Werk

Titel: Klassische theoretische Physik

Jahr: 1942

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0026|log14

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

während die beiden restlichen Zielstrahlen $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ zu Punkten c, d gehören, deren Lage im Modell durch die folgende Ortung bestimmt wird und für ein weiteres Folgebild wieder einem dreifach überdeckten Teilgebiet angehört. Es wird durch geometrische Betrachtung nachgewiesen, daß sich dieser Folgebildanschluß auf die Lösung von zwei Gleichungen mit zwei Veränderlichen zurückführen läßt. Die praktische Auswertung dieses geometrischen Zusammenhangs erfolgt in gleicher Weise wie in den früheren Arbeiten des Verf. (s. z. B. dies. Zbl. **25**, 432) über das Ortungsproblem, indem die an den beiden letzten Aufnahmestandpunkten auf Grund der Vierbeine auftretenden Richtungen auf zwei ineinander verschiebbare Einheitskugeln vom gemeinsamen Mittelpunkt aus parallel übertragen werden, wobei vorausgesetzt wird, daß eine genäherte Lösung bereits vorliegt, so daß nur eine Verschärfung dieser Näherungslösung durch Rechnung verlangt wird. Es kommt dann bloß eine kleine Drehung $d\mathfrak{u}$ der einen Kugel gegen die andere in Betracht, für deren Komponenten bei alleiniger Berücksichtigung der ersten Potenz sich drei für die Rechnung geeignete Gleichungen aufstellen lassen. — Wenn mit dem Folgebild gleichzeitig die Sonne aufgenommen wird, so kann der Anschluß bereits mit zwei Zielstrahlen nach den bekannten Punkten a, b vorgenommen werden. Die Drehung du läßt sich dann bereits aus einer Gleichung errechnen. — Ein Rechenbeispiel für den Folgebildanschluß ohne Sonnenortung dient zur Erläuterung und zum Nachweis der Brauchbarkeit der Methode. — Bei einer Bildreihe entsteht eine Folge von Bildanschlüssen, wobei jeweils die Komponenten für die Drehung eines Folgebildes gegenüber dem vorangehenden zu errechnen sind, was zu einer Fehlerfortpflanzung führt. Die aus diesem Grunde angestellte Fehleruntersuchung führt zu dem Ergebnis, daß die Fehler der Komponenten bei Verwendung einer Normalkammer ($n = 0{,}4$) fast das Neunfache der Ausmeßfehler auf dem Folgebild, bei Verwendung einer Weitwinkelkammer ($n = 0{,}7$) etwa das Zwei- bis Dreifache erreichen können und erst bei Verwendung einer Panoramakammer ($n = 1{,}6$) unterhalb der Ausmeßfehler bleiben. Die Zahl n ist nahezu das Verhältnis des halben, quadratisch vorausgesetzten Bildformats zur Bildweite der Aufnahmekammer. Hierbei ist der Einfluß der Ortungs- und Maßstabsfehler noch nicht berücksichtigt, was einer späteren Untersuchung vorbehalten bleibt. *Feyer* (Hannover).

Klassische theoretische Physik.

Philosophie:

Planck, Max: Naturwissenschaft und reale Außenwelt. Naturwiss. **28**, 778—779 (1940).

Erwiderung auf den gleichnamigen Aufsatz von Aloys Müller (vgl. dies. Zbl. **26**, 21). Kritik einer nicht hinreichend scharfen Definition des Begriffes „Ding". Verf. begründet von neuem die Notwendigkeit des Glaubens an ein „metaphysisches Reales" und schließt mit persönlich-historischen Bemerkungen. *C. F. v. Weizsäcker.*

Mechanik:

Mattioli, Gran Domenico, e Antonio Carrelli: Sul significato del principio di Hamilton. Atti Accad. Italia, VII. s. **2**, 142—157 (1940).

Die Forderung, daß die Bewegungen eines mechanischen Systems durch ein allgemeines Variationsprinzip der Gestalt $\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q})\,dt = 0$ gekennzeichnet werden können [$L(q, \dot{q})$ muß zunächst nicht als das kinetische Potential vorausgesetzt werden], ist, wie Verf. zeigt, unter ganz allgemeinen Voraussetzungen (Geltung des Energieprinzips und der Reversibilität der Bewegung) völlig äquivalent mit dem Bestehen der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen, eine Tatsache, die die Äquivalenz der „lokalen Determiniertheit" der Bewegungsvorgänge einerseits (Lagrangesche Gleichungen) mit einem sehr allgemeinen Prinzip einer „zeitlich begrenzten Finalität" anderseits (Minimum-

eigenschaft auf einem geeignet abgegrenzten Bogen der Extremalen) aussagt. — Die Forderung der Stationarität des Hamiltonschen Integrals erfährt weiterhin eine interessante Deutung, indem Verf. eine altbekannte, kürzlich von Born zur Konstruktion eines einfachen Beispiels für ein dynamisches System mit zwar stationärem, aber nicht zugleich minimalem Hamiltonschen Integral benützte formale Analogie zwischen Problemen der Statik und Dynamik heranzieht und weiterführt. Auf diesem Wege kommt er zu der Feststellung, daß ein Extremalenbogen, auf dem das Hamiltonsche Integral eines dynamischen Systems einen Kleinstwert besitzt, in ein kontinuierliches System von Kurven eingebettet werden kann, unter denen es durch ein ähnliches Verhalten gekennzeichnet werden kann, wie es die stabile Gleichgewichtslage eines statischen Systems unter allen Nachbarlagen des aus dieser Gleichgewichtslage hinreichend wenig entfernten Systems auszeichnet. *Schoblik* (Brünn).

● **Johnsen, Leif: Dynamique générale des systèmes non-holonomes. (Skr. norske Vid.-Akad., Oslo, Mat.-Naturv. Kl. Nr. 4.)** Oslo: Jacob Dybwad 1941. 75 pag.

L'A. espone una teoria dei sistemi dinamici anolonomi a n gradi di libertà (determinati dai parametri $q_1, q_2, \ldots q_i, \ldots q_n$) supponendo le equazioni che definiscono i vincoli di anolonomia del tipo:

$$\varphi_\nu(q_i, q_i', t) = 0 \qquad \nu = 1, 2, \ldots h; \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{1}$$

cioè anche non lineari, a differenza di quanto si fa comunemente. Il significato fisico delle (1) viene discusso, osservando anche che le (1) possono essere integrali primi del sistema. — In base alle (1) si esprimono le q_i' mediante $m = n - h$ parametri indipendenti $\omega_1', \omega_2' \cdots \omega_\sigma' \cdots \omega_m'$ detti dall'A. pseudo-velocità, ma chiamati anche caratteristiche cinetiche. Se queste equazioni fra q_i' e ω_σ' fossero integrabili, le q_i resulterebbero funzioni dei parametri ω_σ detti pseudo-coordinate, le cui derivate sono le pseudo-velocità e resterebbero perciò definite le derivate rispetto a qualunque ω_σ di una funzione $f(q_i, \omega_\sigma', t)$ delle q_i, ω_σ', t. — Se le citate equazioni — come accade spesso — non sono integrabili, è sempre possibile, con un'opportuna convenzione, stabilire il significato della derivata della $f(q_i, \omega_\sigma', t)$ rispetto ad una pseudo coordinata ω_σ corrispondente a ω_σ'. Ciò è sufficiente per poter scrivere le equazioni del moto sotto una forma lagrangiana, però con un termine correttivo Γ_σ funzione delle q_i e delle ω_i'. — Vengono poi studiate, quando le forze ammettono un potenziale, le proprietà delle equazioni del moto e si prova che possono mettersi sotto una forma hamiltoniana. Si ricercano inoltre le trasformazioni delle equazioni del moto che eliminano nuovi vincoli imposti al sistema, e le condizioni per cui sono nulli (tutti o in parte) i termini correttivi Γ_σ. — Infine si espone una interpretazione geometrica dei resultati ottenuti. La memoria è preceduta da un riassunto di ricerche sui sistemi anolonomi, in particolare quelle di Hamel [Z. Math. Phys. **50**, 1 (1904)] e di Woronetz [Math. Ann. **70**, 410 (1911)] che hanno molta attinenza con la presente memoria. Non sono ricordati i lavori del Maggi [Rend. Lincei V. **10**, 287 (1901)] e del Volterra [Atti Accad. Sci. Torino **33**, 451 e 542 (1897)]. *Dario Graffi* (Bologna).

Teodortschik, K. F.: Energetische Betrachtung der Selbstschwingungssysteme vom Thomsonschen Typus. J. Physics Acad. Sci. USSR **4**, 39—44 (1941).

Die Arbeit befaßt sich mit entdämpften Schwingungssystemen mit oder ohne Einwirkung einer äußeren Kraft, die der Differentialgleichung genügen: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\delta(x)\dot{x} + P\cos Npt$ [$\delta(x)$ ganze rationale Funktion, N ganze Zahl). Erörtert werden die Fragen nach dem zeitlichen Verlauf der Amplitudeneinstellung, den stationären Werten der Amplituden von Grund- und Oberschwingungen und (bei Abwesenheit äußerer Kräfte) nach der stationären Grundfrequenz. Die Lösung wird angesetzt als Fourier-Reihe $x = \sum_k (a_k \cos kpt + b_k \sin kpt)$, wobei die Amplituden a_k, b_k als langsam veränderliche Funktionen von t angesehen werden. Die Kraft auf der rechten Seite der Differentialgleichung ergibt sich nach Einführung dieser Lösung ebenfalls als Fourier-Reihe $\sum_k (F_k \cos kpt + f_k \sin kpt)$, wobei die F_k, f_k Funktionen der a, b, p sind. Nun wird

folgende Überlegung gemacht: Die Arbeit, die diese Kraft während einer Grundperiode $2\pi/p$ leistet, dient zur Vergrößerung der Energie des Schwingungssystems. Diese Energie setzt sich additiv aus den zu den einzelnen Amplituden a_k, b_k gehörigen Anteilen zusammen, und zur zeitlichen Änderung von a_k, b_k tragen nur die Kraftkomponenten F_k, f_k bei. Daraus folgen für den mittleren Zuwachs der Amplituden pro Zeiteinheit die (van der Polschen) Differentialgleichungen: $\overline{\frac{da_k}{dt}} = \frac{1}{2kp} F_k$, $\overline{\frac{db_k}{dt}} = \frac{1}{2kp} f_k$. Die stationären Amplitudenwerte ergeben sich demnach aus dem Gleichungssystem: $F_k = 0$, $f_k = 0$. Wenn keine äußere Kraft vorhanden ist, besteht für dieses Gleichungssystem eine Lösbarkeitsbedingung, welche die Grundfrequenz p bestimmt. — Das Verfahren wird in der Arbeit angewandt auf das Problem des Röhrengenerators sowie auf die nichtlinearen Differentialgleichungen $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^3 = P \sin pt$ und $\ddot{x} + \omega_0^2 (1 + \beta \cos 2pt) x + \gamma x^3 = 0$. *A. Schoch* (Berlin).

Veen, S. C. van: Elementarer Beweis eines Halphenschen Satzes über die Bewegung des sphärischen Pendels. Nieuw Arch. Wiskde **21**, 119—123 (1941).

Die Spitze eines sphärischen Pendels führt periodische Schwingungen zwischen zwei horizontalen Parallelkreisen der Kugel aus. Setzt man die Azimutdifferenz zwischen einem Bahnpunkt auf dem oberen Parallelkreis und dem nach einer halben Periode erreichten Punkt auf dem unteren Parallelkreis gleich ψ, so ist $\psi \leqq \pi$ (Halphen, Traité des fonctions elliptiques **II**, 128, Paris 1888). Verf. gibt einen Beweis dieses Satzes an, welcher auf einer Anwendung der Schwarzschen Ungleichung

$$\left[\int_a^b f(x) \cdot g(x) \cdot dx\right]^2 \leqq \int_a^b [f(x)]^2 dx \cdot \int_a^b [g(x)]^2 dx$$

beruht. *B. Hostinský* (Brünn).

