Werk

Titel: Algebra und Zahlentheorie

Jahr: 1942

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0025|log6

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

gezeigt, daß jeder genügend weite, widerspruchsfreie und genau abgegrenzte logische Formalismus in dem Sinne unvollständig ist, daß sich in ihm Sätze formulieren lassen, die mit den Mitteln des Formalismus nicht entscheidbar sind. Verf. behauptet, daß die Gödelschen Ergebnisse eine Antinomie darstellen und die aus ihnen gezogenen Schlüsse daher nicht anerkannt werden können. Der Grund, der den Verf. zu dieser Annahme veranlaßt, liegt darin, daß tatsächlich eine gewisse Beziehung zwischen dem Gödelschen Satz und der Antinomie des Lügners besteht. Der unentscheidbare Satz von Gödel behauptet nämlich gewissermaßen seine eigene Unbeweisbarkeit. Jedoch nur gewissermaßen! Die von Gödel benutzte Methode der Arithmetisierung der Metamathematik gestattet jedem metalogischen Satz, d. h. z. B. jeder Aussage über Beweisbarkeit von Formeln des betrachteten Formalismus, einen zahlentheoretischen, mit den Mitteln des Formalismus ausdrückbaren Satz als sein Bild zuzuordnen. Die von Gödel angegebene, unentscheidbare mathematische Formel $\mathfrak{A}$ ist nun die arithmetische Repräsentation eines metamathematischen Satzes, der die Nichtbeweisbarkeit eben von $\mathfrak{A}$ behauptet. Die Existenz einer derartigen Formel $\mathfrak{A}$ hat aber, entgegen der Meinung des Verf., durchaus nichts Paradoxes an sich. Ihre Definition erfolgt zirkelfrei, mit rein zahlentheoretischen Mitteln. Die obige Eigenschaft stellt sich dann nachher gewissermaßen zufällig heraus. Beachtet man aber den Unterschied eines metalogischen Satzes von seinem arithmetischen Bild nicht in voller Schärfe, so daß die Gödelschen Behauptungen mit scheinbar äquivalenten verwechselt werden, wie es hier der Fall ist, so kann leicht die Meinung von dem Vorliegen einer wirklichen Antinomie entstehen. In Wirklichkeit besteht die Bedeutung des Gödelschen Satzes u. a. gerade darin, daß er die Schwierigkeit, die in der Umgangssprache durch das Auftreten der genannten Antinomie auftritt, in einen positiven Satz über die Eigenschaft von deduktiven Formalismen verwandelt hat. *Ackermann* (Burgsteinfurt).

Seckendorff, Victor Freiherr von: Beweis und Definition durch verallgemeinerte transfinite Induktion; ihr Aufbau und ihre Stellung in einem logischen Kalkül. S.-B. Berlin. math. Ges. **38/39**, 1—8 (1940).

Das Arbeiten mit einem logischen Kalkül wird anschaulich vorgeführt, indem die Russell-Whiteheadsche Form des Induktionsschlusses in symbolischer Gestalt dargestellt wird. — Auf S. 2 wird übrigens bei Ex („Es gibt ein x“) das E irrtümlicherweise als eine logische Funktion von x bezeichnet. *Ackermann* (Burgsteinfurt).

Curry, Haskell B.: A formalization of recursive arithmetic. Amer. J. Math. **63**, 263—282 (1941).

Es wird eine Formalisierung der rekursiven Arithmetik aufgebaut, die sich nicht auf einen schon vorhandenen Logikkalkül gründet, sondern ein in sich geschlossenes und unabhängiges logisches System darstellt. Von diesem formalen System wird gezeigt, daß es mit dem Hilbert-Bernaysschen Aufbau der Rekursionsfunktionen (Grundlagen der Mathematik I, § 7. Berlin 1934; dies. Zbl. **9**, 145) äquivalent ist.

Ackermann (Burgsteinfurt).

Algebra und Zahlentheorie.

Allgemeines. Kombinatorik:

● **Peacock, G. A.: Treatise on algebra. Vol. 1. Arithmetical algebra. Vol. 2. On symbolical algebra, and its applications to the geometry of position.** New York: Scripta math. 1940. Vol. 1: XVI, 399 pag., Vol. 2: X, 455 pag. $ 6.50.

● **Pettit, H. P., and P. Luteyn: College algebra. 2. edit.** New York: Wiley 1941.

Geymonat, Ludovico: L'algebra moderna. Saggiatore **1**, 239—246 (1940).

Souto, J. Barral: Produktsummen, gebildet für Kombinationen aus gegebenen Zahlen. Bol. mat. **13**, 187—204 (1940) [Spanisch].

Verf. führt das Symbol $\binom{a_1, a_2, \ldots, a_n}{m}$ ein, um damit die sogenannte einfach symmetrische

Funktion des Grades m der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zu bezeichnen, d. h. die Summe der Produkte bezüglich der einfachen Kombinationen dieser Zahlen zu je m. Er beweist verschiedene Eigenschaften dieser Symbole, von denen einige schon bekannt, andere wiederum Erweiterungen bekannter Eigenschaften sind. Die einfach symmetrischen Funktionen waren ebenso wie die vollständigen, die den vollständigen Kombinationen der gegebenen Zahlen entsprechen, Gegenstand besonderer Untersuchung seitens der Mathematiker der neapolitanischen Schule der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts (Trudi, Fergola, Torelli u. a.) und wurden von ihnen durch die Symbole $[a_1, a_2, \ldots, a_n]^m$ und $(a_1, a_2, \ldots, a_n)^m$ bezeichnet. [Vgl. z. B. G. Torelli, Giorn. Mat. Battaglini, I. s. **5**, 250 (1867).] *M. Cipolla* (Palermo).

Stewart, B. M.: Solitaire on a checkerboard. Amer. Math. Monthly **48**, 228—233 (1941).

Für ein Spielbrett, das der Gruppe gleichfarbiger Felder des Schachbretts entspricht, wird durch Angabe von Partiebeispielen gezeigt, daß alle Aufgaben des Solitärspiels, die den bekannten notwendigen Bedingungen genügen, lösbar sind. *Sprague.*

Lineare Algebra, Polynome:

● **Ferrar, W. L.: Algebra: A text-book of determinants, matrices and quadratic forms.** Oxford: Clarendon press a. London: Oxford univ. press 1941. VII, 202 pag. 12/6.

Kurosaki, Tiyoko: Über die mit einer Kollineation vertauschbaren Kollineationen. Proc. Imp. Acad. Jap. **17**, 24—28 (1941).

Verf. untersucht den Bereich Γ aller (quadratischen) Matrizen P mit

$$PA = cAP, \tag{1}$$

wo A eine gegebene (quadratische) Matrix mit Koeffizienten aus einem Körper K ist und c in K liegt. Dabei wird c auf einen Teilbereich M von K beschränkt. Man teile die charakteristischen Wurzeln von A in Klassen ein, indem man zwei Wurzeln zur gleichen Klasse rechnet, wenn sie sich nur um einen Faktor aus M unterscheiden. Entsprechend teile man die voneinander verschiedenen, in K irreduziblen Faktoren $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_t(x)$ von $|xE - A|$ in Klassen ein, indem man zwei Polynome $\varphi_i(x)$ zur gleichen Klasse rechnet, wenn ihre Nullstellen einer einzigen Klasse angehören. Die Anzahl der Polynomklassen sei d. Für $M = 1$ ist $c = 1$, $d = t$, und man erhält den von Frobenius (S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1910**, 3—15) und Shoda [Math. Z. **29**, 696—712 (1929)] behandelten Fall der mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen. Die (äußerst knapp dargestellten) Ergebnisse des Verf. sind: Für festes c wird die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen von (1) bestimmt. Γ ist direkte Summe von genau d direkt unzerlegbaren Summanden. Beschränkt man sich auf einen solchen Summanden Γ_0, so ist, falls $|A| = 0$ ist, bei beliebigem c jedes P von (1) in der Form $P_0 U$ darstellbar mit $|P_0| \neq 0$ und $UA = AU$. Ist $|A| \neq 0$, so ist Γ_0 in Klassen zerlegbar derart, daß die Matrizen einer Klasse die Lösungen von (1) bei festem c sind und c den Bereich M durchläuft. Für jede Klasse sind die Lösungen P wieder von der Form $P_0 U$ mit $|P_0| \neq 0$ und $UA = AU$. Die P mit $|P| \neq 0$ bilden eine Gruppe, die einen Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe besitzt, der aus allen mit A vertauschbaren Matrizen besteht. *Rohrbach* (Prag).

Kampen, E. R. van: Elementary proof of a theorem on Lorentz matrices. Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 288—290 (1941).

Sind x und y reelle n- und m-Vektoren und x^2 und y^2 ihre skalaren Quadrate, so betrachtet man die Gruppe der $(n + m)$-dimensionalen linearen Transformationen

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + By \\ Cx + Dy \end{pmatrix}$$

welche die quadratische Form $x^2 - y^2$ invariant lassen. Givens hat bewiesen (dies. Zbl. **22**, 299), daß die Vorzeichen der Determinanten $|A|$ und $|D|$ zwei eindimensionale Darstellungen dieser Gruppe bilden und daß das Vorzeichen der Determinante der Gesamttransformation das Produkt dieser beiden Vorzeichen ist. Für diese Tatsachen werden zwei neue Beweise, ein topologischer und ein elementar algebraischer, gegeben. *van der Waerden* (Leipzig).

Satterthwaite, Franklin E.: A concise analysis of certain algebraic forms. Ann. math. Statist. **12**, 77—83 (1941).

Die Methoden der Tensoralgebra werden für eine raschere Herleitung von Formeln der Statistik herangezogen; eingeführt wird ein Vektor 1_i, das ist $x_i = 1$, ein Tensor 1^i_k, das ist $a^i_k = 1$; $i = 1, 2, \ldots$; $k = 1, 2, \ldots$; ferner wird immer $x_i \equiv x^i$ genommen; das Kroneckersche Symbol δ^i_k wird regelmäßig verwendet; es tritt dabei wohl ein Schreibfehler auf, da einmal $\delta^i_i = 1$, ein anderes Mal $\delta^i_i = n$ gesetzt wird, wo an eine Summierung gedacht ist. Eingeführt wird ein nichtzusammengezogenes (uncontracted) Matrixprodukt $C = A \odot B$, $A = \|\alpha^i_i\|$, $B = \|\beta^i_i\|$; die Elemente von C sind dabei $\gamma^{ih}_{rk} = \alpha^i_r \beta^i_k$. Offenbar liegt hier eine mehrdimensionale Matrix vor, was aber aus der Arbeit nicht ersichtlich ist; dieses Matrixprodukt wird zur Bestimmung des Ranges von Matrizen herangezogen. Die ganzen Überlegungen werden auf eine Reihe von Formeln der Statistik angewendet und führen zu einer Vereinfachung umfangreicher Ableitungen und zur rascheren Ermittlung des Ranges auftretender Matrizen. *F. Knoll* (Wien).

Shestakov, V.: Algebra of double-pole schemes, consisting only of double-poles. J. techn. Physics, Leningrad **11**, 532—549 (1941) [Russisch].

● **Conkwright, N. B.: Introduction to the theory of equations.** Boston: Ginn 1941. VIII, 214 pag. $ 2.00.

Petrescu, Julian: Eine Verallgemeinerung betreffs der Moduln der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Bemerkung von P. Sergescu. Gaz. mat. **46**, 519—521 u. 521—523 (1941) [Rumänisch].

Die Zahl $\sqrt[k]{\frac{A_k}{A_h}}(1 + A_h)$ ist eine obere Schranke für die Moduln der Nullstellen des Polynoms $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, wenn $A_i = |a_i|$, $A_k = \mathrm{Max}\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ und $A_h = \mathrm{Max}\{A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_n\}$ sind. — P. Sergescu bemerkt, daß A_h sich ohne weiteres durch die Zahl $A'_h = \mathrm{Max}\{A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}\}$ ersetzen läßt. — Verf. spricht auch einen anderen Satz aus, der von P. Sergescu verschärft wird. *Gy. v. Sz. Nagy* (Kolozsvár).

Sergescu, Pierre: Sur les limites de J.-J. Bret. C. R. Acad. Sci., Paris **210**, 652—654 (1940).

Kurzer Bericht über die Ergebnisse einer schon referierten Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **23**, 291). *Gy. v. Sz. Nagy* (Kolozsvár).

Montel, Paul: Observations sur la communication de Pierre Sergescu: Sur les limites de J.-J. Bret. C. R. Acad. Sci., Paris **210**, 654—655 (1940).

Es wird gezeigt, daß man die Sätze von Bret und Sergescu (siehe vorsteh. Ref.) durch das folgende Prinzip einfach erhalten kann: Sind $f(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ Polynome mit positiven höchsten Gliedern, haben ferner die Ungleichungen $g_1(x) > 0$, $g_2(x) > 0$ und $g_3(x) > 0$ die Folgerung $f(x) > 0$, und bedeutet endlich M_k eine obere Grenze der reellen Nullstellen von $g_k(x)$ $(k = 1, 2, 3)$, so ist $M = \mathrm{Max}(M_1, M_2, M_3)$ eine obere Grenze der reellen Nullstellen von $f(x)$. *Gy. v. Sz. Nagy.*

Gruppentheorie:

Lubelski, S.: Zur Verschärfung des Jordan-Hölderschen Satzes. Rec. math. Moscou, N. s. **9**, 277—279 (1941).

Ist die endliche Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\mathfrak{G}_1$ das Produkt der Gruppen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{G}_1$, deren Durchschnitt die Einheit ist, und ist $\mathfrak{N}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$ Normalteiler einer gewissen Gruppe $\mathfrak{M}$, so heißt $\mathfrak{G}_1$ „bezüglich $\mathfrak{M}$ realer" Faktor von $\mathfrak{G}$. Existiert kein Normalteiler $\mathfrak{G}_1$ von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\mathfrak{G}_1$, so heißt $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ „bezüglich $\mathfrak{M}$ idealer" Faktor von $\mathfrak{G}$. Der Jordan-Höldersche Satz gilt auch für Aufspaltungen mit idealen Faktoren, wie durch vollständige Induktion bewiesen wird. *J. J. Burckhardt* (Zürich).

Liapin, E.: On the decomposition of abelian groups into direct sums of groups of the first rank. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. **1939**, 141—146 u. engl. Zusammenfassung 147—148 [Russisch].

Verf. gibt eine notwendige wie hinreichende Bedingung dafür an, daß eine abelsche Gruppe G in direkte Summanden vom Range 1 zerlegbar ist unter der Voraussetzung,

daß eine solche Zerlegung für die Torsionsuntergruppe T und die Faktorgruppe G/T existiert. Unter Benutzung des Charakteristikenbegriffes der Theorie der torsionsfreien abelschen Gruppen nennt Verf. ein Element g von G in einer Teilmenge A von G maximal, wenn seine Charakteristik durch die Charakteristiken jedes Elementes von A teilbar ist. Die Bedingung lautet dann: In jeder Nebengruppe von T existiert wenigstens ein maximales Element. (Referat nach englischer Zusammenfassung.) *Ulm.*

Clifford, A. H.: Partially ordered abelian groups. Ann. of Math., II. s. **41**, 465—473 (1940).

Verf. berichtet über Ergebnisse in der Theorie der halbgeordneten abelschen Gruppen. Beweise werden i. a. nicht gegeben, da nach Verf. seine Resultate alle enthalten sind in der Arbeit von P. Lorenzen: Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie [Math. Z. **45**, 533—553 (1939); dies. Zbl. **21**, 387]. *Ulm.*

Moisil, Gr. C.: Sur la représentation des groupes abéliens infinis. 1. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. **23**, 358—361 (1941).

Es handelt sich um eine Art Darstellung von abelschen Gruppen, deren sämtliche Elemente die Ordnung 2 haben. Die Betrachtungen ließen sich unter Benutzung z. B. der bekannten Struktur dieser Gruppen vereinfachen. *Ulm* (Münster i. W.).

Specht, Wilhelm: Darstellungstheorie der endlichen Gruppen. J. reine angew. Math. **182**, 242—248 (1940).

Bericht über die Ergebnisse von R. Brauer und C. Nesbitt (vgl. dies. Zbl. **16**, 341; **18**, 295). *Zassenhaus* (Hamburg).

Maleev, A.: On isomorphic matrix representations of infinite groups. Rec. math. Moscou, N. s. **8**, 405—421 u. engl. Zusammenfassung 421—422 (1940) [Russisch].

