Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art angewandt.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Lijn, Gaston van der: Les polynomes abstraits. Bull. Sci. math., II. s. **64**, 55—80, 102—112, 128—144 et 163—196 (1940).

Verf. definiert Polynome in Abelschen Gruppen G mit Werten, die ebenfalls Abelschen Gruppen G' ohne Elemente endlicher Ordnung entnommen sind. Bedeutet $\Delta_\omega^m f(x)$ $(x, \omega \in G)$ die m-te Differenz von $f(x)$, und nennt man Lösungen der Gleichung $\Delta_\omega^{n+1} f(x) = 0$ Polynome und Lösungen von $\Delta_\omega^n f(x) = n! \cdot f(\omega)$ Monome n-ten Grades, dann ist die n-te Differenz eines Polynoms n-ten Grades unabhängig von x und bezüglich ω ein Monom n-ten Grades. Jedes Polynom läßt sich eindeutig als Summe von Monomen darstellen. $f(x)$ heißt arithmetisch homogen, wenn $f(k \cdot x) = k^r \cdot f(x)$ für positive ganze Zahlen k gilt. Diese Eigenschaft ist kennzeichnend für Monome. Diese sind außerdem multilinear, d. h. es gibt eine Funktion $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, linear

in jedem Element x_i, so daß $K \cdot f(x) = \varphi(x, x, \ldots, x)$ gilt mit passendem ganzzahligem K. Die Definition des Verf. ist bei entsprechender Spezialisierung der Räume mit den Definitionen von Fréchét, Michal und Banach äquivalent. In Kap. 2 werden $G = L$ und $G' = L'$ als lineare Räume angenommen, in welchen aber nicht bloß die Multiplikation mit reellen Zahlen, sondern mit Elementen zweier Körper C, C' der Charakteristik 0 definiert ist. Dann lassen sich die Polynome als Lösungen linearer Differenzengleichungen in L mit Koeffizienten aus C kennzeichnen. Weiterhin wird jetzt vorausgesetzt, daß die Räume L, L' normiert sind. C bzw. C' ist Körper der reellen oder komplexen Zahlen. Der Begriff der Stetigkeit wird in bekannter Weise eingeführt. Das Beispiel von Hamel beweist die Existenz unstetiger Polynome. Für die Stetigkeit ist z. B. lokale Beschränktheit ausreichend. Im 4. (letzten) Kapitel wird gezeigt, daß sich ein Polynom $f(x)$ durch Integrale darstellen läßt, wenn der Raum L ein Raum von gewissen reellen Funktionen $x(\xi)$ über einem abstrakten Raume $\mathfrak{X}(\xi)$ mit gegebenem, absolut additivem, reellem Maße ist. L' ist ein Banachscher Raum B. Ist $U(x)$ eines der Monome, in die sich $f(x)$ zerlegen läßt, so ist

$$U(x) = \int_{\mathfrak{X}^n} x(\xi_1) x(\xi_2) \cdots x(\xi_n) d\varphi(E).$$

$\mathfrak{X}^n$ ist Produktraum, $\varphi(E)$ ein vollständig additives Maß über Mengen E aus $\mathfrak{X}^n$ mit Werten aus dem B-Raume B. Die Theorie des auftretenden Integrals wird kurz skizziert. *Tautz* (Breslau).

Wavre, Rolin: Sur les valeurs propres des opérateurs hermitiens. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 24) **59**, 61—63 (1942).

Énoncés (sans démonstration) de résultats obtenus par la méthode d'itération. Si A est un opérateur hermitien, A^n son $n^{\text{ème}}$ itéré, l'Au. pose

$$l_n(g_0) = \|A^n(g_0)\| / \|A^{n-1}(g_0)\|,$$

et considère la limite $l(g_0)$ de la suite croissante des $l_n(g_0)$, ainsi que le produit infini $\varpi(g_0) = \prod_{n=1}^{\infty} (l_n(g_0)/l(g_0))$. Il distingue les cas $\varpi(g_0) = 0$, $\varpi(g_0) \neq 0$; dans le second, l^2 est la valeur propre de l'opérateur A^2. Le cas où $\varpi(g_0) \neq 0$ pour tout élément $g_0 \neq 0$ de l'espace comprend celui où l'opérateur A, ou un de ses itérés, est complètement continu, mais est plus général; dans ce cas, les valeurs propres de A^2 forment un ensemble dénombrable, bien ordonné dans le sens décroissant. *J. Dieudonné* (Nancy).

Boas jr., R. P.: A trigonometric moment problem. J. London Math. Soc. **14**, 242—244 (1939).

En s'appuyant sur une inégalité de Paley et Wiener et sur un théorème de F. Riesz, l'A. établit les deux théorèmes suivants, dont il donnera des applications à la théorie des fonctions intégrales de type exponentiel: Soit λ_n une suite de nombres réels tels que $|\lambda_n - n| < L$, où $L < 1/\pi^2$. Théorème 1: Si $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2$ converge, il existe une fonction $f(t)$ telle que $a_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda_n t} f(t)\,dt$ et que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < A_1 \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2$. — Théorème 2: Si $a_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda_n t} f(t)\,dt$, alors $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < A_2 \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$; A_1 et A_2 sont deux fonctions de la seule quantité L. *J. Leray* (Paris).

Corput, J. G. van der: A remarkable family. 3. On analytical solutions of functional systems. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **45**, 129—135 a. 217—224 (1942).