Pedersen, Peder: Die Librationsellipsen um die Dreieckslibrationspunkte im allgemeinen Dreikörperproblem. Danske Vid. Selsk., Math.-fys. Medd. **19**, Nr 7, 1—25 (1941).

L'auteur étudie les orbites elliptiques, infiniment petites, autour des sommets du triangle isoscèle dans le cas du problème général plan des trois corps. Le mouvement est rapporté à un système d'axes, tournant autour du centre de gravité des trois corps avec la vitesse angulaire du triangle isoscèle, correspondant au mouvement périodique, établi par Lagrange. L'auteur montre l'existance de trois sortes d'orbites elliptiques, correspondant aux différentes racines de l'équation $z^2(z^2+1)(z^4+z^2+s) = 0$, dont le premier membre représente le déterminant séculaire, correspondant au système d'équations différentielles linéaires du problème et où on a $s = \frac{27}{4}(\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1)$ avec $\mu_j = \frac{m_j}{m_1 + m_2 + m_3}$. — Les racines $z^2 = 0$ déterminent des orbites elliptiques dans le cas d'une vitesse angulaire infiniment petite du triangle isoscèle. Les racines de $z^2 + 1 = 0$ sont indépendantes des masses et déterminent des orbites elliptiques pouvant être réalisées pour n'import quel rapport des masses des trois corps. Les orbites elliptiques, correspondant aux racines de l'équation $z^4 + z^2 + s = 0$, dépendant de s, sont réelles seulement dans le cas où $\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 \leqq \frac{1}{27}$. Les orbites des deux dernières classes sont retrogrades. Elles sont étudiées d'une manière approfondie au point de vue de l'orientation et du rapport de leurs axes. *Kyrille Popoff* (Sofia).

Zumkley, J.: Ein numerisch gerechneter Spezialfall des allgemeinen Dreikörperproblems in vereinfachter Behandlung. Astron. Nachr. **272**, 66—76 (1941).

Gegeben sind drei Körper m_1, m_2, m_3 je von der Masse 1, die sich in der xy-Ebene unter dem Einflusse des Newtonschen Gravitationsgesetzes mit den Anfangslagen 2, 0; 1, 0; 3, 5, 0 und den Anfangsgeschwindigkeiten 0,0; 0, −1,5; 0,1 bewegen. Mittels der Methode der numerischen Integration werden die Bahnen der drei Körper, die für $+t$ und $-t$ symmetrisch sind, bestimmt; es ergab sich ein abgeschlossenes Bild der Bewegung. Die Bewegungen der drei Körper werden in drei verschiedenen Koordinatensystemen [Bewegung in Schwerpunktskoordinaten, relativ zu m_1 und bezogen

auf den Schwerpunkt (m_1, m_2)] graphisch dargestellt. Die Bahnen der Körper m_1, m_2 nähern sich im letzten Falle sehr rasch Ellipsen, während m_3 einer Hyperbel zustrebt. Die Rechnungen sind mit dem Rechenschieber durchgeführt. Die damit erreichte Genauigkeit reichte für eine exakte Zeichnung vollauf aus; die Ausnutzung der Vorteile des Rechenschiebers ermöglichte die Durchführung der Rechnungen in relativ kurzer Zeit. *Volk* (Würzburg).

Hulubei, Dan I.: Sur un problème de statique. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **42**, Nr 1, 3—13 (1941).

L'argomento riguarda diverse considerazioni geometriche che si connettono alla soluzione del noto probleme (cfr. M. Lévy, „La statique graphique" V. I, cap. XXI, XXII; Parigi 1907) relativo all'equilibrio di un corpo pesante che si appoggia in n punti $A_1, A_2, \ldots A_n$ su di un suolo orizzontale elastico π. Si trova fra l'altro una polarità uniforme (che è poi l'antipolarità rispetto all'ellisse centrale d'inerzia normalizzata del sistema) e un poligono convesso B (nocciolo centrale d'inerzia) dentro il quale deve trovarsi la proiezione A del centro di gravità del corpo se si vuole che le reazioni esercitate da π nei punti A_i siano tutte positive. — Altre considerazioni geometriche, fra cui alcune interessanti la teoria degli insiemi convessi, completano il lavoro. *Maxia* (Firenze).

Söchting, Fritz: Bemerkung zu einem Versuch von Mach. Z. angew. Math. Mech. **21**, 253 (1941).

Verf. nimmt sich vor, eine mathematische Erklärung für die Abnahme der Drehzahl des Pagemotors mit der Zunahme der Fundamentmasse in Zusammenhang mit dem wohlbekannten Versuch von E. Mach zur Erläuterung des Schwerpunktsatzes zu finden. Mittels der Lagrangeschen Gleichung (Druckfehler: die Klammer soll $\dot{\omega}\sin^2\varphi + \frac{1}{2}\omega^2 \sin 2\varphi$ heißen) wird die Radialkraft und dadurch die Coulombsche Reibung sowie die entsprechende mittlere Reibungsarbeit ermittelt. Der auf diese Weise gewonnene Ausdruck hat die Form $-k\dfrac{\omega^2}{1+\dfrac{m_1}{m_2}}$, wobei m_2 die Fundamentmasse, ω die Winkelgeschwindigkeit, k und m_1 zwei positive Konstanten bedeuten. Aus diesem Ausdruck sieht man, daß ω bei wachsendem m_2 abnehmen muß. — Anmerk. d. Ref.: 1. Das vom Verf. herangezogene Coulombsche Gesetz ist wohl nicht das geeignetste, um die Widerstände des ziemlich komplizierten Reibungsprozesses mathematisch zu formulieren. — 2. Die Abnahme der Drehzahl geschieht im wesentlichen wegen der Zunahme der mittleren kinetischen Energie infolge der vergrößerten Masse m_2. Bei konstanter Zufuhrenergie muß ja ω abnehmen, damit die mittlere kinetische Energie denselben Wert trotz der Zunahme von m_2 beibehält, wenn man annimmt, daß die mittlere Arbeit der mechanischen Widerstände konstant bleibt, was zwischen gewissen Grenzen als richtig angesehen werden darf. *V. Vâlcovici* (Bucureşti).

● **Athen, Hermann: Ballistik. (Hochschulwiss. in Einzeldarstell.)** Leipzig: Quelle & Meyer 1941. 298 S. u. 40 Abb. geb. RM. 8.60.

Auf knappen 277 S. werden — ohne näheres Eingehen auf die Probleme des Waffenbaues — die theoretischen Grundlagen der äußeren und inneren Ballistik so gründlich und vollständig auseinandergesetzt und dabei sogar die experimentellen Methoden so weit gestreift, als es für die theoretischen Ausführungen unerläßlich ist, so daß mit diesem Buch dem Ballistiker ein willkommenes, handliches und zuverlässiges Nachschlagbuch geschenkt wurde, das dazu berufen scheint, dem in der Praxis stehenden Ballistiker in weitem Maße das umfangreichere Cranzsche Werk zu ersetzen. Neben modernen Lösungsverfahren werden auch noch einfachere ältere Verfahren für bestimmte Aufgaben berücksichtigt, neben verschiedenen analytischen Methoden zur Lösung der ballistischen Differentialgleichungen werden ebenfalls graphische, numerische und mechanische Methoden behandelt. Als über den gewohnten klassischen Bestand der Ballistik hinausführend, verdienen besondere Erwähnung: die Abschnitte

über Photogrammetrische Flugbahnvermessung (Kap. III), die R. Schmidtsche Konstruktion der Flugbahnparabel (§ 6), die Popoffschen Parameterentwicklungen und die vom Verf. mitgeteilten praktischen Verwendungen der Parameterentwicklungen (§ 16b), das vom Verf. vorgeschlagene Verfahren zur Berechnung der Flugbahnstörungen im Fall einer ganzen Schar (§ 28), die Schußtafelberechnung (§ 32) und die Schießbehelfe (§ 33), endlich die Ballistik des Bombenwurfes aus dem Horizontalflug (§ 43, 44). Die praktische Brauchbarkeit des Buches wird durch mehrere Anhänge (ein reichhaltiges Literaturverzeichnis, ein Verzeichnis ballistisch belangvoller mathematischer Sätze, ein ausführliches Namen- und Sachregister, Zahlentafeln ballistisch wichtiger Funktionen) noch erhöht. *Garten* (Leipzig).

Elastizität, Akustik:

Frola, E.: Instabilità elastica e generalizzazioni. Rend. Semin. mat. fis. Torino **7**, 79—82 (1941).

Kurze Zusammenfassung (2 Druckseiten) der Teoria dell'elasticità non globalmente lineare (s. dies. Zbl. **25**, 271). *Marguerre* (Adlershof).

Southwell, R. V.: Castigliano's principle of minimum strain-energy, and the conditions of compatibility for strain. Philos. Mag., VIII. s. **30**, 252—258 (1940).

Der Aufsatz ist ein unveränderter Abdruck eines Beitrages zur Timoshenko-Festschrift, die anläßlich seines 60. Geburtstages von seinen Freunden herausgegeben wurde (New York 1938, Macmillan Company). Es handelt sich um die Aufdeckung des Paradoxons, daß drei der sechs Verträglichkeitsbedingungen, von denen in einer früheren Note des Verf. [R. V. Southwell, Proc. Roy. Soc. London A **154**, 4—21 (1936)] drei unter Verwendung der Maxwellschen Spannungsfunktionen, die drei übrigen unter Verwendung der Moreraschen Spannungsfunktionen abgeleitet wurden, überflüssig erscheinen. In der Tat ergeben sich alle sechs Gleichungen als Folge des Castiglianoschen Prinzips. *Garten* (Leipzig).

Süray, Saffet: Sur les lignes de tension principale. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A: Math. **6**, 40—43 (1941).

Verf. benutzt den Satz von M.W. Prager: $Te^{-2\theta i} = \bar{z}F(z) + G(z)$, worin T größte Schubspannung, θ der Tangentenwinkel einer Linie extremer Normalspannungen, $\bar{z} = x - yi$, $z = x + yi$, F und G beliebige analytische Funktionen. Multipliziert man die Pragersche Gleichung mit einer beliebigen analytischen Funktion, so erhält man den Satz: Schneidet die eine Schar von Linien extremer Normalspannungen die Kurven einer 2. Schar unter einem Winkel ϑ, der die Differentialgleichung $\Delta\vartheta = 0$ erfüllt, so sind diese Kurven Linien extremer Normalspannungen eines neuen Gleichgewichtszustandes. Multipliziert man die Pragersche Gleichung mit einer Funktion $\psi(z, \bar{z})$, so erhält man nach Einführung der neuen Veränderlichen $\zeta = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, worin α, β, γ und δ beliebige komplexe Konstanten sind, einen neuen Gleichgewichtszustand nur dann, wenn der Multiplikator $\psi(z, \bar{z}) = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2(\bar{\gamma}\bar{\zeta} - \bar{\alpha})}{(\gamma\zeta - \alpha)^3}$ ist. *Ludwig.*

Süray, Saffet: Sur les lignes de tension principale dont une famille est constituée de lignes droites. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A: Math. **6**, 83—87 (1941).