Unter welchen Bedingungen läßt sich eine abstrakte Gruppe $\mathfrak{G}$ treu darstellen durch Matrizen gegebenen Grades n, deren Koeffizienten aus einem Körper der Charakteristik $\varkappa$ stammen? Eine erste Antwort auf diese Frage gibt der Satz: Eine Gruppe ist treu n, $\varkappa$-darstellbar, wenn jede aus endlich vielen Elementen der Gruppe erzeugte Untergruppe treu n, $\varkappa$-darstellbar ist. Zum Beweise wird jedem Element α eines Erzeugendensystemes eine n-reihige Polynommatrix $(x_{ik}^{(\alpha)})$ zugeordnet. Die Bedingungen für treue Darstellbarkeit laufen auf Relationen $P = 0$ und Ungleichungen $Q \neq 0$ hinaus, die durch Einsetzen von Elementen eines geeigneten Körpers der Charakteristik $\varkappa$ für die Polynomvariabeln simultan erfüllt werden sollen. (Es ist leicht einzusehen, daß jede treue Darstellung von $\mathfrak{G}$ mit Hilfe einer Polynommatrix auf eine Darstellung transformiert wird, in der alle Diagonalelemente sämtlicher Darstellungsmatrizen, ausgenommen die Einheitsmatrix, von 1 verschieden sind.) Der Satz folgt nun aus dem Lemma: Die Teilmenge $\mathfrak{S}$ eines Polynombereiches $\mathfrak{P}$ über dem Restklassenbereich der ganzen Zahlen modulo $\varkappa$, die sich aus einer Menge $\mathfrak{R}$ von Relationen und einer Menge $\mathfrak{U}$ von Ungleichungen zusammensetzt, ist dann (und nur dann) durch Einsetzen von Werten aus einem Körper der Charakteristik $\varkappa$ erfüllbar, wenn jedes endliche Teilsystem von $\mathfrak{S}$ erfüllbar ist. — Beim Beweise des Lemmas werde beachtet, daß die lokal erfüllbaren, $\mathfrak{S}$ enthaltenden Systeme im Sinne der Beziehung des Enthaltens eine teilweise geordnete, nach oben abgeschlossene Menge bilden. In ihr gibt es nach dem Maximalsatz der Algebra ein maximales System $\mathfrak{S}'$. Aus der Maximaleigenschaft des lokal erfüllbaren Systemes $\mathfrak{S}'$ folgt, daß die Menge $\mathfrak{R}'$ der Relationen ein Primideal von $\mathfrak{P}$ bildet und daß die Menge $\mathfrak{U}'$ der Ungleichungen die zu $\mathfrak{R}'$ komplementäre Menge in $\mathfrak{P}$ ist. Daher liefert der Übergang von den Variabeln $x_{ik}^{(\alpha)}$ zu den zugehörigen Restklassen in $\mathfrak{P}/\mathfrak{R}'$ die gesuchte Einsetzung. — Dasselbe Lemma ergibt, daß eine Gruppe eine reduzible bzw. vollreduzible treue n, $\varkappa$-Darstellung besitzt, sobald dasselbe für jede aus endlich vielen Elementen erzeugte Untergruppe gilt. Ferner ist eine treue n, $\varkappa$-Darstellung der ganzen Gruppe genau dann reduzibel bzw. vollreduzibel, wenn dasselbe für jeden lokalen Teil gilt. — Eine treu n, $\varkappa$-darstellbare Gruppe aus endlich vielen Erzeugenden läßt sich mit passendem r treu rn, $\varkappa$-darstellen in einer rein transzendenten Erweiterung des Primkörpers der Charakteristik $\varkappa$. Ob

schon eine algebraische Erweiterung des Primkörpers ausreicht, ist noch nicht entschieden. Wenn sich eine Gruppe aus endlich vielen Erzeugenden nicht treu n, 0-darstellen läßt, so läßt sie sich auch für fast alle Primzahlen p nicht treu n, p-darstellen. Aus dem Hilbertschen Basissatz folgt, daß eine treu darstellbare Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden nicht isomorph zu einer ihrer echten Faktorgruppen sein kann. Diese Gruppen umfassen alle Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden, für die bisher die Hopfsche Vermutung bewiesen worden ist. Am Schluß der Arbeit wird eine nicht treu darstellbare Gruppe aus 2 Erzeugenden angegeben. — Als Limesgruppe einer Folge von Gruppen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$ wird jede Gruppe $\mathfrak{G}$ bezeichnet, für die Homomorphismen $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_2, \ldots$ bestehen, bei denen jedes von 1 verschiedene Element aus $\mathfrak{G}$ nur endlich oft auf 1 abgebildet wird. Mit Sätzen der Eliminationstheorie wird bewiesen: Jede treu n, 0-darstellbare Gruppe aus endlich vielen Erzeugenden ist Limes einer Folge von treu n, p_i-darstellbaren endlichen Gruppen $\mathfrak{G}_i$ ($p_i > 0$). Über Darstellungen bei Charakteristik $p > 0$ ergibt sich, daß jede treu n, p-darstellbare Gruppe Limes einer Folge von treu n, p-darstellbaren endlichen Gruppen ist, ferner als Verallgemeinerung eines Satzes von Dickson, daß jede treu und zugleich irreduzibel darstellbare Gruppe endlich ist, also nach Dickson die Ordnung 1 hat. — Eine abelsche Gruppe ist genau dann n, 0-darstellbar, wenn für alle p die p-Sylowgruppe direktes Produkt von höchstens n quasizyklischen p-Gruppen ist. (Eine Gruppe heißt quasizyklisch, wenn endlichviele Elemente stets eine zyklische Untergruppe erzeugen.) Eine abelsche Gruppe ist genau dann n, $\varkappa$-darstellbar ($\varkappa > 0$), wenn der Exponent der $\varkappa$-Sylowgruppe Teiler von $\varkappa^s$ ist und für $p \neq \varkappa$ die p-Sylowgruppen jeweils direktes Produkt von höchstens $n - s$ quasizyklischen p-Gruppen sind (Beweis nicht ausgeführt). Nach Schur und Burnside sind periodische Gruppen (= Gruppen aus lauter Elementen endlicher Ordnung) nur dann treu darstellbar, wenn sie lokal endlich sind. Als Ergänzung dazu wird gezeigt, daß eine Gruppe genau dann n, 0-darstellbar ist (mit passendem n!), wenn sie durch Erweiterung des direkten Produktes endlich vieler quasizyklischer periodischer Gruppen mit einer endlichen Faktorgruppe entsteht.

Zassenhaus (Hamburg).

● **Littlewood, Dudley E.: The theory of group characters and matrix representations of groups.** Oxford: Clarendon press a. London: Oxford univ. press 1940. VIII, 292 pag. 20/-.

Tovbin, A. V.: Sur l'existence du centre des groupes infinis et finis. C. R. Acad. Sci. URSS, N s. **31**, 198 (1941).

Verf. beweist als Satz 1 die triviale Tatsache: „Wenn $\mathfrak{B}_1$ ein Normalteiler der Gruppe $\mathfrak{B}$ und $[\mathfrak{B}:\mathfrak{B}_1]$ endlich ist, wenn ferner $\mathfrak{B}_1$ ein von 1 verschiedenes Zentrum hat, dessen Ordnung durch die Primzahl p teilbar ist, so enthält $\mathfrak{B}$ einen abelschen Normalteiler, der eine p-Gruppe ist." Dieser „Satz" gilt sogar ohne die vom Verf. eingeführte Beschränkung, daß $[\mathfrak{B}:\mathfrak{B}_1]$ endlich sein müsse; denn das Zentrum eines Normalteilers ist, als charakteristisch in diesem, selbstverständlich Normalteiler der ganzen Gruppe. Ebenfalls ganz naheliegend ist die als Satz 2 bezeichnete Folgerung aus Satz 1. „Wenn unter den Voraussetzungen von Satz 1 der Index $[\mathfrak{B}:\mathfrak{B}_1]$ eine Potenz von p ist, so ist die Ordnung des Zentrums von $\mathfrak{B}$ durch p teilbar." Schließlich spezialisiert Verf. $\mathfrak{B}$ auf eine p-Gruppe und erhält: „Wenn die p-Gruppe $\mathfrak{B}$ eine Untergruppe $\mathfrak{B}_1$ von endlichem Index in $\mathfrak{B}$ enthält und das Zentrum von $\mathfrak{B}_1 \neq 1$ ist, so ist auch das Zentrum von $\mathfrak{B}$ von 1 verschieden."

Grün (Berlin).

Fouxe-Rabinovitch, D. I.: Über die Automorphismengruppen der freien Produkte. 1. Rec. math. Moscou, N. s. **8**, 265—276 u. dtsch. Zusammenfassung 276 (1940) [Russisch].

Fouxe-Rabinovitch, D. I.: Über die Automorphismengruppen der freien Produkte. 2. Rec. math. Moscou, N. s. **9**, 183—220 u. dtsch. Zusammenfassung 220 (1941) [Russisch].

Für die Automorphismengruppe des freien Produktes $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 * \mathfrak{A}_2 * \cdots * \mathfrak{A}_n$ von endlich vielen frei unzerlegbaren Gruppen werden Erzeugende und ein vollständiges

System definierender Relationen angegeben. Nach geeigneter Umnumerierung mögen $\mathfrak{A}_1 = (a_1)$, $\mathfrak{A}_2 = (a_2)$, ..., $\mathfrak{A}_m = (a_m)$ unendliche zyklische Gruppen, die übrigen freien Faktoren dagegen nicht isomorph zur unendlichen zyklischen Gruppe sein. Jede vorhandene Isomorphiebeziehung $\mathfrak{A}_i \cong \mathfrak{A}_j$, $i \neq j$ läßt sich derart durch einen Isomorphismus σ_{ij} zwischen $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_j$ verwirklichen, daß stets $\sigma_{ij} \cdot \sigma_{jk} = \sigma_{ik}$ gilt. Jeder Automorphismus $\overline{\varphi_i}$ von $\mathfrak{A}_i$ läßt sich eindeutig zu einem Automorphismus φ_i von $\mathfrak{G}$ ergänzen durch die Vorschrift, daß jeder von $\mathfrak{A}_i$ verschiedene freie Faktor elementweise festgelassen werden soll. Alle φ_i bilden eine Gruppe Φ_i von Automorphismen, die zu der Gruppe aller Automorphismen von $\mathfrak{A}_i$ isomorph ist. Ferner läßt sich jedes Isomorphismenpaar σ_{ij}, $\sigma_{ji} (i < j)$ eindeutig zu einem Automorphismus ω_{ij} von $\mathfrak{G}$ ergänzen durch die Vorschrift, daß die von $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}_j$ verschiedenen freien Faktoren elementweise festgelassen werden sollen. Alle ω_{ij} erzeugen eine Gruppe Ω von Automorphismen, die isomorph ist zu dem direkten Produkt endlich vieler symmetrischer Permutationsgruppen. Alle Automorphismen $\alpha_{ij}^{(\lambda)} (i \neq j,\ j > m)$ bzw. $\beta_{ij}^{(\lambda)}$, $\gamma_{ij}^{(\lambda)} (i \neq j,\ j \leqq m)$, die alle von $\mathfrak{A}_j$ verschiedenen freien Faktoren elementweise festlassen und die Elemente aus $\mathfrak{A}_j$ mit dem festen Element $a_i^{(\lambda)}$ aus $\mathfrak{A}_i$ transformieren bzw. von rechts oder von links her multiplizieren, erzeugen bei festgehaltenen Indices i, j Gruppen $\mathfrak{A}_{ij}$, $\mathfrak{B}_{ij}$, $\mathfrak{C}_{ij}$, die jeweils zu $\mathfrak{A}_i$ isomorph sind. Der erste Hauptsatz der Arbeit lautet: Die Automorphismengruppe Γ von $\mathfrak{G}$ wird erzeugt von allen Gruppen Φ_i, Ω, $\mathfrak{A}_{ij}$, $\mathfrak{B}_{ij}$, $\mathfrak{C}_{ij}$. Im zweiten Hauptsatz wird die Liste der definierenden Relationen zwischen den im ersten Hauptsatz erhaltenen Erzeugenden von Γ angegeben. Der Beweis der beiden Sätze stützt sich auf den Satz von Kurosch (dies. Zbl. **9**, 10), daß jeder Automorphismus von $\mathfrak{G}$ jeden freien Faktor, der nicht isomorph zur unendlichen zyklischen Gruppe ist, auf eine Gruppe abbildet, die durch Transformieren mit einem von dem Faktor abhängigen Element der ganzen Gruppe entsteht, ferner auf die grundlegende Arbeit von Nielsen [Math. Ann. **91**, 169—209 (1924)], in der dieselben beiden Sätze bereits für den Fall $m = n$ bewiesen sind. Teil I der Arbeit behandelt den Fall $m = 0$, Teil II den allgemeinen Fall. Die tabellenmäßige Anordnung der gruppentheoretischen Rechnungen ist bemerkenswert. *Zassenhaus* (Hamburg).

Thrall, Robert M.: A note on a theorem by Witt. Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 303—308 (1941).

Sei F die freie Gruppe mit n Erzeugenden und F^c das c-te Glied der absteigenden Zentralreihe von F. Sei H_k der von den k-ten Potenzen der Elemente von F erzeugte Normalteiler von F und $F_k = F/H_k$, $G_{k,c} = F_k/F_k^{c+1}$. Nach E. Witt (dies. Zbl. **16**, 244) ist $Q^c = F^c/F^{c+1}$ eine freie Abelsche Gruppe mit $\psi_c(n) = 1/c \sum \mu(c/d) n^d$ Erzeugenden (die Summe über alle Teiler d von c erstreckt, μ = Möbiusfunktion). Hiervon ausgehend wird gezeigt, daß für die Primzahl $p > c$ und $q = p^c$ das Zentrum von $G_{q,c}$ die Ordnung q^N mit $N = \psi_c(n)$ hat. Sind die Primteiler von k alle größer als c, so gilt dasselbe für das Zentrum von $G_{k,c}$. Die charakteristischen Untergruppen von $G_{p,c}$, die im Zentrum liegen, werden aufgestellt. Zu diesem Zweck bedeute M_c den Tensorraum vom Rang c über $GF[p]$. Ein Homomorphismus bildet M_c auf das Zentrum von $G_{p,c}$ ab, und die Zerfällungstheorie des Tensorraumes unter der vollen linearen Gruppe mod p liefert die charakteristischen Untergruppen. Dies wird ausgeführt für $G_{p,3}$ und $G_{p,4}$ mit $n = 3$ bzw. $n = 4$. *J. J. Burckhardt* (Zürich).

Brahana, H. R.: Finite metabelian groups and Plücker line-coördinates. Amer. J. Math. **62**, 365—379 (1940).

Es handelt sich um die Bestimmung aller endlichen metabelschen Gruppen G, deren sämtliche Elemente die Ordnung p haben und deren Zentrum C gleichzeitig Kommutatorgruppe ist. Der Kommutator (U, V) von zwei Elementen von G hängt nur von den Restklassen von U und V in G/C ab. Sind $U_1, \ldots, U_{k+1}$ Repräsentanten der Erzeugenden von G/C und ist $(U_i, U_j) = r_{ij}$, so ist

$$(U, V) = (U_1^{x_1} \ldots U_{k+1}^{x_{k+1}}, V_1^{y_1} \ldots V_{k+1}^{y_{k+1}}) = \prod_{i<j} r_{ij}^{x_i y_j - x_j y_i}$$

Bei gegebenem k gibt es eine „Maximalgruppe", die man erhält, indem man alle r_{ij} als unabhängige Erzeugende von C nimmt; die so erhaltene Gruppe C von der Ordnung $p^{\binom{k+1}{2}}$ heiße K. Alle anderen Gruppen G der betrachteten Art sind Faktorgruppen der Maximalgruppe nach Untergruppen von K. Schreibt man die Elemente von K in der Form $\Pi r_{ij}^{z_{ij}}$, so sind diese Untergruppen lineare Teilräume im Raume der z_{ij}. Deutet man die x_i und y_j als projektive Koordinaten in einem projektiven Raum S_k, ebenso die z_{ij} als projektive Koordinaten in einem endlichen projektiven Raum R der Dimension $\binom{k+1}{2} - 1$, so ist in R eine algebraische Mannigfaltigkeit S ausgezeichnet, bestehend aus den Punkten z, deren Koordinaten die Plückerschen Linienkoordinaten $z_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$ einer Geraden in S_k sind. Gehört ein solcher Punkt zum linearen Teilraum, der die Gruppe G bestimmt, so gibt es in G eine abelsche Untergruppe der Ordnung p^{c+2}, wo p^c die Ordnung von C ist. In dieser Weise kann man aus der Lage des linearen Teilraums in bezug auf S alle Eigenschaften der Gruppe G ablesen. Das vorgelegte gruppentheoretische Problem kommt auf die Klassifizierung aller linearen Teilräume von R in bezug auf die Transformationsgruppe, die von der projektiven Gruppe des S_k induziert wird, hinaus. Diese Klassifizierung wird für $k \leqq 3$ vollständig durchgeführt. *van der Waerden* (Leipzig).

Iwasawa, Kenkiti: Über die Einfachheit der speziellen projektiven Gruppen. Proc. Imp. Acad. Jap. **17**, 57—59 (1941).

Die Gruppe aller quadratischen Matrizen n-ten Grades mit Koeffizienten aus einem Körper k und von 0 verschiedener Determinante heißt die allgemeine lineare Gruppe $GL(n, k)$. Sie enthält einen Normalteiler, bestehend aus allen Matrizen mit der Determinante 1, welcher die spezielle lineare Gruppe $SL(n, k)$ genannt wird. $SL(n, k)$ enthält ein Zentrum Z, und die Faktorgruppe $SL(n, k)/Z$ wird als spezielle projektive Gruppe $PSL(n, k)$ bezeichnet. Verf. beweist allgemein, daß $PSL(n, k)$ für $n > 1$ einfach ist, ausgenommen die Fälle $n = 2$, $k = GF(2)$ und $n = 2$, $k = GF(3)$. Bisher war dies nur mit der Einschränkung bewiesen, daß für einen unendlichen Körper k die Charakteristik $+2$ oder k vollkommen sein müsse. — Zunächst zeigt Verf.: Die Gruppe $SL(n, k)$ ist ihre eigene Kommutatorgruppe außer, wenn $n = 2$, $k = GF(2)$ oder $n = 2$, $k = GF(3)$ ist. Der Beweis erfolgt, indem nachgewiesen wird, daß die Erzeugenden von $SL(n, k)$ selbst Kommutatoren in $SL(n, k)$ sind. Dann wird die Gruppe $PSL(n, k)$ als Permutationsgruppe von Punkten des projektiven $(n-1)$-dimensionalen Raumes über k aufgefaßt und gezeigt, daß diese Permutationsgruppe zweifach transitiv ist. Daraus kann Verf. auf einfache Weise folgern: Wenn $PSL(n, k)$ einen Normalteiler enthält, so ist seine Faktorgruppe abelsch. Das ist aber, abgesehen von den Fällen $n = 2$, $k = GF(2)$ und $n = 2$, $k = GF(3)$ nach dem zuerst bewiesenen Satz unmöglich. Also ist $PSL(n, k)$ einfach. *Grün* (Berlin).

Kawada, Yukiyosi: Über die Überlagerungsgruppe und die stetige projektive Darstellung topologischer Gruppen. Jap. J. Math. **17**, 139—164 (1940).