L'A. se donne k fonctions $l_\varkappa(x)$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$) et n fonctions $g_\varrho[x, y_{\varkappa,\nu}]$ ($\varrho = 1, 2, \ldots, n$; $\nu = 1, 2, \ldots, n$); il cherche n fonctions $f_\nu(x)$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) vérifiant le système $g_\varrho[x, f_\nu(l_\varkappa(x))] = 0$; il suppose que les fonctions données et inconnues sont analytiques et s'annulent quand tous leurs arguments sont nuls. Il prouve par la méthode des fonctions majorantes que le problème ainsi posé possède une solution

unique quand les hypothèses suivantes sont vérifiées: $|l'^0_\mu(0)| < |l'_1(0)|$ pour $\mu = 2, 3, \ldots, k$; $\Delta \neq 0$; $D_\alpha \neq 0$ pour $\alpha = 1, 2, \ldots$; Δ et D_α étant les valeurs prises pour $x = y_{\varkappa,\nu} = 0$ par les déterminants de termes généraux $\frac{\partial g_\varrho}{\partial y_{1,\nu}}$ et $\sum_\varkappa \frac{\partial g_\varrho}{\partial y_{\varkappa,\nu}} (l'_\varkappa)^\alpha$. Puis l'A. généralise ce théorème d'existence: il remplace la variable x par un système de t variables et les fonctions inconnues $f_\nu(x)$ par des fonctions de t arguments; d'autre part, au lieu de supposer $D_\alpha \neq 0$ pour $\alpha = 1, 2, \ldots$, il suppose seulement $D_\alpha \neq 0$ quand α est un entier supérieur à un entier $\Omega > 0$. Commun. **1** et **2** Euklides, Groningen **18**, 50—64, 65—78 (1941).

J. Leray (Paris).

Praktische Analysis:

Uhler, Horace S.: Recalculation and extension of the modulus and of the logarithms of 2, 3, 5, 7 and 17. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **26**, 205—212 (1940).

Nach dem bekannten Gedanken von J. C. Adams [Proc. Roy. Soc. London **42**, 22—25 (1887)] werden die natürlichen Logarithmen der 6 Zahlen $\frac{3}{2}$, $\frac{120}{119}$, $\frac{289}{288}$, $\frac{1225}{1224}$, $\frac{2500}{2499}$, $\frac{4375}{4374}$ dazu verwendet, die Logarithmen von 2, 3, 5, 7, 17 zu berechnen und sie durch eine Kontrollbeziehung zu prüfen. Verf. berechnet sie, ebenso wie *M*, auf 330 Stellen (gegenüber 273 bei Adams) unter mehrfacher Prüfung und verwendet die gleichen Zahlen zur Berechnung des arc tang von $\frac{1}{451}$, $\frac{1}{577}$, $\frac{1}{2449}$, $\frac{1}{4999}$, $\frac{1}{8749}$ auf 215 bis 330 Stellen.

Harald Geppert (Berlin).

Størmer, Carl: Ein Übungsbeispiel über den Fundamentalsatz der Algebra für die Vorlesungen. Norsk. mat. Tidsskr. **24**, 33—42 (1942) [Norwegisch].

Für $f(z) = z^5 + (3 + i)z^2 - 1 = 0$ wird durchgeführt: Eingrenzung der Wurzeln, Betragerniedrigung für f, Wurzeln als Kurvenschnitte, Newtonsche Näherungsformel, Verlauf der Betragfläche, Kurven $|f| = \text{konst.}$, $\arg f = \text{konst.}$ (Schicht- und Fallinien).

Ullrich (Gießen).

Fischer, T.: Abgleichung des Polarplanimeters. Allg. Vermess.-Nachr. **54**, 197 bis 199 (1942).

Der Flächenmaßstab eines Diagramms soll in einfacher Weise so berücksichtigt werden, daß $F = n \cdot k \cdot a \cdot u$ wird (F = Fläche, k = ganzzahlige Konstante, a = Fahrarmlänge, u = Rollenumfang). a wird durch Probe-Umfahrung so bestimmt, daß sich ein geeignetes k ergibt.

v. Guérard (Darmstadt).

Behrbohm, Hermann: Kurze Bemerkung zur graphischen Lösung gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung. Z. angew. Math. Mech. **22**, 57—58 (1942).

Hat man sich bei gegebener Differentialgleichung $y' = f_0 y + f_1$ erst einmal die Funktionen $F_0(x) = \exp \int_a^x f_0(t)\,dt$ und $F_1(x) = \int_a^x \frac{f_1(t)}{F_0(t)}\,dt$ verschafft, so daß man numerisch oder graphisch über sie verfügt, so läßt sich, ohne daß man die Integralkurven selbst zeichnet, zu jedem x der Funktionswert y, den bei vorgegebener Anfangsbedingung $y(x_0) = x_0$ die Lösung der Differentialgleichung annimmt, auf sehr einfache Weise graphisch ermitteln: Zeichnet man in einem rechtwinkligen y, z-System die einparametrige Geradenschar $y + F_0(x)z - F_0(x)F_1(x) = 0$ (Parameter x) und geht von der Stelle y_0 der y-Achse aus parallel zur z-Achse bis zum Schnitt mit der Geraden (x_0) der Schar, von da aus parallel zur y-Achse bis zum Schnitt mit der Geraden (x) der Schar und dann wieder parallel zur z-Achse bis zur y-Achse zurück, so trifft man dort auf den gesuchten Wert $y(x)$. — Es werden noch Abwandlungen der Konstruktion, durch die das Zeichnen der Geradenschar ersetzt werden kann, angegeben und ein Beispiel aus der Flugmechanik durchgeführt. (Vgl. den Aufsatz „Graphische Konstruktion von Sturzfluggeschwindigkeiten" des Verf. [Luftfahrtforschg. **17**, 167ff. (1940)].)

Heinrich (Breslau).