Die orthogonalen Trajektorien einer Geradenschar sind die Evolventen ihrer Einhüllenden. Diese Kurvenscharen werden als Parameterlinien gewählt und als Parameter der Tangentenwinkel θ einer Geraden und die Summe r aus der Bogenlänge s der Evolute und dem Krümmungsradius der Evolvente. In diesen orthogonalen Koordinaten sind die Gleichgewichtsbedingungen $\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} = 0$, $\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r - s} = 0$. Integriert $\sigma_\theta = f'(r)$, $\sigma_r = \frac{f(r) + g(s)}{r - s}$. Dies in die Verträglichkeitsbedingung

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}(r - s)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{r - s}\frac{\partial}{\partial\theta}\right][\sigma_r + \sigma_\theta] = 0$$

eingesetzt, gibt eine Gleichung für die willkürlichen Funktionen f und g. Diese Gleichung vereinfacht sich auf der Evolute, wo $r = s$ ist, zu $[f(s) + g(s)]\varrho^2 = 0$, worin ϱ der Krümmungsradius der Evolute ist. Hieraus erhält man eine Lösung nur im Falle $\varrho = 0$, d. h. die Evolute schrumpft zu einem Punkte zusammen; also schneiden sich die Geraden in einem Punkte oder sind parallel. Anm. d. Ref.: In den Gleichungen (4) und (5) fehlt bei $\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}$ der Faktor $\frac{1}{r-s}$. In der Gleichung vor Gleichung (7) fehlt hinter dem Faktor $r - s$ der Operator $\frac{\partial}{\partial r}$. In Gleichung (7) in der 3. eckigen Klammer muß der 1. Summand sein $(r - s)^4 f'''(r)$, der 3. Summand fällt fort, und im 5. Summanden muß 3 durch 2 ersetzt werden. Aus der Identität (8) folgt

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=s} = \varrho^2 f', \quad \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\right)_{r=s} = \varrho^2 f'', \quad \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3}\right)_{r=s} = 6f' + 3\varrho(\varrho' f'' + \varrho f''').$$

Außerdem gilt $c_1 = -d$. *Ludwig* (Hannover).

Friedrichs, K. O., and J. J. Stoker: The non-linear boundary value problem of the buckled plate. Amer. J. Math. **63**, 839—888 (1941).

Verff. geben Methoden an zur numerischen und theoretischen Lösung der Aufgabe, bei einer unter gleichförmigem äußeren Druck p stehenden, dünnen, ursprünglich ebenen Platte die Auslenkungen w zu bestimmen. Es soll $p = Np_0$ verschieden sein von den „kritischen" Werten des Druckes, den „Beulwerten" $p_0, p_1, \ldots$, die als Verzweigungswerte aus einem linearen Eigenwertproblem berechenbar sind. N ist ein das Problem kennzeichnender Parameter. Bei Beschränkung auf Kreisplatten hat man gewöhnliche Differentialgleichungen. Sie lauten für zwei mit der Auslenkung und der Airyschen Spannungsfunktion zusammenhängende Funktionen $p(r)$ und $q(r)$ $Gp = \frac{1}{2} q^2$; $\eta^2 Gq + pq = 0$ bei Benutzung des Operators $G = \text{konst.}\, r^{-3} \frac{d}{dr}\left(r^3 \frac{d}{dr}\right)$. η ist eine gegebene Konstante. Dazu treten noch vier Randbedingungen; die Platte sei am Rande gestützt. Zur numerischen Lösung dient für kleine Werte von N eine Art Störungsrechnung, ausgehend von der Lösung des linearen Eigenwertproblems, für mittlere Werte (etwa $2{,}5 < N < 15$) eine Potenzreihenentwicklung nach Potenzen von r, und für große Werte von N eine Störungsrechnung, ausgehend von asymptotischen Entwicklungen. Die Lösungen des Problems sind zugleich Lösungen eines Variationsproblems (Minimum der potentiellen Energie). Die Lösung dieses Minimumproblems ist (abgesehen vom Vorzeichen) eindeutig, verschwindet nirgends im Innern, hängt stetig von N ab und geht für $N \to \infty$ in die asymptotische Lösung über. Die Existenz der Lösung wird durch direkte Methoden der Variationsrechnung bewiesen. Für genügend kleine Werte von N hat das Randwertproblem nur drei Lösungen (die Lösung $\equiv 0$ und die beiden sich nur durch das Vorzeichen unterscheidenden Lösungen des Minimumproblems). *Collatz* (Karlsruhe-Ruppin).

Pucher, A.: Über die Singularitätenmethode an elastischen Platten. Ing.-Arch. **12**, 76—100 (1941).

Der vorliegende Aufsatz ist eine Ergänzung und Erweiterung der früheren Arbeit des Verf. über die Einflußfelder rechteckiger Platten (Berlin: 1938). Aus der singulären Lösung der Plattengleichung $\Delta\Delta w = 0$ infolge einer Einzellast Eins im Punkte (u, v):

$$K_0(u, v; x, y) = \frac{1}{8\pi N} r^2 \ln r, \qquad [r^2 = (x - u)^2 + (y - v)^2]$$

(N = Plattensteifigkeit), werden die höheren Singularitäten durch Differentiation nach den Koordinaten des Aufpunktes (u, v) gewonnen. Von diesen Singularitäten werden insbesondere Krümmung (Biegungsmoment), Verwindung (Drillungsmoment) und Querkraft ausführlich dargestellt. Die Einflußfelder für Einspannmoment und Stützendruck am eingespannten Rand können jedoch nicht auf diesem Wege, sondern nur durch einen Grenzübergang gewonnen werden, weil der Aufpunkt selbst am Rande liegt, und die aus dem Singulärteil folgenden Randwerte selbst Singularitäten ent-

halten. Der Grenzübergang wird an der unendlich ausgedehnten Kragplatte durchgeführt, für die eine geschlossene Lösung infolge einer Einzellast bekannt ist [Woinowsky-Krieger, Ing.-Arch. **9**, 407 (1938)]. Nachdem sämtliche, den Schnittkräften und Stützendrücken zugeordneten Singularitäten in geschlossener Form bekannt sind, muß eine reguläre Lösung von $\Delta\Delta w = 0$ hinzugefügt werden, die mit der singulären Lösung den Randbedingungen genügt. In seiner früheren Arbeit hat Verf. dies mit Hilfe von Differenzengleichungen erreicht. Einer der wesentlichen Fortschritte dieser Arbeit besteht darin, daß Verf. sich derjenigen Polynome bedient, die der Gleichung $\Delta\Delta w = 0$ genügen, und daher als biharmonische Polynome bezeichnet werden. Mit Hilfe einer genügend großen Anzahl dieser Polynome und der singulären Lösung werden die Randbedingungen in so vielen Punkten des Randes streng erfüllt, daß die Abweichung von der Randbedingung in keinem Punkte des Randes für die Auswertung der Einflußfelder von Belang ist. Auf diese Weise werden die Einflußfelder für Stützmoment und Stützkraft in Seitenmitte sowie für die Querkraft in Feldmitte einer eingespannten quadratischen Platte formelmäßig ermittelt und zeichnerisch dargestellt. Dagegen wird das Einflußfeld für das Drillungsmoment in der Plattenmitte mit Hilfe eines Ansatzes für den regulären Anteil der Lösung erhalten, der an die Lösung für die Durchbiegung der unsymmetrisch belasteten Kreisplatte erinnert. Bei gleichmäßiger Belastung über einen rechteckigen Teil der Platte wird die Auswertung der Einflußfelder für die drei obengenannten statischen Größen der eingespannten quadratischen Platte vollständig durchgeführt. Bei der Auswertung der Einflußfelder macht Verf. Angaben über die Handhabung der Dimensionen, die jedem Benutzer dieses grundsätzlich neuen Verfahrens in der Plattenstatik willkommen sein dürften.

Gran Olsson (Trondheim).

Kuhn, R.: Beitrag zur Berechnung der Halbkreisplatte. Ing.-Arch. **12**, 307—319 (1941).

Mit Hilfe eines Fourierschen Reihenansatzes wird die Lösung für die gleichmäßig belastete Halbkreisplatte, die längs des Umfanges und des Durchmessers gelenkig gelagert ist, angegeben. Es ergibt sich eine lineare Differentialgleichung vierter Ordnung für die Durchbiegung, die mit einem Potenzansatz in bezug auf den Radius gelöst wird. (Die so entstandene Lösung ist mit der Lösung von A. Clebsch [Theorie der Elastizität fester Körper, S. 319. Leipzig 1862] identisch, was in der Arbeit nicht erwähnt ist. In einer Arbeit von R. Gran Olsson (vgl. dies. Zbl. **20**, 227) ist die Lösung von Clebsch auf Sektorringplatten von quadratisch veränderlicher Steifigkeit erweitert, die sich auf den Sonderfall der halbkreisförmigen Platte von gleicher Dicke ohne weiteres übertragen läßt. Anm. d. Ref.) Weiter wird die Lösung mit Hilfe von Differenzengleichungen angegeben und an einem Beispiel der Rechenaufwand in beiden Fällen miteinander verglichen. Die Arbeit enthält ferner eine Untersuchung über den Einfluß der Querdehnungszahl auf die numerischen Ergebnisse.

Gran Olsson (Trondheim).

Federhofer, Karl: Zur Knickung der Kreisringplatte veränderlicher Dicke und Berichtigung zu der Abhandlung „Berechnung der kleinsten Knicklast einer schwach verjüngten oder verdickten Kreisringplatte". S. B. Akad. Wiss. Wien IIa **149**, 393—398 (1940).

Die an früherer Stelle (s. dies. Zbl. **25**, 117) abgeleitete Knickdifferentialgleichung für die Kreisplatte veränderlicher Dicke erweitert Verf. um ein Glied, das den Einfluß verteilter Lasten zum Ausdruck bringt, und zeigt mit Hilfe der neuen Gleichung, daß die von der Annahme konstanter Grundspannungen ausgehenden Rechnungen Gran Olssons (Ing.-Arch. **9**, 205) einen exakt nicht realisierbaren Belastungsfall betreffen. — Zur Berichtigung vgl. dies. Zbl. **25**, 117. *Marguerre* (Adlershof).

Sonntag, Rudolf: Der beiderseits gestützte, symmetrisch belastete gerade Stab mit endlicher Durchbiegung und seine Stabilität. Ing.-Arch. **12**, 283—306 (1941).

Im nicht linearen Gebiet müssen 2 Auflagerungsarten unterschieden werden. Ent-

weder ist die Trägerlänge zwischen den Auflagern konstant und mindestens ein Auflager horizontal verschiebbar (statisch bestimmt) oder die Trägerlänge zwischen den starren Auflagern wächst mit dem Biegungspfeil (statisch einfach unbestimmt). Die elastische Linie wird zunächst durch den gleich langen Kreisbogen ersetzt, der durch die Auflager geht. Dann werden die kleinen radialen Abweichungen aus der linearisierten Differentialgleichung berechnet. Dementsprechend wird das Biegungsmoment auf den Kreisbogen statt auf die elastische Linie bezogen. Last im Mittelpunkte, Biegungspfeil, Steigungswinkel der elastischen Linie über dem Auflager und Stützweite bzw. Länge der elastischen Linie werden als Funktionen des Kreisbogenmittelpunktswinkels bestimmt. Diese Ergebnisse enthalten die bekannten Formeln der technischen Biegungslehre als Grenzfall. Die 1. Auflagerungsart ohne Last wird mit der strengen Lösung von Saalschütz nach der Theorie der Elastika verglichen. Bei der 2. Auflagerungsart hat die Last eine obere Grenze, die das „Ausweichen" erklärt. Diese Erscheinung wird auch von der elementaren Biegungslehre erfaßt. Das obige Verfahren wird auf Bogenträger und Biegepressen angewandt. Bau einer Überlastungssicherung für Schwungradpressen. [Anmerk. des Ref.: In der trigonometrischen Reihe Timoshenkos fehlt der Faktor $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$.] *Ludwig* (Hannover).

Colwell, R. C., J. K. Stewart and H. D. Arnett: Symmetrical sand figures on circular plates. J. acoust. Soc. Amer. **12**, 260—265 (1940).

