Werk

Titel: Analysis

Jahr: 1942

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0026|log19

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

beliebigen reellen Zahlen ξ_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ rationale Zahlen p_ν/q mit gemeinsamen Nenner q, für die $\eta_\nu = |\xi_\nu - p_\nu/q| \leqq 1/qm$ und $q \leqq m^n$ ist. Verf. zeigt, daß in diesem Satz die obere Schranke für q durch $q \leqq m^n - 2^n + 1$ ersetzt werden kann. Der Beweis baut auf der üblichen Schlußweise des Dirichletschen Schubfachprinzips auf, aber es wird dabei der Fall getrennt betrachtet, wo alle $q\xi_\nu \pmod 1$ in eines der 2^n Eckfächer des n-dimensionalen Würfels zusammenfallen. Das Ergebnis ist besonders günstig für kleine Werte von m. Am Beispiel $n = 2$, $m = 3$ wird gezeigt, daß die so gefundene Schranke 6 sogar durch 5 ersetzt werden darf. Im Anschluß wird eine obere Schranke l_n für den kleinsten Nenner q untersucht, für welchen $\eta_1 + \cdots + \eta_n \leqq 1/q$ für alle Systeme ξ_ν wird. Nach dem bewiesenen Satz ist stets $l_n \leqq n^n - 2^n + 1$. Diese Schranke kann für $n = 3$ verkleinert werden; es wird gezeigt, daß $l_3 = 2$ ist. *Pisot.*

Analysis.

Allgemeines:

Tricomi, Francesco: Formule asintotiche. Saggiatore **2**, 72—82 (1941).

Verf. gibt eine elementare, durch viele Beispiele belegte Einführung in die Grundbegriffe der Asymptotik, erläutert das Rechnen mit dem Symbol $\simeq [f(x) \simeq g(x), (x \to x_0)$, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = 1]$, das i. a. nicht additiv ist [eine hinreichende Bedingung, damit aus $f_1 \simeq g_1$, $f_2 \simeq g_2$ folge $f_1 + f_2 \simeq g_1 + g_2$, ist z. B. $g_1 = O(g_1 + g_2)$ oder $f_1 = O(f_1 + f_2)$], die Symbole O und o und ihre Rechenweisen, den Poincaréschen Begriff der asymptotischen Darstellung und verwendet diese Begriffe für die Moivre-Stirlingsche Reihe und den Primzahlsatz. Zum Schluß kommt er auf die merkwürdige, schon in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **22**, 114) entdeckte Diskrepanz zwischen Landaus asymptotischer und Verf. wahrscheinlichkeitstheoretischer Bestimmung der Anzahl der als Summe zweier ganzer Quadrate darstellbaren ganzen Zahlen unterhalb x zu sprechen. *Harald Geppert* (Berlin).

Mengenlehre:

Bernays, Paul: A system of axiomatic set theory. Pt. 2. J. Symbolic Logic **6**, 1—17 (1941).

Nachdem im ersten Teile der Arbeit (s. dies. Zbl. **19**, 294) die grundlegenden Axiome für die Mengen (sets) und Klassen (classes) eingeführt wurden, erfolgt hier der weitere Ausbau. Die Funktion wird eingeführt als eine Klasse von Paaren, bei der verschiedene Elemente stets verschiedene erste Glieder haben, und entsprechend die umkehrbar eindeutige Abbildung. Das Auswahlaxiom findet dann die folgende Formulierung: Jede Klasse C von Paaren hat eine Unterklasse, die eine Funktion ist und den gleichen Vorbereich wie C hat. Es folgen Axiome, die angeben, wann eine Klasse durch eine Menge repräsentiert werden kann, d. h. wann es zu einer Klasse eine Menge mit genau den gleichen Elementen gibt. Diese Axiome entsprechen den üblichen Axiomen der Aussonderung, der Vereinigung, der Potenzmenge und der Ersetzung. Es folgt das Unendlichkeitsaxiom in der folgenden Fassung: Es existiert eine umkehrbar eindeutige Abbildung, deren Vorbereich durch eine Menge repräsentiert wird und die eine Klasse auf eine eigentliche Unterklasse abbildet. Als letztes Axiom wird ein beschränkendes Axiom hinzugefügt: Unter den Elementen einer nicht leeren Klasse A gibt es stets eine solche Menge, welche mit A kein Element gemeinsam hat. Aus diesem Axiom folgt u. a., daß eine Menge a nicht Element von sich selbst sein kann, da anderenfalls die Klasse mit a als einzigem Element dem beschränkenden Axiom widersprechen würde. — Anschließend folgt die Begründung der Theorie der Ordinalzahlen, die bemerkenswerterweise geschieht, ohne den Begriff der Ordnung vorauszusetzen. Man versteht unter einer transitiven Menge eine Menge c, so daß jedes Element eines Elementes von c wieder ein Element von c ist. Eine Ordinalzahl ist dann eine transitive Menge der Art, daß, wenn a und b irgendwelche Elemente

der Menge sind, immer entweder a Element von b oder b Element von a ist. Die Ordinalzahlen sind durch die Relation $a \subset b$ (a ist eine eigentliche Untermenge von b) geordnet. Von den Ordinalzahlen ergibt sich der Zugang zur Zahlentheorie durch Einführung des Begriffes der endlichen Ordinalzahl. Eine Ordinalzahl heißt endlich, wenn sie selbst und jede kleinere entweder 0 sind oder auf eine andere Ordinalzahl unmittelbar folgen. Es werden dann nicht nur die Peanoschen Axiome befriedigt, sondern es kann auch die gewöhnliche Methode, zahlentheoretische Funktionen durch rekursive Definitionen einzuführen, durch ein ableitbares Existenztheorem gesichert werden, in ähnlicher Weise, wie es schon Dedekind gemacht hat. Die Theorie der endlichen Klassen und endlichen Mengen kann aus der Theorie der endlichen Ordinalzahlen erhalten werden. *Ackermann* (Burgsteinfurt).

Sierpinski, Waclaw: Sur les espaces (V) séparables universels. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. **10**, 357—358 (1940).

Un espace quelconque E est dit espace (V) séparable si l'on a donné une famille dénombrable F de sous-ensembles de E, et si l'on a fait correspondre à tout élément p de E une sous-famille $F(p)$ de F d'une façon arbitraire, sous la seule condition que chaque ens. de $F(p)$ contienne p [les ens. de $F(p)$ sont dits les voisinages de p]. — Un sous-ens. Q d'un espace (V) séparable E devient évidemment un espace (V) séparable si l'on prend pour voisinages dans Q d'un élément arbitraire p de Q les ens. $Q \cdot V$ où les V sont les voisinages de p dans E. On dit alors que l'espace Q est contenu dans E, ou bien que E contient Q. — Deux espaces (V) séparables, E_1 et E_2, sont dits congruents s'il existe une transformation biunivoque φ de E_1 en E_2, qui transforme tout voisinage d'un élément arbitraire p dans E_1 en un voisinage de $\varphi(p)$ dans E_2, et si la transformation inverse φ^{-1} jouit de la même propriété en échangeant les rôles de E_2 et de E_1. — Un espace (V) séparable de puissance m est dit universel de puissance m s'il contient, pour tout espace (V) séparable de puissance m, un espace congruent à ce dernier. On a les deux théorèmes suivants 1 et 2, la démonstration du théorème 2 étant beaucoup plus difficile que celle du théorème 1: 1. Il existe, pour tout nombre cardinal $m \geqq 2^{\aleph_0}$, un espace (V) séparable universel de puissance m. 2. Il existe un espace (V) séparable universel de puissance $\aleph_0$. — De là résulte que si l'hypothèse du continu est vraie, il existe un espace (V) séparable universel de n'importe quelle puissance infinie. *A. Appert* (Rennes).

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

Ridder, J.: Der Bairesche Satz bei Intervallfunktionen. Nieuw Arch. Wiskde **21**, 57—58 (1941).

In einem Raume, dessen Punkte abgeschlossene Intervalle $[a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n]$ eines n-dimensionalen euklidischen Raumes R_n sind, wird eine vollständige Metrik mit Hilfe der Abstandsdefinition $\operatorname{Max}\{|a_j^{(1)} - a_j^{(2)}|, |b_j^{(1)} - b_j^{(2)}|\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, eingeführt. Manche Eigenschaften von Punktfunktionen im R_n kann man dadurch auf Intervallfunktionen im R_n übertragen. Als Beispiel wird der Bairesche Satz über die Charakterisierung der Funktionen erster Klasse angedeutet. *J. Novák* (Brünn).

Appert, Antoine: Mesure dans l'espace à une infinité de coordonnées. Rev. Ci., Lima **41**, 297—308 (1939).

Es wird ein neues, translationsinvariantes Maß im Raume R_ω, d. h. im Raum der Punkte mit abzählbar vielen reellen Koordinaten x_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, definiert, für welches der Einheitswürfel C_ω das Maß 1 besitzt. Gegenüber den bisher aufgestellten diesbezüglichen Maßen ist dieses Maß erklärt auch für die Mengen des R_ω, welche nicht in C_ω enthalten sind. Zunächst wird, in Verallgemeinerung eines von B. Jessen [Acta math. **63**, 249—323 (1934); dies. Zbl. **10**, 200] eingeführten Begriffes, als normales (ω-) Intervall (Normalintervall) J erklärt jedes ω-Intervall $(a_\nu \leqq x_\nu \leqq b_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots;\ -\infty < a_\nu \leqq b_\nu < +\infty)$, für welches $|J| = \prod_{\nu=1}^{\infty}(b_\nu - a_\nu)$

endlich und von Null verschieden ist. Als äußeres Maß $\overline{L}(\mathfrak{M})$ einer Menge $\mathfrak{M} \subset R_\omega$ wird alsdann erklärt die untere Grenze der Summen $\sum_\varrho |J_\varrho|$ für alle Überdeckungen $\sum_\varrho J_\varrho$ von $\mathfrak{M}$ mit abzählbar vielen Normalintervallen J_ϱ; falls keine solche Überdeckung existiert, sei $\overline{L}(\mathfrak{M}) = +\infty$. Sodann wird der Reihe nach gezeigt: $\overline{L}(\mathfrak{M})$ ist ein äußeres Maß im Sinne der Theorie von Carathéodory (Gött. Nachr. **1914**, 404—426); für Normalintervalle J gilt $\overline{L}(J) = |J|$; jede abzählbare Menge ist Nullmenge; jede Borelsche (d. h. im kleinsten, alle ω-Intervalle enthaltenden σ-Körper enthaltene) Menge ist meßbar. *Haupt* (Erlangen).

Roussel, André: Sur l'approximation locale des fonctions continues. Bull. Soc. Math. France **69**, 97—132 (1941).

Étant données une fonction continue $f(x)$ à étudier et une fonction continue $\varphi(h)$ qui décroît et s'annule en même temps que h, l'A. établit la possibilité d'approcher $f(x+h)$ à $\varepsilon\varphi(h)$ près: $\Delta f = f(x+h) - f(x) = g(x,h) + \varepsilon\varphi(h)$ ($\varepsilon \to 0$ avec h), au moyen de fonctions $g(x,h)$ de diverses natures. (1°) Fonction entière en z et $1/h$, grâce à l'intégrale

$$\psi(\lambda, x) = \frac{1}{\lambda\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-\left(\frac{t-x}{\lambda}\right)^2} dt.$$

(2°) Par l'intermédiaire d'une ligne polygonale d'une infinité de côtés,

$$g(x,h) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(x) \sin nh$$

(h de signe déterminé), ou encore série de polynomes en h qui approchent les $\sin nh$. (3°) $f(x)$ étant supposée de période 2π, $\Delta f = g(x,h) + \nu\varphi(h)$ ($|\nu| < 1$ quand $h \to 0$) avec $g(x,h) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n (a_n \Delta \cos nx + b_n \Delta \sin nx)$, $\lambda(h)$ ne dépendant que de φ et du module de continuité de f, les a_n et b_n étant les constantes de Fourier de f, $g(x,h)$ étant holomorphe sur l'axe réel, sauf peut-être pour h nul. (4°) Par une représentation à la Lebesgue de la ligne polygonale déjà considérée,

$$g(x,h) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n (\beta_n - \beta_{n+1} + |h - \beta_{n+1}| - |h - \beta_n|),$$

où les β_n sont des constantes et $\alpha_n = \frac{1}{2}[f(x+\beta_{n+1}) - f(x+\beta_n)] : (\beta_{n+1} - \beta_n)$. L'A. termine en indiquant le principe d'une étude de la dérivabilité des fonctions d'une variable, qui s'appuie sur ce lemme: Si $f(x+h) - f(x) = \frac{A_1}{1!} h + \cdots + \frac{A_n}{n!} h^n + \varepsilon h^n$ où f et les A_i sont des fonctions continues de x, ε tendant uniformément vers zéro avec h, alors $f^{(i)}(x) = A_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). *Frédéric Roger* (Paris).

Ridder, J.: Über den Greenschen Satz in der Ebene. Nieuw Arch. Wiskde **21**, 28—32 (1941).

Die Greensche Formel $\iint_B \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_C p\,dx + q\,dy$ kann durch Anwendung folgenden Hilfssatzes bewiesen werden: $p(x,y)$ und $q(x,y)$ seien reelle, in einem von einer ebenen geschlossenen rektifizierbaren Jordankurve C begrenzten, abgeschlossenen Bereiche $B + C$ stetige Funktionen; weiter sei $f(x,y)$ eine reelle, über B summierbare Funktion. Gilt für jedes abgeschlossene, in B liegende Intervall I (mit dem Rande R) die Beziehung $\iint_I f(x,y)\,dx\,dy = \int_R p\,dx + q\,dy$, so ist auch $\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_C p\,dx + q\,dy$. — Es werden drei Korollare hinzugefügt.

J. Novák (Brünn).

Levi, Beppo: Sull'intuizione geometrica negli elementi di calcolo. Rend. Accad. Sci. Ist. Bologna, N. s. **42**, 49—58 (1938).

Dans le compte rendu donné ici (voir ce Zbl. **17**, 249), de l'ouvrage de B. Levi, Analisi matematica algebrica ed infinitesimale, j'avais dit que l'exposé est assez abstrait. Relevant ce propos, l'aut. développe ses idées sur le rôle de l'intuition géométrique dans l'exposition des éléments du calcul et montre la part qu'il lui a donnée dans son livre. Il parle notamment de l'introduction de la notion de nombre, de la définition de la dérivée et de son interprétation géométrique, de l'introduction des nombres complexes dans le calcul, des différentielles. Notons que l'aut. signale qu'il a donné de la règle de dérivation des fonctions inverses une illustration géométrique au moyen de la tangente qui ne se trouve pas ailleurs "mentre non saprei citare un trattato in cui a tale illustrazione sia dato rilievo". En fait, cette interprétation se trouve par exemple dans Haag, Algèbre et Analyse, Paris 1914, 86, et Courant, Vorl. über Diff.-Int. Rechn. I, Berlin 1927, 116. *G. Valiron* (Paris).

Allgemeine Reihenlehre:

Wendelin, H.: Einheitliche Ableitung der bekannten Beziehungen zwischen den Grenzen und Limites der Folgen (x_n), (y_n), $(x_n + y_n)$ und $(x_n \cdot y_n)$. Dtsch. Math. **6**, 265—266 (1941).

Ridder, J.: Über k-fache approximative Differentiation von Reihen. Nieuw Arch. Wiskde **21**, 25—27 (1941).

L'A., generalizzando una precedente elementare proposizione di E. Landau [Arch. Math. Phys., III. s. **26**, 69—70 (1917)] e L. Neder [Math. Z. **28**, 30—34 (1928)], dimostra il seguente teorema: Se $f_n(x)$, $a \leqq x \leqq b$, $n = 1, 2, \ldots$, sono funzioni dotate ovunque in (a, b) di derivata k-ma approssimativa $f^{(k)}_{n\,ap}$, se la serie $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ (*) converge in almeno k punti distinti di (a, b), se la serie $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(k)}_{n\,ap}(x)$ converge uniformemente in (a, b), allora anche la serie (*) converge uniformemente in (a, b), la funzione $F(x)$ è dotata ovunque in (a, b) di derivata k-ma approssimativa e $F^{(k)}_{ap}(x) = G(x)$. La dimostrazione è immediata per il fatto che, nelle ipotesi del teorema e per una osservazione di A. Khintchine [Fundam. Math. **9**, 212—279 (1927); p. 243] le funzioni $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, sono dotate, da una di esse in poi, ovunque in (a, b), di derivata k-ma ordinaria e perciò il teorema è ricondotto, in sostanza, alla proposizione elementare di E. Landau e L. Neder. [Una estensione, analoga a quella qui ottenuta del teorema elementare citato, dovrebbe potersi ottenere anche per un recente e assai riposto teorema di derivazione per serie di L. Tonelli (questo Zbl. **1**, 205). Rec.] *L. Cesari* (Pisa).

Weber, C.: Potenzreihenzerlegung von $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{etg} x$. Z. angew. Math. Mech. **21**, 252—253 (1941).

Die beiden Entwicklungen werden sehr einfach gewonnen auf Grund der Beziehung $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{ctg} 2x$; es ergibt sich so eine Rücklaufformel, die die ersten Beiwerte unmittelbar liefert, ohne die Bernoullischen Zahlen heranzuziehen. *Ullrich.*

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Steffensen, J. F.: The poweroid, an extension of the mathematical notion of power. Acta math. **73**, 333—366 (1941).