Im 1. Teil der Arbeit entwickelt Verf. die Theorie der Überlagerungsgruppe für die zusammenhängenden und im kleinen zusammenhängenden topologischen Gruppen, entsprechend der von O. Schreier [Abh. math. Semin. Hamburg Univ. **4**, 15—32 (1925); **5**, 233—244 (1927)] für die zusammenhängenden, im kleinen zusammenhängenden und im kleinen einfach-zusammenhängenden topologischen Gruppen entwickelten Theorie. Der Ansatz zur Definition der Überlagerungsgruppe ist einer Arbeit von L. Vietoris entnommen [Math. Ann. **97**, 454—472 (1927)]. — Im 2. Teil wird eine allgemeine Theorie der stetigen projektiven Darstellungen topologischer Gruppen begründet. Insbesondere wird mittels einer Idee von I. Schur [J. reine angew. Math. **127**, 20—50 (1904)] ein Satz bewiesen, welcher die Untersuchung jeder stetigen projektiven Darstellung einer topologischen Gruppe G auf die einer stetigen ganzen Darstellung einer endlich-vielblättrigen Überlagerungsgruppe von G reduziert. Ferner wird der „Mul-

tiplikator", d. h. die Gruppe der Faktorensysteme, in engen Zusammenhang mit der Fundamentalgruppe gebracht. Über den Multiplikator der kompakten, metrischen, zusammenhängenden und im kleinen zusammenhängenden Gruppen gelten viel einfachere Sätze als bei diskreten. *Nöbeling* (Erlangen).

Post, Emil L.: Polyadic groups. Trans. Amer. Math. Soc. **48**, 208—350 (1940).

G^* sei eine Gruppe, G_0 Normalteiler von G^* und G^*/G_0 zyklisch von der Ordnung $m-1$. Die erzeugende Restklasse G von G^*/G_0 hat folgende Eigenschaften: I. In G ist eine m-adische Verknüpfung $a_1 a_2 \cdots a_m = a$ definiert. II. Die Gleichung $a_1 a_2 \cdots a_m = a$ ist für jedes a_i eindeutig lösbar. III. $(a_1 \cdots a_m)\, a_{m+1} \cdots a_{2m-1} = a_1 (a_2 \cdots a_{m+1}) \cdots a_{2m-1} = a_1 \cdots (a_m \cdots a_{2m-1})$. Jede Menge G, die I. bis III. erfüllt, heißt m-Gruppe. Setzt man in einer m-Gruppe G $a_1 \cdots a_i = b_1 \cdots b_j$, wenn es Elemente $s_1, \ldots, s_h$ und $t_1, \ldots, t_k$ gibt mit $s_1 \cdots s_h a_1 \cdots a_i t_1 \cdots t_k = s_1 \cdots s_h b_1 \cdots b_j t_1 \cdots t_k$, so wird dadurch die Menge der i-ade von G zu einer Gruppe G^*, die Menge der $(m-1)$-ade zu einem Normalteiler G_0 von G^*, und G ist erzeugende Restklasse der zyklischen Gruppe $(m-1)$-ter Ordnung G^*/G_0. Obwohl also die Theorie der polyadischen Gruppen in der gewöhnlichen Gruppentheorie enthalten ist, läßt sich die polyadische Theorie selbständig entwickeln, und es ist überraschend, wie weitgehend parallel beide Theorien gehen. Unter den Begriffen, die Verf. ausführlich für endliche polyadische Gruppen entwickelt, seien genannt: Untergruppen, Isomorphismen, zyklische Gruppen, freie Gruppen, Worte, Kommutatorgruppe, Abelsche Gruppen, Zentrum, Frobeniusscher Satz, Sylow-Gruppen; Substitutionsgruppen, Darstellungen, Transitivität, Primitivität, Holomorph; lineare Gruppen, Kollineationen, Hermitesche Invarianten, kanonische Form. *P. Lorenzen* (Bonn).

Verbände. Ringe. Körper:

Nakamura, Masahiro: Closure in general lattices. Proc. Imp. Acad. Jap. **17**, 5—6 (1941).

Nach Kuratowski wird in einer Menge $\mathfrak{M}$ eine abstrakte Topologie definiert durch einen $\cap$-vollständigen Verband von Untermengen von $\mathfrak{M}$. Verf. betrachtet $\cap$-vollständige Unterverbände eines beliebigen Verbandes. Diese entsprechen trivialerweise eineindeutig den Bildungen „abgeschlossener Hüllen" und bilden ihrerseits einen Verband. *P. Lorenzen* (Bonn).

Dilworth, R. P.: Ideals in Birkhoff lattices. Trans. Amer. Math. Soc. **49**, 325—353 (1941).

$\mathfrak{S}$ sei ein Verband. Ein Teilverband $\mathfrak{a}$ heißt ein Ideal, wenn $\mathfrak{a}$ mit a alle $x \supset a$ enthält. Die Vereinigung $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ zweier Ideale enthält alle $x \supset a \cup b$, $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$; $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ enthält alle $y \supset a \cap b$. Die Ideale bilden einen Verband $\mathfrak{L}$, der den zu $\mathfrak{S}$ isomorphen Verband aller Hauptideale (a) enthält. Gilt $a \supset b$, aber für kein x $a \supset x \supset b$, so schreibt man $a > b$ („a covers b"). Mit Wohlordnung wird folgende Verallgemeinerung des Stoneschen Satzes über die Existenz von Primidealen in einer Booleschen Algebra bewiesen: $\mathfrak{S}$ sei beliebig. Ist das Ideal $\mathfrak{b} \supset (a)$ und $\mathfrak{b} \neq (a)$, so existiert ein Ideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{p} > (a)$. — Ein Element a in $\mathfrak{S}$ erfüllt die Birkhoffbedingung $B\,1$, wenn aus $b > a$, $c \supset a$, $c \not\supset b$ folgt, daß $b \cup c > c$ ist. $B\,2$ ist die dazu duale Bedingung. $\mathfrak{S}$ heißt ein Birkhoffscher Verband, wenn jedes Element von $\mathfrak{S}$, als Hauptideal aufgefaßt, im Idealverband $\mathfrak{L}$ die Bedingung $B\,1$ erfüllt (dies ist weniger, als wenn jedes Element von $\mathfrak{L}$ $B\,1$ erfüllt). Alle Ideale aus $\mathfrak{L}$, die zwischen (a) und der Vereinigung aller Ideale $\mathfrak{b} > (a)$ liegen, bilden einen Verband $\mathfrak{L}_a$. Ist $\mathfrak{S}$ ein Birkhoffscher Verband, in dem jedes Element als Durchschnitt irreduzibler Elemente darstellbar ist (a heißt irreduzibel, wenn aus $a = b \cap c$ stets $b = a$ oder $c = a$ folgt), so ist $\mathfrak{L}_a$ dann und nur dann archimedisch (d. h. sowohl die aufsteigenden wie die absteigenden Ketten in $\mathfrak{L}_a$ sind endlich), wenn die Anzahl der Komponenten in den irreduziblen Zerlegungen von a beschränkt sind. Hat $\mathfrak{L}_a$ die Länge k, so hat a eine unverkürzbare Zerlegung in k irreduzible Elemente. Für modulare Verbände ergeben diese Überlegungen einen neuen Beweis des Kurosch-

Oreschen Satzes über die Längengleichheit und die Austauschmöglichkeit zweier unverkürzbarer Durchschnittsdarstellungen eines Elementes. — Als Bedingung E_5 von MacLane wird die Forderung bezeichnet: Ist $a \supset b \supset a \cap c$ und $c \neq a \cap c$, so existiert ein $c_1 \neq a \cap c$, so daß $c \supset c_1 \supset a \cap c$ und $b = a \cap (b \cup c_1)$ ist. Es gibt Verbände, die Birkhoffsche Verbände sind, ohne E_5 zu erfüllen. Gibt es höchstens endlich viele Ideale $\mathfrak{p} > (a)$ zu jedem Element a aus $\mathfrak{S}$, so sind äquivalent: (1) E_5 gilt in $\mathfrak{S}$, (2) $\mathfrak{S}$ ist ein Birkhoffscher Verband, (3) $B\,1$ gilt im Idealverband $\mathfrak{L}$. — Die beiden Hauptsätze über Zerlegung in irreduzible Elemente sind: I. $\mathfrak{S}$ erfülle die aufsteigende Kettenbedingung. Jedes Element von $\mathfrak{S}$ ist dann und nur dann eindeutig als unverkürzbarer Durchschnitt von irreduziblen Elementen darstellbar, wenn $\mathfrak{S}$ E_5 erfüllt und A: Aus $a \cup b \supset x \supset a \cap b$, $a \cap x = b \cap x = a \cap b$ folgt $x = a \cap b$. Statt E_5 und A kann auch gefordert werden, daß $\mathfrak{S}$ ein Birkhoffscher Verband und $\mathfrak{L}_a$ für jedes a eine Boolesche Algebra ist. II. $\mathfrak{S}$ erfülle die aufsteigende Kettenbedingung. Die Anzahl der Komponenten in den unverkürzbaren Durchschnittsdarstellungen eines Elementes ist dann und nur dann dieselbe, wenn $\mathfrak{L}_a$ stets modular ist. *G. Köthe* (Gießen).

Dieudonné, Jean: Sur les systèmes hypercomplexes. C. R. Acad. Sci., Paris **211**, 172—174 (1940).

Es werden Ringe mit Maximal- und Minimalbedingung untersucht. Ein solcher Ring $\mathfrak{o}$ heißt linksseitig fasteinfach (quasi-simple à gauche), wenn er direkte Summe von minimalen, untereinander isomorphen Linksidealen ist. Die Summe der nilpotenten unter diesen ist ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{a}'$, und man hat $\mathfrak{o} = \mathfrak{L} + \mathfrak{a}'$, wobei $\mathfrak{L}$ ein einfaches System, also ein voller Matrixring über einem Schiefkörper K ist, während $\mathfrak{a}'^2 = 0$. Ist $\mathfrak{a}' \neq 0$, so ist jedes minimale Rechtsideal von $\mathfrak{o}$ nilpotent, also in $\mathfrak{a}'$ enthalten. Die Multiplikationstafel eines solchen fasteinfachen Ringes läßt sich auf eine übersichtliche Gestalt bringen, indem man für isomorphe Ideale entsprechende Basen wählt. — Beliebige Ringe werden nun, soweit möglich, aus links- und rechtsseitig Fasteinfachen aufgebaut. Ist l ein minimales Linksideal von $\mathfrak{o}$, so ist die Summe aller zu l isomorphen Linksideale ein linksseitig fasteinfaches System; es gibt endlichviele solche Systeme $\mathfrak{a}_i$, die nicht nilpotent sind, und ihre Summe ist direkt. Zerlegt man wie vorhin: $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{L}_i + \mathfrak{a}_i'$, und analog für die rechtsseitig fasteinfachen Systeme $\mathfrak{b}_j = \mathfrak{R}_j + \mathfrak{b}_j'$, so ist entweder $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}_j = \mathfrak{L}_i = \mathfrak{R}_j$ einfach, oder der Durchschnitt von $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ ist ein nilpotentes zweiseitiges Ideal $\mathfrak{d}_{ij} = \mathfrak{a}_i' \cap \mathfrak{b}_j'$. Für jedes i ist $\mathfrak{a}_i'$ die direkte Summe aller $\mathfrak{d}_{ij}$ und eines Linksideals $\mathfrak{a}_{i0}'$; ebenso $\mathfrak{b}_j' = \sum \mathfrak{d}_{ij} + \mathfrak{b}_{j0}'$. Schließlich hat man für $\mathfrak{o}$ die Zerlegung

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{S}_1 = (\sum \mathfrak{L}_i + \sum \mathfrak{R}_j) + (\sum\sum \mathfrak{d}_{ij} + \sum \mathfrak{a}_{i0}' + \sum \mathfrak{b}_{j0}' + \mathfrak{k}),$$

wobei $\mathfrak{P}_1$ ein halbeinfacher Ring, $\mathfrak{S}_1$ ein zweiseitiges Ideal und $\mathfrak{k}$ ein Unterring von weniger übersichtlicher Struktur ist. In $\mathfrak{S}_1$ ist ein nilpotentes zweiseitiges Ideal $\mathfrak{U}_1$ ausgezeichnet, die Summe aller nilpotenten minimalen Links- und Rechtsideale von $\mathfrak{o}$. *van der Waerden* (Leipzig).

Matusita, Kameo: Über die Idealtheorie im Integritätsbereich mit dem eingeschränkten Vielfachenkettensatz. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. **23**, 8—12 (1941).

Bekanntlich gilt für einen ganz abgeschlossenen Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ dann und nur dann der Z.P.I. (Satz von der eindeutigen Primidealfaktorzerlegung aller Ideale), wenn $\mathfrak{J}$ 1. der eingeschränkten Minimalbedingung (dem eingeschränkten Vielfachenkettensatz) und 2. der Maximalbedingung (dem Teilerkettensatz) genügt. Y. Akizuki hat nun bewiesen, daß die Maximalbedingung aus der eingeschränkten Minimalbedingung folgt, daß also die ausdrückliche Formulierung von Voraussetzung 2 neben Voraussetzung 1 überflüssig ist (vgl. dies. Zbl. **12**, 245). Darüber hinaus zeigt Verf., daß die Gültigkeit des Z.P.I. für $\mathfrak{J}$ aus der eingeschränkten Minimalbedingung erschlossen werden kann, ohne daß zunächst die Gültigkeit der Maximalbedingung in vollem Umfange bewiesen werden muß. In der Tat braucht man für die üblichen Schlüsse nur zu wissen, daß einerseits in $\mathfrak{J}$ jedes Ideal das Produkt von endlich vielen, paarweise

teilerfremden Primäridealen darstellt, und daß andererseits in $\mathfrak{Z}$ jedes Primärideal eine endliche Potenz seines zugehörigen Primideals enthält. Die Richtigkeit dieser beiden letzten Tatsachen kann aber leicht unmittelbar aus der eingeschränkten Minimalbedingung abgeleitet werden. *Krull* (Bonn).

Mori, Shinziro: Über die Produktzerlegung der Hauptideale. 4. J. Sci. Hirosima Univ. A **11**, 7—14 (1941).

Die früheren Untersuchungen des Verf. über die Produktzerlegung der Hauptideale in kommutativen Ringen (dies. Zbl. **18**, 200; **24**, 9; **23**, 199) werden ergänzt und abgeschlossen durch die Aufstellung von notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß in einem Ringe ohne Einheitselement jedes Hauptideal (nicht unbedingt eindeutig) als Produkt von endlich vielen Primidealen dargestellt werden kann. *Krull.*

Brown, D. M.: Arithmetics of rational generalized quaternion algebras. Bull. Amer. Math. Soc. **46**, 899—908 (1940).

Für eine Quaternionenalgebra mit rationalem Zentrum soll eine Minimalbasis, d. h. eine Basis einer maximalen Ordnung (arithmetic), bestimmt werden. Diese Aufgabe ist leicht zu lösen, wenn man die ternären quadratischen Stammformen zur Verfügung hat, deren Diskriminante (im Sinne des Ref.; dies. Zbl. **17**, 196) gleich der Grundzahl der betreffenden Algebra ist. Denn dann kann man eine Basis für jeden möglichen Typus von maximalen Ordnungen leicht hinschreiben [vgl. H. Brandt, Der Kompositionsbegriff bei den quaternären quadratischen Formen; Math. Ann. **91**, 300 bis 315, insbes. 309 (1924)]. Benutzt man aber wie der Verf. die Formen nicht, so geht man von irgendeiner Ordnung aus und erweitert sie so lange, bis die entstehende Ordnung maximal oder was dasselbe ist, die Normenform Stammform wird. Verf. benutzt als Ausgangsordnung eine solche, deren Normenform nur rein quadratische Glieder mit Koeffizienten $1, a, b, ab$ hat, wobei a und b quadratfrei sind, und schließt sich dabei unter anderm an Albert (dies. Zbl. **8**, 293), Latimer (dies. Zbl. **13**, 147; **16**, 52; **17**, 150) und Hull (dies. Zbl. **14**, 249) an. Er gibt einige Vereinfachungen zu den früheren Untersuchungen. *H. Brandt* (Halle).

Arf, Cahit: Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2. (Tl. 1.) J. reine angew. Math. **183**, 148—167 (1941).