Eine freie Querschwingung einer Kreisplatte hat die Gleichung

$$w = P\{J_n(kr) + \lambda J_n(ikr)\}\cos(n\theta - \alpha)\cos(\omega t - \varepsilon),$$

worin $k = \frac{\sqrt{\omega}}{c}$, $c^4 = \frac{B}{2\delta\varrho}$, B Biegungssteifigkeit, 2δ Dicke, ϱ Dichte, P und $P\lambda$ Integrationskonstanten. Die Knotenlinien einer solchen Schwingung sind konzentrische Kreise und n Durchmesser. Man hat experimentell aber auch andere Knotenlinien beobachtet. Die Verff. wollen solche Knotenlinien dadurch berechnen, daß sie 2 oder 3 Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen herausgreifen; als Knotenlinien betrachten sie die Kurven, längs deren die Summe der Amplituden = 0 ist, z. B.

$$P_1\{J_n(k_1 r) + \lambda_1 J_n(ik_1 r)\}\cos(n\theta - \alpha_1)$$
$$+ P_2\{J_m(k_2 r) + \lambda_2 J_m(ik_2 r)\}\cos(m\theta - \alpha_2) = 0.$$

Anmerk. des Ref.: In Gleichung (13) hat der Faktor $k = -B\cos\theta/A\cos 2\theta$ für $B = A$ und $\theta = 0$ den Wert -1. Wenn Kirchhoff im Bernoullischen Produktansatz für die Durchbiegung als den von der Zeit abhängigen Faktor $\cos(\omega t - \varepsilon)$ wählt, so folgt daraus nicht, daß die Platte immer nur mit einer Frequenz schwingen kann; vielmehr kann die Durchbiegung die Summe von beliebig vielen Eigenschwingungen sein. Allerdings können die Amplituden der Eigenschwingungen sich nicht, wie in Gleichung (18) angesetzt, nur durch konstante Faktoren unterscheiden. *Ludwig* (Hannover).

Ôkubo, Hajimu: Stress systems in an aeolotropic rectangular plate. Z. angew. Math. Mech. **21**, 162—176 (1941).

Die für das elastische Gleichgewicht eines aeolotropen Körpers gültigen Gleichungen wurden von K. Wolf entwickelt [Z. angew. Math. Mech. **15**, 249 (1935)] und für verschiedene Belastungsfälle vom Verf. auf den Plattenstreifen [Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. **25**, 1110 (1937)] sowie auf die Kreisscheibe [Philos. Mag., VII. s. **27**, 508 (1939)] angewandt. In der vorliegenden Arbeit sind die Spannungen und Verschiebungen in einer aeolotropen, rechteckigen Platte für den allgemeinsten Fall berechnet, daß die vier Seiten durch ein beliebiges System von Kräften belastet sind. Dabei werden zunächst acht Sonderfälle betrachtet, aus denen durch Überlagerung die Lösung für den allgemeinen Belastungsfall aufgebaut wird. Aus den für die aeolotrope, rechteckige Platte gewonnenen Ergebnissen wird durch einen Grenzübergang eine Lösung für die isotrope Rechteckplatte für denselben allgemeinen Belastungsfall entwickelt, indem man das Verhältnis der beiden Elastizitätsmoduln gegen Eins gehen

läßt. Diese Lösung enthält nur ein System von unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, während die von J. Kuno [Philos. Mag., VII. s. **13**, 810 (1932)] für die isotrope Rechteckplatte gegebene Lösung, deren zwei gegenüberliegende Seiten durch eine symmetrische Belastung beansprucht sind, vier solche Gleichungssysteme enthält. *Gran Olsson* (Trondheim.)

Burgers, J. M.: Some considerations on the fields of stress connected with dislocations in a regular crystal lattice. II. Solutions of the equations of elasticity for a non-isotropic substance of regular crystalline symmetry. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **42**, 378—399 (1939).

The stress components are first expressed in the form $\sigma_{xx} = \lambda\theta + (2\mu + \mu')\, u_x$, $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \mu(v_x + u_y)$, $\theta = u_x + v_y + w_z$ where μ' is zero for an isotropic substance. The displacements u, v, w then satisfy equations of type $\mu \Delta u + \mu' u_{xx} + (\lambda + \mu)\,\theta_x = -X$. A solution is sought for the case in which the forces X, Y, Z are zero everywhere except at the origin of co-ordinates, at which point a concentrated force of unit magnitude is assumed to act. The author's plan is to find first a solution for the case in which $X = E = \exp(i\alpha x + i\beta y + i\gamma z)$ where α, β, γ are real parameters. This solution is found by assuming $u = aE$, $v = bE$, $w = cE$ where a, b, c are unknown constants. Substitution gives

$$
\begin{aligned}
AD a &= M^2\varrho^4 + MN\varrho^2(\beta^2+\gamma^2) + (N^2 - L^2)\beta^2\gamma^2, \qquad M = \mu,\\
&\qquad L = \lambda + \mu, \qquad N = \lambda + \mu + \mu',\\
AD b &= -ML\varrho^2\alpha\beta\cdot(NL - L^2)\alpha\beta\gamma^2,\\
AD c &= -ML\varrho^2\alpha\gamma + (L^2 - NL)\,\alpha\beta^2\gamma, \qquad \varrho^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2,\\
AD &= M^2(M+N)\varrho^6 + M(N^2 - L^2)\varrho^2(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2)\\
&\quad + (N^3 - 3\,L^2N + 2\,L^3)\alpha^2\beta^2\gamma^2.
\end{aligned}
$$

This solution is next generalised by multiplication by $f(\alpha, \beta, \gamma)$ and integration with respect to α, β, γ. The result can be put in the form

$$
\begin{aligned}
Au &= \{M^2\Delta^2 + MN(D_y^2 + D_z^2)\Delta + (N^2 - L^2)D_y^2D_z^2\}\Phi\\
Av &= -\{MLD_xD_y\Delta + (L^2 - NL)D_xD_yD_z^2\}\Phi\\
Aw &= -\{MLD_xD_z\Delta + (L^2 - NL)D_xD_y^2D_z\}\Phi
\end{aligned}
$$

where $\Phi = \int\int\int d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, f(\alpha, \beta, \gamma)E/D$. This function Φ satisfies a non-homogeneous partial differential equation of order 6; its properties are studied with the aid of an extension of the system of spherical polar co-ordinates and a series of surface harmonics. The expressions for u, v, w are simplified by the introduction of a function Ψ connected with Φ by the equation $\Psi = \Delta\Phi$ and the stress component σ_{xx} is expressed in terms of Φ and Ψ. —The analysis is used to investigate the field connected with a dislocation the reasoning being similar to that employed by Volterra. Some simple cases are then considered. (I. see this Zbl. **26**, 35.) *H. Bateman* (Pasadena).

Hydrodynamik:

Ponein, Henri: Sur une méthode de prolongement analytique applicable à divers problèmes d'hydro- et d'aérodynamique. C. R. Acad. Sci., Paris **213**, 341—342 (1941).

Le problème général que se pose l'auteur, c'est de déterminer un couple de deux fonctions harmoniques conjuguées f et g dans un certain domaine plan (D), lorsqu'on se donne sur l'ensemble frontière E de (D), partiellement inconnu, un système de n relations C_i entre f, g et leurs dérivées partielles premières. — Ce problème peut se ramener à l'étude d'un certain système d'équations intégro-différentielles. En vue des applications, l'auteur esquisse une autre méthode fondée sur le prolongement par symétrie analytique des solutions obtenues au voisinage de chaque point des sous-ensembles continus E_f de E, qu'on connaît a priori, par l'utilisation d'un certain nombre des conditions C_i. Il ramène ainsi la question à l'étude des fonctions uniformes sur certaines surfaces de Riemann. *C. Jacob* (Bucureşti).

Pistolesi, E.: Omogeneità, similitudine, modelli. Fondamenti teorici. (*2. convegno di Mat. appl., Roma 1939.*) Questioni Mat. appl. 23—63 (1940).

Einleitend werden allgemeine Erörterungen über die Begriffe Größen, Maße, Dimensionen und Systeme von solchen gegeben, sodann die Versuche besprochen, um für die Gesamtphysik zu streng logischen Festsetzungen zu gelangen; dabei wird vor allem das Giorgische System behandelt. Dieses führt (wie auch die ähnlich gebildeten) zu fünf Fundamentaleinheiten der Physik (einschließlich der Einheit für die Temperatur). Das Prinzip der Homogenität, das seinen Ausdruck in dem Theorem von Buckingham findet (in Amerika auch als das „Theorem π" bezeichnet), wird wie folgt ausgesprochen: Die allgemeinste Form einer physikalischen Gleichung zwischen n Größen $x_1, \ldots x_n$ ist

$$F(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_i) = 0,$$

wobei die π_i i voneinander unabhängige dimensionslose Zahlen sind. Wenn sodann q die Anzahl der Fundamentaleinheiten bedeutet, so ist $i = n - q$. — Die Anwendungen, die sich aus diesem Prinzip für die Frage der Ähnlichkeit und für die Theorie der Modelle ableiten lassen, werden ausschließlich auf das Gebiet der Hydrodynamik beschränkt. Zum Schluß wird eine Verallgemeinerung des Gesetzes der Ähnlichkeit auf zwei physikalische Erscheinungen verschiedener Art gegeben. *Th. Pöschl.*

Jacob, Caius: Considérations élémentaires sur la double-source. Disquisit. math. et phys., Bucureşti **1**, 369—390 (1941).

Nach den Methoden der grundlegenden Tschapliginschen Arbeit „Über Gasströmungen" [Wiss. Ann. Univ. Moskau, Math.-phys. Abt. **21**, 1—121 (1904)] wird das Stromlinienbild der kompressiblen adiabatischen Verallgemeinerung der Doppelquelle exakt untersucht. Wesentliches Hilfsmittel dazu sind genaue Aussagen über den Gesamtverlauf gewisser, aus der dabei im Rahmen der Hodographenmethode auftretenden hypergeometrischen Reihe abgeleiteten Funktionen. Neben den Potentiallinien werden die Tollmienschen Grenzlinien studiert; zu den Ausführungen des diesbezüglichen Abschnittes 8 vgl. man W. Tollmien, Grenzlinien adiabatischer Potentialströmungen (dies. Zbl. **26**, 27), § 5. Die Abweichungen des genauen Strömungsbildes gegenüber dem von F. Ringleb (vgl. dies. Zbl. **23**, 415) mit den drei ersten Gliedern der hypergeometrischen Reihe näherungsweise gerechneten sind bemerkenswert. *Grell* (Augsburg).

Hantzsche, W., und W. Wendt: Die kompressible Potentialströmung um eine Schar von nichtangestellten symmetrischen Zylindern im Kanal. Luftf.-Forschg. **18**, 311—316 (1941).

Die Verff. untersuchen die kompressible Strömung um eine Schar ellipsenähnlicher symmetrischer Zylinder, deren Maximalgeschwindigkeit gleich der doppelten Anströmgeschwindigkeit ist, inmitten eines Kanals mit festen Wänden. Die Profilkurven gehen bei konformer Abbildung des von zwei Parallelen begrenzten Streifens auf eine längs einer Halbgeraden aufgeschnittene Ebene in Kreise über. Für diese Profile läßt sich die zweite Näherung der Janzen-Rayleighschen Methode in geschlossener Form angeben. Die Integration der Differentialgleichung erfolgt nach Imai und Aihari. Es werden die Geschwindigkeitskomponenten im Kanal am Profilrand, die Maximalgeschwindigkeit am Profil, der Eintritt der Schallgeschwindigkeit am Profil in Abhängigkeit vom Verhältnis d/h (d = Profildicke, h = Kanalhöhe) angegeben und für ein spezielles Beispiel die Geschwindigkeitsverteilung längs des Profils und im engsten Querschnitt des Kanals für verschiedene Machsche Zahlen mitgeteilt. *Garten.*

Rossbach, H. F.: Über Grundwasserströmungen mit freier Oberfläche. Ing.-Arch. **12**, 221—246 (1941).