Unter einem Ω-Symbol (Omegasymbol) versteht Verf. (Interpolation, Baltimore 1927, § 18) einen Operator, der die distributive, die kommutative und die assoziative Eigenschaft besitzt; ein θ-Symbol (Thetasymbol) ist ein Omegasymbol, das, auf ein Polynom angewendet, ein Polynom geringeren Grades, auf einen festen Wert angewendet, Null liefert. Wird, wie üblich, $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, $\nabla f(x) = f(x) - f(x-1)$, $\delta f(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x - \frac{1}{2})$, $Df(x) = f'(x)$, $Ef(x) = f(x+1)$, $\square f(x) = \frac{f(x+\frac{1}{2}) + f(x-\frac{1}{2})}{2}$ gesetzt, so sind Δ, ∇, δ, D Thetasymbole, E und $\square$ Omegasymbole, aber keine Theta-

symbole. — 1. Es werden Thetasymbole der Gestalt $\theta = \varphi(D) = \sum_1^\infty k_\nu D^\nu$ $(k_1 \neq 0)$ betrachtet. $x^{\overline{r}|}$ ist ein Polynom vom Grad r, das durch folgende Eigenschaften bestimmt ist: $x^{\overline{0}|} = 1$, $0^{\overline{r}|} = 0$ $(r > 0)$ und $\theta x^{\overline{r}|} = r x^{\overline{r-1}|}$. Für $x^{\overline{r}|}$ wird, ausgehend vom Wort power = Potenz, die Benennung poweroid eingeführt; sie ist ins Deutsche kaum zu übertragen und möge daher mit „Scheinpotenz" übersetzt werden. [Für $\theta = \Delta$ ist $x^{\overline{r}|} = x^{(r)} = x(x-1)\cdots(x-r+1)$; für $\theta = D$ ist $x^{\overline{r}|} = x^r$.] Setzt man $x^{\overline{r}|}$ als Polynom mit unbestimmten Koeffizienten an, so läßt es sich aus $x^{\overline{r-1}|}$ berechnen. Für jedes Polynom $f(x)$ kann eine Art Maclaurinsche Entwicklung $f(x) = \sum_0^\infty \frac{\theta^\nu f(0)}{\nu!} x^{\overline{\nu}|}$ aufgestellt werden. 2. Ein unmittelbarer Ausdruck für die Scheinpotenzen ist $x^{\overline{\nu}|} = \theta'\left(\frac{D}{\theta}\right)^{\nu+1} x^\nu$, wo $\theta' = \frac{d\theta}{dD} = \varphi'(D)$ gesetzt ist, ein andrer $x^{\overline{\nu}|} = x\left(\frac{D}{\theta}\right)^\nu x^{\nu-1} = x\psi^\nu(D)x^{\nu-1}$, wo ψ aus $\theta = \frac{D}{\psi(D)}$ $(\psi(0) = 0)$ zu entnehmen ist. Für ein Polynom $f(x)$ ist $\theta x f(x) = x\theta f(x) + \theta' f(x)$. 3. Rücklaufend kann man $x^{\overline{\nu+1}|}$ aus $x^{\overline{\nu}|}$ nach der Formel $x^{\overline{\nu+1}|} = x\frac{dD}{d\theta} x^{\overline{\nu}|}$ berechnen. Erweitert man die Symbolik, indem man $\frac{x^{\overline{\nu}|}}{x} = x^{\overline{\nu}|-1}$ setzt, so ist $\theta' x^{\overline{\nu+1}|-1} = x^{\overline{\nu}|}$, $\theta x^{\overline{\nu+1}|-1} = \nu x^{\overline{\nu}|-1}$. 4. Sind θ und θ_I zwei Thetasymbole, $x^{\overline{\nu}|}$ und $x_I^{\overline{\nu}|}$ die zugehörigen Scheinpotenzen, so gelten Umwandlungsformeln wie $x^{\overline{\nu}|} = \frac{d\theta}{d\theta_I}\left(\frac{\theta_I}{\theta}\right)^{\nu+1} x_I^{\overline{\nu}|}$, $x^{\overline{\nu}|-1} = \left(\frac{\theta_I}{\theta}\right)^\nu x_I^{\overline{\nu}|-1}$ und ähnliche, die für $\theta_I = D$, $x_I^{\overline{\nu}|} = x^\nu$ in die vorhin angeführten übergehen. 5. Die Umkehrung θ^{-1} von θ ist nicht eindeutig, so wie D^{-1}, die unbestimmte Integration, es nicht ist. Setzt man aber $\overline{D} f(x) = \int_0^x f(x)\,dx$, so ist $I = \overline{D}\psi(D)$ eine eindeutige Umkehrung von θ. Es ist $x^{\overline{\nu}|} = \nu!\, I^\nu 1$. 6. Es ist $e^{xD} = E^x = \sum_0^\infty \frac{x^{\overline{\nu}|}}{\nu!}\theta^\nu$. Setzt man $\zeta = \varphi(t) = \frac{t}{\psi(t)} = \sum_1^\infty k_\nu t^\nu$, so ist $e^{xt} = \sum_0^\infty \frac{x^{\overline{\nu}|}}{\nu!}\zeta^\nu$ die erzeugende Funktion der Scheinpotenzen $x^{\overline{\nu}|}$. Mit Hilfe der Bürmannschen Reihe, aber auch auf anderm Weg erhält man für die Scheinpotenzen die Darstellungen $x^{\overline{\nu}|} = D^\nu_{t=0} e^{xt}\frac{d\zeta}{dt}\left(\frac{t}{\zeta}\right)^{\nu+1}$ und $x^{\overline{\nu}|} = x D^{\nu-1}_{t=0} e^{xt}\left(\frac{t}{\zeta}\right)^\nu$ $(\nu > 0)$. Die Umkehrung von $\zeta = \varphi(t)$ lautet $t = \sum_1^\infty 0^{\overline{\nu}|-1}\frac{\zeta^\nu}{\nu!}$. 7. Für den Operator $\theta = \frac{E^\beta - 1}{\beta}$ ergibt sich als Scheinpotenz die allgemeine Fakultät: $x^{\overline{\nu}|} = x(x-\beta)(x-2\beta)\cdots\left(x-\overline{\nu-1}\beta\right)$, insbesondre für $\beta = 1$, $\theta = \Delta$, $x^{\overline{\nu}|} = x^{(\nu)} = x(x-1)\cdots(x-\nu+1)$, für $\beta = -1$, $\theta = \nabla$, $x^{\overline{\nu}|} = x^{(-\nu)} = x(x+1)\cdots(x+\nu-1)$. Allgemeiner ergibt sich für $\theta = E^\alpha\frac{E^\beta - 1}{\beta}$ als Scheinpotenz

$$x^{\overline{\nu}|} = x(x-\nu\alpha-\beta)(x-\nu\alpha-2\beta)\cdots\left(x-\nu\alpha-\overline{\nu-1}\beta\right),$$

insbesondere für

$$\alpha = -\frac{1}{2},\ \beta = 1,\ \theta = \delta,\ \frac{d\theta}{dD} = \square,\ x^{\overline{\nu}|} = x^{[\nu]} = x\left(x+\frac{n}{2}-1\right)\left(x+\frac{n}{2}-2\right)\cdots\left(x-\frac{n}{2}+1\right).$$

Für $\lim\beta = 0$ kommt man auf $\theta = E^\alpha D$, $x^{\overline{\nu}|} = x(x-\nu\alpha)^{\nu-1}$, die „Abelsche Scheinpotenz". 8. Für $\theta = e^{\alpha D + \beta D^2} D$ werden die Scheinpotenzen $x^{\overline{\nu}|} = x(2\nu\beta)^{\frac{\nu-1}{2}} H_{\nu-1}\left(\frac{\nu\alpha - x}{\sqrt{2\nu\beta}}\right)$, wo H die Hermiteschen Polynome mit der erzeugenden Funktion $e^{-zt-\frac{t^2}{2}} = \sum_0^\infty H_n(z)\frac{t^n}{n!}$

bedeutet. 9. Ähnliche Aussagen für Polynome $G_n(x, y)$ mit der erzeugenden Funktion $e^{yt-x(e^t-1)} = \sum_0^\infty G_n(x, y)\frac{t^n}{n!}$. 10. Der Fall $\theta = E^\alpha D(1+\beta D)^\nu$ mit einigen Sonderfällen. 11. Die Bernoullischen Polynome sind erklärt durch $B_\nu(x) = \frac{D}{\Delta}x^\nu$. Allgemeiner sei $B_\nu^{[\lambda]}(x) = \left(\frac{D}{\Delta}\right)^\lambda x^\nu$. Zum Operator $\theta = \left(\frac{\Delta}{D}\right)^\lambda D$ gehören die Scheinpotenzen $x^{\overline{\nu}} = xB_{\nu-1}^{[\nu\lambda]}(x)$. 12. Ähnlich für die Eulerschen Polynome $E_\nu(x) = \frac{1}{1+\frac{\Delta}{2}}x^\nu$, verallgemeinert $E_\nu^{[\lambda]}(x) = \left(1+\frac{\Delta}{2}\right)^\lambda x^\nu$. Zum Operator $\theta = \left(1+\frac{\Delta}{2}\right)^\lambda D = \left(\frac{e^D+1}{2}\right)^\lambda D$ gehören als Scheinpotenzen $x^{\overline{\nu}} = xE_{\nu-1}^{[\nu\lambda]}(x)$. 13. Allerlei Entwicklungen wie

$$(x+t)^{\overline{n}} = \sum_0^n \binom{n}{\nu} t^{\overline{n-\nu}} x^{\overline{\nu}}.$$

14. Erweiterung von $\theta f(x)$ auf den Fall, daß $f(x)$ kein Polynom ist. *L. Schrutka.*

Babini, J.: Über das Symbol $\frac{1}{h^r}\cdot\Delta^r z^{(n,k)}$. Rev. Acad. Ci. exact. Madrid **33**, 19—26 (1936) [Spanisch].

Wird unter $z^{(n,k)}$ der Ausdruck $z(z-k)\cdots(z-(n-1)k)$ verstanden und die Differenz Δ mit der Spanne h genommen, so lassen sich durch identische Umformungen eine Reihe von Formeln angeben, von denen beispielsweise die folgende aufgeführt werde: $\omega = h^{-r}\Delta^r z^{(n,k)} = h^{n-r}\Delta^r\left(\frac{z}{h}\right)^{(n,k)}$. Durch besondere Wahl von h und k (0, 1) gelangt man zu weiteren Relationen. Das Additionstheorem

$$h^{-r}\Delta^r(x+y)^{(n,k)} = \sum_{t=r}^n \frac{1}{t!}\frac{\Delta^r x^{(t,h_1)}}{h^r}\cdot\frac{\Delta^t y^{(n,k)}}{h_1^t} \qquad (h_1 \text{ beliebige Spanne})$$

und die daraus durch Spezialisierung gewonnenen Beziehungen bilden eine weitere behandelte Formelgruppe. Auf der Rekursionsformel

$$\frac{h^{-r}}{r!}\Delta^r z^{(n,k)} = (z+hr-(n-1)k)\frac{h^{-r}}{r!}\Delta^r z^{(n-1,k)} + \frac{h^{1-r}}{(r-1)!}\Delta^{r-1}z^{(n-1,k)}$$

beruhen eine Reihe weiterer Formeln. Auf die erzeugende Funktion

$$(1+kt)^{\frac{z}{k}}\left[\frac{(1+kt)^{\frac{h}{k}}-1}{ht}\right]^r = \sum_{n=1}^\infty \frac{t^n h^{-r}\Delta^r z^{(n+r,k)}}{n!\,(n+r)^{(r,1)}}$$

wird nur kurz eingegangen. Ausgehend von der Relation

$$h^{-r}\Delta^r z^{(n,k)} = (-1)^{n-r}h^{-r}\Delta^r(k(n-1)-hr-z)^{(n,k)}$$

wird auf die symmetrische Lage der Nullstellen von ω bezüglich $\frac{1}{2}(k(n-1)-hr)$ geschlossen, und anschließend werden weitere Aussagen über die Nullstellen gemacht.

F. Knoll (Wien).

Bottema, O.: Das Näherungsverfahren von Simpson. Nieuw Arch. Wiskde **21**, 111—118 (1941) [Holländisch].

Approximiert man $\int_a^b f(x)dx$ durch den Trapezausdruck

$$T(n) = \frac{b-a}{2n}\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{\nu=1}^{n-1} f\left(a+\frac{\nu}{n}(b-a)\right)\right\}$$

und wendet auf das Integral die Euler-Maclaurinsche Summenformel an, so folgt

$$T(n) - \int_a^b f(x)dx = \sum_{\nu=1}^p \frac{B_{2\nu}(b-a)^{2\nu}}{(2\nu)!\,n^{2\nu}}\left(f^{(2\nu-1)}(b) - f^{(2\nu-1)}(a)\right) + 4\theta M_p \frac{B_{2p+2}(b-a)^{2p+2}}{(2p+2)!\,n^{2p+1}}$$

mit $|\theta| < 1$, $M_p = \max_{a \leqq x \leqq b} |f^{(2p+1)}(x)|$ und den Bernoullischen Zahlen $B_{2\nu}$. Ersetzt man $T(n)$ durch den Simpsonschen Ausdruck $S(n) = \frac{4}{3}T(2n) - \frac{1}{3}T(n)$, so wird

$$S(n) - \int_a^b f(x)dx = \sum_{\nu=2}^{p} \frac{B_{2\nu}(1 - 2^{2\nu-2})(b-a)^{2\nu}}{3 \cdot 2^{2\nu-2} \cdot (2\nu)!\, n^{2\nu}} \left(f^{(2\nu-1)}(b) - f^{(2\nu-1)}(a)\right) + \\ + 4\theta M_p \frac{B_{2p+2}(b-a)^{2p+2}}{(2p+2)!\, n^{2p+1}},$$

und ein ähnlicher Ausdruck ergibt sich für die Abweichung des Newtonschen Ausdruckes $N(n) = \frac{9}{8}T(3n) - \frac{1}{8}T(n)$ vom Integral. Hieraus zieht Verf. Folgerungen für den Fall, daß $f^{(\nu)}(a) = f^{(\nu)}(b)$, $\nu = 3, 5, 7, \ldots, 2p-1$ ist. *Harald Geppert.*

Merli, L.: Sulla convergenza in media della formula di interpolazione di Hermite per un particolare sistema di punti interpolanti. Giorn. Ist. Ital. Attuari **12**, 221—226 (1941).

$S_n(x)$ sei das Hermitesche Interpolationspolynom zu einer in $(-1, +1)$ definierten Funktion $f(x)$ und den n Interpolationsstellen $x_1, \ldots, x_n$, d. h. das Polynom höchstens $2n-1$-ten Grades, für das $S_n(x_\nu) = f(x_\nu)$, $S_n'(x_\nu) = f'(x_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$ ist. Verf. wählt speziell $x_\nu = \cos\frac{2\nu\pi}{2n+1}$. Hat dann $f(x)$ in $(-1, +1)$ stetige zweite Ableitung, so gilt daselbst $\lim_{n\to\infty} |f(x) - S_n(x)| = 0$, ist $f(x)$ nur einmal stetig differenzierbar, so ist $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} |f(x) - S_n(x)|dx = 0$, (vgl. G. Szegö, Orthogonal polynomials, 1939; dies. Zbl. **23**, 215). Verf. beweist nun: Genügt $f'(x)$ einer Lipschitzbedingung der Ordnung $\alpha > \frac{1}{2}$, so ist $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} |f(x) - S_n(x)|^2 dx = 0$. Der Beweis verwendet ähnliche Abschätzungen wie in früheren Arbeiten des Verf. (vgl. dies. Zbl. **25**, 157, 399) und stützt sich auf den Approximationssatz von Jackson-Szegö, demzufolge zu jedem n ein Polynom $P_n(x)$ höchstens $2n-1$-ten Grades bestimmt werden kann, so daß

$$\max_{|x|\leqq 1} |f(x) - P_n(x)| < \frac{c_1}{(2n-1)^{2\alpha}}, \qquad \max_{|x|\leqq 1} |f'(x) - P_n'(x)| < \frac{c_2}{(2n-1)^{\alpha}}$$

gilt. *Harald Geppert* (Berlin).

Bödewadt, U. T.: Die Fourierentwicklung des Sinus, Cosinus und der Umkehrung einer Fourierreihe. Math. Z. **47**, 655—662 (1942).

Le funzioni periodiche $\operatorname{sen}(a\cos t)$, $\cos(a\cos t)$ della variabile reale t ammettono ben noti sviluppi in serie di Fourier, con coefficienti che sono funzioni di Bessel del parametro a. L'A. stabilisce alcune formule per il calcolo dei coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di funzioni del tipo $\operatorname{sen} P(t)$, $\cos P(t)$, ove $P(t)$ è un polinomio trigonometrico della variabile t, nonchè del tipo $\operatorname{sen} F(t)$, $\cos F(t)$ con $F(t)$ funzione periodica qualsiasi della variabile t. Per questo secondo caso vengono dati teoremi di convergenza. — L'A. dà poi formule per il calcolo dei coefficienti della serie di Fourier della funzione $y = f(x)$ quando siano noti quelli della funzione inversa $x = g(y)$. [Una accurata indagine di questo ultimo problema, trattato con procedimenti diversi, trovasi, insieme con applicazioni, in M. Carafa (questo Zbl. **22**, 129). Rec.] *L. Cesari* (Pisa).

Obreschkoff, N.: Über die C-Summierbarkeit der derivierten Reihen der Fourierschen Reihen. Abh. preuß. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. **1941**, 1—28 (Nr 15) (1942).

Es sei $f(x)$ eine L-integrable Funktion mit der Periode 2π und (1) $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ihre Fourierreihe. Nach Hardy und Little-

wood [Math. Z. **19**, 67—96 (1924)] besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Reihe (1) C-summierbar (d. h. von einer gewissen Ordnung k an C_k-summierbar) zur Summe s sei, darin, daß bei genügend großem α

$$\text{(I)} \qquad t^{-\alpha}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}[f(x+\tau)+f(x-\tau)]\,d\tau = \frac{2}{\alpha}s + o(1) \qquad \text{für} \quad t \to 0$$

gilt. Die Frage nach der C-Summierbarkeit der p-fach abgeleiteten Reihe

$$\text{(2)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^p \left[a_n \cos\left(nx + p\frac{\pi}{2}\right) + b_n \sin\left(nx + p\frac{\pi}{2}\right)\right]$$ der Fourierreihe (1) wurde von T. Takahashi [Tôhoku Math. J. **38**, 256—278 (1933); dies. Zbl. **8**, 205] und F. T. Wang [Tôhoku Math. J. **39**, 399—405 (1934); dies. Zbl. **9**, 252] behandelt. Sie findet in der vorliegenden Arbeit ihre vollständige Erledigung, indem Verf. entsprechend (I) beweist: Die notwendige und hinreichende Bedingung für die C-Summierbarkeit der Reihe (2) zur Summe s besteht darin, daß ein Polynom $Q(t)$ vom Grade p mit $Q^{(p)}(t) = s$ existiert, für das bei genügend großem α

$$\text{(II)} \quad t^{-\alpha-p}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\{f(x+\tau) - Q(\tau) + (-1)^p[f(x-\tau) - Q(-\tau)]\}\,d\tau = o(1) \text{ für } t \to 0$$

gilt. Genauer beweist Verf. einige Sätze, die eine präzise Beziehung zwischen der Ordnung der Summierbarkeit und der Zahl α in (II) geben. — Eine Reihe $\sum a_n$ heißt absolut C_k-summierbar, wenn die mit ihren Cesàro-Mitteln k-ter Ordnung s_n^k gebildete Reihe $\sum |s_n^k - s_{n-1}^k|$ konvergiert. Die Frage nach der absoluten C-Summierbarkeit wurde für die Reihe (1) von L. S. Bosanquet [Proc. London Math. Soc., II. s. **41**, 517—528 (1936); dies. Zbl. **15**, 64], für die Reihe (2) von J. Hyslop [Proc. London Math. Soc., II. s. **46**, 55—80 (1939); dies. Zbl. **22**, 329] untersucht. Verf. erledigt nun auch diese Frage für die Reihe (2), indem er entsprechend dem von Bosanquet für die Reihe (1) gewonnenen Ergebnis zeigt: Die notwendige und hinreichende Bedingung für die absolute C-Summierbarkeit der Reihe (2) besteht darin, daß die durch die linke Seite von (II) definierte Funktion für genügend große α in $(0, \pi)$ schwankungsbeschränkt ist. Es werden wieder Sätze bewiesen, die eine präzise Beziehung zwischen der Ordnung der Summierbarkeit und der Zahl α in (II) geben. *F. Lösch* (Rostock).

Spezielle Funktionen:

Fletcher, Alan: A table of complete elliptic integrals. Philos. Mag., VIII. s. **30**, 516—519 (1940).

Verf. gibt eine zehnstellige Tafel für die vollständigen elliptischen Integrale K und E und für das Gaußische arithmetisch-geometrische Mittel $M(1, k')$ mit k als Argument (also nicht wie bei den meisten Tafeln mit dem Argument $\alpha = \arcsin k$ oder k^2). k geht dabei in Schritten von 0,01 von 0 bis 1. Über die Berechnung der Tafel wird kurz berichtet. Da sie als Grundlage für die Berechnung weiterer Tafeln gedacht ist, sind keine Vorkehrungen zur Erleichterung der Interpolation getroffen. *Krafft* (Marburg a. d. L.).

Rosenhead, L.: Note on the expansion of the Jacobian elliptic functions in powers of k^2 and $1 - k^2$. J. London Math. Soc. **15**, 7—10 (1940).

Verf. gibt die ersten Glieder der Entwicklungen von $\mathrm{sn}(\varphi, k)$, $\mathrm{cn}(\varphi, k)$ und $\mathrm{dn}(\varphi, k)$ sowie des elliptischen Integrals zweiter Gattung $E(\varphi, k)$ nach Potenzen von k^2 und nach Potenzen von k'^2, ausgehend von der bekannten Entwicklung des Integrals erster Gattung nach Potenzen von k^2. *Krafft* (Marburg a. d. L.).