Zweck dieser Arbeit ist, die Methoden und Ergebnisse von Witt [J. reine angew. Math. **176**, 31—44 (1936); dies. Zbl. **15**, 57] auf quadratische Formen über einem Körper k der Charakteristik 2 zu übertragen. Jede solche Form läßt sich in die Gestalt

$$F = \sum_{F} f_i + F^* = \sum_{1}^{n} (a_i x_i^2 + b_i x_i y_i + c_i y_i^2) + \sum_{1}^{n^*} d_j z_j^2 \tag{1}$$

mit $b_i \neq 0$ transformieren. F^* heißt der quasilineare Teil von F; er ist bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt, und man kann annehmen, daß er die Null nicht darstellt, da F sich sonst als Form in weniger als $m = 2n + n^*$ Variabeln darstellen läßt. Fehlt der Teil F^*, so heißt F vollregulär. — Der Form F ist eine Cliffordsche Algebra $C(F)$ vom Range 2^m invariant zugeordnet. Ist F nach (1) zerlegt, so ist $C(F)$ direktes Produkt von Algebren $C(f_i)$ und $k(\sqrt{d_j})$, die den einzelnen Summanden rechter Hand zugeordnet sind. Die $C(f_i)$ sind normale einfache Algebren vom Range 4, erzeugt durch zwei Elemente u, v mit den Relationen $u^2 = a_i$, $uv + vu = b_i$, $v^2 = c_i$. Der Körper $k(\omega)$, definiert durch $\omega^2 + \omega = a_i c_i b_i^{-2}$, ist Zerfällungskörper von $C(f_i)$, aber auch Zerfällungskörper der binären Form f_i und als solcher eine Invariante von f_i. Dieser Zerfällungskörper und die Algebra $C(f_i)$ bilden ein volles Invariantensystem der Form f_i: zwei binäre vollreguläre Formen sind äquivalent, wenn sie in diesen zwei Invarianten übereinstimmen. Das Körperelement $\Delta(f_i) = a_i c_i b_i^{-2}$ ist nicht eindeutig bestimmt, sondern nur modulo $\wp k$, d. h. bis auf Zusatzglieder der Form $g^2 + g$. Die Summe $\Delta(F) = \sum \Delta(f_i)$ ist (mod $\wp k$) eine Invariante von F. Damit f_i die Null darstellt und somit $f_i \cong xy$ ist, ist $\Delta(f) \equiv 0$ (mod $\wp k$) notwendig und hinreichend. Wenn F die Null darstellt, ist sie in die Gestalt $\sum x_i y_i + f$ transformierbar, wo f die Null nicht mehr

darstellt und bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist. Für ternäre Formen $F=f_1+dz^2 = (ax^2+bxy+cy^2)+dz^2$ bilden die Klasse dg^2 und die Algebra $C(df_1)$ ein vollständiges Invariantensystem. Eine solche Form stellt die Null dann und nur dann dar, wenn die Algebra $C(df_1)$ zerfällt. Eine quaternäre Form $F=f_1+d_1z_1^2+d_2z_2^2$ stellt die Null dann und nur dann dar, wenn die Algebra $C(d_1f_1)\cdot k\left(\sqrt{d_1d_2}\right)$ zerfällt. Eine vollreguläre quaternäre Form F stellt die Null dann und nur dann dar, wenn die Algebra $C(F)$ in dem durch $\omega^2+\omega=\Delta(F)$ definierten Körper $k(\omega)$ zerfällt. Wird über den Körper k die Voraussetzung gemacht, daß die Klassen der normalen einfachen Algebren vom Grade 2 über k eine Gruppe bilden, so stellt jede Form von einem der beiden Typen $F=f_1+f_2+f_3$ und $F=f_1+f_2+dz^2$ die Null dar. Die Variabelnzahl $m=2n$, die Algebra $C(F)$ und die Klasse $\Delta(F)$ bilden dann ein volles Invariantensystem für die vollregulären quadratischen Formen F. *van der Waerden.*

Loonstra, F.: Folgen und Reihen in bewerteten Körpern. (1. Mitt.) 2. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **44**, 397—408 (1941).

Im Anschluß an seine erste Veröffentlichung (dies. Zbl. **24**, 291) überträgt Verf. eine Anzahl bekannter elementarer Reihensätze auf den Fall, daß die Reihenglieder nicht speziell dem Körper aller komplexen Zahlen, sondern einem beliebigen, perfekt bewerteten Körper angehören (Wurzel- und Quotientenkriterium für Reihenkonvergenz, Bestimmung des Konvergenzradius einer Potenzreihe u. dgl.). Nennenswerte Abweichungen von den üblichen Schlüssen kommen dabei kaum vor. Nur die als Beispiel angegebene Bestimmung des Konvergenzradius der Exponential- sowie der Sinus- und der Cosinusreihe erfordert im Falle einer p-adischen Bewertung eine kleine Sonderüberlegung. *Krull* (Bonn).

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Rédei, L.: Über den Euklidischen Algorithmus in reellquadratischen Zahlkörpern. J. reine angew. Math. **183**, 183—192 (1941).

In einem absolut-quadratischen Zahlkörper K mit der Diskriminante D gilt bekanntlich der Euklidische Algorithmus, kurz E.A., wenn es zu jedem Paar α, β $(\neq 0)$ von ganzen Körperzahlen eine dritte Körperzahl γ mit $|N(\alpha-\beta\gamma)|<|N(\beta)|$ gibt, wobei N die Norm bezeichnet. Es war bekannt, daß der E.A. für $D=-11,-8,-7,-4,-3,5,8,12,13,17,21,24,28,29,33,37,41,44,57,76$, aber für keine weiteren $D\not\equiv 1 \pmod 4$ gilt, ferner daß der E.A. für zusammengesetztes $D\equiv 1 \pmod 4$ nur dann gelten kann, wenn $D=pq$, wo p und q Primzahlen sind und $p\equiv q\equiv 3 \pmod 4$. Kürzlich hat Schuster [Mh. Math. Phys. **47**, 117—127 (1938); dies. Zbl. **20**, 101] gezeigt, daß der E.A. im Falle $D=3q\equiv 1 \pmod 4$ nur für $D=21$, 33 und 57 gilt. Gleichzeitig hat Verf. in einer ungarischen Arbeit (s. dies. Zbl. **23**, 103) den Satz bewiesen, daß es keine durch 3 unteilbaren ungeraden zusammengesetzten D mit E.A. gibt, womit also alle zusammengesetzten D erledigt sind. Dieser Satz wird nun noch einmal bewiesen und deutsch veröffentlicht. Durch Vermeiden des Satzes von Hasse über die Verteilung der quadratischen Reste hat Verf. ferner den Beweis elementar gemacht, zeigt aber dann, inwieweit der Beweis durch die Anwendung dieses Satzes verkürzt werden kann. *Bergström* (Uppsala).

Taylor, P. R.: The functional equation for Epstein's zeta-function. Quart. J. Math., Oxford Ser. **11**, 177—182 (1940).

Es handelt sich um die Funktion

$$f(s,A,B,C)=\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}{}'(Am^2+Bmn+Cn^2)^{-s}.$$

Unter der Voraussetzung, daß die quadratische Form positiv-definit ist, leitet Verf. aus dieser Reihe mittels eines bestimmten Integrals und der Mellinschen Inversionsformel eine Darstellung ab (abgesehen von Faktoren) in der Form eines Integrals über den Weg $c-i\infty\ldots c+i\infty$, $c>1$, parallel zur imaginären Achse. Der Integrand

enthält $\zeta(s)$ und eine Gausssche hypergeometrische Funktion. Die Funktionalgleichung für $\zeta(s)$ und einfache Eigenschaften der hypergeometrischen Funktion ergeben die Funktionalgleichung für $f(s, A, B, C)$. Verf. referiert zu Beginn über die bisher bekannten Beweise dieser Funktionalgleichung. H. Kober [Math. Z. **39**, 609—624 (1934); dies. Zbl. **10**, 211] hat f als Doppelreihe dargestellt. Verf. zeigt, wie aus seiner Formel auch die Kobersche Reihe sich ergibt. Ohne Beweis ist angegeben, daß der durchgeführte Beweis die Funktionalgleichung liefert, „wenn A, B, C gewisse komplexe Werte haben", und es wird vermutet, daß es solche Werte sind, für die der reelle Teil der quadratischen Form positiv-definit ist. Schließlich gibt Verf. an, daß durch wiederholte Anwendung der Methode die Funktionalgleichung für irgendeine Epsteinsche Zetafunktion gefunden werden könne. *Kienast* (Küsnacht, Zürich).

Zassenhaus, Hans: Tabelle der Absolutglieder der Eisensteinreihen $E_2(\tau)$ für die ersten Primzahlen und Dimensionen. Abh. math. Semin. Hansische Univ. **14**, 285—288 (1941).

Verf. liefert in der genannten Tabelle, die für $q \leqq 47$ und gerade Dimension $k \leqq 12$ bei $q \equiv 1(4)$, für ungerade Dimension $k \leqq 13$ bei $q \equiv 3(4)$ berechnet ist, einen numerischen Beitrag zur Arbeit von E. Hecke [Danske Vid. Selsk., Math.-fys. Medd. **17**, Nr 12, 1—134 (1940); dies. Zbl. **24**, 9] unter Benutzung der dort angegebenen Formeln. Er teilt weiter einen Beweis von Hecke dafür mit, daß im Nenner der Absolutglieder $A_k(q)$ nur Potenzen von q auftreten. *E. Schulenberg* (Berlin).

Maass, Hans: Über die Darstellung total positiver Zahlen des Körpers $R(\sqrt{5})$ als Summe von drei Quadraten. Abh. math. Semin. Hansische Univ. **14**, 185—191 (1941).

F. Götzky [Math. Ann. **100**, 411—437 (1928)] hat gezeigt, daß $k = R(\sqrt{5})$ der einzige reelle quadratische Zahlkörper ist, in dem jede totalpositive ganze Zahl μ als Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen darstellbar ist. Verf. zeigt nun, daß bereits die Anzahl $a(\mu)$ der Darstellungen von μ als Summe von drei Quadraten größer als Null ist für jedes $\mu \gg 0$. Zum Beweis betrachtet Verf. neben der Thetareihe $\vartheta(\tau) = 1 + \sum_{\mu \gg 0} a(\mu) e^{\pi i S \frac{\mu \tau}{\sqrt{5}}}$ die entsprechend gebaute Reihe $\vartheta_1(\tau)$, in der $a_1(\mu)$ die Anzahl der Darstellungen von μ durch eine beliebig vorgegebene positiv definite ganzzahlige ternäre quadratische Form $Q(x_1, x_2, x_3)$ der Determinante $\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^{2\nu}$ bedeutet. Es ergibt sich, daß $Q(x_1, x_2, x_3)$ stets durch die Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ repräsentiert wird und daher nur eine Formenklasse existiert. $\vartheta(\tau)$ erweist sich damit als identisch mit der analytischen Geschlechtsinvarianten $\varphi(\tau)$ zur Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Für die in s analytische Funktion $\varphi(\tau, s)$, die für $s = 0$ den Wert $\varphi(\tau)$ annimmt, hat Verf. früher [Math. Z. **43**, 709—738 (1938); dies. Zbl. **18**, 358] eine Partialbruchentwicklung angegeben, aus der er durch dort angegebene Überlegungen schließlich $a(\mu)$ berechnet:

$$a(\mu) = \frac{120}{w} U(0, \mu) \left| N \frac{\mu}{\Delta} \right|^{\frac{1}{2}} h_0.$$

Dabei ist h_0 die Idealklassenzahl des biquadratischen Zahlkörpers $K = k(\sqrt{-\mu})$, w die Anzahl der Einheitswurzeln in K, Δ die Relativdiskriminante von K/k, N (und oben S) das Zeichen für Norm (bzw. Spur). $U(0, \mu)$ ist der Wert einer in der vorliegenden Arbeit berechneten Funktion $U(s, \mu)$ für $s = 0$, der für $\mu \gg 0$ stets positiv ausfällt. *E. Schulenberg* (Berlin).

Braun, Hel: Zur Theorie der hermitischen Formen. Abh. math. Semin. Hansische Univ. **14**, 61—150 (1941) u. Göttingen: Habilitationsschrift 1941.

Verf. entwickelt eine Theorie der hermitischen Formen analog zur Siegelschen Theorie der quadratischen Formen über dem rationalen Zahlkörper [S I: Ann. of Math., II. s. **36**, 527—606 (1935); dies. Zbl. **12**, 197] und über algebraischen Zahlkörpern [S III: Ann. of Math., II. s. **38**, 212—291 (1937); dies. Zbl. **16**, 12]. K sei ein reell- oder imaginär-quadratischer Zahlkörper. Der Übergang zu konjugierten Größen werde durch

einen oberen Querstrich angedeutet. $\mathfrak{H}$ sei eine n-reihige, quadratische Matrix mit ganzen Elementen aus K. Unter $\mathfrak{H}$ verstehen wir eine hermitische Matrix, wenn transponierte und konjugierte Matrix von $\mathfrak{H}$ übereinstimmen: $\mathfrak{H}' = \overline{\mathfrak{H}}$. Mit $\mathfrak{x}$ bezeichnen wir eine Spalte von n variablen Elementen aus K. Dann heißt $\bar{\mathfrak{x}}'\mathfrak{H}\mathfrak{x}$ eine hermitische Form (h. F.), und zwar eine positive h. F., wenn stets $\bar{\mathfrak{x}}'\mathfrak{H}\mathfrak{x} \geqq 0$ ist. Solche gibt es nur für imaginär-quadratische Zahlkörper K. Die Schwierigkeiten, die sich bei der Übertragung der Theorie von S I auf hermitische Formen einstellen, sind dadurch bedingt, daß in K i. a. nicht jedes Ideal Hauptideal ist. Sie werden durch Heranziehung arithmetischer Hilfsmittel aus S III überwunden. Das Analogon zum Siegelschen Hauptsatz (S I) soll als wichtigstes Resultat formuliert werden, der Kürze halber nur für den Fall, daß es in K nur Hauptideale gibt. Eine ganzzahlige Transformation $\mathfrak{x} = \mathfrak{C}\mathfrak{y}$ ($\mathfrak{C}$ rechteckig mit ganzen Koeffizienten aus K) führt die h. F. $\bar{\mathfrak{x}}'\mathfrak{H}\mathfrak{x}$ in eine neue: $\bar{\mathfrak{y}}'\mathfrak{K}\mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{K} = \bar{\mathfrak{C}}'\mathfrak{H}\mathfrak{C} = \mathfrak{H}[\mathfrak{C}]$ über. Man sagt: $\mathfrak{K}$ entsteht aus $\mathfrak{H}$ durch Transformation mit $\mathfrak{C}$. $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ heißen äquivalent (in Zeichen: $\mathfrak{H} \sim \mathfrak{K}$), wenn $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}$ aus $\mathfrak{K}$ durch Transformationen entstehen. Äquivalente Matrizen bilden eine Klasse. Sind die Formen $\bar{\mathfrak{x}}'\mathfrak{H}\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}'\mathfrak{L}\mathfrak{x}$ positiv und $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}$ äquivalent nach jedem natürlichen Modul q: $\mathfrak{H}[\mathfrak{C}] \equiv \mathfrak{L}(q)$, $\mathfrak{L}[\mathfrak{B}] \equiv \mathfrak{H}(q)$ ($\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ganz), so sagt man: $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}$ gehören zum selben Geschlecht. Jedes Geschlecht zerfällt in endlich viele volle Klassen äquivalenter hermitischer Matrizen. Sind $\bar{\mathfrak{x}}'\mathfrak{H}\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}'\mathfrak{K}\mathfrak{x}$ positive h. F., dann gibt es nur endlich viele ganze $\mathfrak{C}$ aus K, so daß $\mathfrak{H}[\mathfrak{C}] = \mathfrak{K}$; ihre Anzahl sei gleich $A(\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$. Wenn $\mathfrak{H} \sim \mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{K} \sim \mathfrak{K}_1$, so ist $A(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}) = A(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{K}_1)$. In dem Fall, daß die Idealklassenzahl von K gleich 1 ist, wird bewiesen, daß jede Klasse einen Repräsentanten mit von 0 verschiedener Determinante enthält. In allen anderen Fällen ist der Satz falsch. Sei nun $\bar{\mathfrak{x}}'\mathfrak{H}\mathfrak{x}$ eine positive h. F. mit $|\mathfrak{H}| \neq 0$ (r = Rang von $\mathfrak{H}$), $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_g$ ein volles System von Klassenrepräsentanten aus dem Geschlecht von $\mathfrak{H}$. Für eine andere positive h. F. $\bar{\mathfrak{x}}'\mathfrak{K}\mathfrak{x}$ mit $|\mathfrak{K}| \neq 0$ (s = Rang von $\mathfrak{K} \leqq r$) bestimme man die Anzahlen $A(\mathfrak{H}_\nu, \mathfrak{K})$, $A(\mathfrak{H}_\nu, \mathfrak{H}_\nu) = E(\mathfrak{H}_\nu)$ für $\nu = 1, 2, \ldots, g$ und bilde die Ausdrücke $\sum_{\nu=1}^{g} A(\mathfrak{H}_\nu, \mathfrak{K}) E(\mathfrak{H}_\nu)^{-1} = M(\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$ (mittlere Darstellungsanzahl von $\mathfrak{K}$ durch das Geschlecht von $\mathfrak{H}$), $\sum_{\nu=1}^{g} E(\mathfrak{H}_\nu)^{-1} = M(\mathfrak{H})$. Ferner sei $A_q(\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$ die Anzahl der modulo einer natürlichen Zahl q inkongruenten ganzzahligen Lösungen der Kongruenz $\mathfrak{H}[\mathfrak{C}] \equiv \mathfrak{K}(q)$ und $\lambda = \lim_{q \to \infty} q^{s(s-2r)} \cdot A_q(\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$ (für $q = n!$, $n \to \infty$). Bezeichnet man mit m die Diskriminante von K, so lautet das Analogon zum Siegelschen Hauptsatz

$$\frac{M(\mathfrak{H}, \mathfrak{K})}{M(\mathfrak{H})} = \varepsilon |\mathfrak{H}|^{-s} |\mathfrak{K}|^{r-s} \lambda \prod_{j=r-s+1}^{r} \frac{(2\pi)^j}{(j-1)!\,|m|^{\frac{j}{2}}}, \qquad \varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{2}, & r = s \\ 1, & r > s. \end{cases}$$

Speziell für $\mathfrak{H} = \mathfrak{K}$ ist $M(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}) = 1$, und man erhält eine Formel für das Maß $M(\mathfrak{H})$ des Geschlechts von $\mathfrak{H}$. — Die Reichhaltigkeit der Arbeit entspricht ihrem Umfang; die Ergebnisse stellen einen bedeutenden Fortschritt für die Theorie der hermitischen Formen dar. *Maaß* (Heidelberg).

Witt, Ernst: Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades. Abh. math. Semin. Hansische Univ. **14**, 323—337 (1941).