Für das zweidimensionale Problem der Grundwasserströmung mit freier Oberfläche (der Druck ist dort gleich dem Atmosphärendruck) unter Berücksichtigung der Schwerkraft werden nach Aufstellung der Differentialgleichungen und Diskussion der im allgemeinen vorkommenden Randbedingungen einige Beispiele ge-

rechnet. Zunächst wird die Sickerströmung des Grundwassers in der Umgebung eines Entwässerungsgrabens von rechteckigem Querschnitt behandelt, in den das Wasser seitlich und von unten eintritt, dann ein Entwässerungsgraben mit seitlichen Spundwänden, in den das Wasser nur von unten eintritt, und endlich die Sickerströmung in der Umgebung einer (als Senke dargestellten) Drainageröhre, die am Grunde der wasserführenden Schicht angebracht ist. Die Lösung wird in bekannter Weise (z. T. auf mehrere Arten) durchgeführt, indem das Strömungsgebiet konform auf ein Gebiet der Hodographenebene bzw. der Ebene des komplexen Potentials abgebildet wird, wo dann noch ein Randwertproblem zu lösen ist. Für die Abhängigkeit der in den Graben bzw. in die Röhre eintretenden Wassermenge von den Abmessungen des Grabens bzw. des von der Röhre zu entwässernden Gebietes und für die Gestalt der freien Wasseroberfläche (die Absenkung des Grundwasserspiegels) erhält Verf. geschlossene Ausdrücke, deren Auswertung allerdings noch mühsam ist, da sie die gesuchten Größen in impliziter Form enthalten bzw. komplizierte Parameterdarstellungen sind. *W. Mangler* (Göttingen).

Calapaj, Giovanni: Sul moto di un vortice rettilineo in un fluido limitato da una parete piana. Atti Ist. Veneto Sci. etc. **99**, 691—705 (1940).

Verf. untersucht im Anschluß an Consiglio (Cilindro circolare mobile comunque in un fluido indefinito limitato da una parete piana orizzontale [Atti R. Istit. Veneto di scienze, lettere ed arti **95**, 625; **96**, 543) die Bewegung eines geradlinigen horizontalen Wirbelfadens in einer nur durch eine ebene horizontale Wand begrenzten, vollkommenen, unzusammendrückbaren Flüssigkeit, die sich mit konstanter Geschwindigkeit parallel zur Wand in Bewegung befindet. Es werden die beiden Fälle 1) daß sich der Wirbelfaden in Wandnähe; 2) weitab von der Wand befindet, unterschieden. *Garten.*

Possio, Camillo: Campo di velocità creato da un vortice in un fluido pesante a superficie libera in moto uniforme. Atti Accad. Sci. Torino **76**, 365—388 (1941).

Es handelt sich um die zweidimensionale stationäre Bewegung einer schweren Flüssigkeit mit freier Oberfläche bei Vorhandensein eines geradlinigen unbegrenzten Wirbels der Stärke Γ im Abstand h von der freien Oberfläche, falls sich die Bewegung parallel zur freien Oberfläche mit der konstanten Geschwindigkeit V_0 vollzieht. Auf ein mit dem Wirbel fest verbundenes kartesisches Achsensystem x, y bezogen, lautet das Geschwindigkeitspotential

$$\Phi = V_0 x + (\Gamma/2\pi)\operatorname{arctg}((y-h)/x) + \Phi_a,$$

wobei das Potential Φ_a des Zusatzfeldes zur Erfüllung der Randbedingungen dient und durch die folgenden Bedingungen bestimmt wird: in der Flüssigkeit gilt $\Delta\Phi_a = 0$; für $x \to -\infty$ strebt $\partial\Phi_a/\partial x \to 0$, $\partial\Phi_a/\partial y \to 0$; der zu Φ gehörige Druck nimmt auf der freien Oberfläche den Wert p_a an. — Verf. erhält für Φ den Ausdruck

$$\Phi = V_0 x + (\Gamma/2\pi)(\operatorname{arctg}(y-h)/x + \operatorname{arctg} x/(y+h)) - \Gamma\cos(\beta x/h)\cdot\exp(-\beta(1+y/h))$$
$$+ (\Gamma/\pi)\int_0^\infty \exp[-m\beta(1+y/h)]\cdot\sin(m\beta x/h)/(1-h)\,dm, \qquad \beta = gh/V_0^2,$$

den er durch Angabe einer Reihenentwicklung für das Integral der numerischen Rechnung zugänglich macht. Die dynamische Wirkung der Strömung auf den Wirbel (Auftrieb und Widerstand) wird daraus abgeleitet. Die entsprechende Fragestellung wird ferner für den Fall behandelt, wo eine (lineare) stetige Wirbelverteilung vorliegt. Die Ergebnisse werden auf das Problem der gleichförmigen Bewegung eines Profiles angewandt. *Garten* (Leipzig).

Hamel, Georg: Über die Potentialströmungen zäher Flüssigkeiten. Abhandlungen zur Hydrodynamik. 9. Z. angew. Math. Mech. **21**, 129—139 (1941).

Jede Potentialströmung stellt bekanntlich eine strenge Lösung der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen für zähe inkompressible Flüssigkeiten dar, ohne jedoch die längs festen Wänden zu fordernde Haftbedingung zu erfüllen; infolgedessen bleibt

hier die physikalische Realisierung von vornherein auf solche Fälle beschränkt, in denen das Strömungsgebiet von nichtstarren, beweglichen Wänden berandet wird, die sich ihrerseits der jeweiligen Flüssigkeitsbewegung anzupassen vermögen. Für ebene Potentialströmungen läßt sich sowohl die äußere (d. h. von außen auf einen abgeschlossenen Flüssigkeitsteil übertragene) als auch die innere Leistung der Zähigkeitsspannungen unter Benutzung des komplexen Geschwindigkeitspotentials in sehr einfacher Form zum Ausdruck bringen; die Summe dieser beiden Leistungen verschwindet, wie man fast unmittelbar einer der Greenschen Formeln entnimmt. An einigen Beispielen wird der Energieaustausch etwas eingehender erörtert. — Im zweiten Teil der Arbeit wird die Frage nach solchen Profilen aufgeworfen, denen eine Potentialströmung mit konstanter Rand-Winkelgeschwindigkeit ω zugeordnet ist; sie führt — indem das Außengebiet der in der z-Ebene gelegenen Profilkontur durch $z = F(w)$ auf das Kreisgebiet $|w| > \varrho$ der w-Ebene konform abgebildet wird — zu der funktionentheoretischen Randwertaufgabe, eine für $|w| > \varrho$ analytische, der Bedingung

$$[|F'(w)|^2]_{|w|=\varrho} = \frac{C}{2\pi\varrho^2\omega} \cdot \left[\Re\left\{\frac{w}{z} \cdot F'(z)\right\}\right]_{|w|=\varrho}$$

genügende Funktion $F(w)$ zu finden. Es zeigt sich, daß zu der trivialen Lösung $z = C_0 \cdot w$ des Kreiszylinders keine Nachbarlösungen von der Form $z = C_0 \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu \cdot g_\nu(w)$ mit hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ sowie mit $g_0(w) = w$ und $g_1(w) \not\equiv 0$ existieren können. (Vgl. dies. Zbl. **25**, 121.) *Harry Schmidt* (Berlin).

Germani, D.: Essai d'une théorie élémentaire des déformations et des efforts intérieurs d'un fluide incompressible. Bul. Politehn., Bucureşti **12**, 103—113 (1941).

L'auteur expose une méthode élémentaire qui permet d'aboutir à l'expression des efforts de viscosité en fonction des vitesses de déformation dans un fluide incompressible, et dont l'avantage consiste surtout en ce qu'elle met en évidence la partie physique de la question. *C. Jacob* (Bucureşti).

Strakhovich, K.: General principles of a theory of critical velocities at unidimensional movement of gas. J. techn. Physics, Leningrad **11**, 417—430 (1941) [Russisch].

Verf. untersucht theoretisch die Frage, ob bzw. wann bei Strömungen, in denen ein Austausch mechanischer und thermischer Energie mit der Umgebung und Reibung vorhanden ist, der Übergang der Strömung von Unterschall- zu Überschallgeschwindigkeit mit einem Querschnittsminimum verbunden ist. Anschließend nimmt er Stellung zu einigen Schlüssen der Ausführungen von K. W. Sorg (Forsch. Ing.-Wes. **10**, 270), die einen spezielleren Fall der gleichen Fragestellung in etwas anderer Rechnungsweise behandeln. *Straßl* (Göttingen).

Klose, Alfred: Theorie der Luftkräfte bei verschwindender Reibung. Abh. preuß. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. Nr **9**, 1—50 (1941).

Über das Verhalten der Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen (N.-St.-Gl.) der Hydrodynamik für $R \to \infty$ (R die Reynoldssche Zahl) sind bisher keine strengen Resultate bekannt; insbesondere liegt die Beziehung dieser Grenzfunktionen (falls sie überhaupt existieren) zu den Lösungen der Eulerschen (d. h. reibungslosen) Gleichungen noch völlig im Dunkel. Verf. beabsichtigt, zu der Klärung dieser Dinge beizutragen und macht zunächst folgende grundsätzliche Annahmen: In eine Parallelströmung einer inkompressiblen Flüssigkeit von kleiner Reibung ist ein fester Körper K eingetaucht, und es existiere für alle hinreichend großen Werte von R eine einzige Lösung der N.-St.-Gl., die auf der Berandung von K der Haftbedingung genügt und sich im Außenraum eines gewissen, K enthaltenden Gebietes T_i beliebig wenig von einer zu K gehörigen Helmholtzschen Potentialströmung (Strömung um K mit anschließendem Totraum T', der sich bis ins Unendliche erstrecken kann) unterscheidet. Überdies soll für $R \to \infty$ die betrachtete Lösung gegen die erwähnte Helmholtzströmung konvergieren, wobei dann das Gebiet T_i in $K + T'$ übergehen muß. — Auf dieser

Grundlage und unter einigen weiteren, physikalisch nicht immer einleuchtenden Voraussetzungen über das Geschwindigkeitsfeld in der Nähe des Randes und sein Verhalten für $R \to \infty$ (es soll z. B. für große R der Geschwindigkeitsbetrag von der Wand aus nahezu linear wachsen) will nun Verf. zu Aussagen über die Beschaffenheit der Strömung in Wandnähe (insbesondere über die Ablösung) und über die Druck- und Reibungskräfte gelangen. Die wesentlichen Resultate sind: 1. Bei der stationären, für $R \to \infty$ erhaltenen Strömung wächst auf der Oberfläche von K der Geschwindigkeitsbetrag $\bar{v}$ vom vorderen Staupunkt ab längs einer Stromlinie monoton bis zum Ablösungspunkt, dem Geschwindigkeitsmaximum bzw. dem Druckminimum. 2. Für endliches R erfolgt die Ablösung im Gebiet des Druckanstiegs; mit $R \to \infty$ rückt diese Stelle gegen die des Druckminimums. 3. Während bei einer Helmholtzströmung mit endlichem Totraum keine resultierende Kraft auftritt (sie ist ja nichts anderes als die Umströmung eines endlichen Körpers), liefert jetzt die für $R \to \infty$ erhaltene Potentialströmung einen von Null verschiedenen Druckwiderstand. 4. Asymptotische Formeln für die Reibungskräfte. 5. Anwendung auf den Fall, daß K eine Kugel ist, wobei in Ermangelung einer bekannten Totraumströmung die klassische Potentiallösung zugrunde gelegt wird. — Diese Ergebnisse müssen nach Ansicht des Ref. zum Teil befremden. In 3. ist z. B. nicht einzusehen, wieso eine Strömung einmal keinerlei Kraftwirkung auf K hervorruft, dann aber, erhalten durch einen Grenzübergang, doch einen Widerstand liefert. Bei 5. wird auf die vom Verf. als wesentlich angesprochene Totwasserströmung verzichtet; trotzdem soll es sich um eine Anwendung der vorangehenden Theorie handeln. Durch Anbringung geeigneter Korrekturen wird eine gute Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen erzwungen. Zu 2. sei bemerkt, daß die Herleitung, die von der zu 1. gehörigen prinzipiell verschieden ist und nur die ebene Strömung betrifft (in Wirklichkeit wird sogar nur das Streckenprofil betrachtet), an keiner Stelle ein hinreichendes Kriterium für die Ablösung benutzt, daß mithin alle Schlüsse sich auch auf unendlich viele andere Konturstellen anwenden ließen. — Aber auch die anderen Resultate können keineswegs als gesichert gelten. Ref. verzichtet auf eine Schilderung der mathematischen Herleitung, da diese zu sehr schwerwiegenden Bedenken Anlaß gibt. Um nur einiges hervorzuheben: Es wird, ohne die geringste Begründung, Differentiation bzw. Integration und Grenzübergang vertauscht, ferner sehr großzügig der beim Taylorschen Satz auftretende „Zwischenwert" gehandhabt. Auch gelangt Verf. an einer Stelle durch einen offenbaren Fehlschluß von der Beschränktheit einer Summe zur Beschränktheit der Beträge der Summanden und ähnliches mehr. Bezüglich einer verschiedene Einzelheiten ausführlicher kritisierenden Stellungnahme zu der vorliegenden Arbeit sei auf Harry Schmidt und Kurt Schröder, Luftfahrtforschg. **19**, Lfg 3 (1942) verwiesen. *Maruhn* (Berlin).