Veen, S. C. van: Stark konvergente Entwicklungen für die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **44**, 964—973, 1077—1084, 1198—1205 (1941); **45**, 32—36 (1942).

Für die vollständigen elliptischen Integrale 1. und 2. Art, nämlich

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right)$$

und

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right),$$

wird gezeigt, daß sie in hypergeometrische Reihen transformiert werden können, welche rascher als die üblichen Theta-Reihen konvergieren, zudem rechnerisch einfacher zu handhaben sind. 1) Zunächst wird k reell angenommen, $0 \leqq k < 1$, k nicht in der Nähe von 1. Hilfsmittel: Landensche Transformation, arithmetisch-geometrisches Mittel von Gauß. 2) k reell, $0 \leqq k < 1$, k in der Nähe von 1. Hilfsmittel: Ein Satz von Gauß über die Gamma-Funktion (Werke III, S. 214f.). 3) Erweiterung der bisherigen Verfahren auf das vollständige elliptische Integral 2. Art. Hilfsmittel: Landensche Transformation. 4) k beliebig komplex. $K(k)$ und $E(k)$ analytische Funktionen in der von $k = +1$ bis $k = +\infty$ aufgeschlitzten rechten Halbebene. Transformationen auf den Einheitskreis. — Für reelles k verbürgt das Hauptglied der Entwicklung eine Genauigkeit auf 10, mitunter 19 Stellen. *Kropp* (Berlin).

Veen, S. C. van: Über die Entwicklung der unvollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art in stark konvergente Reihen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **44**, 1085—1091, 1206—1209 (1941); **45**, 37—42 (1942).

Verf. will für die unvollständigen elliptischen Integrale 1. und 2. Art

$$F(\sin\alpha, \beta) = \int_0^{\beta} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \cdot \sin^2\varphi}} \quad \text{und} \quad E(\sin\alpha, \beta) = \int_0^{\beta} \sqrt{1 - \sin^2\alpha \cdot \sin^2\varphi}\, d\varphi$$

so stark konvergierende Reihen entwickeln, daß für praktische Zwecke das Hauptglied zumeist ausreicht. Er unterscheidet 3 Fälle: 1) α klein $\left(\text{nicht in der Nähe von } \frac{\pi}{2}\right)$, β beliebig. Hilfsmittel: Landensche Transformation. 2) α in der Nähe von $\frac{\pi}{2}$, β klein. Hilfsmittel: Exponential- bzw. logarithmische Funktionen. 3) α und β in der Nähe von $\frac{\pi}{2}$. Hilfsmittel: Hyperbel-Funktionen. *Kropp* (Berlin).

Geronimus, J.: Sur quelques propriétés des polynômes orthogonaux généralisés. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **29**, 5—8 (1940).

Énoncé de quelques théorèmes, dont la démonstration est donnée dans le travail suivant. *N. Obreschkoff* (Sofia).

Geronimus, J.: Sur quelques propriétés des polynomes orthogonaux généralisés. Rec. math. Moscou, N. s. **9**, 121—134 u. franz. Zusammenfassung 134—135 (1941) [Russisch].

L'au. considère les polynomes $P_n(z)$ orthogonaux relativement à la suite des nombres c_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$(1) \qquad \mathfrak{S}\left\{P_n(z)\, \overline{P}_m\left(\frac{1}{z}\right)\right\} = 0, \quad n \neq m, \quad = h_n = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} \neq 0, \quad n = m,$$

$\mathfrak{S}$ étant la fonctionnelle linéaire additive

$$(2) \qquad \mathfrak{S}\{z^k\} = c_k, \quad c_{-k} = \bar{c}_k, \quad \Delta_{k+1} = |c_{i-\nu}|_{i,\nu=1,\ldots,k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Il démontre les résultats suivants: Les polynomes $P_n(z)$ satisfont à l'équation aux différences finies

$$a_n P_{n+2}(z) = (a_n z + a_{n+1}) P_{n+1}(z) - z a_{n+1}(1 - |a_n|^2) P_n(z),$$

$$P_0 = 1, \quad P_1(z) = z - a_0, \quad a_n h_n = \mathfrak{S}\{z P_n(z)\}, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots);$$

inversement, des égalités (2) où $|a_n| \neq 1$, résulte (1). $P_n(z)$ sont les dénominateurs

des réduites successives de la fraction continue

$$K(y)=\frac{a_0c_0|}{|y-a_0}-\frac{\frac{a_1}{a_0}y(1-|a_0|^2)\Big|}{\Big|y+\frac{a_1}{a_0}}-\frac{\frac{a_2}{a_1}y(1-|a_1|^2)\Big|}{\Big|y+\frac{a_2}{a_1}}-\cdots,\quad a_n\neq 0,$$

dont les numérateurs sont $R_{n-1}(y)=\mathfrak{S}\left\{\frac{zP_n(y)-yP_n(z)}{y-z}\right\}=c_1y^{n-1}+\cdots$, $n=1,2,3,\ldots$ Un cas particulier intéressant s'obtient en posant dans (2) $c_n=a$, $n=0,1,2,\ldots$, $0<|a|<1$. *N. Obreschkoff* (Sofia).

Palamà, G.: Su alcune relazioni limiti relative a classici polinomi. Boll. Un. Mat. ital., II. s. **4**, 99—109 (1942).

Zwischen den Hermiteschen Polynomen $H_n(x)$ und den Laguerre-Polynomen $L_n^{(\alpha)}(x)$ besteht der Zusammenhang

$$(1)\qquad H_n(x)=2^n n!\lim_{a\to 0}\left\{a^n L_n^{\left(\frac{1}{2a^2}+\frac{m}{2a}+k\right)}\left(\frac{2x+m}{2a}+\frac{1}{2a^2}\right)\right\},$$

wobei unter m und k beliebige ganze Funktionen von a zu verstehen sind. (1) enthält insbesondere ein früheres Ergebnis von L. Toscano (dies. Zbl. **21**, 311). Weiter wird bewiesen

$$\lim_{a\to\infty}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^n L_n^{(ra+b)}\left(\frac{ac}{x}\right)\right\}=\frac{(rx-c)^n}{n!}$$

mittels der Entwicklung von $L_n^{(k)}(x)$ und Stirlingscher Formel. Zwischen den durch $(1-2ax+a^2)^{-m}=\sum_{n=0}^{\infty}a^nP^{m,n}(x)$ erklärten Gegenbauerschen Polynomen und $H_n(x)$ besteht die Beziehung

$$\lim_{\nu\to\infty}\left\{\nu^{-\frac{n}{2}}P^{\nu,n}\left(\frac{x}{\sqrt{\nu}}\right)\right\}=\frac{(-1)^n}{n!}H_n(x),$$

und weiter ist

$$\lim_{\nu\to\infty}\left\{\nu^{-n}P^{\nu,n}\left(\frac{2x^2}{\nu}-1\right)\right\}=\frac{(-2)^n}{n!}.$$

Harald Geppert (Berlin).

Erdélyi, A.: Some integral representations of the associated Legendre functions. Philos. Mag., VIII. s. **30**, 168—171 (1940).

Für die Kugelfunktionen $P_n^m(z)$ (in der Definition von Hobson) werden zwei Integraldarstellungen abgeleitet; die erste derselben enthält eine Reihe bekannter Darstellungen als Spezialfälle; die zweite, welche ihrerseits eine Verallgemeinerung der ersten ist, enthält ein Produkt verallgemeinerter hypergeometrischer Funktionen unter dem Integralzeichen. Die erste Integraldarstellung lautet:

$$\Gamma(m+n)\Gamma(m-n)\Gamma(\alpha)(z^2-1)^{\frac{1}{4}(\frac{1}{2}-m)}P_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-m}(z)$$
$$=2^\alpha\Gamma\left(m+\alpha-\frac{1}{2}\right)\int_0^\infty(z+\mathfrak{Cof}\,t)^{\frac{1}{2}-m-\alpha}\left(\mathfrak{Sin}\frac{t}{2}\right)^{2\alpha-1}{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-n,\frac{1}{2}+n;\alpha;-\mathfrak{Sin}^2\frac{t}{2}\right)\mathfrak{Cof}\frac{t}{2}\,dt.$$

Hierbei ist ${}_2F_1$ die hypergeometrische Funktion in der üblichen Schreibweise. *W. Magnus* (Berlin).

Chu, L. J., and J. A. Stratton: Elliptic and spheroidal wave functions. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **20**, 259—309 (1941).

Verff. behandeln zunächst die Transformation der skalaren sowie der Vektor-Wellengleichung auf Koordinaten, welche zu Rotationsellipsoiden gehören. Nach Trennung der Variablen gelangen sie zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche im Grenzfall einer Kugel durch Besselsche Funktionen halbzahliger Ordnung und im Grenzfall der Frequenz Null durch Gegenbauersche Funktionen gelöst werden kann. Letztere Funktionen können durch Kugelfunktionen erster und zweiter Art ausgedrückt werden und Verff. stellen die betreffende Formel sowie die Beziehungen zwischen den Gegenbauerschen Funktionen verschiedener Ordnung und die Ausdrücke für diese Funktionen als hypergeometrische Reihen zusammen. Sie gehen insbesondere auf diese Funktionen für die gesamte Ellipsoidoberfläche und für die halbe Oberfläche ein. Nach dieser Vorbereitung wenden sie sich der obengenannten Differentialgleichung

der Sphäroidfunktionen zu und lösen diese Differentialgleichung für den Fall eines großen Abstandes vom Ellipsoidzentrum durch eine unendliche Reihe Besselscher Funktionen. Sie definieren insgesamt in dieser Weise acht verschiedene Sphäroidfunktionen. Für kleine Abstände vom Ellipsoidzentrum lösen sie die Differentialgleichung durch eine unendliche Reihe Gegenbauerscher Funktionen und definieren ebenfalls acht verschiedene Lösungen. Sie wenden sich dann der Berechnung der Koeffizienten und der Eigenwerte zu, welche zu den obengenannten Reihen gehören. Diese Berechnung führt auf Kettenbrüche. Es zeigt sich, daß die Mathieuschen Funktionen einen Sonderfall der genannten Sphäroidfunktionen bilden, und die genannten Reihen führen demnach auch auf Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung, wie Verff. ausführen. Zur analytischen Verknüpfung der acht genannten Sphäroidfunktionen in jedem Bereich gehen Verff. von den Potenzreihen der zur Darstellung verwendeten Besselschen und Gegenbauerschen Funktionen aus und erhalten Potenzreihen für die Sphäroidfunktionen. Mit Hilfe dieser Reihen gelingt es, Beziehungen zwischen den verschiedenen Sphäroidfunktionen aufzustellen und die Konstanten in den betreffenden Gleichungen zu berechnen. Verff. stellen alle diese Beziehungen für die Sphäroidfunktionen übersichtlich zusammen. Dann wenden sie sich ausführlich der Berechnung der Mathieuschen Funktionen aus den genannten Reihenausdrücken zu und betrachten hierbei sämtliche Klassen ganzzahliger Ordnung sowie die Mathieuschen Funktionen halbzahliger Ordnung. Im nächsten Abschnitt werden die von den Verff. aufgestellten allgemeinen Sphäroidfunktionen auf das gestreckte Rotationsellipsoid angewandt. Analoge Formeln werden für das abgeplattete Rotationsellipsoid angegeben. Endlich stellen sie noch die erhaltenen Formeln für die Mathieuschen Funktionen zusammen. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Meijer, C. S.: Multiplikationstheoreme für die Funktion $G_{p,q}^{m,n}(z)$. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **44**, 1062—1070 (1941).

Die Funktionen $G_{p,q}^{m,n}\left(z \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right)$ sind definiert durch

$$\sum_{h=1}^{q} \left\{ \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^{m} \Gamma(b_j - b_h) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 + b_h - a_j)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1 + b_h - b_j) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j - b_h)} z^{b_h} {}_pF_{q-1}(1+b_h-a_1, \ldots, 1+b_h-a_p; \right.$$
$$\left. 1+b_h-b_1, \overset{*}{\ldots} 1+b_h-b_q; (-1)^{m+n+p} z) \right\},$$

wobei $z \neq 0$, $0 \leqq n \leqq p < q$, $1 \leqq m \leqq q$ vorausgesetzt wird, der Stern in der hypergeometrischen Funktion bedeutet, daß der Term $1 + b_h - b_h$ wegzulassen ist, und $b_j - b_h$ für $j \neq h$, $j = 1, \ldots, m$; $h = 1, \ldots, m$ keine ganze Zahl und $a_j - b_h$ für $j = 1, \ldots, n$; $h = 1, \ldots, m$ von den Zahlen 1, 2, 3, ... verschieden sein soll. Es gelten die Multiplikationstheoreme:

$$\lambda^{-b_1} G_{p,q}^{m,n}\left(\lambda w \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^r}{r!} G_{p,q}^{m,n}\left(w \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ r + b_1, b_2, \ldots, b_q \end{matrix}\right)$$

$(|\lambda - 1| < 1$; wenn $m = 1$ ist, kann λ beliebig sein),

$$\lambda^{-b_q} G_{p,q}^{m,n}\left(\lambda w \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda-1)^r}{r!} G_{p,q}^{m,n}\left(w \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_{q-1}, r + b_q \end{matrix}\right)$$

$(m < q, \quad |\lambda - 1| < 1)$,

$$\lambda^{1-a_1} G_{p,q}^{m,n}\left(\lambda w \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^r G_{p,q}^{m,n}\left(w \middle| \begin{matrix} -r + a_1, a_2, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right)$$

$(n \geqq 1$, Realteil von $\lambda > \frac{1}{2})$,

$$\lambda^{1-a_p} G^{m,n}_{p,q}\left(\lambda w \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)^r G^{m,n}_{p,q}\left(w \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_{p-1}, -r + a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right)$$

$(n < p$, Realteil von $\lambda > \frac{1}{2})$.

Da die G-Funktionen zahlreiche bekannte Funktionen als Spezialfälle enthalten, liefern diese Sätze u. a. Multiplikationstheoreme für die Whittakerschen und verwandte Funktionen. Es ist nämlich z. B.:

$$e^{\frac{1}{2}z} M_{k,m}(z) = \Gamma(1 + 2m)\,\Gamma(\tfrac{1}{2} + k - m)\, G^{1,0}_{1,2}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} 1 + k \\ \frac{1}{2} + m, \frac{1}{2} - m \end{matrix}\right)$$

$$e^{-\frac{1}{2}z} M_{k,m}(z) = \frac{\Gamma(1 + 2m)}{\Gamma(\frac{1}{2} + k + m)}\, G^{1,1}_{1,2}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} 1 - k \\ \frac{1}{2} + m, \frac{1}{2} - m \end{matrix}\right),$$

$$e^{-\frac{1}{2}z} W_{k,m}(z) = G^{1,0}_{1,2}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} 1 - k \\ \frac{1}{2} + m, \frac{1}{2} - m \end{matrix}\right).$$

Für die Struvesche Funktion wird:

$$\boldsymbol{H}_\nu(z) = G^{1,1}_{1,3}\left(\frac{1}{4} z^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1 + \nu}{2} \\ \frac{1 + \nu}{2}, \frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2} \end{matrix}\right).$$

W. Magnus (Berlin).

Funktionentheorie:

● **Levinson, Norman: Gap and density theorems. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 20.)** New York: Amer. Math. Soc. 1941. VIII, 246 pag.

Mandelbrojt, S.: Sur un théorème de M. Whittaker. Bull. Soc. Math. France **69**, Fasc. 1/4, 1—2 (1941).

Ein von J. M. Whittaker [J. London Math. Soc. **13**, 295—301 (1938); dies. Zbl. **19**, 417] angegebenes Seitenstück zu einem früheren Satze des Verf. [Rice Inst. Pamphl. **14**, Nr 4, 223—352, insbes. 262—263 (1927)] wird durch Ausbau der Whittakerschen Beweismethode wie folgt verschärft. Das Funktionselement $f(z) = \sum a_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ besitze auf seinem Konvergenzkreis vom Radius 1 genau K isolierte, nicht-kritische Singularitäten, die alle auf einem Bogen der Länge α liegen. Wird zu einer ganzen Zahl $p < 2\pi\alpha^{-1}$ unter $\mu_n^{(p)}$ die Folge derjenigen λ_n verstanden, die der Kongruenz $\lambda_n \equiv p \pmod{[2\pi\alpha^{-1}]}$ genügen, so ist $\overline{\lim} n^{-1} \mu_n^{(p)} \leqq K[2\pi\alpha^{-1}]$. *Meyer-König* (Stuttgart).

Ríos, Sixto: Vorträge über Folgen analytischer Funktionen und ihre Anwendungen. 1/2. Rev. Acad. Ci. exact. Madrid **34**, 291—316 (1940); **35**, 5—31 (1941) [Spanisch].

In den beiden Schriften werden einige der neueren Forschungsergebnisse der Funktionentheorie stark referierend dem spanischen Leserkreise unterbreitet. Für einige der Hauptpunkte finden sich auch die Beweise, im wesentlichen in bekannten Fassungen: Normalscharen bis zum abc-Kriterium, Beweis über die Blochsche Hilfsfunktion, Satz von Bloch, Hinweis auf neuere Kriterien. Ostrowskis Untersuchungen zur Fortsetzung der Konvergenz, Maximale Gebiete gleichmäßiger Konvergenz, Überkonvergenz. Blochscher Weg zum Picardschen und Schottkyschen Satz. Irreguläre Punkte, normale und quasinormale Scharen regulärer und meromorpher Funktionen; Juliasche Richtungen und Ausnahmefunktionen; Beziehungen zu Singularitäten assoziierter Potenzreihen. Zu H. Bohrs Beispiel einer ganzen Funktion, die „außerhalb eines Weges" überall nach 0 strebt. — Konforme Abbildung, Riemannscher Abbildungssatz, Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete. Ränderzuordnung bei einfachem Zusammenhang. *Ullrich* (Gießen).

Biggeri, Carlos: Ein neuer allgemeiner Beweis des zweiten Satzes von Picard. An. Soc. Ci. Argent. **132**, 78—79 (1941) [Spanisch].

Variante zum Nachweis, daß die Blochsche Hilfsfunktion in der isolierten Singularität regulär sein muß, im Anschluß an die von Dassen veröffentlichten Briefe des Verf. [An. Soc. Ci. Argent. **131**, 4—15 (1941); vgl. dies. Zbl. **24**, 420]. *Ullrich.*

Shah, S. M.: A theorem on integral functions of integral order. J. London Math. Soc. **15**, 23—31 (1940).

L'A. démontre pour des fonctions entières d'ordre entier une proposition qui complète un résultat connu relatif à l'ordre non entier [voir Valiron, Lectures on the general theory of integral functions. Cambridge 1923, et Pólya, Math. Ann. **88**, 169 à 183 (1923)]. Il prouve que: $f(z)$ étant un produit canonique d'ordre entier positif et de genre égal à l'ordre, $M(r)$ le maximun de $|f(z)|$ pour $|z| = r$, $n(r)$ le nombre des zéros de $f(z)$ dans le cercle $|z| \leqq r$, on a $\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r)}{n(r)\Phi(r)} = 0$ pourvu que $\Phi(x)$ soit une fonction positive continue non décroissante de la variable réelle x pour $x \geqq \alpha$, telle que $\int_{\alpha}^{\infty} \frac{dx}{x\Phi(x)}$ converge. La démonstration utilise certains des résultats de Pólya (mémoire cité). La proposition est étendue au cas des fonctions d'ordre nul [comp. Valiron and Collingwood, J. London Math. Soc. **4**, 210—213 (1929)]; l'A. montre aussi que l'hypothèse sur la convergence de l'intégrale portant sur $\Phi(x)$ n'est pas essentielle. *G. Valiron* (Paris).