Sei $\varrho(n, g)$ die Anzahl der linear unabhängigen Modulformen n-ten Grades vom Gewicht $g \equiv 0(2)$. Siegel hat gezeigt, daß $\varrho(n, g) < C_n g^n$ ist [Math. Ann. **116**, 617 bis 657 (1939); dies. Zbl. **21**, 203]. Durch Vereinfachung des Beweisganges und geschicktes numerisches Abschätzen beweist Verf. $\varrho(2, 2) = 0$, $\varrho(2, 4) = 1$, $\varrho(2, 6) \leqq 2$, $\varrho(2, 8) \leqq 3$. In diesen Fällen kann durch Ausrechnen der ersten Koeffizienten in den Fourierentwicklungen von Modulformen geprüft werden, ob diese identisch sind. So ergibt sich die Identität $(\sum |\mathfrak{A}\mathfrak{Z} - \mathfrak{B}|^{-4})^2 = \sum |\mathfrak{A}\mathfrak{Z} - \mathfrak{B}|^{-8}$, in welcher $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ein volles System von Repräsentanten der Klassen zweireihiger symmetrischer Matrizenpaare durchläuft und $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^{(2)}$ eine symmetrische Matrix mit positivem Imaginärteil

bedeutet. Dieses Ergebnis hängt auf Grund des Hauptsatzes der Siegelschen Theorie der quadratischen Formen [Ann. of Math., II. s. **36**, 527—606 (1935); dies. Zbl. **12**, 197] mit der Theorie der positiven geraden quadratischen Formen $\mathfrak{S}_m$ in m Variablen mit Determinante 1 zusammen. Es zeigt sich nämlich, daß die Thetareihe n-ten Grades $\sum_{\mathfrak{C}} e^{\pi i \sigma \mathfrak{C}' \mathfrak{S}_m \mathfrak{C} \mathfrak{Z}}$ ($\mathfrak{C}$ durchläuft alle ganzen $\mathfrak{C}^{(m,n)}$, $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^{(n)}$, σ = Spur) eine Modulform n-ten Grades vom Gewicht $\frac{m}{2}$ ist. Γ_m sei das Geschlecht der Formen $\mathfrak{S}_m$, h_m die Anzahl der Klassen in Γ_m. $8/m$ ist notwendig für die Existenz von Γ_m. Nach Mordell ist $h_8 = 1$. Durch Diskussion der den Klassen quadratischer Formen zugeordneten Gitter und Vektordiagramme beweist Verf. $h_{16} = 2$ und gibt Klassenrepräsentanten $\mathfrak{S}_8 + \mathfrak{S}_8$, $\mathfrak{S}_{16}$ an. $h_{24} \geqq 10$ wird ohne Beweis mitgeteilt. Es tritt die interessante, aber algebraisch undurchsichtige Tatsache in Erscheinung, daß $\mathfrak{S}_8 + \mathfrak{S}_8$, $\mathfrak{S}_{16}$ nicht nur jede Zahl, sondern auch jede binäre Form gleich oft darstellen, obgleich die Formen in verschiedenen Klassen liegen. Zum Schluß ergeben allgemeine Überlegungen insbesondere ein Erzeugendensystem für die Modulgruppe n-ten Grades. *Maaß.*

Krasner, Marc: Un critère de primarité. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 323—324 (1941).

Es seien p eine Primzahl, $q = p^n$ (n positiv ganz), k ein Körper $\mathfrak{p}$-adischer Zahlen, wo $\mathfrak{p} | p$, der die primitiven q-ten Einheitswurzeln enthält. $\mathfrak{Q}$ sei die (multiplikative) Gruppe der q-primären Zahlen ($\alpha \neq 0$ aus k heißt q-primär, wenn $k\left(\sqrt[q]{\alpha}\right)$ eine unverzweigte Erweiterung von k ist), $\mathfrak{P}$ die Gruppe der q-ten Potenzen der Zahlen von k. p^s sei die höchste im Absolutgrad des Primideals $\mathfrak{p}$ von k aufgehende Potenz von p. Der Körper k enthält den absolut abelschen Körper k^*, der aus dem lokalen Körper k_n der q-ten Einheitswurzeln und dem lokalen unverzweigten Körper $k^{(s)}$ vom Grade p^s zusammengesetzt ist. Die Gruppen $\mathfrak{P}^*, \mathfrak{Q}^*$ seien für k^* analog wie $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ für k erklärt. $\mathfrak{R}^*$ sei die Gruppe aller Zahlen kongruent 1 mod $\mathfrak{p} p^{1:(p-1)}$ aus k^*. Im Falle $p \neq 2$ sei σ ein Automorphismus von k_n mit der Eigenschaft $\sigma\eta = \eta^r$ (η primitive q-te Einheitswurzel, r Primitivwurzel mod q). Im Falle $p = 2$ seien σ_1, σ_2 Automorphismen von k_n mit den Eigenschaften $\sigma_1\eta = \eta^5$, $\sigma_2\eta = \eta^{-1}$. τ sei ein erzeugender Automorphismus von $k^{(s)}$. Verf. beweist folgendes Primäritätskriterium: I. Es ist $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}^* \mathfrak{P}$; II. $\mathfrak{Q}^*$ ist die Gruppe aller Zahlen $\alpha \neq 0$ aus k^* mit folgenden Eigenschaften: 1. $\sigma\alpha \equiv \alpha^r \bmod \mathfrak{P}^*$, wenn $p \neq 2$; $\sigma_1\alpha \equiv \alpha^5$ und $\sigma_2\alpha \equiv \alpha^{-1} \bmod \mathfrak{P}^*$, wenn $p = 2$; 2. $\tau\alpha \equiv \alpha \bmod \mathfrak{P}^*$; 3. $\alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{R}^* \mathfrak{P}^*$. *H. L. Schmid* (Berlin).

Chevalley, C.: La théorie du corps de classes. Ann. of Math., II. s. **41**, 394—418 (1940).

Verf. setzt sich zum Ziel, durch Einführung neuer Begriffe eine möglichst weitgehende Vereinfachung der Klassenkörpertheorie zu erreichen. Die leitenden Gedanken sind dabei folgende: 1. Die klassische Sprache der Idealtheorie wird durchweg ersetzt durch die Verwendung der „Idele". Verf. hat den Begriff des Idels vor einigen Jahren eingeführt, um zu einer einheitlichen Charakterisierung der endlichen und unendlichen abelschen Erweiterungen zu gelangen [J. Math. pures appl., IX. s. **15**, 359—371 (1936); dies. Zbl. **15**, 151]. Die Verwendung der Idelgruppen an Stelle der Idealgruppen ermöglicht nicht nur, die unendlichen abelschen Erweiterungen in die Klassenkörpertheorie einzubeziehen; sie erlaubt es insbesondere, die Theorie der Kongruenzgruppen und ihrer Erklärungsmoduln vollständig zu vermeiden. 2. Anstatt die Gesamtheit aller abelschen Erweiterungen eines algebraischen Zahlkörpers K zu betrachten, geht Verf. von der maximalen abelschen Erweiterung A_K von K aus, in der alle abelschen Erweiterungen von K enthalten sind. Es zeigt sich, daß man die Galoisgruppe $\mathfrak{G}_K$ der unendlichen abelschen Erweiterung A_K/K aus geeigneten Elementen von K konstruieren kann. Anstatt die kompakte topologische Gruppe $\mathfrak{G}_K$ selbst zu bestimmen, untersucht Verf. die Gruppe der Charaktere von $\mathfrak{G}_K$. Nach Pontrjagin bestimmen sich eine kompakte Gruppe und ihre Charaktergruppe gegenseitig eindeutig.

Das Hauptresultat lautet: Die Gruppe der Charaktere von $\mathfrak{G}_K$ und die Gruppe der sog. Differentiale von K sind isomorph. Dabei wird unter einem Differential von K ein Charakter der Gruppe der Idele von K verstanden, der für die Gruppe der Hauptidele gleich 1 ist. Es ist für den Kenner der Klassenkörpertheorie in der ursprünglichen Form in hohem Maße erstaunlich, in diesem Isomorphiesatz die Klassenkörpertheorie in verdichteter Form wiederzuerkennen. Die endlichen abelschen Erweiterungen von K entsprechen Untergruppen von $\mathfrak{G}_K$ vom endlichen Index, oder wegen des oben angeführten Isomorphiesatzes, Untergruppen vom endlichen Index der Gruppe der Idele, welche die Gruppe der Hauptidele enthalten. Kehrt man zur Sprache der Idealtheorie zurück, so ergibt sich hieraus das allgemeine Reziprozitätsgesetz in der Artinschen Form. Die hier entwickelte Theorie ist frei von allen transzendenten Hilfsmitteln.

Im § 1 geht Verf. von der maximal abelschen Erweiterung A_K/K eines endlichen algebraischen Zahlkörpers K aus. $\mathfrak{G}_K$ sei die abelsche galoissche Gruppe von A_K/K. $\mathfrak{G}_K$ ist eine kompakte topologische Gruppe und hat die Struktur einer diskontinuierlichen Menge. Unter einem Charakter von $\mathfrak{G}_K$ wird ein stetiger Homomorphismus dieser Gruppe in die Multiplikationsgruppe der komplexen Zahlen vom Betrage 1 verstanden. Diese Charaktere bilden wieder eine abelsche Gruppe. Jeder Charakter χ ist von endlicher Ordnung. $\mathfrak{H}$ sei die durch $\chi(\mathfrak{H}) = 1$ definierte Untergruppe von $\mathfrak{G}_K$ und Z_χ der zu $\mathfrak{H}$ gehörige Invariantenkörper innerhalb A_K. Z_χ/K ist endlich zyklisch und seine galoissche Gruppe isomorph zur Faktorgruppe $\mathfrak{G}_K/\mathfrak{H}$. — Ω sei eine beliebige Erweiterung von K. $A_\Omega, \mathfrak{G}_\Omega$ seien analog zu $A_K, \mathfrak{G}_K$ erklärt. Ein Element $\bar{s}$ aus $\mathfrak{G}_\Omega$ induziert ein Element s aus $\mathfrak{G}_K$. Durch $\bar{\chi}(\bar{s}) = \chi(s)$ wird ein Charakter von $\mathfrak{G}_\Omega$ erklärt, der mit $\bar{\chi} = N_{K/\Omega}\chi$ bezeichnet wird. τ sei ein Isomorphismus von Ω und einem zu Ω bez. K konjugierten Körper Ω^τ. $\bar{\tau}$ sei eine Fortsetzung von τ zu einem Isomorphismus von A_Ω und A_{Ω^τ}. Dann ist $\bar{s} = \bar{\tau}\bar{s}\bar{\tau}^{-1}$ ein Automorphismus von A_{Ω^τ} bez. Ω^τ. Die Zuordnung $\bar{s} \to \bar{s}^{\bar{\tau}}$ ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{G}_\Omega$ und $\mathfrak{G}_{\Omega^\tau}$, der nur von τ (nicht von $\bar{\tau}$) abhängt und daher kurz mit $\bar{s} \to \bar{s}^\tau$ bezeichnet wird. Dieser Isomorphismus ordnet jedem Charakter χ_Ω von $\mathfrak{G}_\Omega$ einen Charakter $\chi_{\Omega^\tau}^\tau$ zu, der durch $\chi_{\Omega^\tau}^\tau(\bar{s}^\tau) = \chi_\Omega(\bar{s})$ bestimmt wird. Es gilt der Satz: Ist Ω/K zyklisch, so ist dann und nur dann $\chi_\Omega = N_{K/\Omega}\chi$ wenn für jedes τ der galoisschen Gruppe von Ω/K gilt $\chi_\Omega = \chi_\Omega^\tau$. — § 2 und 3. $\mathfrak{p}$ bezeichne einen beliebigen (endlichen oder unendlichen) Primteiler von K; $K_\mathfrak{p}$ sei die $\mathfrak{p}$-adische Hülle von K und $K_\mathfrak{p}^*$ die Multiplikationsgruppe von $K_\mathfrak{p}$. Jedes Element $\mathfrak{a}$ des direkten Produktes G aller Gruppen $K_\mathfrak{p}^*$ ist durch seine Koordinaten $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{a}_\mathfrak{p} \in K_\mathfrak{p}^*$) bestimmt. Unter der Fundamentalgruppe J_K von K wird die Untergruppe aller derjenigen Elemente $\mathfrak{a}$ von G verstanden, die für fast alle $\mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}$-adische Einheiten als Koordinaten haben. Die Elemente von J_K heißen Idele von K. Das Idel $(1, \ldots, 1, \mathfrak{a}_\mathfrak{p}, 1, \ldots, 1)$ heißt die $\mathfrak{p}$-Komponente des Idels $\mathfrak{a}$. Die $\mathfrak{p}$-Komponenten aller Idele bilden eine Untergruppe von J_K, die zu $K_\mathfrak{p}^*$ isomorph ist. Ω sei eine endliche Erweiterung von K und $\mathfrak{A}$ ein Idel von Ω. Unter $N_{\Omega/K}(\mathfrak{A})$ wird dasjenige Idel von K verstanden, dessen $\mathfrak{p}$-Koordinaten durch $(N_{\Omega/K}(\mathfrak{A}))_\mathfrak{p} = \prod_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}} N_{\Omega_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}(\mathfrak{A}_\mathfrak{P})$ definiert sind. Die Anwendung von $N_{\Omega/K}$ liefert einen Homomorphismus von J_Ω auf J_K. Die Hauptuntergruppe H_K von J_K besteht aus allen Idelen $\mathfrak{a}_\alpha$, deren $\mathfrak{p}$-Koordinaten alle gleich α (genauer: den isomorphen Bildern von α in den verschiedenen $K_\mathfrak{p}^*$) mit α aus K sind. Die Elemente von H_K heißen Hauptidele. Die Zuordnung $\alpha \leftrightarrow \mathfrak{a}_\alpha$ liefert einen Isomorphismus von K^* und H_K. Nun sei E eine endliche Menge von Primteilern. Mit $J_K^{E,n}$ wird die Gruppe derjenigen Idele bezeichnet, deren $\mathfrak{p}$-Komponenten für Primteiler $\mathfrak{p}$, die nicht zu E gehören, $\mathfrak{p}$-adische Einheiten sind, für die Primteiler $\mathfrak{p}$ aus E dagegen n-te Potenzen sind. Bezeichnungen: $J_K^E = J_K^{E,1}$; $H_K^E = H_K \cap J_K^E$. Verf. beweist folgenden Unabhängigkeitssatz: Jedem Primteiler $\mathfrak{p}$ sei eine Zahl $a_\mathfrak{p} > 0$ zugeordnet; für fast alle $\mathfrak{p}$ sei $a_\mathfrak{p} = 1$; für endliche Primteiler $\mathfrak{p}$ sei $a_\mathfrak{p}$ ein $\mathfrak{p}$-Betrag in K (im Sinne der Bewertungstheorie); schließlich sei $\prod_\mathfrak{p} a_\mathfrak{p} \geqq |\Delta|^{\frac{1}{2}}$ (Δ Diskriminante von K). Unter diesen Voraussetzungen existiert ein $\alpha \neq 0$ aus K mit $|\alpha_\mathfrak{p}| \leqq a_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}$. Mit Hilfe dieses Unabhängigkeitssatzes beweist Verf. folgende Verallgemeinerung des Dirichletschen Einheitensatzes: Es sei E eine Menge von $h+1$ Primteilern (unter ihnen die unendlichen Primstellen); dann kann man jedem $\mathfrak{p}$ aus E ein $\varepsilon_\mathfrak{p}$ aus H_K^E zuordnen mit der Eigenschaft $|\varepsilon_\mathfrak{p}|_\mathfrak{q} < 1$ für alle $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ aus E; je h dieser Zahlen $\varepsilon_\mathfrak{p}$ sind durch keine Relation verknüpft und erzeugen eine Untergruppe von H_K von endlichem Index. — § 4. Unter einem Differential von K wird ein Charakter von J_K verstanden, der für H_K Hauptcharakter ist. Die Differentiale von K bilden eine multiplikative Gruppe. Sei Ω wie vorher eine endliche Erweiterung von K, φ ein Differential von K, $\mathfrak{A}$ ein Idel von K. Durch $\varphi_\Omega(\mathfrak{A}) = \varphi(N_{\Omega/K}(\mathfrak{A}))$ wird ein Differential φ_Ω von Ω

definiert. Bezeichnung: $N_{K/\Omega}(\varphi)$. Ein Differential von K erzeugt in $K_\mathfrak{p}$ einen Charakter $\varphi_\mathfrak{p}$. Ist $\varphi_\mathfrak{p}$ nicht für alle Einheiten von $K_\mathfrak{p}$ gleich 1, so heißt φ in $\mathfrak{p}$ verzweigt. — In § 5 wird der Beweisgang des Hauptsatzes umrissen: Es existiert ein Isomorphismus $\chi \leftrightarrow \varphi_K = \Phi(\chi)$ der Gruppe der Charaktere χ von $\mathfrak{G}_K$ und der Gruppe der Differentiale φ von K mit folgenden Eigenschaften: (1) Ist Ω eine endliche Erweiterung von K, so ist $\Phi_\Omega(N_{K/\Omega}\chi) = N_{K/\Omega}(\Phi_K(\chi))$; (2) ist τ ein Isomorphismus von K mit einem seiner konjugierten, so ist $\Phi_{K^\tau}(\chi^\tau) = (\Phi_K(\chi))^\tau$; (3) die Verzweigungsprimteiler von χ und $\Phi_K(\chi)$ sind dieselben; dabei heißt χ bei $\mathfrak{p}$ verzweigt, wenn φ in Z_χ verzweigt ist. — Ein Differential φ von K heißt assoziiert zu einer endlichen abelschen Erweiterung Z über K, wenn $\varphi(N_{Z/K}(\mathfrak{A})) = 1$ für jedes Idel $\mathfrak{A}$ von Z ist. Die zu einer abelschen Erweiterung assoziierten Differentiale bilden eine Gruppe. In den §§ 6 und 7 wird gezeigt, daß, falls Z über K zyklisch ist, die Ordnung dieser Gruppe ein Vielfaches des Grades $[Z:K]$ ist. Diese Tatsache ist in der ersten Fundamentalungleichung der Klassenkörpertheorie $[K_\mathfrak{p}^* : K_\mathfrak{p}^* \cap N_{Z/K}J_Z] = [ZK_\mathfrak{p}:K_\mathfrak{p}]$ enthalten, in derem Beweis das Herbrandsche Reduktionsprinzip eine wesentliche Rolle spielt. Im § 9 beweist Verf., daß die fragliche Gruppenordnung ein Teiler von $[Z:K]$ ist (zweite Fundamentalungleichung der Klassenkörpertheorie), also mit $[Z:K]$ zusammenfällt. — Der Rest der Arbeit ist technischen Einzelheiten gewidmet. Es werden zunächst die Differentiale $\Phi_K(\chi)$ definiert, die einem Charakter χ von $\mathfrak{G}_K$ assoziiert sind im Spezialfall, daß Z_χ/K ein Kreiskörper bez. K ist. Schließlich wird die Definition von $\Phi_K(\chi)$ auf den Fall eines beliebigen Charakters χ von $\mathfrak{G}_K$ ausgedehnt. Zu diesem Zweck wird die Artinsche Methode des Beweises des Reziprozitätsgesetzes verallgemeinert, deren zentrale Idee darin besteht, eine Erweiterung Ω von K zu konstruieren, so daß ΩZ_χ über Ω ein Kreiskörper ist. Jedes Differential φ von K kann dann in der Form $\Phi_K(\chi)$ mit einem passenden χ geschrieben werden. *H. L. Schmid* (Berlin).