Kolmogoroff, A. N.: On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **31**, 538—540 (1941).

Unter Fortführung seiner früheren Untersuchungen (vgl. dies. Zbl. **25**, 376) leitet der Verf. unter gewissen zusätzlichen Annahmen eine Formel für die Abnahme der zweiten Korrelationsmomente ab. *W. Tollmien* (Dresden).

Pretsch, J.: Über die Stabilität der Laminarströmung um eine Kugel. Luftf.-Forschg. **18**, 341—344 (1941).

Die bisher meist auf das ebene Problem angewendete Stabilitätsuntersuchung einer laminaren Grundströmung nach der Methode der kleinen Schwingungen wird auf das rotationssymmetrische Problem übertragen. Damit soll insbesondere die Stabilität der laminaren Reibungsschicht an einem in Achsrichtung angeströmten Rotationskörper untersucht werden. Für den Fall der Kugel wird die Störungsdifferentialgleichung aufgestellt und gezeigt, daß im Rahmen der üblichen Vernachlässigungen die Partikularlösungen mit denen des ebenen Problems übereinstimmen. Als Beispiel wird für das laminare Grenzschichtprofil im Staupunkt eines Rotationskörpers die Stabilitäts-

grenze (kritische Reynoldssche Zahl) berechnet. Sie ergibt sich zu $\left(\frac{U\delta^*}{\nu}\right)_{\text{krit.}} = 4200$, während die vergleichbare kritische *Re*-Zahl für das ebene Staupunktprofil etwa den dreifachen Wert hat. *H. Schlichting* (Braunschweig).

Fjeldstad, J. E.: Tidal waves of finite amplitude. Astrophys. Norvegica **3**, 223—245 (1941).

Die Aufgabe ist, die freien Schwingungen von Wasser in einem geraden, unendlich langen Kanal überall gleicher Tiefe zu untersuchen. Am einen Ende mündet der Kanal in die See; dort ist die Bewegung vorgeschrieben. Das Problem wird als zweidimensionales angesetzt, in einer Koordinate x längs des Kanals und einer vertikalen Koordinate z. Das Wasser wird als nicht zusammendrückbar angenommen und die Beschleunigung in der senkrechten Richtung vernachlässigt. Die übrigen Glieder der hydrodynamischen Gleichungen werden beibehalten. Die Gleichungen lassen sich streng integrieren, was sowohl für die Eulersche wie für die Lagrangesche Form der Gleichungen vorgeführt wird. Vergleich der Lösungsformen, die auf den zwei Wegen gefunden wurden. Beispiele: 1. die Geschwindigkeit an der Kanalmündung soll eine harmonische Funktion der Zeit sein; 2. die Wasserteilchen in der Mündung sollen eine harmonische Bewegung machen, die beiden Fälle geben verschiedene Lösungen; 3. die Wasserteilchen in der Mündung sollen eine Bewegung machen, die durch eine Fourierreihe darstellbar ist. Eine genauere Untersuchung der Wellen des Beispiels 1 zeigt, daß die Wellen immer steiler werden, je weiter sie von der Mündung entfernt sind, und schließlich überkippen. *Bechert* (Gießen).

Giraud, Georges: Sur une figure d'équilibre relatif d'une masse tournante constituée par un liquide et par un noyau solide immergé. Bull. Sci. math., II. s. **64**, 268—298 (1940).

Verf. beweist die Stabilität einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Gleichgewichtsfigur, die aus einem starren homogenen, rotationssymmetrischen Ellipsoidkern der Dichte ϱ_1 und aus einer darüber ausgebreiteten, zusammenhängenden Schicht einer von einem konfokalen Ellipsoid E begrenzten homogenen Flüssigkeit der Dichte $\varrho_2 (< \varrho_1)$ besteht. Dabei ist die Voraussetzung gemacht, daß die Exzentrizität der Meridiankurve von E, d. h. ω genügend klein ist. Die Minimumseigenschaft der relativen Energie bei der Gleichgewichtsfigur ergibt sich durch umfängliche Rechnungen mittels Lamescher Produkte. — Ref. bemerkt, daß auch ohne diesen analytischen Apparat der Stabilitätsbeweis erbracht werden kann auf Grund einer Verallgemeinerung der mehr geometrischen Betrachtungen von L. Lichtenstein [Math. Z. **7**, 126—231 (1920), insbes. 199—204 sowie 218—225] und E. Hölder [Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig, math.-phys. Klasse **78**, 55—72 (1926)]. *E. Hölder.*

Giraud, Georges: Petits mouvements à courte période et petits mouvements amortis d'une masse tournante composée d'un liquide homogène et d'un noyau solide immergé. Ann. École norm., III. s. **58**, 37—82 (1941).

Verf. geht aus von einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Gleichgewichtsfigur, die aus einem starren Kern mit der Oberfläche $S(1)$ und einer diesen vollständig umgebenden homogenen, inkompressiblen Flüssigkeitsmasse D mit der äußeren Oberfläche $S(2)$ besteht. Er fragt nach unendlich kleinen Schwingungen der sechs Lagekoordinaten des Kerns $p_n = \Re(q_n e^{i\lambda t})$ und der Koordinaten der Flüssigkeitsteilchen

$$X = x + \Re(\xi e^{i\lambda t}), \quad Y = \cdots, \quad Z = z + R(\zeta e^{it\lambda}), \quad \lambda \neq 0.$$

$\xi, \eta, \zeta (x, y, z)$ bestimmen sich nach E. Cartan [Bull. Sci. math. **46**, 317—352 u. 356 bis 369 (1922)] aus den Schwingungen des relativen Beschleunigungspotentials $f(X, Y, Z; t) = h + \Re(\psi(x, y, z) e^{i\lambda t})$, h ist dessen konstanter Wert für die Ausgangsgleichgewichtsfigur. Für $\lambda \neq \pm 2\omega$ ergibt sich in D die Poincarésche Differentialgleichung

$$\Delta\psi \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \cos^{-2}\mu = 0, \quad \lambda \operatorname{tg}\mu = 2i\omega.$$

Diese behandelt der Verf. für die Fälle $2|\Re\mu| < \pi$, wo sie imaginär oder reell vom elliptischen Typ ist (gedämpfte Schwingungen oder solche von „kurzer Periode", $\lambda > 2\omega$ bzw. $\lambda < -2\omega$). Dazu kommen zwei Randbedingungen auf $S(1)$ und $S(2)$ für ψ und den mit dem Normaleneinheitsvektor (α, β, γ) gebildeten Differentialausdruck

$$\nu = \theta\psi \equiv \alpha\frac{\partial\psi}{\partial x} + \beta\frac{\partial\psi}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\psi}{\partial z}\cos^{-2}\mu + \left(\beta\frac{\partial\psi}{\partial x} - \alpha\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\operatorname{tg}\mu,$$

in die noch $q_1, \ldots, q_6$ eingehen, und für diese letzteren die Bewegungsgleichungen, die im einzelnen aufgeschrieben werden. Mittels zweier eindringend diskutierter Hilfsaufgaben bez.

$$\bar{\Delta}\psi - k^2\psi = f \quad \text{in} \quad D, \qquad \theta\psi = \varphi \quad \text{auf} \quad S(1) + S(2)$$

erhält Verf. ein System linearer Gleichungen für $\psi, \nu, q_1 \ldots q_6$, darunter zwei Fredholmsche Integralgleichungen, die den Parameter μ analytisch und regulär enthalten. Solche Gleichungen hat Verf. bereits im Bull. Sci. math. **64**, 225—244, 268—298 (1940) (dies. Zbl. **24**, 410 u. vorst. Ref.) studiert. Es ergibt sich so der Begriff eines „Eigenwertes" μ; die zugehörigen Eigenfrequenzen λ können im Endlichen keinen Häufungspunkt haben außer im reellen Intervall $-2\omega \leqq \lambda \leqq 2\omega$. *E. Hölder.*

Thermodynamik:

● **Blasius, H.: Wärmelehre. Physikalische Grundlagen vom technischen Standpunkt. 3. neubearb. Aufl.** Hamburg: Boysen & Maasch 1941. VIII, 294 S. RM. 6.50.

Dies ist für Studenten und zur Verwendung für einfache Übungsaufgaben ein sehr nützliches Buch. Es bringt eine sehr große Zahl von elementar durchgerechneten Beispielen aus der Wärmetechnik. An Beispielen werden die beiden Hauptsätze und ihre Folgerungen klargemacht. *Bechert* (Gießen).

Bothe, W.: Einige Diffusionsprobleme. (*Inst. f. Physik, Kaiser Wilhelm-Inst. f. Med. Forsch., Heidelberg.*) Z. Physik **118**, 401—408 (1941).

Die Richtungsverteilung der Teilchen sei um die x-Achse rotationssymmetrisch und somit allein von x und $y = \cos\vartheta$ (wobei ϑ den Winkel der Strahlrichtung mit der x-Achse bedeutet) abhängig. Die Zahl der Teilchen, welche in der Zeiteinheit im Punkte x innerhalb eines Raumwinkels $d\Omega$ das senkrecht zu ihrer Richtung gelegene Flächenelement df durchsetzen, werde mit $K(x, y)d\Omega df$ bezeichnet. Ist λ_s und λ_a die freie Weglänge für Streuung und Absorption und setzt man $1/\lambda = 1/\lambda_a + 1/\lambda_s$, so genügt mit $\xi = \frac{x}{\lambda}$ die Funktion $K(\xi, y)$ der Integrodifferentialgleichung $y\partial K/\partial\xi + K - \varkappa/2\int_{-1}^{+1} K(\xi, y)dy = 0$, wobei $\varkappa = \lambda/\lambda_s$ gesetzt worden ist. Aus dieser Gleichung wird zunächst durch Entwicklung von K nach Kugelfunktionen eine Differentialgleichung für die stationäre Diffusion hergeleitet, welche allgemeiner und strenger als die bisher benutzte ist. Für die Diffusionskonstante D ergibt sich $D = v\lambda\overline{\cos^2\vartheta}$ mit $\overline{\cos^2\vartheta} = \int y^2 K dy / \int K dy$ (v Geschwindigkeit). Anschließend daran wird die obige Integralgleichung für ein unendlich ausgedehntes Mittel, d. h. unter Vernachlässigung der Randeffekte allgemein gelöst. Als Lösung für die Teilchendichte $\varrho(\xi) = \frac{2\pi}{v}\int_{-1}^{+1} K dy$ ergibt sich $\varrho(\xi) = e^{\pm\frac{x}{l}}$, wobei die „Diffusionslänge" l durch die Gleichung $\frac{l}{2\lambda_s}\lg\frac{l+\lambda}{l-\lambda} = 1$ bestimmt ist. Für die Richtungsverteilung erhält man

$$K(x, \cos\vartheta) = Ae^{\frac{x}{l}}(l + \lambda\cos\vartheta) + Be^{-\frac{x}{l}}(l - \lambda\cos\vartheta).$$

Weiter wird der kugelsymmetrische Fall besprochen und die allgemeine Lösung angegeben. Für den Sonderfall, daß eine Strahlung der speziellen Richtungsverteilung $K(0, y) = (l - \lambda\cos\vartheta)^{-1}$ auf die Grenzebene $x = 0$ eines Mittels auffällt, wird das

Verhältnis der aus der Grenzebene austretenden Strahlen zu den eindringenden Strahlen (Albedo) berechnet. Diese für die angenommene Richtungsverteilung streng gültige Formel kann näherungsweise auch für andere Richtungsverteilungen angewandt werden. *W. Glaser* (Prag).