Rauch, A.: Sur les directions de Borel des fonctions entières de la classe de divergence de l'ordre ϱ. Bull. Sci. math., II. s. **65**, 219—224 (1941).

Die Borelschen Richtungen einer ganzen Funktion $f(z) = w$ von der Divergenzklasse der Ordnung ϱ werden quantitativ mit Hilfe der bekannten Wertverteilungsgrößen faßbar. Verf. betrachtet insbesondere für $k > \varrho$ als Maße für Anzahl der a-Stellen $a_1 a_2 \ldots$, bzw. die Anschmiegung an ∞ längs des Strahls θ die Ausdrücke

$$S(\theta) = \lim_{k \to \varrho + 0} \left\{ \sum_{\theta \pm 0} \frac{1}{|a_\nu|^k} : \int_1^{\infty} m(r, f) \frac{dr}{r^{k+1}} \right\},$$

$$I(\theta) = \lim_{k \to \varrho + 0} \left\{ \int_1^{\infty} \log^+ |f(re^{i\theta})| \frac{dr}{r^{k+1}} : \int_1^{\infty} m(r, f) \frac{dr}{r^{k+1}} \right\};$$

die Summe wird nur über die a-Stellen eines beliebig engen Winkelraums $\theta \pm \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$ erstreckt. Nur solche Borelrichtungen θ_j werden studiert, für die $S_j = S(\theta_j) > 0$ wird; das sei nur für endlich viele θ_j der Fall. Dann gilt in Ergänzung einer Aussage von Valiron $\sum S(\theta_j) = \varrho^2$. Es wird eine Anzahl von Gleichungen angegeben, welche die Werte von $I(\theta)$ für diese θ_j und die Symmetralen $\frac{1}{2}(\theta_j + \theta_{j+1})$ zwischen ihnen verknüpfen (mit trig. Funktionen von $\theta_{j+1} - \theta_j$). Ferner wird gezeigt, daß

$$2\pi S(\theta_j) = I'(\theta_j + 0) - I'(\theta_j - 0)$$

ist. $\varrho = \frac{1}{2}$ spielt wie immer eine Sonderrolle. — Vgl. auch Verf., dies. Zbl. **18**, 223; **20**, 235 und Valiron, dies. Zbl. **1**, 21; **2**, 402; **3**, 263, sowie Opuscula math. Andreae Wiman dedicata, Upsala 1930. *Egon Ullrich* (Gießen).

Joh, Kenzo: Theorems on „schlicht" functions. 5. On the coefficient problem. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. **23**, 409—423 (1941).

Unter Fortführung von Löwners Methoden bei seinem Beweis für $|a_3| \leqq 3$ und von Peschls Gedanken der Iteration von Schlitzabbildungen zur Annäherung an beliebige schlichte Abbildungen des Einheitskreises beweist Verf.

$$|a_4| \leqq 4.$$

Der Beweis bietet den Ansatz zur vollständigen Induktion und daher einen Weg zum Nachweis der Bieberbachschen Vermutung $|a_n| \leqq n$ auch im allgemeinen Falle; die Durchführung dieser Induktion ist aber noch nicht gegeben: es stellt sich noch eine Barre formaler und noch nicht übersichtlich geordneter Rechnungen vor das lang umworbene Ziel. — Nach mündlichem Bericht von Herrn Sierpiński an den Ref. (im Jänner 1939) hatte damals dessen Schüler Charzynski $|a_n| \leqq n$ allgemein auf

dem Löwnerschen Gedanken aufbauend bewiesen. Diese Arbeit (Dissertation) scheint bisher unveröffentlicht. Die wissenschaftliche Aussprache mit Charzynski selbst machte dem Ref. wahrscheinlich, daß dieser Beweis gelungen sei; Näheres war damals nicht zu erhalten. *Egon Ullrich* (Gießen).

Kobori, Akira: Sur les fonctions multivalentes. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. **23**, 423—431 (1941).

Es werden einige Funktionenklassen erklärt: $f(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \cdots$ sei regulär im Einheitskreis $\mathfrak{E}$ $|z| < 1$ und bilde ihn in ein p-blättriges Sterngebiet ab (Klasse E_p); $h(z) = \sqrt[p]{f(z)} = 1 \cdot z + \cdots$ bilde $\mathfrak{E}$ schlicht und konvex ab, $f(z)$ wird dann p-wertig und zur Klasse C_p genommen. Ist endlich $h(z)$ schlicht in $\mathfrak{E}$, so auch auf einem (nach Grunsky bekannten) Teilkreis sternig; diese $f(z)$ bilden die Klasse U_p. Für diese Klassen werden einschlägige Sätze bekannter Struktur übertragen und ausgewertet. *Egon Ullrich* (Gießen).

Wolff, J.: Inégalités remplies par les fonctions univalentes. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **44**, 956—963 (1941).

Wolff, J.: Inégalités remplies par les fonctions univalentes. Errata. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **44**, 1163 (1941).

Eine Reihe von sehr interessanten geometrisch-analytischen Folgerungen für das Randverhalten bei schlichter und beschränkter Abbildung ergibt sich durch Benutzung des Koebeschen Verzerrungssatzes zusammen mit $\int\int |f'(z)|^2 d\sigma < \infty$; diese Ungleichung wird mittels der Schwarzschen Ungleichung zur Geltung gebracht. Die Aussagen beziehen sich auf die Länge der Bildbögen: für $|z| = r$, für Strecken, die in $z = e^{i\varphi}$ münden bzw. für allgemeinere Kurven, die tangential münden. Sie berühren sich z. T. mit Ergebnissen von Denjoy, sind aber einfacher zugänglich und z. T. sogar schärfer. Vgl. dies. Zbl. **25**, 259—260 sowie das nachsteh. Ref. *Egon Ullrich* (Gießen).

Denjoy, Arnaud: Représentation conforme des aires limitées par des continus cycliques. C. R. Acad. Sci., Paris **213**, 975—977 (1941).

In Fortsetzung seiner Untersuchungen über das Randverhalten bei schlichter Abbildung des Einheitskreises zeigt der Verf. einige neue geometrische Auswirkungen der gleichmäßigen Konvergenz der schlichten Potenzreihe auf dem Rande $z = e^{i\vartheta}$: so ist sie notwendig und hinreichend, damit der Rand $w = w(e^{i\vartheta}) = r(\vartheta)$ des Bildgebiets ein zyklisches Kontinuum sei; vgl. für diesen Begriff dies. Zbl. **7**, 329; **8**, 86. *Ullrich* (Gießen).

Dufresnoy, Jacques: Sur les fonctions méromorphes à caractéristique bornée. C. R. Acad. Sci., Paris **213**, 393—395 (1941).

Die Aussagen von Denjoy über meromorphe Funktionen im Einheitskreis (vgl. dies. Zbl. **25**, 259—260, **I—IV** sowie das vorstehende Referat) bestehen unter allgemeineren Annahmen. Verf. bemerkt erst, daß es genügt, $S(r)$ (vgl. nachstehendes Referat) für $r \to 1$ beschränkt anzunehmen. Das ist noch enger als Nevanlinnas Voraussetzung der Beschränktartigkeit, $T(r) = O(1)$, d. i. hier gleichbedeutend mit: $\int^1 S(r)\,dr$ konvergiert. Verf. bemerkt aber, daß auch schon die Konvergenz von

$$\int^1 S(r) \frac{dr}{(1-r)^\delta}$$

für $0 < \delta < 1$ hinreicht. *Egon Ullrich* (Gießen).

Dufresnoy, Jacques: Sur l'aire sphérique décrite par les valeurs d'une fonction méromorphe. Bull. Sci. math., II. s. **65**, 214—219 (1941).

Die meromorphe Funktion $w = f(z)$ erzeugt als Bild von $|z| \leqq r$ über der Riemannschen Einheits-w-Kugel ein Flächenstück $\mathfrak{B}_r$, dessen Inhalt mit $4\pi S(r)$ bezeichnet sei, während $4\pi\sigma(r)$ den Inhalt des von $\mathfrak{B}_r$ überdeckten Kugelstücks bedeute. Ist

$S_0 = S(r_0) < 1$, so gilt für $S = S(r)$, $r < r_0$

$$\frac{1}{r^2}\frac{S}{1-S} \leqq \frac{1}{r_0^2}\frac{S_0}{1-S_0} \quad \text{und für } r \to 0 \quad \frac{|f'(0)|}{1+|f(0)|^2} \leqq \frac{1}{r_0^2}\frac{S_0}{1-S_0}$$

und eine gleichlautende, aber wesentlich schärfere Formel für σ an Stelle von S; Gleichheit tritt bei einer linearen Funktion ein. Verschwindet die erste Kugelableitung und gilt

$$\frac{|f^{(\nu)}(0)|}{1+|f(0)|^2} = 0, \quad \nu = 1, \ldots, n-1, \quad \text{aber} \quad \frac{|f^{(n)}(0)|}{1+|f(0)|^2} \neq 0,$$

so kann auch daraus eine untere Schätzung von σ_0 gewonnen werden; eine Verallgemeinerung gilt auch ohne Annahmen über das Verschwinden für $\nu < n$. Diese Schätzungen sind von der richtigen Größenordnung in r_0 und σ_0, enthalten aber noch Unschärfen. — Eine Arbeit über die Auswirkungen dieser interessanten Schätzungen wird angekündigt. *Egon Ullrich* (Gießen).

Ferrand, Jacqueline: Sur les fonctions holomorphes ou méromorphes dans une couronne. C. R. Acad. Sci., Paris **214**, 50—52 (1942).

Soit $w = f(z)$ une fonction holomorphe dans $\varrho < |z| < 1$. Lorsque z décrit $\varrho < |z| < r$, les valeurs w de la fonction décrivent une surface de Riemann d'aire $S(r)$. On considère en outre deux fonctions continues et positives, l'une $h(r)$ croissante, l'autre $\varphi(r)$ telle que $\int^1 \varphi(r)\,dS(r) < \infty$, satisfaisant de plus à certaines conditions de régularité. — L'au. démontre que, si $|a| = 1$,

$$(1-r)\,|f'(z)|\sqrt{\frac{\varphi(r)}{h(|z-a|)}} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad |z| = r \to 1,$$

sauf peut-être pour certains points a formant un ensemble de h-mesure nulle. — Application à l'étude de courbes du plan des z dont les transformées dans le plan des w sont rectifiables. — Extension aux fonctions méromorphes. *J. Dufresnoy.*

Ferrand, Jacqueline: Sur la représentation conforme. C. R. Acad. Sci., Paris **214**, 250—253 (1942).

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans $0 < x < x_0$ $(z = x + iy)$. On désigne par $\lambda(\varrho, a)$ la longueur de la courbe transformée par $w = f(z)$ de la demi-circonférence $x > 0$, $|z - a| = \varrho$. L'au. démontre que, pour tout a, $\lambda(\varrho, a)$ tend vers 0 quand ϱ tend vers 0 en évitant un ensemble de valeurs exceptionnelles. — Applications aux fonctions $f(z)$ univalentes: 1° l'ensemble E des points de $x = 0$ ayant pour images des bouts premiers sans points accessibles est de longueur logarithmique nulle relativement à tout point de $x = 0$; 2° lorsque z tend angulairement vers a, $f(z)$ n'a pour limites que les points principaux du bout premier correspondant à $z = a$; à condition d'exclure certains a exceptionnels, ce résultat subsiste lorsque z tend vers a dans des conditions moins restrictives. *J. Dufresnoy* (Bordeaux).

Leja, F.: Une méthode de construction de la fonction de Green des domaines plans quelconques. Ann. Acad. Sci. Techn., Varsovie **5**, 100—114 (1938).

Verallgemeinerungen mehrerer Arbeiten des Verf. (siehe Schluß des Referats). Sei F eine abgeschlossene, beschränkte Punktmenge und $p(z)$ ein beliebiges festes Polynom ungleich 0 auf F. Auf F sei $\zeta = \{\zeta_0, \ldots, \zeta_n\}$ ein Satz von $n+1$ Punkten, $V(\zeta)$ das Produkt über alle Abstände zwischen den ζ_ν, und η ein solcher ζ-Satz auf F, für den $V(\zeta) : \prod_0^n |p(\zeta_\nu)|^n$ zum Maximum wird (η hängt natürlich von n ab); die η_ν seien noch passend numeriert $[|r_0(\eta_0)| \leqq |r_j(\eta_j)|]$: mit $\omega(z) = (z-\eta_0)\ldots(z-\eta_n)$ sei

$$r_j(z) = \frac{1}{p(z)^n}\frac{\omega(z)}{z-\eta_j} \quad \text{und} \quad R_n(z) = \frac{r_0(z)}{r_0(\eta_0)} = \left[\frac{p(\eta_0)}{p(z)}\right]^n \frac{(z-\eta_1)\cdots(z-\eta_n)}{(\eta_0-\eta_1)\cdots(\eta_0-\eta_n)}.$$

Diese Folge $R_n(z)$ wird für $n \to \infty$ bei verschiedenen Annahmen über $p(z)$ und F eingehend auf Extremaleigenschaften und Konvergenzverhalten untersucht. — Bezeichne $\Phi_n^{(j)}(z, \zeta)$ die zu R_n analoge Bildung bei festem n, beliebigem ζ-Satz auf F und ζ_j statt η_0.

Dann wird für die Extremalfunktionen

$$\Phi_n(z) = \operatorname*{fin}_{\zeta \subset F} \max_i \Phi_n^{(i)}(z, \zeta)$$

die Ungleichung $\Phi_{n+k}(z) \geqq \Phi_n(z) \cdot \Phi_k(z)$ nachgewiesen und, wenn F positiven transfiniten Durchmesser zeigt, die Konvergenz von $\sqrt[n]{\Phi_n(z)} \to \Phi(z)$ für alle z, wo $p(z) \neq 0$ ist. Für $\Phi_n^{(i)}(z; \eta) = \Psi_n(z)$ [also bezogen auf den eingangs gekennzeichneten Extremalsatz η und η_0] findet man gleichmäßige Konvergenz innerhalb des Komplements der Vereinigung von F und der Nullstellen von $p(z)$. — Endlich wird der Zusammenhang mit der Greenschen Funktion eines ein- oder mehrfach zusammenhängenden Gebiets $\mathfrak{D}$ hergestellt. Dazu wird angenommen, daß jeder Punkt von F in ein Teilkontinuum von F eingebettet sei. $z = \infty$ soll nicht Randpunkt von $\mathfrak{D}$ sein; $p(z)$ ist jetzt linear (Nullstelle z_0 in $\mathfrak{D}$) oder konstant ($z_0 = \infty$). Damit strebt $\log \sqrt[n]{\Psi_n(z)}$ gegen die Greensche Funktion mit Pol z_0. Sonderfälle sind schon früher vom Verf. behandelt (dies. Zbl. 8, 115, 208; **10**, 201; **18**, 260; **21**, 240). *Ullrich* (Gießen).

Grunsky, Helmut: Über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche auf mehrblättrige Kreise. 2. Abh. preuß. Akad. Wiss., Phys.-naturwiss. Kl. **1941**, 1—8 (Nr 11).

Es wird ein neuer, sehr einfacher und übersichtlicher Beweis für den im Titel genannten Abbildungssatz gegeben; natürlich darf kein Randstück C_ν in einen Punkt ausarten. Beim Zusammenhang $n+1$ wird ein $(n+1)$-blättriger Kreis, hier eine Halbebene $\Re w > 0$ erzeugt. Von den verfügbaren $n+3$ reellen Parametern werden $n+1$ durch die Vorschrift festgelegt, welcher Punkt ζ_ν von C_ν nach $w = \infty$ übergehen soll; eine Streckung und eine Schiebung (rein imaginär) bleiben frei. — Die C_ν können als analytische Kurven angenommen werden; die ζ_ν sind dann einfache Pole, das Randverhalten der Abbildungsfunktion wird hinreichend überschaubar, um die entsprechende potentialtheoretische Randwertaufgabe zu lösen; dazu werden erst $n+1$ harmonische Funktionen konstruiert, die auf $C = \sum C_\nu$ die Randwerte 0 haben, doch bei Annäherung an ein ζ_ν aus dem Gebietsinneren sich singulär wie $\Re \frac{1}{z - \zeta_\nu}$ verhalten. Linearkombination löst die allgemeine Aufgabe. Die Ergänzung zu einer analytischen Funktion ergibt erst Perioden längs aller C_ν, die aber hier durch Lösung eines linearen Gleichungssystems zum Verschwinden gebracht werden können (die Perioden erfüllen die Voraussetzungen eines Determinantensatzes von Minkowski): diese analytische Funktion leistet die erwünschte Abbildung. — In einer früheren Arbeit zum Gegenstande (dies. Zbl. **16**, 267) war ein nichtlineares System zur Tilgung der Perioden zu behandeln gewesen. *Ullrich* (Gießen).

Lelong, Pierre: Sur certaines fonctions multiformes. C. R. Acad. Sci., Paris **214**, 53—54 (1942).

Erweiterung früherer Ergebnisse des Verf. (siehe dies. Zbl. **26**, 15). Es werden nunmehr mehrdeutige analytische Funktionen $y(x)$ betrachtet, die implizit in der ganzen x-Ebene durch eine Relation $f(x, y) = 0$, $f(x, y)$ analytisch für $|x| < \infty$ und y aus einem Bereiche D der y-Ebene, gegeben sind. Verschwindet $f(x, a)$ für $|x| < \infty$ nicht, so heißt a ein Ausnahmewert von $y(x)$. Die Menge E der Ausnahmewerte in D ist vom Maße Null. Es werden feinere Aussagen über E angekündigt, wenn $f(x, y)$ von endlicher Ordnung in bezug auf x in D ist. Insbesondere ist E abzählbar und besitzt keinen Häufungspunkt im Innern von D. *Behnke* (Münster i. W.).

Giambelli, Giovanni: Esempi di funzioni di n variabili complesse. Atti Accad. Peloritana Messina **42**, 111—129 (1940).

Elementare Einführung in die analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen (Cauchyscher Integralsatz, Taylorsche und Laurentsche Reihe, Singularitäten). Im Gegensatz zur gesamten neuen Literatur, auf die nicht Bezug genommen wird, wird

als abgeschlossener Raum der Veränderlichen $z_1, \ldots, z_n$ das topologische Produkt der n abgeschlossenen Ebenen betrachtet. *Behnke* (Münster i. W.).

Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

Maass, Hans: Über eine Metrik im Siegelschen Halbraum. Math. Ann. **118**, 312—318 (1942).

In zwei Arbeiten [Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 367—372, 373—377 (1940); dies. Zbl. **24**, 109] hat M. Sugawara als Verallgemeinerung der hyperbolischen Metrik der Halbebene (bzw. des Einheitskreises) zwei verschiedene Metriken des Bereiches $W = W'$, $E - W'\overline{W} > 0$ angegeben. Dieser Bereich entsteht durch die Transformation $W = (Z - iE)(Z + iE)^{-1}$ aus dem Siegelschen Halbraum der symmetrischen n-reihigen Matrizen $Z = Z' = X + iY$, $Y > 0$. Für die eine Maßbestimmung benutzte er das Linienelement $ds^2 = Sp\left(dW(E - \overline{W}W)^{-1}\overline{dW}(E - W\overline{W})^{-1}\right)$, für die andere die Invarianz des Doppelverhältnisses. Hier sind jedoch, wie Verf. bemerkt, die geodätischen Linien nicht eindeutig bestimmt. Verf. geht aus von dem Linienelement (des Siegelschen Halbraumes $\mathfrak{H}$ selbst): $ds^2 = Sp\left(dZY^{-1}\overline{dZ}Y^{-1}\right)$.