Lednew, N.: Zu dem umgekehrten Problem der Galoisschen Theorie. Rec. math. Moscou, N. s. **9**, 137—163 u. dtsch. Zusammenfassung 163—164 (1941) [Russisch].

Es sei k ein algebraischer Zahlkörper endlichen Grades, $\mathfrak{G}$ eine beliebige endliche Gruppe. Tschebotarëw (siehe z. B. dies. Zbl. **9**, 101) hat die Frage der Existenz eines Körpers K/k mit vorgegebener galoisscher Gruppe $\mathfrak{G}$ zurückgeführt auf die Existenz von ganz rationalen Punkten auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit. Verf. reduziert diese Frage auf den Beweis der Existenz von mindestens einem Punkt mit Koordinaten aus k auf einer algebraischen Fläche, deren Gleichung rationale Koeffizienten hat. Er beweist dazu folgenden Hauptsatz: Es existiert ein Gebiet D einer algebraischen Fläche $\Phi(x_1, \ldots, x_N) = 0$, wobei Φ ein durch k und $\mathfrak{G}$ bestimmtes ganzzahliges Polynom in $x_1, \ldots, x_N$ ist, derart, daß es für jeden beliebigen Punkt $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ von D über $k(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ eine unendliche Menge von normalen Erweiterungen mit einer zu $\mathfrak{G}$ isomorphen galoisschen Gruppe gibt. — Unter den vom Verf. bewiesenen Sätzen sei noch folgender hervorgehoben: Es sei k der Körper aller algebraischen Zahlen und z eine unabhängige Veränderliche. Dann existiert eine über $k(z)$ normale Erweiterung mit vorgegebener Diskriminante und vorgegebener galoisscher Gruppe. *H. L. Schmid* (Berlin).

Tornheim, Leonard: Linear forms in function fields. Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 126—127 (1941).

Beweis eines Analogons für rationale Funktionen einer Veränderlichen eines Satzes von Minkowski über Linearformen: Sei k ein Körper und z eine Unbestimmte über k. Es seien $L_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ $(i = 1, \ldots, n)$ n Linearformen mit Koeffizienten a_{ij} aus $k(z)$ und mit der Koeffizientendeterminante $|a_{ij}|$ vom Grade d (Zählergrad — Nennergrad in z). Dann gibt es zu jedem System von ganzen Zahlen $c_1, \ldots, c_n$, welche die Ungleichung $\sum_{i=1}^{n} c_i > d - n$ befriedigen, ein System von Elementen $x_1, \ldots, x_n$ aus $k[z]$, die nicht sämtlich 0 sind, so daß jede Linearform L_i höchstens den Grad c_i hat. Der Beweis gelingt algebraisch und elementar durch folgende Reduktionen: 1. alle c_i sind gleich; 2. $a_{ij} = 0$ für $i < j$. *H. L. Schmid* (Berlin).

Deuring, Max: Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper. Abh. math. Semin. Hansische Univ. **14**, 197—272 (1941).

Zunächst wird auf die Beziehung zwischen der Riemannschen Vermutung für Kongruenzzetafunktionen vom Geschlechte 1 und einer von Herglotz bewiesenen

Vermutung von Gauß hingewiesen. Sodann wird gefragt: Was für Multiplikatorenringe R elliptischer Funktionenkörper der Charakteristik p sind möglich? Antwort: 1) $R = \Gamma$, der Ring der ganzen rat. Zahlen; 2) R eine Ordnung mit zu p teilerfremdem Führer in einem solchen imaginären quadratischen Zahlkörper, in dem die Primzahl p voll zerfällt; 3) R eine Maximalordnung in einer definiten, nur bei p und ∞ verzweigten Quaternionenalgebra $Q_{\infty, p}$. Im Fall 2 gibt es bei gegebenem R so viele mögliche Werte der Invariante j, wie die Klassenzahl h von R beträgt; alle diese j sind absolut algebraisch vom gleichen Grade f und zerfallen in Gruppen zu je f untereinander konjugierten. Im Fall 3 gibt es bei gegebenem R entweder eine rationale Invariante j oder zwei konjugierte vom Absolutgrad 2. Bei gegebener Algebra $Q_{\infty, p}$ ist die Anzahl der möglichen j gleich der Klassenzahl h von $Q_{\infty, p}$. Diese j sind (wenn man von den besonderen Werten $j = 0$ und $j = 2^6 3^3$ absieht) die Nullstellen eines gewissen Polynoms $P(j)$ vom Grade $\left[\frac{p}{12}\right]$. — Jeder elliptische Körper von Primzahlcharakteristik mit absolut algebraischer Invariante j hat komplexe Multiplikationen, d. h. es tritt bei gegebenem j im Galoisfeld $GF(q)$ notwendig einer der Fälle 2, 3 ein. Zählt man die Anzahl der möglichen j in zwei Weisen ab, so folgt die Klassenzahlrelation

$$\sum h(d_q) + t_q = q$$

in der $h(d)$ die Klassenzahl der definiten quadratischen Formen der Diskriminante d bedeutet und d_q alle diejenigen nicht durch p teilbaren Diskriminanten durchläuft, deren Hauptformen die Zahl $q = p^f$ eigentlich darstellen, während t_q mit der Klassenzahl von $Q_{\infty, p}$ zusammenhängt. Zur Herleitung dieser Ergebnisse dienen zwei Sätze, die es gestatten, von elliptischen Funktionenkörpern der Charakteristik Null durch Restklassenbildung nach Primidealen des Konstantenkörpers zu elliptischen Körpern von Primzahlcharakteristik überzugehen und umgekehrt. Dabei ergeben sich auch bemerkenswerte Kongruenzrelationen für die singulären Invarianten, wie z. B.: Eine singuläre Invariante j der Charakteristik 0 ist entweder durch keinen Primfaktor von 2 (bzw. 3 bzw. 5) teilbar oder durch jeden, je nachdem 2 (bzw. 3 bzw. 5) in dem zugehörigen imginär quadratischen Körper voll zerfällt oder nicht. *van der Waerden.*

Zahlentheorie:

Lambert, G.: Sur des nombres curieux. Mathesis **54**, 148—151 (1940).

Im Anschluß an eine Arbeit von V. Thébault gleicher Überschrift (dies. Zbl. **22**, 111) untersucht Verf. im B-adischen Zahlsystem mit $B = \alpha m^2 + 1$ Zahlen, die bis auf die letzte Ziffer aus gleichen Ziffern bestehen, und zeigt den Ziffernaufbau der zugehörigen Quadrate. Die Ergebnisse von Thébault bilden den Fall $\alpha = 1$. *E. Schulenberg* (Berlin).

Dyer-Bennet, John: A theorem on partitions of the set of positive integers. Amer. Math. Monthly **47**, 152—154 (1940).

Verf. beweist: Die Zahlen 1, 2, 6, 42, 1806 sind die einzigen natürlichen Moduln n der Eigenschaft, daß für jedes Quadrupel a, b, c, d natürlicher Zahlen mit $a \equiv b \bmod n$, $c \equiv d \bmod n$ stets $a^c \equiv b^d \bmod n$ gilt.

Am Schlusse der Arbeit ist eine kleine Beweislücke, die ergänzt werde: Verf. zeigt vorher, daß für n die beiden Bedingungen (1) n ist quadratfrei, (2) für jede natürliche Primzahl $p|n$ gilt $p-1|n$ notwendig und hinreichend sind. Die angeschriebenen n erfüllen diese Bedingungen und haben 2,3,7,43 als Primteiler, q sei deren Repräsentant. Die um 1 vermehrten Produkte von zwei bis vier verschiedenen q geben keine Primzahl, die nicht schon zu den q gehört. Nun wendet zum Beweis, daß es nur diese n gibt, Verf. vollständige Induktion an: Sei p_j die j-te Primzahl ($p_1 = 2, \ldots$) und unter den Primzahlen $p_1, \ldots, p_m$ kein Teiler eines n der Aufgabe außer den q (soweit sie in der betrachteten Primzahlmenge vorkommen). p_{m+k} sei die nächste Primzahl, die kein q ist. Dann ist $p_{m+k}-1$ entweder durch ein $p_j (3 \leqq j \leqq m)$, das kein q ist, oder durch ein Quadrat eines q teilbar. Dieser wichtige Beisatz „Quadrat eines q" fehlt in der Arbeit. Also ist p_{m+k} als Teiler von n unzulässig. *Holzer* (Wien).

Segond, Marcel: Sur l'exposant du facteur b dans $A^m - 1$ et sur les développements systématiques des nombres rationnels. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 470—472 (1941).

Um das Problem der ungeraden vollkommenen Zahlen zu lösen, empfiehlt Verf. den Exponenten von b in $A^m - 1$ (b, A, m nat. Zahlen) ganz allgemein zu untersuchen auf folgen-

dem Wege. Er betrachtet die gewöhnliche Entwicklung im System der Basis c (c ganz rat. $\geqq 2$) einer beliebigen rationalen Zahl mit ganzen Koeffizienten zwischen 0 und $c-1$, ersetzt hierin c durch die Variable x und nennt diese Taylorsche Reihe das Bild dieser Zahl. Ohne Beweise, teils nur als Vermutungen, spricht er u. a. folgendes aus. Das Bild von $\frac{a}{b}$ (a, b nat. Zahlen, $a < b$) hat in irreduzibler Bruchform einen durch $x-1$ teilbaren Nenner vom Grade $\leqq \frac{1}{2}(b+1)$, wobei die von Null verschiedenen Koeffizienten eine alternierende Folge $1, -1, 1, \ldots, -1$ bilden; die Koeffizienten des Zählers sind absolut kleiner als c. Zu jedem $\frac{a}{b}$ mit festem b und $(a, b) = 1$ gehört derselbe Nenner, der „Aufnehmer" (affiliateur) von b; auch für $(a, b) \neq 1$ läßt sich das Bild mit demselben Nenner schreiben, so daß die Koeffizienten des Zählers immer noch absolut kleiner als c sind. Für $b \mid b_1$ stehen die Aufnehmer im ähnlichen Teilbarkeitsverhältnis. Alles läßt sich auf nicht gewöhnliche Entwicklungen übertragen, nämlich mit Koeffizienten zwischen $-r$ und $-r+c-1$ ($r = 1, 2, \ldots, c-1$). Es lassen sich algebraisch-analytische Methoden anwenden, da ein enger Zusammenhang mit den rationalen Funktionen besteht, deren Pole in oder auf dem Einheitskreis liegen, wobei die letzten einfach sind. Aus diesem Ideenkreis entspringt ein einfacher Beweis eines Kroneckerschen Satzes (Werke I, S. 103). *L. Rédei* (Szeged).

Pompeiu, D.: Les sommes de nombres entiers. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. **23,** 225—228 (1941).

Eine ganze Zahl N wird als Summe zweier ganzer Zahlen dargestellt. Die Zahl selbst und die beiden Summanden werden als Produkt einer Potenz von 2 und einer ungeraden Zahl geschrieben. Man erhält also die Darstellung $N = 2^n \cdot N' = 2^a \cdot A' + 2^b \cdot B'$. Dann wird gezeigt, daß entweder $a = b$ mit $a = b < n$ oder $a \neq b$ sein muß, wobei im letzteren Falle die kleinere der beiden Zahlen gleich n ist. — Als Anwendung wird gezeigt, daß eine Relation von der Form $(x-A)^3 + x^3 = (x+A)^3$ zwischen ganzen Zahlen nicht bestehen kann (Spezialfall des Fermatschen Satzes für $n = 3$). *Anders.*

Brauer, Alfred: On a property of k consecutive integers. Bull. Amer. Math. Soc. **47,** 328—331 (1941).

Es sei k ganz, $k > 1$; $A(k)$ sei die folgende Aussage: In jeder Folge von k aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen gibt es eine Zahl, die zum Produkt der übrigen $k-1$ Zahlen relativ prim ist. Pillai (dies. Zbl. **23,** 108) hat bewiesen: I. Für jedes $k < 17$ ist $A(k)$ wahr. II. Für jedes k mit $17 \leqq k \leqq 430$ ist $A(k)$ falsch. Hier wird bewiesen: III. $A(k)$ ist falsch für jedes $k \geqq 300$ (also, nach II, für jedes $k \geqq 17$). Zum Beweis von III. konstruiert man eine Folge von k aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, deren jede durch mindestens eine Primzahl $p \leqq \frac{1}{2}k$ teilbar ist; dann ist nämlich noch mindestens eine Zahl dieser Folge durch dieses p teilbar, so daß keine Zahl der Folge zum Produkt der übrigen $k-1$ Zahlen relativ prim ist. Außer den elementarsten Hilfsmitteln benutzt der Beweis nur noch folgende Abschätzung: für $x \geqq 75$ ist

$$\pi(2x) - \pi(x) \geqq 2[\log x/\log 2] + 2.$$

Jarník (Prag).

Lehmer, D. H.: A note on the linear diophantine equation. Amer. Math. Monthly **48,** 240—246 (1941).

Die Auflösung der linearen diophantischen Gleichung $a_0 x - a_1 y = 1$ mit Kettenbrüchen nach Lagrange geht bekanntlich so vor, daß a_0/a_1 in einen Kettenbruch entwickelt wird; die Teilnenner des Kettenbruchs dienen zur Herstellung von zwei rücklaufenden (rekurrenten) Folgen, die die Zähler und die Nenner der Näherungsbrüche des Kettenbruchs liefern; Zähler und Nenner des vorletzten Näherungsbruchs (wobei a_0/a_1 selbst als letzter gilt) sind, mit passenden Vorzeichen versehen, die Werte von y und x. Verf. (nicht zu verwechseln mit D. N. Lehmer) macht darauf aufmerksam, daß man mit einer rücklaufenden Folge auskommt. Nimmt man nämlich die Teilnenner des Kettenbruchs in umgekehrter Reihenfolge, so hat der so entstehende Kettenbruch, wie bekannt, zum Wert den Quotienten der letzten beiden Näherungsnenner des ursprünglichen Kettenbruchs; daher sind umgekehrt seine letzten beiden Näherungsnenner a_1 und a_0. Folglich sind seine letzten beiden Näherungszähler, mit passenden Vorzeichen versehen, die Werte von x und y. Es genügt also, die Folge

dieser Näherungszähler aufzustellen. Eine Abkürzung des Verfahrens kann man ferner erreichen, indem man auch negative Teilquotienten zuläßt. — Lineare diophantische Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten können ebenfalls statt mit dem Jacobischen Algorithmus nach einem freieren Verfahren, bei dem auch eine der rücklaufenden Folgen erspart wird, behandelt werden. Es wird in einer bequem zusammenfassenden Form, die aber doch hier etwas zu viel Raum beanspruchen würde, beschrieben.

L. Schrutka (Wien).

Skolem, Th.: Über orthogonal liegende Gitterpunkte auf Kugelflächen. Norsk mat. Tidsskr. **23**, 54—61 (1941) [Norwegisch].

Zwei Gitterpunkte auf einer Kugel (K) $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ im dreidimensionalen Raum heißen orthogonal, wenn ihre Verbindungslinien mit dem Ursprung aufeinander senkrecht stehen. Verf. beweist elementar u. a. folgende Sätze: Notwendig und hinreichend für die Existenz eines Tripels orthogonaler Punkte auf (K) ist die Ganzzahligkeit von r. Ist r ungerade, so stellen die Zahlen

$$\begin{aligned} x_1 &= 2(uw - vt), & y_1 &= 2(ut + vw), & z_1 &= u^2 + v^2 - w^2 - t^2; \\ x_2 &= -2(uv + wt), & y_2 &= u^2 - v^2 + w^2 - t^2, & z_2 &= -2(ut - vw); \\ x_3 &= u^2 - v^2 - w^2 + t^2, & y_3 &= 2(uv - wt), & z_3 &= -2(uw + vt) \end{aligned}$$

$(u, v, w, t$ beliebige ganze Zahlen mit $u^2 + v^2 + w^2 + t^2 = r)$ ein Tripel orthogonaler Punkte auf (K) dar. Ist (x_1, y_1, z_1) ein primitiver Gitterpunkt, so gibt es außer den Punkten (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), $(-x_2, -y_2, -z_2)$, $(-x_3, -y_3, -z_3)$ keine weiteren zu (x_1, y_1, z_1) orthogonal liegenden Gitterpunkte auf (K). Zum Schluß weist Verf. auf die Verallgemeinerung des Problems für den n-dimensionalen Raum und den Zusammenhang des Problems mit den Ähnlichkeitstransformationen des n-dimensionalen Raumgitters hin.

H. L. Schmid (Berlin).

Sansone, G.: Su un problema di analisi indeterminata e sui punti razionali di una famiglia di curve ellittiche dipendenti da un parametro. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **20**, 105—135 (1941).