Elektrodynamik:

● **Oberdorfer, Günther: Lehrbuch der Elektrotechnik. Bd. 1: Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik. 2., verb. Aufl.** München u. Berlin: R. Oldenbourg 1941. 460 S., 1 Taf. u. 272 Abb. geb. RM. 19.50.

Inhaltsverzeichnis: I. Die wichtigsten elektrotechnischen Grundbegriffe. (Die Maßsysteme und Einheiten. Die drei wichtigsten Grundgrößen der Elektrotechnik. Der grundsätzliche Aufbau der Materie.) II. Das elektrische Feld. (Das ruhende elektrische Feld. Das stationäre elektrische Strömungsfeld. Stationäre Elektronen- und Ionenströme.) III. Das magnetostatische Feld. IV. Das elektromagnetische Feld. (Das stationäre elektromagnetische Feld. Das langsam veränderliche elektromagnetische Feld. Das rasch veränderliche elektromagnetische Feld.) — Der zweite Band soll die Rechenmethoden des Elektroingenieurs, der dritte die technischen Anwendungen bringen. — Die 2. Auflage des ersten Bandes unterscheidet sich von der ersten nur durch Druckfehlerberichtigungen und kleinere Ergänzungen. — Das recht breit und leicht verständlich geschriebene Buch bringt über den Rahmen ähnlicher Lehrbücher hinaus u. a. viele Hinweise auf die Elektronentheorie, einen ausführlichen Abschnitt über Elektrizitätsleitung in Gasen und viele Beispiele aus den verschiedensten Anwendungsgebieten. Besonderes Augenmerk richtet Verf. auf die Maßsysteme und Einheiten, wobei er neben den gebräuchlichen noch ein „elektrophysikalisches" Maßsystem einführt, welches sich vom Gaußschen dadurch unterscheidet, daß die elektrische Ladung als neue Grundgröße neben Länge, Zeit und Masse eingeführt wird. Ihre Einheit (1 „Priestley") wird gleich der Gaußschen Ladungseinheit gesetzt. Auch sonst werden viele neue Einheitenbezeichnungen vorgeschlagen und im Buch neben den bisher üblichen verwendet. *Sauter* (München).

● **Küpfmüller, K.: Einführung in die theoretische Elektrotechnik. 3., verb. u. erw. Aufl.** Berlin: Springer 1941. VI, 357 S. u. 378 Abb. RM. 18.—.

Daß heute, weniger als 10 Jahre nach der ersten Auflage, bereits die dritte erscheint, ist wohl die beste Empfehlung für dieses weitverbreitete Werk. Die dritte Auflage ist gegen die zweite nur insoweit verändert, als ein ausführlicher Abschnitt über die Berechnung von Dauermagneten, ein Abschnitt über die Leistungsverhältnisse bei Leitungen und einige Ergänzungen in bezug auf die Berechnung von Einschaltverhältnissen aufgenommen wurden. Eine damals wesentliche Neuerung der ersten Auflage: Die ausschließliche Verwendung von Größengleichungen, welche alle Zweifel über Dimensionen und Einheiten beseitigt, hat sich in jeder Hinsicht bewährt und ist auch jetzt beibehalten worden. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Ferguson, Allan, and Eric J. Irons: Note on a simple test of the inverse-square law for magnetism. Proc. phys. Soc., Lond., **53**, 44—46 (1941).

Agostinelli, Cataldo: Sulla magnetizzazione di un cilindro di lunghezza finita in presenza di un campo magnetico qualsiasi. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **20**, 221—255 (1941).

Il calcolo della magnetizzazione di un cilindro circolare omogeneo di lunghezza finita, immerso in un campo magnetico qualsiasi, viene ricondotto alla risoluzione di equazioni integrali del tipo:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [\lambda_n(\sigma)\,\mathrm{sen}(\sigma z) - \mu_n(\sigma, z)]\,H_n(\sigma)\,d\sigma = f_n(z) \quad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

[$H_n(\sigma)$ funzione incognita, $f_n(z)$ funzione nota, $\lambda_n(\sigma)\,\mathrm{sen}(\sigma z) - \mu_n(\sigma, z)$ il nucleo dell'equazione integrale] ed ad altre dove invece di sen σz vi è $\cos\sigma z$. Queste equazioni

si semplificano se il campo inducente è simmetrico rispetto al piano della sezione mediana del cilindro. — Quando il cilindro è di lunghezza infinita, le equazioni integrali diventano facilmente risolubili, e viene dato in forma esplicita il potenziale del campo dovuto al magnetismo indotto. — Lo stesso potenziale viene ancora calcolato esplicitamente per il cilindro di lunghezza finita, ma di sezione molto piccola, nel qual caso sono lecite alcune approssimazioni. Si considera, infine, particolarmente il caso in cui il campo inducente sia dovuto ad un dipolo parallelo all'asse del cilindro, e simmetrico rispetto al piano della sua sezione mediana. *Dario Graffi.*

Tischner, H.: Die Darstellung von Regelvorgängen. Hochfrequenztechn. **58**, 145—148 (1941).

Verf. weist zunächst darauf hin, daß zur Erfassung von Regelvorgängen in linearen elektrischen oder mechanischen Systemen die Formulierung als Differentialgleichung oder als Integralgleichung stattfinden kann, je nachdem die Schaltelemente oder der zeitliche Ablauf der Vorgänge in den Vierpolen des Regelkreises als vorgegeben betrachtet werden. Als dritte Möglichkeit kann vom Frequenzverhalten des Regelkreises ausgegangen werden. Verf. hat sich zur Aufgabe gestellt, diese drei im Schrifttum nebeneinander gegebenen Betrachtungsweisen ineinander überzuführen. Hierzu geht er von einem allgemeinen Schaltbild eines indirekten Regelkreises aus und stellt hierfür sowohl die Differential- als auch die Integralgleichung auf. Insbesondere ergibt sich aus diesen Gleichungen auch die Stabilität der Anlage, deren Kriterien vom Verf. auf Grund der Hurwitzbedingungen abgeleitet werden. *M. J. O. Strutt.*

Lettowsky, Felix: Skineffekt in zylindrischen Leitern mit elliptischem Querschnitt bei hohen Frequenzen. Arch. Elektrotechn. **35**, 643—662 (1941).

In der Arbeit wird zunächst für einen unendlich lang gedachten Leiter von beliebiger Querschnittsform die Integration der vollständigen Maxwellschen Gleichungen durch den Ansatz $\mathfrak{A} = \{A(x, y)\, k + \overline{V}\, R(x, y)\, x k\} e^{icz}$ ($\mathfrak{A}$ = Vektorpotential) auf die Lösung der zweidimensionalen Wellengleichung für $A(x, y)$ und $R(x, y)$ zurückgeführt. Die gefundenen Formeln werden insbesondere auf einen Leiter von elliptischem Querschnitt angewandt und hierüber einige allgemeine Betrachtungen (wie z. B. über die allgemeine Berechnung der Dämpfung c für die verschiedenen Arten der Rückleitung) angestellt. Schließlich wird für den quasistationären Fall eine asymptotische Lösung der hier vorliegenden Randwertaufgabe der zweidimensionalen Wellengleichung unter absichtlicher Vermeidung der Mathieuschen Funktionen angegeben, in dem die Werte für R_w/R_g und $\omega L/R_g$ in der Form $\varkappa A(\varepsilon) + B(\varepsilon) + \frac{1}{\varkappa} C(\varepsilon) + \ldots$ mit $\varkappa = \pi/2(a + b)\sqrt{\sigma f}$ (a, b Ellipsenachsen, σ Leitfähigkeit, f Frequenz) berechnet werden. Dabei sind $A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$ und $C(\varepsilon)$ Ausdrücke, die nur $\varepsilon = (a - b)/(ab)$ und die elliptischen Integrale E und F mit dem Modul $2\sqrt{\varepsilon}/(1 + \varepsilon)$ enthalten. *W. Glaser* (Prag).

Magnus, Wilhelm: Zur Theorie des zylindrisch-parabolischen Spiegels. Z. Physik **118**, 343—356 (1941).

Verf. untersucht die elektromagnetische Welle, welche im Innern eines parabolischen Zylinders unendlich guter Leitfähigkeit als Folge einer strahlenden Brennlinie entsteht. Zur Lösung der Aufgabe führt Verf. parabolische Koordinaten ein und transformiert die Wellengleichung auf diese neuen Koordinaten. Er gibt Lösungen dieser Wellengleichung an, welche einer fortschreitenden Welle entsprechen. Für diese Lösungen gibt er zwei Darstellungen. Bei der Ableitung dieser Formeln geht er von einer Integraldarstellung der Hankelschen Funktion zweiter Art, nullter Ordnung durch Funktionen des parabolischen Zylinders aus. Verf. zeigt, daß die Lösung für große Abstände von der Brennlinie in eine fortschreitende Zylinderwelle übergeht. Die Lösung wird numerisch für besondere Fälle ausgewertet und die Koeffizienten der entstehenden Reihenentwicklung werden kurven- und tabellenmäßig zusammengestellt. Hieraus berechnet Verf. den Strahlungswiderstand je Längeneinheit der

Brennlinie. In einem Anhang werden die bei den vorherigen Ableitungen erforderlichen Eigenschaften der Funktionen des parabolischen Zylinders zusammengestellt.
M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Optik:

Irons, Eric J.: A non-cartesian mirror, refracting surface and lens treatment. Proc. phys. Soc., Lond. **52**, 281—311 (1940).

Es handelt sich um einen Versuch, für die Darstellung der sog. Gaußischen Abbildung, der Abbildung durch enge Bündel, zweckmäßige Grundsätze aufzustellen: 1) Als Brechwert (convergence) eines Strahlenbündels an einer brechenden oder spiegelnden Fläche wird (auch sonst üblich) der Kehrwert der Schnittweite, multipliziert mit dem Brechungsverhältnis bezeichnet, bei Konvergenz positiv. 2) Es soll gelten: Brechwert nach der Fläche = Brechwert vor der Fläche + Brechkraft (converging power) der Fläche. 3) Darum wird die Brechkraft gesetzt: $\pm n/r \pm n'r$, wobei das positive Zeichen für das Brechungsverhältnis eines Mittels gilt, nach dem hin die Fläche hohl ist, dabei kann für eine Spiegelfläche $n' = n$ gesetzt werden, es sind dann beide Zeichen positiv. In der Beseitigung der Ausnahmeregel für Spiegel soll wohl der Vorteil der künstlichen Vorzeichenbestimmung liegen, die sonst nichts Neues liefert. — Der übrige Teil der Arbeit enthält Beispiele und Anwendungen auf bekannte Fälle, sie ist im wesentlichen für den Lehrer bestimmt. *Hans Boegehold* (Jena).

Kossel, W.: Zur Struktur der im konvergenten Elektronenbündel auftretenden Interferenzbilder. Ann. Physik, V. F. **40**, 17—38 (1941).