Es ist gegenüber reellen Substitutionen invariant und gestattet, zu zwei Punkten $Z_1, Z_2 \subset \mathfrak{H}$ eine kürzeste Verbindungslinie zu charakterisieren. Durch eine unitäre Transformation der zugehörigen Matrizen W_1, W_2 können nämlich Z_1, Z_2 auf die eindeutig bestimmte Gestalt $Z_1 = iE$, $Z_2 = iD = i(\delta_{\mu\nu}d_\nu)$ transformiert werden (d_ν reell), und Verf. zeigt, daß die Parameterdarstellung $Z(t) = (x_{\mu\nu}(t) + iy_{\mu\nu}(t))$ der kürzesten Verbindungslinie durch $x_{\mu\nu}(t) = 0$, $y_{\mu\nu}(t) = \delta_{\mu\nu}d_\nu^t$ gegeben ist ($0 \leqq t \leqq 1$). Als Entfernung zweier beliebiger Z_1, Z_2 ergibt sich allgemeiner als bei der zweiten Maßbestimmung von Sugawara

$$s^2(Z_1, Z_2) = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\log \frac{1 + \lambda_\nu}{1 - \lambda_\nu}\right)^2.$$

Die λ_ν^2 sind die charakteristischen Wurzeln von $(Z_2 - Z_1)(Z_2 - \overline{Z}_1)^{-1}(\overline{Z}_2 - \overline{Z}_1)(\overline{Z}_2 - Z_1)^{-1}$.
E. Schulenberg (Berlin).

Fréchet, Maurice: Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques continues. C. R. Acad. Sci., Paris **213**, 520—522 (1941).

Eine Funktion $f(t)$ heißt asymptotisch fastperiodisch (as. fp.) (für $t \to +\infty$), wenn $f(t) = p(t) + \omega(t)$ ist, wo $p(t)$ im Bohrschen Sinne fastperiodisch und $\omega(t)$ stetig mit $\omega \to 0$ für $t \to +\infty$ ist. Eine etwas weitere Klasse von Funktionen tritt in der Ergodentheorie auf. Die as. fp. Funktionen lassen sich in äquivalenter Weise direkt durch Fastperiodizitätseigenschaften oder durch eine Normalitätseigenschaft definieren, ganz analog wie die Bohrschen Funktionen. Natürlich spielt $t \to +\infty$ mit in diese Definitionen hinein. Weitere bekannte Eigenschaften der Bohrschen Funktionen werden mutatis mutandis auf die as. fp. Funktionen übertragen. *E. Hopf* (Leipzig).

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Pompeiu, D.: Sur l'équation différentielle linéaire du premier ordre. Bull. Sci. École polytechn. Timişoara **10**, 203—204 (1941).

Durch die Familie der Lösungskurven der Gleichung $y' + p(x)y + q(x) = 0$ sind die Koeffizienten $p(x)$, $q(x)$ eindeutig bestimmt. Sind u_0, u_1 partikuläre Lösungen von $M\frac{\partial u}{\partial x} + N\frac{\partial u}{\partial y} + Pu + Q = 0$, so lautet das allgemeine Integral $u = u_0 + (u_1 - u_0)\varphi(v)$ mit willkürlicher Funktion φ und v als Lösung von $M\frac{\partial v}{\partial x} + N\frac{\partial v}{\partial y} = 0$; löst man auf: $\varphi(v) = au + b$, so ist $M\frac{\partial a}{\partial x} + N\frac{\partial a}{\partial y} = aP$, $M\frac{\partial b}{\partial x} + N\frac{\partial b}{\partial y} = aQ$.

Harald Geppert (Berlin).

Trevisan, Giorgio: Teoremi di unicità e confronto per problemi relativi a sistemi di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Rend. Semin. mat. Univ. Padova **12**, 12—21 (1941).

Verf. betrachtet das System (1) $y'=f(x,y,z)$, $z'=g(x,y,z)$, wo f und g in dem Streifen S: $-\infty<a\leqq x\leqq b<+\infty$, $|y|<+\infty$, $|z|<+\infty$ reell und stetig sind. Wenn 1) $f(x,y,z)$ bez. z wächst (oder auch in y und z nicht abnimmt), und 2) $g(x,y,z)$ bez. y wächst und bez. z einer Lipschitz-Bedingung genügt, dann läßt das System (1) höchstens eine Lösung zu, die den Randbedingungen

(2) $$z(a)=z_a, \qquad y(b)=y_b \quad \text{mit vorgegebenen Konstanten } z_a,\ y_b$$

oder den beiden anderen Bedingungen

$$\int_a^b y(x)dx=K, \qquad z(a)=z_a \quad (K \text{ und } z_a \text{ vorgegebene Konstanten})$$

genügt. Es folgen Vergleichskriterien für die Lösungen zweier Systeme vom Typus (1), die Randbedingungen vom Typus (2) genügen. *Giovanni Sansone* (Firenze).

Scorza Dragoni, Giuseppe: Teoremi di unicità relativi a un problema al contorno per un sistema di due equazioni differenziali, ordinarie, del primo ordine. Rend. Semin. mat. Univ. **12**, 30—50 (1941).

Verf. nimmt das Randwertproblem des Systems (1) $y'=f(x,y,z)$, $z'=g(x,y,z)$ wieder auf, das schon von seinem Schüler Trevisan (siehe vorsteh. Referat) betrachtet wurde. Er setzt voraus, daß f und g in dem Streifen S: $-\infty<a\leqq x\leqq b<+\infty$, $|y|<+\infty$, $|z|<+\infty$ definiert, bez. x meßbar und in (y,z) stetig seien, und daß in ganz S

$$|f(x,y,z)|<K(x), \qquad |g(x,y,z)|<K(x)$$

gilt, wobei $K(x)$ in (a,b) summierbar ist. Er beweist, daß das System

(2) $$y(x)=\alpha+\int_a^x f(t,y(t),z(t))dt, \qquad z(x)=\beta+\int_b^x g(t,y(t),z(t))dt,$$

wo α und β gegebene Zahlen sind, mindestens eine Lösung hat. Diese Lösung ist eindeutig, wenn 1) $f(x,y,z)$ bez. z und $g(x,y,z)$ bez. y nicht abnehmen, 2) $f(x,y,z)$ bez. y und $g(x,y,z)$ bez. z einer verallgemeinerten Lipschitz-Bedingung [$|f(x,y,z)-f(x,\bar{y},z)|<h(x)|y-\bar{y}|$, wo $h(x)$ in (a,b) summierbar ist; entsprechend für g und z] genügen. — Verf. gibt noch weitere Existenz- und Eindeutigkeitssätze für das System (2), die in eleganter und symmetrischer Weise den genannten Satz ergänzen. *Giovanni Sansone* (Firenze).

Kamke, E.: Über Sturms Vergleichssätze für homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung und Systeme von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung. Math. Z. **47**, 788—795 (1942).

Verf. zeigt, daß die Sturmschen Vergleichssätze für das Differentialsystem (1) $y'=Py+Qz$, $z'=Ry+Sz$ mit in $a\leqq x\leqq b$ stetigen $P(x),\ldots S(x)$ durch die schon von Prüfer [Math. Ann. **95**, 499 (1926)] benutzte Transformation (2) $y=C\varrho(x)\sin\vartheta(x)$, $z=C\varrho(x)\cos\vartheta(x)$ trivial werden. Dann geht nämlich (1) über in

$$\varrho(x)=\exp\int_a^x[P\sin^2\vartheta+\tfrac{1}{2}(Q+R)\sin 2\vartheta+S\cos^2\vartheta]dx,$$

(3) $$\vartheta'(x)=Q\cos^2\vartheta+(P-S)\sin\vartheta\cos\vartheta-R\sin^2\vartheta$$

mit gegebenem $\vartheta(a)=\alpha$, $0\leqq\alpha<\pi$; die Lösung von (3) werde mit $\vartheta(x,\alpha)$ bezeichnet, sie ist in ganz (a,b) eindeutig; es ist daher $\vartheta(x,\alpha+\pi)=\vartheta(x,\alpha)+\pi$, und durchläuft α monoton wachsend ein Wertintervall der Länge π, so tut $\vartheta(x,\alpha)$ an jeder festen Stelle x das gleiche. Betrachtet man zwei verschiedene Differentialgleichungen vom Typus (3): $\vartheta_\nu'=A_\nu\cos^2\vartheta+2B_\nu\sin\vartheta\cos\vartheta+C_\nu\sin^2\vartheta$ $(\nu=1,2)$ und ist in $a\leqq x\leqq b$: $A_2\geqq A_1$, $C_2\geqq C_1$, $(A_2-A_1)(C_2-C_1)\geqq(B_2-B_1)^2$, (4) so gilt daselbst $\vartheta_1(x,\alpha)\leqq\vartheta_2(x,\alpha)$, also $\vartheta_1(x,\alpha_1)\leqq\vartheta_2(x,\alpha_2)$ für $\alpha_1\leqq\alpha_2$; ist in (4)

insbesondere $B_1(x) \equiv B_2(x)$, so kann die Gleichheit ausgeschlossen und $\vartheta_1(b, \alpha_1) < \vartheta_2(b, \alpha_2)$ gefolgert werden. Dies enthält bereits die Vergleichssätze; für (1) umgeschrieben lauten sie in der Fassung von M. Bôcher [Trans. Amer. Math. Soc. **1**, 414—420 (1900)]: Es sei in $a \leqq x \leqq b$, $0 < Q_1 \leqq Q_2$, $R_1 \geqq R_2$, $P_2 - S_2 = P_1 - S_1$ und y_ν, z_ν bezeichne die Lösungen der entsprechenden Systeme (1); ferner sei entweder $y_1(a) = 0$ oder $y_1(a)\, y_2(a) \neq 0$, $z_1(a)/y_1(a) \geqq z_2(a)/y_2(a)$. Dann gilt 1) y_2 hat in (a, b) mindestens so viele Nullstellen wie y_1; sind $x_n^{(\nu)}$ die n-ten Nullstellen von y_ν, so gilt $x_n^{(2)} \leqq x_n^{(1)}$ und sogar $x_n^{(2)} < x_n^{(1)}$, falls für mindestens ein x zwischen a und $x_n^{(1)}$ entweder (5) $Q_2 > Q_1$, $|R_1| + |R_2| > 0$ oder $R_2 < R_1$ ist; 2) haben y_1, y_2 in $a < x < b$ gleich viele Nullstellen, gilt für mindestens ein x (5) und ist $y_1(b)\, y_2(b) \neq 0$, so ist $z_1(b)/y_1(b) > z_2(b)/y_2(b)$. — Druckfehler: S. 791 in (13) $\cos^2\vartheta$ statt $\cos 2\vartheta$, in (15) $\vartheta_1(b, \alpha_1)$ statt $\vartheta_2(b, \alpha_1)$. — Die Arbeit wurde bereits in Amer. Math. Monthly **46**, 417—421 (1939) veröffentlicht.

Harald Geppert (Berlin).

Brainerd, J. G., and C. N. Weygandt: Solutions of Mathieu's equation. 1. Philos. Mag., VIII. s. **30**, 458—477 (1940).

Für die Mathieusche Differentialgleichung in der Form (1) $y'' + \varepsilon(1 + k\cos t)\, y = 0$ werden diejenigen Lösungen $g(t)$, $h(t)$ bestimmt, für die $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$; $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$ ist; sie werden in der Form geschrieben $g = u_1 \cos(\mu t) - u_2 \sin(\mu t)$, $H = u_1 \sin(\mu t) + u_2 \cos(\mu t)$ $\left[H = \frac{\sqrt{1 - b^2}}{h(2\pi)}\, h(t),\ b = g(2\pi) = \cos(2\pi\mu),\ \mu \text{ reell oder rein imaginär}\right]$; u_1, u_2 sind Funktionen mit der Periode 2π. Es wird dann gezeigt, daß die Funktionen $g(t)$, u_1 gerade und $h(t)$, u_2 ungerade um $t = 0$ herum sind, u_1 gerade und u_2 ungerade um $t = \pi$ herum und $h'(2\pi) = g(2\pi)$ ist; daran schließt sich eine Diskussion der vollständigen Lösungen der Gleichung (1). Weiterhin werden die Funktionen g, h, g', h', u_1, u_2 für $\varepsilon = 9$ und $k = 0{,}9$ $(\mu = 0{,}212)$ im Intervalle $0 \leqq t \leqq 4\pi$ graphisch dargestellt. Auch die Bestimmung des charakteristischen Exponenten μ und sein Zusammenhang mit ε, k werden eingehend auseinander gesetzt und durch eine Tabelle erläutert. Zum Schluß werden für die Funktionen g, h Reihenentwicklungen nach Potenzen von t gegeben und ihre Nullstellen (mit Tabellen) bestimmt. *Volk.*

Cinquini, Silvio: Sopra i problemi di valori al contorno per equazioni integrodifferenziali. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **20**, 257—270 (1941).

Verf. beweist einige Existenzsätze für die Lösungen der Integrodifferentialgleichung

$$y'' = f\left(x, y, y', \int_{x_0}^{x} g(x, z, y(z), y'(z))\, dz\right)$$

mit den Randbedingungen $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$. Sie verallgemeinern andere Sätze, die derselbe Verf. (dies. Zbl. **21**, 403) für die Gleichung $y'' = f(x, y, y')$ aufgestellt hat.

C. Miranda (Torino).

Beke, E.: Über eine Funktional-Differential-Gleichung. Mat. fiz. Lap. **48**, 387—392 u. dtsch. Zusammenfassung 392 (1941) [Ungarisch].

Die Formel $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \sin x (\sin x)'$ legt die Frage nahe, alle analytischen Funktionen zu bestimmen, die sich in $x = 0$ regulär verhalten und die der Funktional-Differential-Gleichung $f(2x) = 2 f(x) f'(x)$ genügen. Es wird bewiesen, daß die einzigen solchen Funktionen cx, $c \sin \frac{x}{c}$ und $c e^{-\frac{x}{2c}}$ sind. Eine Gleichung von der Form $f(Cx) = C f(x) f'(x)$ kann im Falle $C \neq \pm 2$ keine geraden Funktionen zur Lösung haben, und die einzigen ungeraden Lösungen sind die Funktionen cx.

Béla v. Sz. Nagy (Szeged).

Silberstein, Ludwik: Solution of the equation $f'(x) = f(1/x)$. Philos. Mag., VIII. s. **30**, 185—186 (1940).

On a $f(x) = \text{const}(x^m + x^n)$, où $m = (1 + i\sqrt{3})/2$, $n = (1 - i\sqrt{3})/2$.

Jean Leray (Paris).

Ghermanescu, M. Michel: Sur une équation fonctionnelle. Bull. Sci. École polytechn. Timişoara **10**, 258—272 (1941).

L'A. donne la solution générale de l'équation fonctionnelle

$$f(n+k)f(n-k) - f^2(n) = A(n)B^{n-1}(n)$$

(f fonction inconnue; A et B fonctions données de période k), et plus généralement de l'équation fonctionnelle

$$\begin{vmatrix} f(n+pk) & f(n+\overline{p-1}k) & \cdots & f(n) \\ f(n+\overline{p-1}k) & f(n+\overline{p-2}k) & \cdots & f(n-k) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ f(n) & f(n-k) & \cdots & f(n-pk) \end{vmatrix} = A(n)B^{n-1}(n).$$

L'A. étudie ensuite les suites de polynomes en x, $P_n(x)$, où $n>0$, qui satisfont à l'équation fonctionnelle

$$P_{n+k}(x)P_{n-k}(x) - P_n^2(x) = A(x)B^{n-1}(x)$$

(k entier donné; $A(x)$ et $B(x)$ polynomes en x données). Il construit des formules de récurrence fournissant ces suites. Il étudie plus particulièrement celles d'entre elles qui contiennent un polynome $P_m(x)$ identiquement nul. *J. Leray* (Paris).

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Kulk, W. van der: Zur Theorie der verallgemeinerten Pfaffschen Gleichungen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **45**, 26—31 (1942).

Eine Gleichung von der Form $F(\xi^\varkappa; d_1\xi^{[\mu_1}\ldots d_m\xi^{\mu_m]}) = 0$, $\varkappa = 1, \ldots, n$, wobei F in den $\binom{n}{m}$ Ausdrücken $d_1\xi^{[\mu_1}\ldots d_m\xi^{\mu_m]}$ homogen ist, wird als eine verallgemeinerte Pfaffsche Gleichung bezeichnet. In der vorliegenden Arbeit teilt der Verf. die Grundzüge einer Theorie von Systemen solcher Gleichungen mit. Im Mittelpunkte steht ein Existenzsatz über diesbezügliche Integralmannigfaltigkeiten, der einen bekannten Satz von Cartan-Kähler, betreffend Systeme, die in den Ausdrücken $d_1\xi^{[\mu_1}\ldots d_m\xi^{\mu_m]}$ linear sind, verallgemeinert. Der Beweis dieses Hauptsatzes wurde im Falle $m=2$ vom Verf. schon früher veröffentlicht (vgl. dies. Zbl. **25**, 53, 178), für $m>2$ soll er an einer anderen Stelle erbracht werden. *O. Borůvka* (Brünn).

Robinson, Lewis-Bayard: Un système de Riquier et le calcul tensoriel. 2. Pt. Bull. Soc. Math. France **68**, 129—133 (1940).

Verf. betrachtet das System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung $y_i'' + p_{i1}y_1' + p_{i2}y_2' + q_{i1}y_1 + q_{i2}y_2 = 0$ und die Transformationsgruppe

$$(\mathrm{T})\quad y_i = \sum_{\lambda=1}^{2} \alpha_{i\lambda}(x)\eta_\lambda,\quad y_i^{(k)} = \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\varkappa=0}^{k}\binom{k}{\varkappa}\alpha_{i\lambda}^{(\varkappa)}(x)\eta^{(k-\varkappa)},\quad x=f(\xi)\quad (i,j=1,2;\ k=0,\ldots,m).$$

Den Inhalt bildet die Bestimmung von Funktionen $I_1, \ldots, I_{r+1}$ der Veränderlichen $y_1, y_2, y_1', y_2', p_{ij}, p_{ij}', q_{ij}$, die sich bei den Transformationen von T in folgender Weise transformieren: $\bar I_1 = \sum_{\varrho=0}^{r}\binom{r}{\varrho}\Delta_{11}^{r-\varrho}\Delta_{21}^{\varrho} I_{1+\varrho}$, $\bar I_{s+1} = \frac{(r-s)!}{r!}\left(\Delta_{12}\frac{\partial}{\partial\Delta_{11}} + \Delta_{22}\frac{\partial}{\partial\Delta_{21}}\right)^s \bar I_1$ ($s=1,\ldots,r$), wobei Δ_{ij} das algebraische Komplement von α_{ij} in der Determinante $|\alpha_{ij}|$ bedeutet. Für $r=2$ ist dieses Problem bereits in einer früheren Arbeit des Verf. gelöst worden (vgl. dies. Zbl. **17**, 228), und zwar durch Integration eines Riquierschen Systems von partiellen Differentialgleichungen. Diese Methode wird in der vorliegenden Arbeit auf den allgemeinen Fall ohne wesentliche Schwierigkeiten erweitert. *O. Borůvka.*

Kerékjártó, B. von: Über die dreigliedrigen integrierbaren Gruppen. Math. Ann. **118**, 365—378 (1942).