Von dem Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = c^2, \qquad x^2 + z^2 = b^2, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \tag{1}$$

sind spezielle ganzzahlige Lösungen bekannt. Hier wird die Aufgabe gestellt: Es sind die rationalen Lösungen von (1) zu finden, wenn die Verhältnisse

$$\frac{x}{y} = \frac{v^2 - 1}{2v}, \qquad \frac{c}{y} = \frac{v^2 + 1}{2v} \tag{a}$$

bzw.

$$\frac{c}{a} = \frac{2v}{v^2 + 1}, \qquad \frac{z}{a} = \frac{v^2 - 1}{v^2 + 1} \tag{b}$$

gegeben sind, wobei v ein rationaler Parameter ist. Der Fall a) führt zu dem Gleichungssystem

$$z^2 + \frac{(v^2 + 1)^2}{4} = a^2, \qquad z^2 + \frac{(v^2 - 1)^2}{4} = b^2. \tag{2}$$

Aus einer positiven Lösung von (2) findet man rekursiv unendlich viele Lösungen. Es gibt auch rationale Werte von v, für die (2) keine Lösung in $z \neq 0$ hat. Im Falle b) erkennt man durch einfache Transformationen, daß sich die Aufgabe, rationale Lösungen von (1) zu finden, auf die Aufgabe zurückführen läßt, die rationalen Punkte der elliptischen Kurven 3. Ordnung $C^{(3)}$:

$$Y^2 = 4\left(X - \frac{v^4 + 1}{6}\right)\left(X + \frac{v^4 - 6v^2 + 1}{12}\right)\left(X + \frac{v^4 + 6v^2 + 1}{12}\right)$$

zu finden. Diese Kurven enthalten für jedes rationale v eine Konfiguration von 8 rationalen Punkten. Diesen entsprechen die Lösungen von (1), in denen Nullen auftreten. Kommt auf einer $C^{(3)}$ ein 9-ter rationaler Punkt vor, so existieren unendlich viele rationale Punkte auf ihr. Es gibt Werte von v, z. B. $v = 3$, für die $C^{(3)}$ nur 8 rationale

Punkte enthält. Ist aber z. B. $v = \frac{(\xi-1)(\xi^2+3\xi+1)}{(\xi+1)(\xi^2-3\xi+1)}$, wo ξ beliebig rational ist, so liegen auf jedem der beiden Zweige von $C^{(3)}$ unendlich viele rationale Punkte.
Hofreiter (Wien).

Pall, Gordon: Simultaneous representation in a quadratic and linear form. Duke math. J. 8, 173—180 (1941).

Es wird nach der gleichzeitigen Lösbarkeit der diophantischen Gleichungen

$$a = \sum_{i=1}^{s} c_i x_i^2, \qquad b = \sum_{i=1}^{s} c_i x_i \qquad (a, b, c_i \text{ ganz}) \tag{1}$$

gefragt. Setzt man $u = \prod_{i=1}^{s} c_i$, $t = \sum_{i=1}^{s} c_i$ und $y_j = x_1 - x_j$ $(j = 2, \ldots, s)$, so erhält man

$$ta - b^2 = \Phi(y_2, \ldots, y_s), \quad \text{wo} \quad \Phi = \sum_{j=2}^{s} c_j(t - c_j) y_j^2 - 2\sum_{j<k}^{2,\ldots,s} c_j c_k y_j y_k \tag{2}$$

ist, also nur eine Gleichung. Ist $t \cdot u \neq 0$, so ist die Anzahl der Lösungen von (1) in x_i gleich der Anzahl der Lösungen von (2) in y_j, die die Kongruenz $\sum_{j=2}^{s} c_j y_j \equiv -b \pmod{t}$ befriedigen. Die Form Φ wird näher untersucht, speziell wird der Fall betrachtet, wo Φ einem Geschlecht angehört, das nur eine Klasse enthält. Zuletzt werden hinreichende Bedingungen für nichtnegative Lösungen von (1) aufgestellt, falls alle $c_i > 0$ sind.
Hofreiter (Wien).

McKeon, R. P., and H. H. Goldstine: A generalized Pell equation. 1. Trav. Inst. Math. Tbilissi 8, 165—171 (1940).

Es wird hier nicht die allgemeine kubische Pellsche Gleichung betrachtet, sondern der Spezialfall, wo der Parameter 2 ist. Es handelt sich somit um die diophantische Gleichung

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 1. \tag{1}$$

Eine Lösung (x, y, z) von (1) heißt nicht-negativ, wenn x, y und z nicht negativ sind. Man kann alle nicht-negativen Lösungen $\neq (1, 0, 0)$ von (1) durch folgende Rekursionsformeln finden:

$$x_{n+1} = x_n + 2y_n + 2z_n, \qquad y_{n+1} = x_n + y_n + 2z_n, \qquad z_{n+1} = x_n + y_n + z_n,$$

wobei $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 1)$ ist. Alle andern Lösungen von (1) findet man daraus in einfacher Weise. Es gilt ferner: Zu jeder Lösung (x, y, z) von (1) gibt es eine ganze Zahl n, so daß

$$x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4} = \left(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^{n-1},$$

und umgekehrt erhält man damit alle Lösungen von (1), wenn man n alle ganzen Zahlen durchlaufen läßt. Die Zahlen $\pm\left(x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}\right)$, wo (x, y, z) eine Lösung von (1) ist, sind Einheiten des Körpers $K\left(\sqrt[3]{2}\right)$ und umgekehrt. Ist (x_n, y_n, z_n) die n-te nicht-negative Lösung von (1), so ergibt $\frac{2z_n}{x_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Folge von rationalen Zahlen mit dem Grenzwert $\sqrt[3]{2}$.
Hofreiter (Wien).

Bell, E. T.: Transformed multiplicative diophantine equations. Trav. Inst. Math. Tbilissi 8, 1—20 (1940).

Multiplikative diophantische Gleichungen sind Gleichungen von der Gestalt $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} = y_1^{b_1} y_2^{b_2} \cdots y_n^{b_n}$, wobei die Exponenten natürliche Zahlen sind. Solche Gleichungen und Gleichungssysteme können nach bekannten Methoden von Bell und Ward gelöst werden. Hier werden zunächst die vollständigen Lösungen von 24 multiplikativen Gleichungen oder Gleichungssystemen angegeben. Viele diophantische Gleichungen lassen sich durch nichtsinguläre, lineare Transformationen oder durch Transformationen höheren Grades auf multiplikative Gleichungen zurückführen und damit lösen. Das wird hier an einer großen Anzahl von Beispielen durchgeführt. Ich führe ein Beispiel an: Es soll die vollständige Lösung von (1) $mx^2 + ny^2 = mz^2 + nw^2$

ermittelt werden. (1) ist gleichbedeutend mit $m(x+z)(x-z)=n(w+y)(w-y)$. Durch $x+z\to y$, $x-z\to z$, $w+y\to v$, $w-y\to w$ erhält man $myz=nvw$. Die Konstanten m, n werden durch die Unbestimmten x bzw. u ersetzt und damit erhält man die multiplikative Gleichung $xyz=uvw$. Aus den Lösungen dieser Gleichung ergibt sich die vollständige Lösung von (1). *Hofreiter* (Wien).

Benneton, Gaston: Sur la représentation des nombres entiers par une somme de 2^m carrés et sa mise en facteurs. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 591—593 (1941).

Lagrange hat gezeigt, daß sich jede natürliche Zahl in eine Summe von vier Quadraten zerlegen läßt; Jacobi hat die Anzahl der Darstellungen berechnet. Diese beiden Ergebnisse werden hier durch elementare Überlegungen einander näher gebracht. Die Ausführung ist skizzenhaft. *Hofreiter* (Wien).

Benneton, Gaston: Sur la représentation des nombres entiers par une somme de 2^m carrés et sa mise en facteurs. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 637—639 (1941).

Unter einer Form $N(n)$ wird hier ein Quadrupel von ganzen Zahlen $[a, b, c, d]$ verstanden, wobei $n=a^2+b^2+c^2+d^2$ ist. Das Produkt $N=N_1N_2$ von zwei Formen $N_1=[a_1, b_1, c_1, d_1]$, $N_2=[a_2, b_2, c_2, d_2]$ wird durch die Euler-Lagrangesche Identität definiert: $N=[a, b, c, d]$ mit $a=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2$, $b=-b_1a_2+a_1b_2-d_1c_2+c_1d_2$, $c=-c_1a_2+a_1c_2+d_1b_2-b_1d_2$, $d=-d_1a_2+a_1d_2-c_1b_2+b_1c_2$. Es werden Ergebnisse über die Anzahl der Zerlegungen einer Form in ein Produkt von zwei und mehr Formen mitgeteilt. *Hofreiter* (Wien).

Hua, Loo-Keng: Sur le problème de Waring relatif à un polynome du troisième degré. C. R. Acad. Sci., Paris **210**, 650—652 (1940).

a, b, c, d mit oder ohne Indizes bedeuten ganze Zahlen. Es sei $f(x)=\frac{1}{6}a(x^3-x)+\frac{1}{2}b(x^2-x)+cx+d$, $(a, b, c)=1$, $a>0$. Verf. kündigt ohne Beweis folgende Sätze an: I. Alle hinreichend großen, natürlichen Zahlen n sind in der Gestalt (1) $n=f(x_1)+\cdots+f(x_k)$ ($x_j\geqq 0$ ganz) mit $k=8$ darstellbar. II. Fast alle natürlichen n sind in der Gestalt (1) mit $k=4$ darstellbar (wobei 4 die beste Konstante ist), wenn man von folgenden Ausnahmefällen absieht, erstens: (2) $f(x)\equiv 2(2a_1+1)x^3+(2b_1+1)x^2+2(2c_1+1)x+d_1 \pmod{16}$ (hier ist $k=7$ zu setzen); zweitens: (2) gilt nicht, es ist aber (3) $f(x)\equiv a_2x^3+3b_2x^2+3c_2x+d_2 \pmod 9$, $b_2^2\equiv a_2(b_2+a_2) \pmod 3$ (hier ist $k=5$ zu setzen). Die Hauptschwierigkeit liegt im Beweis von II, der inzwischen vom Verf. in einer anderen Arbeit ausführlich dargestellt wurde (dies. Zbl. **24**, 249). — In der vorliegenden Note wird noch folgender Hilfssatz bewiesen (der im Beweis von II gebraucht wird): Die Anzahl der Lösungen der Kongruenz $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)\equiv n \pmod p$ (n beliebig, p Primzahl) in ganzen $x_i (0\leqq x_i<p)$ ist $p^3+O(p^2)$. *Jarník* (Prag).

Stöhr, Alfred: Bemerkungen zur additiven Zahlentheorie. 1. Mittlere Ordnung. J. reine angew. Math. **183**, 168—174 (1941).

Ist A eine Menge natürlicher Zahlen und $l(m)$ die kleinste Zahl von Summanden, mit der sich m als Summe von Zahlen aus A darstellen läßt, so heißt $h_A=\max_{m=1,2,\ldots} l(m)$, falls es existiert, die Ordnung von A. Verf. bezeichnet in Analogie dazu

$$\lambda_A=\overline{\operatorname{fin}}_{x=1,2,\ldots}\frac{1}{x}\sum_{m=1}^{x} l(m),$$

falls diese obere Grenze existiert, als die mittlere Ordnung von A. Wenn h_A existiert, existiert auch λ_A, und es ist $\lambda_A\leqq h_A$. Verf. zeigt nun: Wenn λ_A existiert, existiert auch h_A, und es ist $h_A<2\lambda_A$. Diese Abschätzungen (als solche von λ_A bei gegebenem h_A betrachtet) lassen sich für $h_A\geqq 2$ ohne weitere Voraussetzungen nicht verbessern. Auf den Fragenkreis der wesentlichen Komponenten angewandt, ergibt der Satz des Verf. die interessante Tatsache, daß bisher noch keine anderen Mengen als die Basen endlicher Ordnung als wesentliche Komponenten erkannt sind. Ferner wird

gezeigt, wie sich die Abschätzungen von λ_A unter Heranziehung der Dichten von nA ($n = 1, 2, \ldots$) verschärfen lassen. *Rohrbach* (Prag).

Walfisz, Arnold: Zur additiven Zahlentheorie. VII. 1. Mitt. Mitt. Akad. Wiss. Georg. SSR **2**, 7—14 (1941).

Die Arbeit behandelt die Darstellungen natürlicher Zahlen n in der Gestalt $n = p_1 + \cdots + p_r$ ($p_1, \ldots, p_r$ Primzahlen). Es seien n, r natürliche Zahlen, $r \geqq 3$,

$$S_r(n) = \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \exp\left(-\frac{2\pi i a n}{q}\right).$$

Verf. beweist mit den Hilfsmitteln von IV (dies. Zbl. **18**, 345) — also ohne Benutzung des Siegelschen Satzes — für $r \geqq 3$ die Formel

$$\sum_{p_1 + \cdots + p_r = n} \log p_1 \ldots \log p_r = \frac{n^{r-1}}{(r-1)!} S_r(n) + O\left(n^{r-1} (\log n)^{1-r}\right).$$

Jarník (Prag).

Walfisz, Arnold: Zur additiven Zahlentheorie. VII. 2. Mitt. Mitt. Akad. Wiss. Georg. SSR **2**, 221—226 (1941).

Bezeichnungen wie im vorsteh. Referat. Bekanntlich hat Vinogradow (dies. Zbl. **16**, 291; **17**, 198; **19**, 153) für $r = 3$ die Formel

$$\sum_{p_1 + \cdots + p_r = n} 1 = \frac{n^{r-1}}{(r-1)! \log^r n} S_r(n) + o\left(\frac{n^{r-1}}{\log^r n}\right)$$

bewiesen. Verf. zeigt, wie man daraus die Richtigkeit dieser Formel durch Induktion für jedes $r > 3$ beweisen kann. *Jarník* (Prag).

Walfisz, Arnold: Zur additiven Zahlentheorie. 8. Trav. Inst. Math. Tbilissi **8**, 69—107 (1940).

Die Arbeit ist eine unmittelbare Fortsetzung von VI (wegen der Bezeichnungen vgl. das Referat über VI in dies. Zbl. **21**, 9). Es werden erstens für weitere 19 quaternäre quadratische Formen $Q_j (33 \leqq j \leqq 51)$ Ausdrücke für $R_j(n)$ (= Anzahl der Darstellungen von n durch die Form Q_j) abgeleitet. Dabei wird die Identität für $T(\theta) T(2\theta)$ herangezogen; es wird auch gezeigt, wie man zur Herleitung eines Teiles dieser Formeln statt der genannten Identität die wesentlich leichter beweisbare Identität für $T^2(\theta)$ zusammen mit einer Jacobischen Formel benutzen kann. Es folgen zwei Identitäten für die Ausdrücke $X_m = x^m + x^{2m} + x^{3m} + \cdots$; z. B. lautet die erste Identität:

$$\sum_{r=1}^{p-1} \left(\tfrac{1}{2} + \sum_{m \equiv r} X_m - \sum_{m \equiv 2p+r} X_m - \sum_{m \equiv -r} X_m + \sum_{m \equiv 2p-r} X_m\right)^2$$
$$= \tfrac{1}{4}(p-1) + \sum_{n=1}^{\infty} (n X_n - n X_{pn} - 2(p-1)(-1)^n n X_{2pn});$$

dabei ist p eine ungerade Primzahl und m läuft über natürliche Zahlen, welche mod $4p$ den angegebenen Kongruenzen genügen. Der Beweis stützt sich auf die Identität für $T^2(\theta)$. *Jarník* (Prag).

Ricci, G.: Recenti risultati nel campo dell'aritmetica. II problema di Goldbach. Rend. Semin. mat. fis. Milano **13**, 204—226 (1939).

Ein referierender Artikel. Inhalt: I. Übersicht der älteren und neueren Untersuchungen über $\pi(x)$, bis zu den $O - \Omega_R - \Omega_L$-Abschätzungen von Littlewood. II. Die Goldbachsche Vermutung; die analytische Methode von Hardy und Littlewood; die Methode von V. Brun und ihre Anwendungen (Resultate von Brun, Rademacher, Estermann, Ricci); der Satz von Schnirelmann und seine Verschärfungen (Romanoff, Heilbronn-Landau-Scherk, Ricci); der Satz von Vinogradow. *Jarník* (Prag).

Mardjanichvili, C.: Sur la démonstration du théorème de Goldbach-Vinogradoff. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **30,** 687—689 (1941).

Es sei $J(N)$ die Anzahl der Darstellungen der ungeraden Zahl N als Summe von drei Primzahlen. Für $J(N)$ hat bekanntlich I. Vinogradow (vgl. z. B. dies. Zbl. **16,** 291; **17,** 198) eine asymptotische Formel bewiesen, aus welcher sich insbesondere $J(N) > 0$ für große N ergibt. Verf. gibt eine Modifikation des Beweises dieser Formel; die Abänderung betrifft die major arcs und beruht auf einer Formel von A. Page (dies. Zbl. **11,** 149) über die Verteilung von Primzahlen in arithmetischen Progressionen. Zugleich ergibt sich ein etwas schärferes Restglied als bei Vinogradow. — Auf S. 689, Formel (11) und eine Zeile später lies $U(q, -N)$ statt $U(q, aN)$. *Jarník.*

Vinogradoff, I. M.: Some general property of distribution of products of prime numbers. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **30,** 681—682 (1941).