Die Arbeit vergleicht die vom Verf. und Mitarbeitern untersuchten Elektroneninterferenzen, die bei der Durchstrahlung dünner Folien mit einem etwas divergenten Elektronenbündel erhalten werden (Winkelbereich einige 10^{-2}), mit älteren röntgenoptischen und optischen Verfahren. Abschnitt I hebt die Unterschiede zum Debye-Scherrer-Verfahren hervor, welches im Gegensatz zur Kosselaufnahme die Vorgänge verschiedener kristallographischer Einfallsrichtung, aber gleichen Beugungswinkels nicht trennt, sondern zusammenwirft. Dadurch gehen die von der endlichen Längsabmessung der Gitterbereiche herrührenden neuen Streifen verloren. Aus deren Existenz folgt andrerseits bei elektronenmikroskopischer Anwendung ein sehr richtungsempfindliches Durchlaßvermögen der Folie. Abschnitt II versucht, die wachsende Schärfe der kreisringförmigen Ketten von Interferenzen mit wachsendem Ringradius auf die mit h_3 wachsende Unempfindlichkeit der auf longitudinales a_3 bezüglichen Lauebedingung gegen Veränderung des Einfallwinkels zurückzuführen. Es scheint dem Ref. aber, daß auch hier die endliche Glanzwinkelbreite infolge geringer Longitudinalabmessung des Gitters (geringe Foliendicke!) zur Erklärung herangezogen werden muß, wie übrigens nachträglich im Abschnitt IV auch angedeutet wird. Es dürfte grundsätzlich unmöglich sein, die Wirkung endlicher Gitterbereiche aus irgendwelchen strengen Laue-, Bragg- oder anderen Bedingungen herauszulesen. Eine Ausmessung der longitudinalen Gitterperiode a_3 kann, wie in der Arbeit dargestellt ist, mit großer Genauigkeit auch gegen eine im Vergleich zu a_3 sehr kleine Wellenlänge geschehen. Es liegt dann eine Analogie vor zu den Röntgeninterferenzen an Strichgittern von Compton und Doan, andrerseits auch zu den Haidingerschen Ringen an Planplatten, die in Abschnitt III näher betrachtet wird. Am Schluß von Abschnitt IV wird noch auf die anschließend von Möllenstedt behandelte Dickenmessung der Folie aus ihren Interferenzringen hingewiesen. *Fues* (Breslau).

Relativitätstheorie:

Fischer, Otto F.: Lorentz transformation and Hamilton's quaternions. Philos. Mag., VIII. s. **30**, 135—150 (1940).

Vierervektoren in der Minkowskischen Welt können durch Quaternionen

$$x i_1 + y i_2 + z i_3 + ict$$

dargestellt werden, räumliche Drehungen durch

$$O' = \gamma \times O \times \tilde{\gamma}; \qquad \gamma = \gamma_1 i_1 + \gamma_2 i_2 + \gamma_3 i_3 + \gamma_4 = \cos\vartheta + i_\vartheta \sin\vartheta,$$

wo $\times$ die Quaternionenmultiplikation bedeutet. Die Formel

$$O' = \theta' \times O \times \tilde{\gamma}; \qquad \theta' = \cos\vartheta' + i_\vartheta \sin\vartheta'$$

definiert eine neuartige Transformation, die der Verf. longitudinale Lorentztransformation nennt. Sie transformiert, wenn $i_\vartheta = i_1$ gewählt wird, x und t wie eine gewöhnliche Lorentztransformation, y und z aber nach einer imaginären Transformation. Macht man diese rückgängig, so erhält man die Formel für die gewöhnliche Lorentztransformation: $O'' = g \times \theta' \times O \times \tilde{\gamma} \times \tilde{g}$. — Zwei Quaternionen heißen orthogonal, wenn der skalare Teil des Produktes $\tilde{O} \times F$ verschwindet. Setzt man nun: $O = \boldsymbol{O} + i\sigma$, $F = i\boldsymbol{F} + f$ und bildet das Produkt

$$C\dagger = -i\boldsymbol{O} \times \boldsymbol{F} - (\sigma \cdot \boldsymbol{F} + f \cdot \boldsymbol{O}) = -(\boldsymbol{C}^0 + i\boldsymbol{C}^*),$$

so transformiert dieses sich wie der Vektor $\boldsymbol{H} - i\boldsymbol{E}$ in der speziellen Relativitätstheorie und wird Hexavektor genannt. Transformiert man O und F nach einer longitudinalen Lorentztransformation, so erleidet $C = \tilde{O} \times F$ eine „transversale Lorentztransformation". Zum Schluß werden noch allgemeinere Transformationen: $O' = \beta \times O \times \tilde{\gamma}$ betrachtet. *van der Waerden* (Leipzig).

Burgatti, Pietro: Sulla forma tetradimensionale della elettrodinamica nella teoria della relatività ristretta e le conseguenti deduzioni. Rend. Accad. Sci. Ist. Bologna, N. s. **42**, 29—45 (1938).

Verf. gibt eine vierdimensionale, vektorielle Darstellung der Lorentz-Transformationen für Koordinaten und Feldgrößen unter Vermeidung des Imaginären, welche ihrem eigentlichen Sinne nach auf die bekannte Darstellung mit dem reellen Maßtensor λ ($\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = 1$, $\lambda_{44} = -1$, $\lambda_{ik} = 0$ für $i \neq k$) hinausläuft. *W. Glaser* (Prag).

Michels, Walter C., and A. L. Patterson: Special relativity in refracting media. Phys. Rev., II. s. **60**, 589—592 (1941).

Für Beobachter in einem nichtdispergierenden Medium vom Brechungsindex n werden die Lorentztransformationen aufgestellt unter Einführung von $c = c/n$ an Stelle von c als Signalgeschwindigkeit. Der Fresnelsche Mitführungskoeffizient, das Snelliussche Brechungsgesetz und der Strahlungsdruck an der Grenze des Mediums kommen (unter anderen Resultaten) richtig heraus. *Heckmann* (Hamburg-Bergedorf).

Lichnerowicz, André: Sur l'intégration des équations d'Einstein. C. R. Acad. Sci., Paris **213**, 516—518 (1941).

Die Einsteinsche Gleichung $G_{\lambda\varkappa} = 0$ ist eine Differentialgleichung für die Komponenten des Fundamentaltensors $g_{\lambda\varkappa}$. Es sei S eine Minimalhyperfläche der Gleichung $x^4 = 0$. Die Gleichung $G_{\lambda\varkappa} = 0$ läßt sich nun in die folgenden zwei Gleichungen zerlegen: $G_{ij} = 0$ $(i, j = 1, 2, 3)$ und $G_{\alpha 4} = 0$. Es wird weiter die zweite Gleichung betrachtet und angegeben, welche in $G_{\alpha 4}$ auftretenden Größen auf S und auf dem Rande eines dreidimensionalen Gebietes in S noch beliebig gewählt werden können.

J. Haantjes (Amsterdam).

Lanczos, C.: The dynamics of a particle in general relativity. Phys. Rev., II. s. **59**, 813—819 (1941).

Aus der differentiellen Form der Erhaltungssätze für Impuls und Energie werden durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes hergeleitet: 1) eine mit der Newtonschen sehr nahe übereinstimmende Definition des Gesamtimpulses einer Partikel von endlichem Volumen und endlicher träger Masse; 2) eine „Bewegungsgleichung" für die Partikel, die formal mit der Newtonschen übereinstimmt. Beide Resultate zusammen liefern die gesamte Dynamik der Partikel. Träge Masse und Impuls sind dabei gewisse Volumintegrale über das Raumgebiet, in welchem der — sonst nicht weiter spezialisierte — Materietensor von Null verschieden ist. Die „Kraft" ergibt sich dabei zunächst ebenfalls als Volumintegral, das sich aber in ein Oberflächen-

integral verwandeln läßt. Diese Verwandlung ist bei Masse und Impuls unmöglich. Im weiteren wird die Bewegung einer zunächst ruhenden kleinen Masse in einem schwachen äußeren Felde behandelt und gezeigt, daß in diesem Falle die Bewegung auf einer Geodätischen erfolgt und schwere und träge Masse der Partikel zueinander proportional sind. Ist aber $T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = 0$ im Innern der Partikel, so wird im allgemeinen die Proportionalität durchbrochen. Nur in bestimmten Fällen kann sie, allerdings mit verändertem Zahlenfaktor, wieder hergestellt werden. Der Verf. hält es für möglich, daß die Messungen von Freundlich, v. Klüber und Brunn [Z. Astrophys. 3, 171 (1931)], die mehr als 1″,75 für die Lichtablenkung im Schwerefeld der Sonne lieferten, hiermit zusammenhängen könnten. Die Arbeit legt durchweg statische Felder zugrunde. Gänzlich neue Möglichkeiten, die sich in nichtstatischen Fällen ergeben können, werden angedeutet. *Heckmann* (Hamburg-Bergedorf).

Clark, G. L.: The derivation of mechanics from the law of gravitation in relativity theory. Proc. roy. Soc., Lond. A **177**, 227—250 (1941).

The author considers the equation of motion of particles in a gravitational field. He puts $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, where $\eta_{\mu\nu}$ is a Galilean field and $h_{\mu\nu}$ is supposed to be small. The relativistic field equations are written in the form $G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} M_{\mu\nu} + L_{\mu\nu} = 0$, where $M_{\mu\nu}$ contains the terms linear in $h_{\mu\nu}$ and $L_{\mu\nu}$ the non-linear terms. The linear equation of motion is obtained by considering a given gravitational field $h'_{\mu\nu}$ satisfying the equations for empty space. Then the author puts $h_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} + h^{(1)}_{\mu\nu}$, where $h^{(1)}_{\mu\nu}$ are the terms representing an isolated particle. It is found that if the quadratic terms in $h^{(1)}_{\mu\nu}$ are neglected it is impossible to satisfy the field equations for empty space unless the worldline of the particle is a geodesic. The angular equations of motions are obtained in the same way. The method is then applied to the problem of two bodies not connected by material tension and to the problem of a rotating rod. The paper is concluded by investigating the case of a rotating mass of liquid of constant density. *J. Haantjes* (Amsterdam).

Wallace, P. R.: Relativistic equations of motion in electromagnetic theory. Amer. J. Math. **63**, 729—740 (1941).

Infeld and Wallace [Phys. Rev. **57**, 797 (1940); this Zbl. **23**, 284] have shown that it is possible on the basis of Maxwell's equations and the relativistic field equation, to obtain a closed form of the equations of motion of charged particles represented as singularities of the field. Then the assumption was made that the gravitational effects where negligible in comparison with the electromagnetic effects. In this paper the author drops this assumption. The equations of motion are found in this case, but it appears to be impossible to express these equations in a closed form. The author uses an approximation method previously used by Einstein and Infeld in deriving the gravitational equations of motion from the relativistic field equation (this Zbl. **24**, 139). In this theory the smallness of the velocities of the particles in comparison with the velocity of light plays an essential part. Only the two-body problem is considered. The results are compared with those obtained by others. *J. Haantjes* (Amsterdam).

Stueckelberg, E. C. G.: Remarque à propos de la création de paires de particules en théorie de relativité. Helv. phys. Acta **14**, 588—594 (1941).

Zu den Bewegungsgleichungen eines Teilchens der Ladung e, mit den Koordinaten q_μ, im Gravitationsfeld $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ und im elektrischen Feld $B^{\mu\alpha}$ wird ein weiterer Term K^μ hinzugefügt, der einer hypothetischen Kraft entspricht. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\frac{d^2 q^\mu}{d\lambda^2} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{d\lambda} \frac{dq^\beta}{d\lambda} + e B^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} \frac{dq^\beta}{d\lambda} + K^\mu .$$

Zufolge dieser neuen Kraft ist die Masse m des Teilchens nicht mehr konstant; sie kann verschwinden und an der betreffenden Stelle der Weltlinie erhält man einen