Eine n-gliedrige kontinuierliche Gruppe G_n heißt integrierbar, wenn sie eine

$(n-1)$-gliedrige invariante Untergruppe G_{n-1}, dieselbe eine $(n-1)$-gliedrige invariante Untergruppe G_{n-2} besitzt usw. Jede eingliedrige und jede zweigliedrige kontinuierliche Gruppe ist integrierbar. In dieser Arbeit werden die dreigliedrigen integrierbaren Gruppen (weiter mit G_3 bezeichnet) näher untersucht. Zuerst wird bewiesen, daß G_3 eine kommutative zweigliedrige invariante Gruppe (G_2) enthält. Sodann wird gezeigt, daß G_3 das Produkt der Gruppe G_2 und einer eingliedrigen Gruppe ist. Mittels der expliziten Darstellungen der zur Gruppe gehörigen Transformationen werden die sieben Typen der dreigliedrigen invarianten Gruppen bestimmt. Unter diesen Gruppen besitzen nur die Gruppen, welche mit der Gruppe der Bewegungen der euklidischen Ebene homöomorph sind, die Eigenschaft, daß sämtliche in ihr enthaltenen Abbildungen in der Ebene überall regulär sind. *J. Haantjes* (Amsterdam).

Lahaye, Edm.: Sur l'application de la méthode des approximations successives à la résolution des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **27**, 537—551 (1941).

Verf. gibt zuerst die Lösung der partiellen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\left(A_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+A_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\left(B_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+B_n\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0 \tag{1}$$

($A_1, \ldots, B_n$ sind Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$) in der Gestalt

$$u=F_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})+F_2(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}) \tag{2}$$

an, wo $\varphi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ bestimmte Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$; F_1, F_2 willkürliche Funktionen sind. Dann verallgemeinert er (1) auf die Gestalt

$$\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_j a_{ij}p_{ij}+\sum_1^n{}_i b_ip_i+cu=0, \qquad p_{ij}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}, \qquad p_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

(a_{ij}, b_i, c sind Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$), welche die Lösung

$$u=R_1(x_1, \ldots, x_n)\cdot F_1+R_2(x_1, \ldots, x_n)\cdot F_2 \tag{3}$$

zuläßt. Verf. gibt an, wie die willkürlichen Funktionen F_1, F_2 bestimmt werden müssen, damit die Anfangsbedingungen von Cauchy erfüllt werden. Durch sukzessive Approximation entwickelt Verf. mit Hilfe der Lösung (2) die Lösung (3), ohne die Konvergenz zu beweisen. *Rádl* (Prag).

Kostitzin, Vladimir A.: Sur l'équation de la chaleur dans le cas d'une sphère soumise à des conditions spéciales. C. R. Acad. Sci., Paris **213**, 972—974 (1941).

Verf. sucht die Temperatur u in einem Punkte P des Inneren einer Kugel oder auf ihr, wenn u an ihrer Oberfläche eine Randbedingung dritter Art erfüllt und zu Beginn eine gegebene Funktion des Ortes ist. Er findet $u(P)$ als Unterschied zweier dreifacher Integrale, deren Integranden außer den den Zustand am Rande und zu Beginn kennzeichnenden Funktionen eine nach den Legendreschen Polynomen $P_n(\cos\gamma)$ fortschreitende Reihe $\mathfrak{L}$ enthalten, wo γ den Winkel zwischen den Strahlen vom Mittelpunkte O der Kugel nach P und einem in ihr beweglichen Punkte bedeutet. Die Vorzahlen von $\mathfrak{L}$ sind bilineare Entwicklungen nach Besselschen Funktionen, die von $\overline{OP}=r$ abhängen. *Koschmieder* (Graz).

Kostitzin, Vladimir A.: Sur l'équation généralisée de la chaleur dans le cas d'une sphère. C. R. Acad. Sci., Paris **214**, 47—49 (1942).

Verf. überträgt die die Gleichung $m^2\Delta u=\partial u/\partial t$ mit festem m betreffenden Ergebnisse der vorstehend besprochenen Arbeit auf die allgemeinere Gleichung $\Delta u=L(r)(\partial u/\partial t)$ mit einer stetigen, nirgends verschwindenden Funktion $L(r)$. In der Lösung treten statt der Besselschen allgemeinere Orthogonalfunktionen auf. *Koschmieder* (Graz).

Biben, Georges: Sur une extension de la méthode des spectres à la mécanique ondulatoire relativiste de M. de Donder. C. R. Acad. Sci., Paris **213**, 773—775 (1941).

Die Integration der de Donderschen Gleichung (vgl. dies. Zbl. **23**, 90) führt zur

Differentialgleichung $\Delta_2\varphi + k^2\varphi = 0$, wo φ komplex ist. Für die Eigenwerte von k^2 wird der folgende Satz bewiesen. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß in einem Gebiet D eine Lösung der Gleichungen $\Delta_2\varphi + k^2\varphi = 0$ und $\Delta_2\overline{\varphi} + k^2\overline{\varphi} = 0$ existiert, für die φ und $\overline{\varphi}$ auf dem Rande von D verschwinden, ist, daß k^2 einem stationären Wert des Quotienten $\int \Delta_1(\varphi, \overline{\varphi}) d\tau : \int \varphi\overline{\varphi} d\tau$ gleich ist, wo das Integral über D erstreckt werden muß. *J. Haantjes.*

Roe, Glenn M.: Frequency distribution of normal modes. J. acoust. Soc. Amer. **13**, 1—7 (1941).

Verf. geht davon aus, daß der Nachhall eines Raumes grundsätzlich mit den Eigenschwingungen zusammenhängt, wie Ref. früher gezeigt hat. Zur genauen Berechnung der Dämpfung dieser Eigenschwingungen ist es erforderlich, die asymptotische Verteilung der Eigenschwingungsfrequenzen zu kennen. Verf. betrachtet diese asymptotische Verteilung für sechs Fälle: Parallelepiped, Zylinder, Kugel, Prisma, Halbzylinder und Halbkugel. Von diesen Fällen wählt er den Zylinder zur Berechnung der Dämpfung aus. Hierbei nimmt er an den Wänden eine bestimmte Schalleitfähigkeit an und gelangt so zu Ausdrücken der Dämpfungsfaktoren der einzelnen Eigenschwingungen. Hierauf betrachtet er verschiedene Lagen der erregenden Schallquelle und berechnet für diese Lagen angenähert den Schalldruck im stationären Zustand sowie während der Nachhallzeit. Letzterer Ausdruck wird angenähert mit Hilfe von Gammafunktionen berechnet. Zum Schluß bemerkt Verf., wie diese Formeln auch für die anderen Raumgattungen aufgestellt werden könnten. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Wagner, Karl Willy: Die Theorie ungleichförmiger Leitungen. Arch. Elektrotechn. **36**, 69—96 (1942).

Für die Gleichungen der Doppelleitung (Telegraphengleichung)

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = RI + L\frac{\partial I}{\partial t}, \qquad -\frac{\partial I}{\partial x} = GV + C\frac{\partial V}{\partial t},$$

in der wie üblich V bzw. I Spannung bzw. Strom, x die Ortskoordinate, t die Zeit, R, L, G, C bzw. Widerstand, Induktivität, Ableitung, Kapazität pro Längeneinheit bedeutet, wird bei gewissen Annahmen über die Ortsabhängigkeit der Größen R, L, G, C die erste Randwertaufgabe $\left(\frac{V}{I} = W \text{ für } x = 0 \text{ und } x = l, \text{ d. h. für Anfang und Ende der Leitung vorgegeben}\right)$ vollständig gelöst. Allgemein wird zunächst $R(x) = \varrho_1 L(x)$, $G(x) = \varrho_2 C(x)$ mit noch frei wählbaren Konstanten ϱ_1, ϱ_2 angesetzt; der Ansatz der Trennung der Variablen:

$$V = (p + \varrho_1)\varphi(x)e^{pt}, \qquad I = -\frac{1}{L(x)}\varphi'(x)e^{pt} = \psi(x)e^{pt}$$

führt dann für φ auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{1}{C}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{L}\frac{d\varphi}{dx}\right) = (p + \varrho_1)(p + \varrho_2)\varphi,$$

und aus dieser lassen sich mit Hilfe der Randbedingungen zunächst die Eigenwerte p und die zugehörigen Eigenlösungen φ bestimmen, woraus sich sodann durch Reihenentwicklungen nach Eigenlösungen auch Ausgleichsvorgänge behandeln lassen. Die Abschnitte 1 bis 5 der Arbeit enthalten die zur Ausführung dieses Programms notwendigen allgemeinen Formeln; Abschnitt 6 behandelt dann sehr eingehend den speziellen Fall $L = L_0(1 + \lambda x)$, $C = C_0(1 + \lambda x)^{-1}$ (wobei L_0, C_0, λ Konstanten sind), welcher $\varphi = (1 + \lambda x)Z_1\left[\frac{m}{\lambda}(1 + \lambda x)\right]$ liefert, worin Z_1 eine beliebige Zylinderfunktion vom Index 1 und $-m^2 = (p + \varrho_1)(p + \varrho_2)L_0C_0$ ist. Dieser Fall wird daher vom Verf. als „Besselsche Leitung" bezeichnet; die erzwungenen Schwingungen werden in Abschnitt 7 untersucht, und es wird gezeigt, wie man die Eigenschwingungen speziell für die verlustfreie Leitung, d. h. für $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$, erhält; dies geschieht in Abschnitt 8, wo auch der Einschaltvorgang für Gleichstrom behandelt wird. In Abschnitt 9 werden

schließlich die „Potenzleitungen“

$$L = L_0(1 + \lambda x)^r, \qquad C = C_0(1 + \lambda x)^s$$

und die „Exponentialleitungen“

$$L = L_0 e^{\beta x}, \qquad C = C_0 e^{\gamma x}$$

behandelt; die Potenzleitungen liefern für φ Produkte aus einer Potenz einer geeigneten Ortsvariablen und einer Zylinderfunktion vom Index $\alpha = \frac{r+1}{r+s+2}$ mit dieser Ortsvariablen als Argument. Die Möglichkeit einer weiteren Behandlung hängt dann wesentlich davon ab, ob die Zylinderfunktionen vom Index α genügend tabelliert sind. Für die Exponentialleitungen ergeben sich ähnliche Resultate mit $\alpha = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}$; für $\beta = -\gamma$ läßt sich $\varphi(x)$ durch Exponentialfunktionen ausdrücken; dieser Fall wird ausführlicher besprochen. *Magnus* (Berlin).

Jeffreys, Harold: An analogy between the theories of potential and vibrations. Philos. Mag., VIII. s. **30**, 161—167 (1940).

Il lavoro contiene alcune considerazioni, in gran parte già note, intorno al problema di Dirichlet per il semipiano, con applicazioni allo studio della sensibilità dei sismografi. *C. Miranda* (Torino).

Cimino, Massimo: Una soluzione in grande del problema di Cauchy per una particolare equazione in tre variabili, ottenuta con un metodo di M. Picone. I. Atti Accad. Italia, Rend., VII. s. **2**, 800—809 (1941).

Verf. betrachtet das Cauchysche Problem für die Differentialgleichung

$$\Delta^n u(x, y, z) = 0 \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

mit den folgenden auf der Kugel Ω mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius r gegebenen Anfangsbedingungen

$$\left[\frac{\partial^k u}{\partial \varrho^k}\right]_{\varrho=r} = f_k(\theta, \varphi) \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2n-1),$$

in denen ϱ, θ, φ Polarkoordinaten bedeuten. Mittels einer Methode von M. Picone (dies. Zbl. **14**, 261), die für das analoge Problem in zwei Veränderlichen schon von C. Tolotti (dies. Zbl. **21**, 129) angewandt wurde, wird der Eindeutigkeitssatz für die Lösung in dem linearen Raume der mitsamt ihren partiellen Ableitungen bis zur $2n$-ten Ableitung endlichen und stetigen Funktionen $u(\varrho, \theta, \varphi)$ aufgestellt und mittels einer Entwicklung nach Kugelfunktionen die Lösungsformel des Problems angegeben. — Unter der Voraussetzung, daß die vorgegebenen Funktionen $f_k(\theta, \varphi)$ die Spuren ganzer Funktionen $f_k(x, y, z)$ auf Ω seien, wird dann der Existenzsatz bewiesen durch den Nachweis, daß die eben genannte Reihe absolut und gleichmäßig in jedem beschränkten Bereich des Raumes, der höchstens den Nullpunkt ausläßt, konvergiert. Es folgt daraus ein eleganter Satz über das Regularitätsgebiet der n-fach hyperharmonischen Funktionen in drei Veränderlichen. *Aldo Ghizzetti* (Roma).

Cartan, Henri: Sur les fondements de la théorie du potentiel. Bull. Soc. Math. France **69**, 71—96 (1941).

Dans des recherches non publiées, M. Brelot a montré comment on peut étendre une partie des résultats de la théorie moderne du potentiel newtonien et des „potentiels d'ordre α“ de M. Riesz [Acta Litt. Sci. Szeged **9**, 1—42 (1938); ce Zbl. **18**, 407] au cas où l'espace euclidien est remplacé par un espace localement compact E et l'„intégrale d'énergie mutuelle“ de deux distributions de masses μ, ν par une intégrale double $\int\int g(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$ où on suppose seulement que le noyau $g(x, y)$ est $\geqq 0$, symétrique et continu pour $x \neq y$. L'A. apporte de nouveaux résultats dans cette direction, en supposant d'une part que E est un groupe localement compact, et d'autre part en considérant non pas un noyau g, mais une famille de noyaux g_α, dépendant continûment (en un certain sens) d'un paramètre $\alpha \geqq 0$, et satisfaisant à la relation

$g_{\alpha+\beta}(x, y) = \int g_\alpha(x, z) g_\beta(y, z) dz$, où l'intégrale est celle de Haar (le cas des potentiels de M. Riesz correspond à $g_\alpha(x, y) = k_{\alpha, n}/r^{\alpha-n}$, $k_{\alpha, n}$ constante dépendant de α et du nombre de dim. n de l'espace). Les théor. essentiels sont: I. Si le „potentiel" $U^\mu_\alpha(x) = \int g_\alpha(x, y) d\mu(y)$ est presque partout nul, il n'y a pas de masses (raisonnement très ingénieux, par passage de α à $\alpha/2^k$ et utilisation de la continuité, qui, même dans le cas de M. Riesz, remplace avantageusement le raisonnement de ce dernier). II. Sur un compact K, toute fonction continue peut être uniformément approchée par des potentiels. III. Si $\|\mu\|^2 = \int\int g(x, y) d\mu(x) d\mu(y)$ („énergie" des masses μ), $\|\mu\|$ est une norme sur l'espace $\mathfrak{S}$ des distributions de masses, qui en fait un sous-espace d'un espace de Hilbert; alors le sous-espace $\mathfrak{S}_K$ des masses concentrées sur un compact fixe K, est complet pour la norme $\|\mu\|$. Ce dernier th. donne aisément (par des raisonnements classiques dans l'espace de Hilbert) une partie des propriétés de „balayage" d'une distr. de masses, et de la „distribution capacitaire" sur un compact. L'A. indique que les propriétés plus précises du „balayage" dans le cas newtonien dépendent du „principe du maximum" suivant: l'inégalité $U^{\mu_1}(x) < U^{\mu_2}(x)$ en tout point du noyau de masses de μ_1, entraîne la même inégalité dans tout l'espace. On ne connaît jusqu'ici aucune condition générale pour le noyau $g(x, y)$ entraînant ce principe. *J. Dieudonné* (Nancy).

Monna, A. F.: Sur la représentation des fonctions harmoniques. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **44**, 939—942 (1941).

Zusatz zu einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **25**, 258) über die Darstellung harmonischer Funktionen durch ein Stieltjes-Radon-Integral. *Wittich.*

Weinstein, Alexander: On the decomposition of a Hilbert space by its harmonic subspace. Amer. J. Math. **63**, 615—618 (1941).

In der vorliegenden Note wird ein von Weyl [Duke math. J. **7**, 411—444 (1940); dies. Zbl. **26**, 20] herrührendes Lemma, wonach eine im Bereich S mit der Berandung C quadratisch integrable Funktion η harmonisch ist, sobald mit jeder stetigen und zweimal stetig differenzierbaren, auf C samt diesen Ableitungen verschwindenden Funktion ζ gilt $\int_S \eta \Delta\zeta \, dS = 0$, mit Hilfsmitteln aus der Theorie des Hilbertschen Raumes bewiesen, wie sie vom Verf. zusammen mit Aronszajn in einer früheren Arbeit entwickelt worden sind [Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **27** (1941)]. *Schoblik* (Brünn).

Kravtchenko, Julien: Sur la continuité des dérivées du potentiel. C. R. Acad. Sci., Paris **213**, 676—679 (1941).

Die Dichte $\mu(P)$ einer räumlichen Massenverteilung in einem abgeschlossenen beschränkten Gebiete D, für dessen Rand gewisse Regularitätsannahmen gelten, erfülle die Bedingung $|\mu(P) - \mu(Q)| \leqq f(r)$, wobei $f(r)$ eine stetige, positive, nichtabnehmende Funktion von $r = \overline{PQ}$ bedeutet, für welche $f(0) = 0$ und $I(r) = \int_a^b \frac{f(r) - f(r')}{r - r'} dr'$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetig ist; dann sind die zweiten Ableitungen des entsprechenden Potentials in D stetig und besitzen außerdem einen Stetigkeitsmodul, der sich vom Stetigkeitsmodul der Funktion $I(r)$ um einen von D abhängenden konstanten Faktor unterscheidet. Ein analoges Ergebnis gilt für die ersten Ableitungen einer flächenhaften Massenverteilung auf der Belegungsfläche. *G. Cimmino* (Bologna).

Nomura, Yûkiti: The electrostatic problems of two equal parallel circular plates. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. **23**, 168—180 (1941).

Es seien r, ϑ, z Zylinderkoordinaten. Gegeben seien zwei parallele Kreisscheiben mit der z-Achse als Rotationsachse, dem Radius a und den Mittelpunktskoordinaten $z = 0$ bzw. $z = h$. Das Potential auf den Platten sei für $z = 0$ durch $f(\varrho, \vartheta)$, für $z = h$ durch $\bar{f}(\varrho, \vartheta)$ gegeben, wobei $\varrho = \frac{r}{a}$ gesetzt ist. Das Potential im Raum wird angesetzt als eine Summe $\Phi_1 + \Phi_2$ mit

$$\Phi_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m,\,n=0}^{\infty} (A_m^n \cos m\vartheta + B_m^n \sin m\vartheta) \int_0^{\infty} J_m(\varrho\xi) J_{m+2n+\frac{1}{2}}(\xi) e^{\mp\frac{z}{a}\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}},$$

$$\Phi_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m,\,n=0}^{\infty} (\bar{A}_m^n \cos m\vartheta + \bar{B}_m^n \sin m\vartheta) \int_0^{\infty} J_m(\varrho\xi) J_{m+2n+\frac{1}{2}}(\xi) e^{\mp\frac{z-h}{a}\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}},$$

wobei die verschiedenen Vorzeichen in den Exponentialfunktionen in Φ_1 bzw. Φ_2 so zu wählen sind, daß für $z > 0$ bzw. $z > h$ das obere, für $z < 0$ bzw. $z < h$ das untere Vorzeichen eingesetzt wird. Die Randbedingungen liefern für die Größen A_m^n, B_m^n, $\bar{A}_m^n$, $\bar{B}_m^n$ unendliche Gleichungssysteme der Gestalt

$$A_m^n + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{A}_m^k G_{m,k}^n = C_m^n; \qquad \bar{A}_m^n + \sum_{k=0}^{\infty} A_m^k G_{m,k}^n = \bar{C}_m^n,$$

$$B_m^n + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{B}_m^k G_{m,k}^n = D_m^n; \qquad \bar{B}_m^n + \sum_{k=0}^{\infty} B_m^k G_{m,k}^n = \bar{D}_m^n,$$

wobei sich die Größen C_m^n, D_m^n, $\bar{C}_m^n$, $\bar{D}_m^n$ durch Quadraturen aus f und $\bar{f}$ bestimmen, während die Koeffizienten $G_{m,k}^n$ durch

$$G_{m,k}^n = (2m + 4k + 1) g(2n + \tfrac{1}{2}, m + 2k + \tfrac{1}{2})$$

mit

$$g(\mu, \nu) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{h}{a}\xi} \frac{J_\mu(\xi) \cdot J_\nu(\xi)}{\xi} d\xi$$

gegeben sind. Die Gleichungen werden durch Iteration gelöst und die Werte von $g(\mu, \nu)$ werden für $0,4 \leqq \frac{h}{a} \leqq 20$ und $\mu, \nu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{13}{2}$ tabuliert. Zum Schluß wird der Fall des Plattenkondensators (konstante Werte von f und $\bar{f}$) behandelt und die Kraft berechnet, mit welcher gleich oder entgegengesetzt geladene Platten in Abhängigkeit von $\frac{h}{a}$ aufeinander wirken. *W. Magnus* (Berlin).

Variationsrechnung:

Tonelli, Leonida: Su un nuovo tipo di problemi di calcolo delle variazioni. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **10**, 167—189 (1941).

Ein Variationsproblem, das sich bei einer Frage der höheren Technik einstellte und zu keinem der bisher untersuchten Typen gehört, hat Verf. veranlaßt, seine bekannte Methode auf einen neuen Kreis von Variationsproblemen auszudehnen; er kommt so zu dem folgenden allgemeinen Existenzsatz des Extremums: Es seien $\psi(y)$, $\varphi(y)$ zwei im Intervall (I) $Y_0 \leqq y \leqq Y_1$ zusammen mit ihren Ableitungen $\varphi'(y)$, $\varphi''(y)$ endliche und stetige Funktionen und es sei $\psi(Y_1) < 0$, $\varphi(Y_1) = 0$, $\varphi(y) > 0$ für (II) $Y_0 \leqq y \leqq Y_1$. Die Funktion $F(y, x', y')$ sei definiert für alle y aus (I) und für alle Paare (x', y') mit (III) $x'^2 + y'^2 \neq 0$; für alle y aus (II) und alle angegebenen Paare (x', y') sei F mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig; weiter sei F positiv homogen vom ersten Grade bez. x' und y' und habe die Weierstraßsche Invariante $F_1(y, x', y') > 0$; außerdem sei $F > 0$ mit Ausnahme höchstens der Paare $x' = 0$, $y' = r$ $(r < 0)$; für jedes (II) und (III) genügende Tripel y, x', y' mit $x' \geqq 0$ folge $F(y, x', y') > \gamma y'$ mit $\gamma > 0$; schließlich sei in (II) und für $y' \neq 0$, $F_{x'}(y, 0, y') = 0$. Setzt man unter diesen Annahmen $F(y, 1, y') \equiv f(y, y')$, fixiert einen Wert Y_i mit $Y_0 \leqq Y_i < Y_1$ und betrachtet die Klasse K der in (X_0, X_1) absolut stetigen Funktionen $y(x)$, für die $Y_0 \leqq y(x) \leqq Y_1$, $y(X_0) = Y_i$, (IV) $y'(x) \geqq \psi(y(x))$ fast überall in (X_0, X_1) ist und für die weiterhin $\varphi(y(x))^{-1} f(y(x), y'(x))$ im Lebesgueschen Sinne in (X_0, X_1) integrierbar ist, so existiert in ihr das absolute Minimum des Integrals

$$J[y(x)] = \int_{X_0}^{X_1} \varphi(y(x))^{-1} f(y(x), y'(x)) dx.$$

Der Beweis benutzt die Parameterform des Integrals $J[y(x)]$, d. h. das Integral

$$J_C = \int_C \varphi(y(s))^{-1} F(y(s), x'(s), y'(s)) ds .$$

Außerdem beweist Verf., daß jede Funktion $y_\infty(x)$, die das Minimum von $J[y(x)]$ liefert, in K stets eine überall endliche, stetige und (IV) genügende Ableitung $y'_\infty(x)$ besitzt. *S. Cinquini* (Pavia).

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Feller, Willy: On the integral equation of renewal theory. Ann. math. Statist. **12**, 243—267 (1941).

Verf. studiert die beiden Integralgleichungen

(a) $u(t) = g(t) + \int_0^t u(t-x) f(x) dx$ und (b) $u(t) = \int_0^\infty u(t-x) f(x) dx$,

wobei $f(t)$ und $g(t)$ zwei gegebene, nichtnegative Funktionen sind, und $u(t)$ für $t > 0$ gesucht ist. Für $t < 0$ soll die Lösung von (b) mit einer gegebenen, nichtnegativen Funktion $h(t)$ übereinstimmen. Setzt man

$$g(t) = \int_t^\infty h(t-x) f(x) dx ,$$

so erkennt man die formale Äquivalenz der Probleme (a) und (b). Diese Gleichungen spielen in der angewandten Mathematik, besonders in der mathematischen Bevölkerungstheorie und in der Theorie der Gesamtheiten (Erneuerungsproblem) eine vorherrschende Rolle. Verf. übt in vielen Punkten berechtigte Kritik an der über diesen Problemkreis entwickelten Fachliteratur. Durch seine Arbeit finden verschiedene Fragen, die noch offen waren oder widerspruchsvoll behandelt wurden, ihre Klärung. — Es bietet gewisse Vorteile, durch Einführung der Summenfunktionen

$$U(t) = \int_0^t u(x) dx, \quad F(t) = \int_0^t f(x) dx, \quad G(t) = \int_0^t g(x) dx$$

die Gleichung (a) in der Stieltjesschen Gestalt

(c) $$U(t) = G(t) + \int_0^t U(t-x) dF(x)$$

zu schreiben. Den Existenzbeweis für die eindeutig bestimmte Lösung von (c), der z. B. vom Ref. auf Grund eines Theorems von Paley und Wiener aus der Theorie der Laplace-Transformation erbracht wurde (dies. Zbl. **22**, 50), führt Verf. müheloser durch Verwendung eines, den vorliegenden einfachen Verhältnissen besser angepaßten Theorems von Bernstein und Widder betreffend die Laplace-Stieltjessche Darstellung absolut-monotoner Funktionen (vgl. den Beweis dieses Theorems vom Verf.; dies. Zbl. **22**, 230). Die exakte Formulierung des für die Gleichung (a) ausgesprochenen Existenzsatzes lautet so: Sind $f(t)$ und $g(t)$ integrabel, nichtnegativ und in jedem endlichen Intervall beschränkt, und konvergieren in $R(s) > \sigma$ die Integrale

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad \text{und} \quad \gamma(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt ,$$

dann gibt es eine und nur eine nichtnegative Lösung $u(t)$ von (a), welche in jedem endlichen Intervall beschränkt ist, und für die das Integral

$$\omega(s) = \int_0^\infty e^{-st} u(t) dt \quad \text{für} \quad R(s) > \sigma'$$

konvergiert. Wenn $\lim_{s \to \sigma + 0} \varphi(s) \leqq 1$ ist, wird $\sigma' = \sigma$ gesetzt; andernfalls bezeichnet σ' die (einzige) reelle Wurzel der charakteristischen Gleichung $\varphi(s) = 1$ in $R(s) > \sigma$.

Es gilt die Beziehung $\omega(s) = \gamma(s)/1 - \varphi(s)$. — Im Hinblick auf die Interpretation der Gleichungen in den angewandten Gebieten, fand die Frage nach dem asymptotischen Verhalten der Lösung für große t in der bestehenden Fachliteratur große Beachtung. Verf. zeigt unter Verwendung eines Satzes der Tauberschen Asymptotik: Es sei:

$$a = \int_0^\infty f(t)dt, \qquad b = \int_0^\infty g(t)dt.$$

Notwendig und hinreichend für die Gültigkeit der asymptotischen Beziehung: $\frac{1}{t}\int_0^t u(x)dx \to C$ für $t \to \infty$ ist die Bedingung $a=1$ und die Konvergenz des Integrals $m_1 = \int_0^\infty t f(t)dt$. In diesem Fall ist $C = \frac{b}{m_1}$. — Damit erreicht Verf. die sog. Mittelkonvergenz (Stabilisierung im Mittel) der Lösung, die in der kürzlich erschienenen Habilitationsschrift von H. Richter (dies. Zbl. **26**, 126), die Verf. noch nicht bekannt sein dürfte, unter anderen Voraussetzungen ebenfalls hergeleitet wurde. Die Frage der eigentlichen Konvergenz ist wesentlich schwieriger zu behandeln. Verf. zeigt: Es sei (Bezeichnung wie oben) $a = 1$, $b < \infty$, n (ganz) $\geqq 2$ und $m_k = \int_0^\infty t^k f(t)dt$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Die Funktionen $t^\nu f(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n-2)$ seien in $(0, \infty)$ von beschränkter Variation, und es gelte ferner

$$\lim_{t\to\infty} t^{n-2} g(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} t^{n-2} \int_t^\infty g(x)dx = 0.$$

Dann gilt die asymptotische Beziehung

$$\lim_{t\to\infty} t^{n-2}\left\{u(t) - \frac{b}{m_1}\right\} = 0.$$

Verf. bemerkt noch, daß $u(t)$ monoton ausfällt, wenn $g'(t) + g(0)f(t) \geqq 0$ ist. Wenn $f(t)$ und $g(t)$ in $t \geqq T$ identisch verschwinden, dann gilt die oszillierende Konvergenz $u(t) \to C = \frac{b}{m_1}$, $t \to \infty$. Dieses Resultat wurde auch von H. Richter (dies. Zbl. **22**, 254) erreicht. — Endlich wendet sich Verf. noch der Lotkaschen Methode zu, die darin besteht, die Lösung von (a) oder (b) in der Form $u(t) = \sum A_k e^{s_k t}$ darzustellen, wo die s_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ die (als einfach vorausgesetzten) Wurzeln der charakteristischen Gleichung $\varphi(s) = 1$ sind. Die Möglichkeit einer solchen Darstellung hängt, wie Verf. darlegt, wesentlich vom funktionentheoretischen Verhalten der Funktion $\omega(s)$ in der ganzen Ebene ab. Dann und nur dann gibt es eine solche, für $t \geqq 0$ absolut konvergente Reihendarstellung, wenn die Funktion $\omega(s)$ die Entwicklung $\omega(s) = \sum \frac{A_k}{s - s_k}$, $\sum |A_k|$ konvergent, gestattet. In diesem Falle ist $A_k = -\gamma'(s_k)/\varphi(s_k)$. Die Erweiterung einer solchen Darstellung auf den Fall mehrfacher Wurzeln wird ebenfalls behandelt. *H. Hadwiger* (Bern).

Reissner, Eric: On a class of singular integral equations. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **20**, 219—223 (1941).

L'A. résout l'équation intégrale d'inconnue $f(x)$: (1) $f(x) - \int_0^\infty k(x-y)f(y)dy = h(x)$, $\left(0 < x;\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\lambda|x|}k^2(x)dx\right.$ fini quel que soit $\lambda < 1$: $h(x)e^{-ax}$ et $f(x)^{-ax}$ bornés pour une valeur $a < 1$). L'A. rappelle comment N. Wiener et E. Hopf (S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1931**, 696—706; ce Zbl. **3**, 307) l'ont étudiée dans le cas homogène ($h = 0$); puis il montre comment cette étude s'étend au cas non homogène ($h \neq 0$): la transformation de Fourier

$$F(w) = \int_0^\infty f(x)e^{-iwx}dx, \qquad H(w) = \int_0^\infty h(x)e^{-iwx}dx, \qquad K(w) = \int_{-\infty}^\infty k(x)e^{-iwx}dx$$

transforme cette équation en l'équation (2) $F(w)[1 - K(w)] = G(w) + H(w)$, dans laquelle F, G, H, K sont des fonctions de $w = u + iv$ holomorphes et bornées dans les domaines respectifs $v < -a$, $-1 < v$, $v < -a$, $-1 < v < 1$; F et G sont inconnues. L'A. construit la solution générale de (2) et en déduit la solution générale de (1). *Jean Leray* (Paris).

Praporgescu, N.: Sur une classe d'équations intégrales et leurs applications à la statistique. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest **10,** 64—103 u. 140—150 (1939).

Étude de l'équation (1) $\varphi(s) - \lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(s+t)\,dt = f(s)$ et en particulier de l'équation plus simple $\varphi(s) - \lambda\int_a^b K(t)\varphi(s+t)\,dt = Ce^{qs}$. L'équation homogène (2) $\varphi(s) - \lambda\int_a^b K(t)\varphi(s+t)\,dt = 0$ admet la solution $\varphi(s) = Ce^{qs}$. Si $K(s,t) = e^{ps}K(t)$, $f(s) = Ce^{qs}$, p et q étant des constantes, l'équation (1) est vérifiée par $\varphi(s) = Ce^{qs}\sum_{n=1}^{\infty} C^{(n)}\lambda^n e^{nps}$ où $C^{(n)} = K_0 \cdot K_1 \cdots K_{n-1}$, $K_\nu = \int_a^b e^{\nu p}e^{qt}K(t)\,dt$. Les fonctions qui rendent minima l'intégrale (3) $J = \int_A^B [u(s) - \lambda\int_a^b K(t)\varphi(s+t)\,dt]^2 ds$ sont des solutions de l'équation (2) et réciproquement les solutions de (2) rendent minima l'intégrale (3). *B. Hostinský* (Brünn).

Consiglio, A.: Risoluzione di una equazione integrale non lineare presentatasi in un problema di turbolenza. Atti Accad. Gioenia Catania, VI. s. **4,** mem. 20, 1—13 (1940).

Il problema del deflusso turbolento sulla lastra piana indefinita nell'ipotesi che la corrente sia agitata riconduce alla risoluzione dell'equazione integrale non lineare ad estremo variabile

$$1 - \int_0^x \frac{\beta(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}\,d\xi = B\sqrt[4]{\pi\lambda}\sqrt{\beta(x)}$$

nella funzione incognita $\beta(x)$ [v. Consiglio, Atti Accad. Gioenia Catania, VI. s. **2,** mem. **2,** 1—15 (1937)]. Cambiando la variabile x in quella z (e quindi ξ in ζ) mediante la trasformazione $x = B^4\pi\lambda z$ e assumendo poi comme incognita $\alpha^2(z) = B^2\sqrt{\pi\lambda}\,\beta(x)$ l'equazione da risolvere si riduce sotto la seguente forma semplice:

$$(1) \qquad 1 - \int_0^z \frac{\alpha^2(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}}\,d\zeta = \alpha(z), \qquad \alpha(0) = 1.$$

L'autore risolve l'equazione (1) sodisfacendola formalmente con una serie di potenze di $\sqrt{z}$ convergente per z minore di un certo z_0. *B. Hostinský* (Brünn).

Ghizzetti, Aldo: La trasformazione di Laplace e il calcolo simbolico degli elettrotecnici. Rend. Semin. mat. fis. Torino **7,** 83—99 (1941).

Verf. zeigt, wie man den in der Elektrotechnik üblichen symbolischen Kalkül mittels der Laplacetransformation streng einführen kann. Die Arbeit hat hauptsächlich didaktischen Wert und ist mit interessanten Beispielen versehen. *C. Miranda.*

Obrechkoff, Nikola: Sur les développements asymptotiques et la transformation de Laplace. Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. **36,** 171—196 u. franz. Zusammenfassung 197—200 (1940) [Bulgarisch].

Die ersten drei Sätze zeigen, daß die asymptotische Beziehung $f(s) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^{-\lambda_n}$ $(0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots)$ beiderseits und rechts gliedweise der Differentiation bzw. der Transformation $\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zs} \cdots ds$ unterworfen werden kann, und zwar 1. der Differentiation bei der Regularität von $f(s)$ innerhalb $\alpha < \arg s < \beta$, $|s| > \delta > 0$ für $s \to \infty$;

2. bei a) der Regularität von $f(s)$ entlang und rechts von einer Kurve C, die einen Winkelraum $\delta_1 \leqq \arg(s-\alpha) \leqq \delta_2$, $\frac{\pi}{2} < \delta_k < \pi$ rechts läßt, b) der Konvergenz von $\int f(\zeta)(\zeta-a)^{-1}d\zeta$ entlang C bei geeignetem a, und c) $f(s) \neq 0$ im Falle von $s \to \infty$: für $z \to 0$ der Transformierten innerhalb $\frac{\pi}{2} - \delta_2 < \arg z < \delta_1 - \frac{\pi}{2}$; 3. im Falle a) der Regularität von $f(s)$ in $\Re(s) \geqq -|\sigma|$ mit Ausnahme von $s=0$ und einem Winkelraum $\frac{\pi}{2} < \delta < |\arg s| \leqq \pi$ und b) einer gegenseitigen Darstellbarkeit

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-sz} F(z)dz, \qquad F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zs} f(s)ds$$

für die reziproken Annäherungen $s \to 0$, $z \to \infty$. — Zum Schluß wird der Satz von Carmichael über die Darstellbarkeit einer periodischen ganzen Funktion vom Exponentialtypus als Exponentialpolynom auf die Darstellbarkeit einer periodischen meromorphen Funktion mit einfachen Polen und einer Art vom Exponentialtypus als Exponentialreihe verallgemeinert. *v. Stachó* (Budapest).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Julia, Gaston: Sur la dualité dans l'espace hilbertien et sur le domaine des valeurs des opérateurs bornés de 4e classe. C. R. Acad. Sci., Paris **213**, 465—469 (1941).

Dans une Note précédente (voir ce Zbl. **25**, 413) l'A. a posé la question suivante: Étant donnés un système orthonormal complet $\{e_1, e_2, \ldots\}$ et une transformation linéaire bornée A dans l'espace H de Hilbert, dans quelles conditions peut-on trouver un système $\{z_1, z_2, \ldots\}$ biorthonormal au système $\{Ae_1, Ae_2, \ldots\}$, c'est-à-dire tel que $(Ae_m, z_n) = \delta_{mn}$. Il a donné la réponse pour les transformations A appartenant aux trois premières classes de Toeplitz, c'est-à-dire aux classes caractérisées par: 1) $n(AA^*)>0$, $n(A^*A)>0$; 2) $n(AA^*)>0$, $n(A^*A)=0$; 3) $n(AA^*)=0$, $n(A^*A)>0$. (On désigne par $n(T)$, pour une transformation hermitienne T, le minimum de (Tf, f) sous la condition $(f, f) = 1$). — Dans la présente Note il continue ces recherches en considérant les transformations A appartenant à la quatrième classe de Toeplitz caractérisée par $n(AA^*) = n(A^*A) = 0$. *Béla de Sz. Nagy* (Szeged).

Neumann, John von: Approximative properties of matrices of high finite order. Portugaliae Math. **3**, 1—62 (1942).

The aim of the present paper is an approach to the study of operator rings in Hilbert space by investigating the asymptotic behavior of n-th order matrices, when $n \to \infty$. — Let M_n be the set of all n-th order matrices $A=(a_{\varkappa\lambda})$ with complex numbers as elements $a_{\varkappa\lambda}$. Put $|A| = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{\varkappa,\lambda=1}^{n} |a_{\varkappa\lambda}|^2}$ and $|||A||| = \max_{|\xi|=1} |A\xi|$, introducing thus a metric and a pseudo metric in M_n. Put $t(A) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa\varkappa}}$ (the trace of A). Let A^* denote the adjoint of A, i. e. the matrix $A^* = (\overline{a_{\lambda\varkappa}})$. By an imbedding of M_m into M_n is meant a mapping $A \to A'$ of M_m into M_n for which $1_m \to 1_n$ (1_k denoting the k-th order unit matrix), $cA \to cA'$ (c any complex number), $A+B \to A'+B'$, $AB \to A'B'$ and $A^* \to (A')^*$. It is shown by simple matrix algebraical arguments, that such an imbedding exists if and only if n is divisible by m. If $n=mp$, and if A^+ is the n-th order matrix obtained by ranging A in p copies on the diagonal, then $A \to A^+$ yields such an imbedding of M_m into M_n (the standard one); all the other imbeddings can be derived from this by putting $A \to UA^+U^{-1}$ with any fixed unitary matrix U in M_n. Every imbedding leaves $\|\cdots\|$, $|||\cdots|||$ and $t(\ldots)$ invariant. Identifying A with A^+, we have $M_m \subseteq M_n$. Denote by M_m^n the set of all elements of all imbeddings

of M_m into M_n. — The fundamental problem is now the following one: Which n-th order matrices do behave, or behave approximately, as if they where m-th order matrices, i. e. which n-th order matrices do belong, or belong approximately, to M_m^n, especially when n is great compared to m (and divisible by m)? In particular the question arises, whether all elements A of M_n with $|||A||| \leqq 1$ are in an ε-distance of the set M_m^n in the sense of the metric or pseudometric of M_n. This question is answered in the negative sense by the following theorem: There exists an $\varepsilon > 0$ such that for every m and every p $(= 2, 3, \ldots)$ there exists an A in M_{mp} with $|||A||| \leqq 1$ such that $|A - B| > \varepsilon$ for all elements B of M_m^{mp}. But if we restrict A to be normal (i. e. such that $A^*A = AA^*$), then the answer is positive as formulated in the following theorem: Given an $\varepsilon > 0$ there exists an m_0 such that for every $m \geqq m_0$ and every p $(= 2, 3, \ldots)$ all the normal matrices A in M_{mp} with $|||A||| \leqq 1$ are in a distance $< \varepsilon$ (in the metric of M_{mp}) from the set of the normal matrices contained in M_m^{mp}. — From the numerous interesting variants and strengthenings of these theorems we call only the following one. For every $\delta > 0$ there exists an $\varepsilon > 0$ for which for every n $(= 1, 2, \ldots)$ there exists an A in M_n with $|||A||| \leqq 1$ such that for every Hermitean B in M_n with $|||B||| \leqq 1$ and $|B - t(B) \cdot 1_n| > \delta$ we have $|AB - BA| > \varepsilon$. — The method by which these results are obtained consists mainly in computing and comparing volumes. M_n may be looked at as a $2n^2$-dimensional real Euclidean space, the matrix $A = (a_{\varkappa\lambda})$ being identified with the point whose coordinates are $\Re a_{\varkappa\lambda}$ and $\Im a_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$; volumes can then be defined in M_n in the usual way. Evaluating the volume of the sphere $|A| \leqq 1$, the above theorems follow firstly with $|A| < 1$ instead of $|||A||| \leqq 1$. (The author has not yet succeeded in determining the volume of the pseudo sphere $|||A||| \leqq 1$.) But $|A| \leqq 1$ can then be replaced in the theorems by $|||A||| \leqq 1$, using purely matrix algebraical arguments involving a particular technique of "cutting through a thin part of the spectrum". — In spite of the efficiency of the volumetric method in proving existence theorems, it would be desirable, as pointed out by the author, to replace it by algebraical methods of constructive character. *Béla de Sz. Nagy* (Szeged).

Fantappiè, Luigi: Nuovi fondamenti della teoria dei funzionali analitici. Atti Accad. Italia, Mem. **12**, 617—706 (1941).

Verf. verallgemeinert seine Theorie der analytischen Funktionale, indem er Funktionale betrachtet, die von einer oder mehreren Funktionen von n komplexen Veränderlichen, die in der Umgebung jedes Punktes ihres Definitionsgebietes analytisch sind, ohne im allgemeinen analytisch im Weierstraßschen Sinne zu sein, da ihr Definitionsgebiet auch als nicht zusammenhängend angenommen werden kann, abhängen. Von diesem neuen Gesichtspunkt aus baut Verf. seine frühere Theorie, insbesondere den auf die linearen Funktionale bezüglichen Abschnitt wieder auf, wobei er u. a. den Beweis der Formel, die den Wert eines analytischen linearen Funktionals durch die bekannte Indikatrix ausdrückt, vereinfacht, und zeigt, daß die Untersuchung der gemischten Funktionale mehrerer Funktionen auf das Studium einer einzigen Funktion als unabhängigen Variablen zurückgeführt werden kann. Dem auf die Funktionale bezüglichen Teil dieser Arbeit gehen Betrachtungen über die lokal analytischen Funktionen von n komplexen Veränderlichen und über die topologischen Eigenschaften des Raumes dieser Funktionen voraus, in dem der Umgebungsbegriff nach einer von Catunda vorgeschlagenen Definition eingeführt wird. *C. Miranda* (Torino).

Faedo, Sandro: Il principio di Zermelo per lo spazio delle funzioni continue. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **10**, 209—214 (1941).

Es werden beliebige abgeschlossene Mengen im Raume der stetigen Funktionen mit der Metrik $\max |f(x) - g(x)|$ betrachtet und gezeigt, daß sich immer ein Gesetz angeben läßt, nach dem in einer solchen Menge eine Funktion ausgewählt wird. Das Zermelosche Auswahlprinzip läßt sich hier also beweisen. *G. Köthe* (Gießen).

Praktische Analysis:

● **Tavole trigonometriche.** Torino: 1942. 48 pag.

Den Hauptinhalt der Tafeln bilden die achtstelligen Werte des Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens für jedes Hundertel des Grades alter Teilung von 0° bis 45° (mit der üblichen Anführung der Winkel über 45°), also jede sechsunddreißigste Zahl der Tafel von J. Peters, Berlin 1939 (dies. Zbl. **21**, 241). Die Differenzen sind beigefügt, auch bei den Kotangenten kleiner Winkel, wo sie zur Interpolation nicht verwendbar sind. Bei dem großen Format (24×32 cm) läßt sich jeder Grad mit seinen 101 Zeilen auf einer halben Seite unterbringen. Die Ziffern sind wohl klein, aber sehr deutlich. Die Anordnung der einzelnen Grade ist dagegen nicht regelmäßig durchgeführt, sondern hie und da unterbrochen. Zwischendurch und vor dem Beginn der Haupttafel finden sich die Erklärung und eine reichhaltige Sammlung von Formeln für die Winkelfunktionen, ferner Angaben über die Auflösung von Dreiecken, und Ähnliches. Die Umrechnung auf Minuten und Sekunden ist durch einen herausklappbaren Teil des hinteren Buchdeckels bequem gemacht. Die Tafel ist von der feinmechanischen Fabrik Elli, Zerboni in Turin herausgebracht worden. *L. Schrutka* (Wien).

Czuba, Werner: Diagramm für die Wahl der Näherungsformel zur Berechnung der Ordinaten bei der Absteckung eines Kreisbogens von der Tangente. Z. Vermessungswes., Stuttg. **71**, 98—102 (1942).

Wählt man den Berührungspunkt als 0-Punkt und die Tangente als x-Achse, und bezeichnet man den Halbmesser mit H, so ist die strenge Formel $y = H - \sqrt{H^2 - x^2}$. Nach binomischer Entwicklung werden die ersten beiden Teilsummen als Näherungen gewählt. Berechnet werden die Abszissen, bis zu denen der 1. vernachlässigte Summand kleiner als $\frac{1}{2}$ mm bzw. $\frac{1}{2}$ cm ist. Anmerk. des Ref.: Bei der 1. Teilsumme ist der ganze Fehler $= \Delta$, wenn $x = \sqrt{2H\left(\sqrt{2H\Delta} - \Delta\right)}$ ist. Für $H \leqq 200$ m wird x um 4 cm, für $H = 300$ m um 5 cm, für 400 m $\leqq H \leqq$ 900 m um 6 cm, für 1000 m $\leqq H \leqq$ 1300 m und $H = 1500$ m um 7 cm und für $H = 1400$, 1600 und 1700 m um 8 cm kleiner. In der binomischen Entwicklung muß man die Koeffizienten so schreiben, daß man ihr allgemeines Bildungsgesetz erkennt

$$y = \frac{1}{2}\frac{x^2}{H} + \frac{1}{2\cdot 4}\frac{x^4}{H^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^6}{H^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{x^8}{H^7} + \cdots.$$

Ludwig (Hannover).

Holubář, Josef: Graphische Auflösung von Gleichungen 2., 3. und 4. Grades. Rozhl. mat. přírodověd. **21**, 11—16 (1941) [Tschechisch].

Graphische Auflösung der biquadratischen Gleichung $x^4 + px^2 + qx + s = 0$ mittels Konstruktion des durch Addition von $y^2 + py + qx + s = 0$ und $x^2 - y = 0$ entstandenen Kreises und Ähnliches für kubische und quadratische Gleichungen.

O. Borůvka (Brünn).

Lin, Shih-Nge: A method of successive approximations of evaluating the real and complex roots of cubic and higher-order equations. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **20**, 231—242 (1941).

Ein Paar komplexer Wurzeln einer Gleichung n-ten Grades sei dem Betrage nach klein gegen alle übrigen. Dann ist nach Division des vorgegebenen Polynoms in $x^2 + cx + d$, wobei sich c und d aus den Koeffizienten des absoluten, linearen und quadratischen Gliedes bestimmen, der Rest relativ klein. Aus Divisor, Dividend und dem ganzen Teil des Resultates folgt ein neuer Divisor, der einen kleineren Rest läßt. Das Verfahren konvergiert im allgemeinen gut; andernfalls ist die Voraussetzung des Verfahrens nicht erfüllt, und es müssen vorher nach Graeffe (Quadrieren der Wurzeln) oder Horner (lineare Substitution) die Wurzeln auseinandergezogen oder verkleinert werden. Das Verfahren läßt sich auf Gleichungen beliebigen Grades anwenden. Ist n ungerade, so ist zunächst die immer vorhandene reelle Wurzel abzuspalten; danach gelingt durch wiederholte Anwendung des neuen Verfahrens die Zerfällung in quadratische Ausdrücke, deren Wurzeln die gesuchten sind. *v. Guérard.*

Sharp, Henry S.: A comparison of methods for evaluating the complex roots of quartic equations. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **20**, 243—258 (1941).

Zusammenfassender Bericht, Verfahren zur Auflösung der Gleichungen vierten

Grades vergleichend, und zwar in bezug auf: Arbeitsaufwand, Genauigkeit, erforderliche Hilfsmittel, Kontrollmöglichkeiten während der Rechnung, Vermeidung von Fehlerquellen und, bei den Infinitesimal- u. a. Iterationsverfahren, Konvergenz und Konvergenzerzeugung. Von letzteren Verfahren zeigen die von E. B. Wilson bzw. F. L. Hitchcock, daß die zur Auffindung reeller Wurzeln gebräuchlichen Verfahren von Newton bzw. Horner verallgemeinert und zur Bestimmung komplexer Wurzeln verwandt werden können. — Der Vergleich dient als Rahmen zur Darstellung eigener, in Einzelheiten neuer Methoden des Verf., der drei neue Verfahren angibt: 1. Formale Abspaltung eines quadratischen Faktors; die Bedingung, daß der Rest identisch verschwindet, führt zu einer Gleichung dritten Grades, aus deren Wurzeln sich die gesuchten bestimmen lassen. — 2. Nach formaler Abspaltung einer Wurzel $u + iv$ gelingt durch Koeffizientenvergleich für Real- und Imaginärteil Angabe einer kubischen Gleichung usw.; beide Verfahren lassen sich als f. d. Praxis geeignete Umformungen der Gleichungsauflösung mittels der kubischen Resolvente auffassen. — 3. r_1, r_2 seien die Beträge je zweier Wurzeln, u_1, u_2 entsprechend die Realteile; falls $|4u_1u_2| \ll r_1^2 + r_2^2$, können die r_i in guter Annäherung aus den Koeffizienten des biquadratischen Polynoms bestimmt werden, und das leitet eine naheliegende Iteration ein. — Die Einteilung aller Verfahren in vier Klassen ist sehr äußerlich und zeigt daher verwischte Grenzen.

v. Guérard (Darmstadt).

Platone, Giulio: Ancora sul metodo delle corde per la risoluzione numerica dei sistemi di equazioni. Rend. Circ. mat. Palermo **62**, 363—368 (1939).

Schließt sich an einen früheren Aufsatz des Verf. an (dies. Zbl. **2**, 345). Sind die beiden Funktionen $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ in einem Intervall (a, b) stetig und sind sie an den Enden der Größe nach verschieden geordnet, so ersetze man sie durch ihre Sehnen (geometrisch gesprochen); der Kreuzungspunkt der beiden Sehnen liefert zusammen mit a oder mit b ein neues Intervall, das wieder ebenso zu behandeln ist. Die Konvergenz des Verfahrens wird bewiesen. Für den Fehler wird eine Abschätzung mit Hilfe der zweiten Ableitung gegeben. Das Verfahren läßt sich auf Polarkoordinaten sowie auf Gleichungen der Form $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ übertragen.

L. Schrutka (Wien).

Weber, C.: Über genäherte Lösungen von Differentialgleichungen mit Hilfe von Minimalansätzen. Z. angew. Math. Mech. **21**, 310—311 (1941).

An einem Zahlenbeispiel der Durchbiegungen $y(x)$ eines belasteten Trägers $(y^{IV}(x) = q(x))$ wird gezeigt, daß man bei Anwendung von Variationsprinzipien vorsichtig sein muß, daß z. B. das Prinzip, eine Funktion f aus: $\int (f^{IV} - q)^2 dx =$ Minimum bei den vorgegebenen Randbedingungen zu bestimmen, zwar die zweite Ableitung y'' annähert, daß aber y selbst völlig falsch wiedergegeben werden kann. Bei dem Zahlenbeispiel ist bei einem eingliedrigen Ritzansatz y durchweg von anderem Vorzeichen als f.

Collatz (Karlsruhe).

Federhofer, Karl: Über besondere Seilkurven. Ein Beitrag zur graphischen Analysis. Z. angew. Math. Mech. **21**, 233—241 (1941).

Es werden diejenigen Gleichgewichtsformen betrachtet, die ein undehnbarer, dünner Faden bei alleiniger Wirkung von Zentralkräften $P(r) = kf(r)$ annimmt. Bezeichnen (r, φ) die Koordinaten des im Abstand r_0 senkrecht unter dem Fußpunkt des Seiles gelegenen Poles, so lautet die Differentialgleichung der Seilkurve mit α und β als Konstanten:

$$d\varphi = dr r^{-1}[r^2(\alpha \int f(r)dr + \beta^2) - 1]^{-\frac{1}{2}}$$

(P. Appell, Traité de Mecanique rationelle, Bd. 1, S. 200, 3. Aufl.; Paris 1909). Diese Gleichung läßt sich für das Potenzgesetz $P = kr^n$ (n eine beliebige positive oder negative Zahl) unter der Annahme $\beta = 0$ elementar integrieren, ausgenommen für $n = -1$. Beim Newtonschen Kraftgesetz ($n = -2$) ist eine exakte Integration auch für $\beta \neq 0$ möglich, ebenso in den Fällen $n = 1$ und $n = 0$ mit Hilfe elliptischer Funktionen (Appell a. a. O., S. 200 und 234). — Verf. zeigt, wie die Seilkurven sich in einfacher

Weise mit Hilfe bekannter zeichnerischer Verfahren konstruieren lassen, ohne daß eine einschränkende Annahme über β und n notwendig ist. Für die Fälle $n = \pm 1$ ist eine Schar solcher Seilkurven dargestellt. Es wird bewiesen, daß alle in die Klasse der Sinusspiralen gehörenden Kurven die mechanische Eigenschaft besitzen, Seilkurven für Zentralkräfte darzustellen, die nur von der Länge des Radiusvektors in beliebiger Potenz abhängen. Ferner wird der Fall eines beliebigen Kraftgesetzes $P = kf(r, \varphi)$ behandelt, und zum Schluß eine Erweiterung des Verfahrens von R. Neuendorff [Z. angew. Math. Mech. **2**, 135 (1922)] zur graphischen Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung in Polarkoordinaten angegeben. Die für jeden Integrationsschritt notwendige Ausrechnung des Krümmungsradius wird durch eine einfache lineare Konstruktion ersetzt, wodurch das ursprüngliche graphisch-rechnerische Verfahren in ein rein graphisches Integrationsverfahren übergeführt wird. Die dabei verwendete Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes einer ebenen Kurve ermöglicht auch die einfache graphische Integration einer beliebig gegebenen Funktion.

Gran Olsson (Trondheim).

Trnka, Z.: Die harmonische Analyse von Spannungs- und Stromkurven. Arch. Elektrotechn. **36**, 123—130 (1942).

Die harmonische Analyse von Wechselströmen kann experimentell in bekannter Weise durch Überlagerung des zu analysierenden Stromes mit Wechselströmen bekannter Frequenz erfolgen. Es wird gezeigt, daß die Durchführung der Analyse erheblich vereinfacht wird, wenn die Wechselspannung an einem Potentiometer mit sinusförmigem Widerstandsverlauf abgegriffen wird, $\bar{u} = u \sin \alpha$, wobei α der Drehwinkel des Potentiometers und u die Spannung ist. Unter der Voraussetzung, daß nur eine endliche Anzahl Harmonischer in dem zu untersuchenden Wechselstrom enthalten ist, kann man den sinusförmigen Verlauf der Potentiometerwiderstände durch Stufen- bzw. Rechteckkurven annähern und erhält dadurch eine besonders einfache Apparatur, die näher beschrieben wird.

G. Koehler (Darmstadt).

Labrouste, H., et Y. Labrouste: Analyse des graphiques résultant de la superposition de sinusoïdes. Mém. Acad. Sci. Inst. France **64**, Nr 5, 1—84 (1941).

Die Methode von Labrouste zur Analyse von zusammengesetzten Sinusschwingungen ist schon seit längerer Zeit bekannt und von den Verff. in mehreren Abhandlungen behandelt worden. Sie ist auch im Lehrbuch des Ref. (Grundlagen und Methoden der Periodenforschung Berlin 1937; dies. Zbl. **16**, 319) beschrieben. In der vorliegenden Arbeit geben die Verff. noch einmal eine vollständige, in sich geschlossene Theorie ihres Verfahrens, das eine weitgehende Verallgemeinerung der auf fortschreitende Intervalle gleicher Länge angewandten Fourieranalyse darstellt. An Stelle der trigonometrischen Faktoren, mit denen die Harmonische Analyse arbeitet, werden hier beliebige lineare Kombinationen von Beobachtungswerten zur Bildung abgeleiteter Kurven benutzt. Diese abgeleiteten Kurven haben die Eigenschaft, die Phasen der in der Ausgangsreihe vorhandenen Wellen ungeändert zu lassen, hingegen die Amplituden durch einen von der Wellenlänge abhängigen Faktor zu vergrößern oder zu verkleinern. Durch sukzessive Anwendung von solchen linearen Kombinationen verschiedener Bauart gelingt es, in bezug auf das Endergebnis eine beliebig gestaltete Selektivität zu erzielen, die unter Umständen die Selektivität der fortschreitenden Harmonischen Analyse bei weitem übertrifft. Die einzelnen Transformationen gliedern sich in solche mit symmetrischen Koeffizienten, die phasentreu sind, und solche mit antisymmetrisch zur Mitte verteilten Koeffizienten, die eine Phasenverschiebung der ursprünglichen Wellen um eine Viertelwelle mit sich bringen — eine zweimalige Anwendung antisymmetrischer Transformationen erzeugt also wieder Phasentreue bei negativem Amplitudenfaktor. Die Methode ist auch anwendbar, wenn die Amplituden der in der Beobachtungsreihe vorhandenen Wellen langsamen zeitlichen Änderungen unterworfen sind (z. B. schwach gedämpfte Schwingungen). Ein ausführliches Beispiel (Beobachtungsreihe mit sieben Wellen verschiedener Periode) wird besprochen. Zum