Verf. hat in früheren Arbeiten [vgl. z. B. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. math. **1939,** 371—398; dies. Zbl. **24,** 293, und C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **30,** 287—288 (1941); dies. Zbl. **24,** 295] Sätze über $\sum_{M<p\leqq N}\exp(2\pi i\alpha kp)$, $\sum_{M<p\leqq N}\exp\left(2\pi i f(p)\right)$ angegeben, wo p über Primzahlen läuft; daraus folgten Sätze über die Verteilung der Folgen αp und $f(p)$ $(p = 2, 3, 5, \ldots)$ modulo 1. Hier werden ohne Beweis analoge Sätze angegeben, wobei aber p nicht über Primzahlen, sondern über eine der folgenden Klassen C_1, C_2, C_3, C_4 natürlicher Zahlen läuft: C_1 ist die Menge der quadratfreien Zahlen; C_2 ist die Menge aller Zahlen mit vorgegebener Anzahl r von Primfaktoren $(r > 1)$; C_3 bzw. C_4 ist die Menge aller Zahlen mit gerader bzw. ungerader Anzahl von Primfaktoren. Es folgen u. a. Resultate über die Möbiussche Funktion $\mu(n)$. — Wahrscheinliche (da Beweise nicht gegeben werden) Druckfehler: In der Formel des Theorem 1 soll der Exponent links $2\pi i\alpha kP$ heißen; rechts fehlt der Faktor N; im O-Glied des Theorem 6 fehlt der Faktor $N^{1+\varepsilon}$; auf der vorletzten Zeile lies $c^2 \leqq n < (c+\sigma)^2$. *Jarník.*

Hua, Loo-Keng: On a theorem due to Vinogradow. Quart. J. Math., Oxford Ser. **11,** 161—176 (1940).

Für ganze $k > 1$, $r \geqq 1$, $P > 0$ sei

$$J(P; k, r) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x=1}^{P} \exp\left(2\pi i(\alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \cdots + \alpha_1 x)\right)\right|^r d\alpha_1 \ldots d\alpha_k.$$

Vinogradow hat folgenden wichtigen Hilfssatz bewiesen: Es sei r die größte gerade Zahl mit $r < Lk(k+1)(k+2)\log k$, wo $L = 4{,}1$ für $k \geqq 14$ (für $1 < k < 14$ muß L etwas größer gemacht werden, z. B. $L = 4{,}12$ für $k = 13$ bis zu $L = 4{,}81$ für $k = 2$). Dann ist $J(P; k, r) = O(P^{r-\frac{1}{2}k(k+1)})$ für wachsendes P (vgl. dies. Zbl. **19,** 249). Verf. gelingt es, den Wert von r für kleine $k (k \leqq 10)$ zu verkleinern, allerdings mit einer um P^{ε} schwächeren Abschätzung. Er bekommt: die Abschätzung $J(P; k, s) = O(P^{s-\frac{1}{2}k(k+1)+\varepsilon})$ gilt (für jedes $\varepsilon > 0$) für folgende Paare (k, s): (2,6), (3,16), (4,46), (5,124), (6,312), (7,760), (8,1778), (9,4068), (10,9190). *Jarník* (Prag).

Ingham, A. E.: On the estimation of $N(\sigma, T)$. Quart. J. Math., Oxford Ser. **11,** 291—292 (1940).

Verf. hat [Quart. J. Math., Oxford Ser. **8,** 255—266 (1937); dies. Zbl. **17,** 389] u. a. die Größenordnung der Differenz zwischen aufeinanderfolgenden Primzahlen untersucht, wobei er für $N(\sigma, T)$, welches die Anzahl der Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ von $\zeta(s)$ mit $\beta \geqq \sigma$, $0 < \gamma \leqq T$ bedeutet, die Abschätzung

$$N(\sigma, T) = O(T^{\lambda(\sigma)(1-\sigma)}\lg^5 T), \qquad T \to \infty,$$

ableitete. Dies gilt gleichmäßig für $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1$, wenn $\lambda(\sigma) = 1 + 2\sigma$. In dieser Note wird bewiesen, daß die Approximation auch gilt für $\lambda(\sigma) = 3(2-\sigma)^{-1}$, was eine Verbesserung ist, da $1 + 2\sigma - 3(2-\sigma)^{-1} > 0$ ist für $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. Verf. fügt hinzu, daß für das Problem der Primzahldifferenz damit nichts gewonnen ist, weil dort nur das Maximum von $\lambda(\sigma)$ in Frage kommt. Der Beweis erfolgt durch Ausgestaltung des in

der genannten früheren Arbeit enthaltenen Gedankenganges nebst Heranziehung einer Ungleichung von R. M. Gabriel, J. London Math. Soc. 2, 112—117 (1927), Theorem 2. *Kienast* (Küsnacht, Zürich).

Overing, A. C. M.: Über ganze Funktionen. Bol. mat. **13**, 260—268 (1940) [Spanisch].

Mittels Vinogradoffscher Methoden untersucht Verf. einige arithmetische, d. h. für ganze stetige n definierte Funktionen $f(n)$ und insbesondere die sogenannten multiplikativen Funktionen, das sind solche, die, ohne identisch zu verschwinden, für alle zueinander teilerfremden a, b der Gleichung $f(ab) = f(a)\,f(b)$ genügen. Weiterhin bestimmt Verf. den Ausdruck $F(n)$ für die Summe $\sum f(d)$, die sich auf alle Teiler d von n erstreckt bei multiplikativem $f(n)$, und beweist, daß dann auch $F(n)$ multiplikativ ist. Mittels der Moebiusschen Funktion $\mu(n)$ drückt er $f(n)$ umgekehrt durch $F(n)$, auch wenn dieses nicht multiplikativ ist, aus und wendet seine Ergebnisse auf einige bekannte arithmetische Funktionen, z. B. das Eulersche $\varphi(n)$, an. Alle diese Eigenschaften sowie einige noch allgemeinere wurden schon von Dirichlet, Bugajef, Cesàro u. a. untersucht und ordnen sich in eine allgemeine Theorie des Ref. ein, die er als „Calcolo aritmetico integrale" bezeichnet hat. [Vgl. Rev. Math. Torino **9**, (1908); Atti Accad. Gioenia Catania, V. s. **8**, mem. 11, 1—34 (1915).] *M. Cipolla* (Palermo).

Rademacher, Hans, and Albert Whiteman: Theorems on Dedekind sums. Amer. J. Math. **63**, 377—407 (1941).

Die Dedekindschen Summen $s(h, k) = \sum_{\mu=1}^{k}{}' \left(\left(\frac{\mu}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{h\mu}{k}\right)\right)$, in denen $((x)) = 0$ für ganze x, $((x)) = x - [x] - \frac{1}{2}$ für nicht ganze x definiert ist, treten bei Dedekind in den Untersuchungen über $\log\eta(\tau)$, $\eta(\tau) = \exp\frac{\pi i\tau}{12}\prod_{m=1}^{\infty}(1 - \exp 2\pi i m\tau)$ auf. Ohne wie Dedekind das Verhalten von $\log\eta(\tau)$ bei Modulsubstitutionen zu benutzen, leiten Verff. die arithmetischen Relationen zwischen den Dedekindschen Summen auf elementarem Wege ab und geben weitere Formeln an. Nach Einführung von Hilfsfunktionen $r(h, k)$, $S(h, k)$ und $R(h, k)$ werden weitere Beziehungen zwischen den vier Summen hergestellt, Kongruenzen bewiesen und schließlich mit ihrer Hilfe Eigenschaften der Summen

$$A_k(n) = \sum_{h \bmod k}{}' \exp\left(\pi i s(h, k) - 2\pi i \frac{hn}{k}\right)$$

hergeleitet, die als Exponenten in gewissen Summen von Einheitswurzeln in den Reihen für die Partitionenanzahl $p(n)$ auftreten. [Vgl. hierzu D. H. Lehmer, Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 271—295 (1938); dies. Zbl. **18**, 107.] *E. Schulenberg* (Berlin).

Tietze, Heinrich: Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren. 1. Rekursionsformeln. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. **1940**, 23—54 (H. 1).

Ein System von ganzen, nicht negativen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m$, deren Summe gleich m ist, wird als eine Partition von m bezeichnet. Es seien $n + 1$ Partitionen der Zahl m gegeben: $\mathfrak{A}^{(\nu)} = (a_1^{(\nu)}, \ldots, a_m^{(\nu)})$ $(0 \leqq \nu \leqq n)$. Es sollen m^{n+1} Zahlen $g_{\mu_0\mu_1\ldots\mu_n}$ so bestimmt werden, daß jede einen der Werte 0 oder 1 hat und für jedes ν und jeden Wert μ_ν die Gleichung $\sum^{(\nu)} g_{\mu_0\mu_1\ldots\mu_n} = a_{\mu_\nu}^{(\nu)}$ $(0 \leqq \nu \leqq n,\ 1 \leqq \mu_\nu \leqq m)$ gilt. Dabei ist unter $\sum^{(\nu)}$ die n-fache Summe über alle Indizes μ_λ $(\lambda \neq \nu)$ zu verstehen. Die Aufgabe wird mit $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{A}'\,|\ldots|\,\mathfrak{A}^{(n)})$ bezeichnet, m heißt ihr Grad, $n + 1$ ihre Dimension. Man fragt nach der Anzahl $N(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{A}'\,|\ldots|\,\mathfrak{A}^{(n)})$ von Lösungen $g_{\mu_0\mu_1\ldots\mu_n}$ der Aufgabe. Das Problem läßt sich geometrisch deuten: Der Einfachheit halber sei nun $n + 1 = 2$. Dann sind zwei Partitionen $\mathfrak{A} = (a_1, \ldots a_m)$, $\mathfrak{B} = (b_1, \ldots, b_m)$ der Zahl m gegeben. Im ersten Quadranten einer Ebene sind dann m Gitterpunkte so zu wählen, daß für jeden Wert von μ_1 auf der Geraden $x = \mu_1$ genau a_{μ_1} der Gitterpunkte liegen und für jeden Wert von μ_2 auf der Geraden $y = \mu_2$ genau b_{μ_2} Gitterpunkte liegen. Allgemein führt jede Lösung des Problems zu einer Gitterpunktfigur im R_{n+1}. Ist in einer Partition nur ein Element von Null verschieden, so läßt sich das Problem auf ein solches niedrigerer Dimension zurückführen. Denn es gilt $N(m\,|\,\mathfrak{A}'\,|\ldots|\,\mathfrak{A}^{(n)})$

$= N(\mathfrak{A}'|\ldots|\mathfrak{A}^{(n)})$. Hat jede Partition mindestens zwei positive Zahlen, so läßt sich die Aufgabe durch die Rekursionsformel

$$N(\mathfrak{A}|\mathfrak{A}'|\ldots|\mathfrak{A}^{(n)}) = \sum_{\mathfrak{T}^{(\nu)}} N(\mathfrak{A}_1|\mathfrak{T}'|\ldots|\mathfrak{T}^{(n)}) \sum_{\mathfrak{A}^{(\nu)}-\mathfrak{T}^{(\nu)}} N(\mathfrak{A}_2|\mathfrak{A}'-\mathfrak{T}'|\ldots|\mathfrak{A}^{(n)}-\mathfrak{T}^{(n)})$$

auf Aufgaben niedrigeren Grades zurückführen. Dabei sind $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ Partitionen von m_1 bzw. m_2, und es ist $m_1 + m_2 = m$. Ferner sind $\mathfrak{T}', \mathfrak{T}'', \ldots, \mathfrak{T}^{(n)}$ Partitionen von m_1, und die äußere Summe wird über alle Möglichkeiten, n solche Partitionen von m_1 zu wählen, erstreckt. Ist $\mathfrak{T}^{(\nu)} = (t_1^{(\nu)}, \ldots, t_m^{(\nu)})$, $(\nu = 1, \ldots, n)$, so ist $\mathfrak{A}^{(\nu)} - \mathfrak{T}^{(\nu)} = (a_1^{(\nu)} - t_1^{(\nu)}, \ldots, a_m^{(\nu)} - t_m^{(\nu)})$. Das ist eine Partition von m_2, wenn alle Argumente nicht negativ sind. Sollten negative Zahlen auftreten, so werden diese $\mathfrak{A}^{(\nu)} - \mathfrak{T}^{(\nu)}$ weggelassen. Der Beweis der Rekursionsformel ist gedanklich nicht schwierig. Er beruht auf folgenden Sätzen: a) Zu jeder Lösung L von $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}|\mathfrak{A}'|\ldots|\mathfrak{A}^{(n)})$ gehört ein System von n Partitionen $\mathfrak{T}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ der Zahl m_1 und eine bestimmte Lösung L_1 von $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}_1|\mathfrak{T}'|\ldots|\mathfrak{T}^{(n)})$. b) Zu jeder Lösung L von $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}|\mathfrak{A}'|\ldots|\mathfrak{A}^{(n)})$ gehört eine bestimmte Lösung L_2 von $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}_2|\mathfrak{A}'-\mathfrak{T}'|\ldots|\mathfrak{A}^{(n)}-\mathfrak{T}^{(n)})$. Geometrisch: Die der Lösung L entsprechende Gitterpunktfigur kann zerlegt werden in die Figur L_1 derjenigen Gitterpunkte von L, die den Ebenen $x_0 = 1$ bis $x_0 = m_1$ angehören, und in die Figur L_2 der Gitterpunkte von L in den Ebenen $x_0 = m_1 + 1$ bis $x_0 = m$. In vielen Fällen kann man, wie an Beispielen gezeigt wird, ohne Benutzung der Rekursionsformel rascher ans Ziel kommen. In besonderen Fällen läßt sich die Rekursionsformel vereinfachen. *Hofreiter* (Wien).

Tietze, Heinrich: Über Tripel konjugierter Partitionen. Abh. math. Semin. Hansische Univ. **14**, 273—284 (1941).

Im Quadranten $x > 0$, $y > 0$ werde eine Menge $\mathfrak{M}$ von m Gitterpunkten betrachtet, die die Eigenschaft hat, daß mit jedem Gitterpunkt (x', y') auch die Gitterpunkte (x, y) mit $0 < x \leqq x'$, $0 < y \leqq y'$ vorkommen. Ist a_μ bzw. b_μ die Anzahl der Gitterpunkte aus $\mathfrak{M}$ auf der Geraden $x = \mu$ bzw. auf der Geraden $y = \mu$, so werden $(a_1, a_2, \ldots)$ und $(b_1, b_2, \ldots)$ konjugierte Partitionen der Zahl m genannt. Ist $\mathfrak{A} = (a_1, a_2, \ldots)$ eine beliebige Partition von m (somit $m = a_1 + a_2 + \cdots$ und $a_\nu > 0$) und $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots$, so gibt es zu $\mathfrak{A}$ stets eine eindeutig bestimmte konjugierte Partition $\mathfrak{B} = (b_1, b_2, \ldots)$. Nun werde eine Gitterpunktmenge $\mathfrak{M}$ im Bereich $x_\nu > 0$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ betrachtet. Sie heißt komprimiert, wenn mit jedem zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Gitterpunkt $(x_1', \ldots, x_n')$ auch jeder den Ungleichungen $0 < x_\nu \leqq x_\nu'$ genügende Gitterpunkt zu $\mathfrak{M}$ gehört. Dazu gehören die Partitionen $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \ldots, \mathfrak{A}^{(n)}$. Es ist $\mathfrak{A}^{(\nu)} = (a_1^{(\nu)}, a_2^{(\nu)}, \ldots)$, wenn $a_\mu^{(\nu)}$ die Anzahl der Gitterpunkte von $\mathfrak{M}$ in der Hyperebene $x_\nu = \mu$ ist. Die zu einer solchen Menge $\mathfrak{M}$ gehörigen Partitionen $\mathfrak{A}', \ldots, \mathfrak{A}^{(n)}$ bilden ein n-tupel konjugierter Partitionen. Wählt man $\mathfrak{A}', \ldots, \mathfrak{A}^{(n-1)}$ beliebig, so gibt es für $n \geqq 3$ (im Gegensatz zu $n = 2$) nicht immer eine n-te konjugierte Partition und, falls eine solche existiert, so ist sie nicht immer eindeutig bestimmt. Die Anzahl dieser Mehrdeutigkeit werde mit $C = C(\mathfrak{A}'|, \ldots, |\mathfrak{A}^{(n-1)})$ bezeichnet. (Es kann also $C = 0$ und $C > 1$ für $n > 2$ sein.) In der Arbeit wird gezeigt, daß C beliebig groß sein kann. Der Beweis wird zunächst für $n = 3$ geführt, in dem ein Beispiel mit beliebig großem C konstruiert wird. Daraus ergibt sich in einfacher Weise der Beweis für beliebiges n. *Hofreiter.*

Hajós, G.: Einfache Bedeckung mehrdimensionaler Räume mit Würfelgittern. Mat. fiz. Lap. **48**, 37—63 u. dtsch. Zusammenfassung 63—64 (1941) [Ungarisch].

In dieser sehr bemerkenswerten Arbeit wird die bekannte Minkowskische Vermutung, nach welcher ein den $\mathfrak{R}_n$ einfach bedeckendes Würfelgitter zwei an einer ganzen Seitenfläche aneinanderstoßende Würfel besitzen muß, vollständig bewiesen. Bisher lagen Beweise nur für die Fälle $n \leqq 9$ vor. Schon früher hat der Verf. bewiesen, daß die Vermutung mit der folgenden Behauptung äquivalent ist (siehe dies. Zbl. **20**, 6): Ist in der aus einer endlichen abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ gebildeten Gruppenalgebra das Produkt der Reihen $\quad 1 + A_i + A_i^2 + \cdots + A_i^{\alpha_i - 1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$

(wo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Elemente von $\mathfrak{G}$ sind) gleich der Summe aller Elemente von $\mathfrak{G}$, so ist für wenigstens ein i: $A_i^{\alpha_i} = 1$.

In dieser Arbeit wird die Richtigkeit dieser Behauptung bewiesen. — Es wird gezeigt, daß es genügt, als Zahlen α_i nur Primzahlen zuzulassen (dann entspricht allerdings n nicht mehr der Dimensionszahl). Der Beweis der auf diese Form gebrachten Vermutung stützt sich auf eine Reihe gruppenalgebraischer Hilfssätze, in denen die folgende Funktion $d(B_1, B_2, \ldots, B_k)$ der Gruppenalgebraelemente die Hauptrolle spielt: sie ist gleich der Anzahl der (voneinander nicht unbedingt verschiedenen) Primfaktoren der Ordnung derjenigen Untergruppe $\mathfrak{H}(B_1, B_2, \ldots, B_k)$ von $\mathfrak{G}$, welche von den in $B_1, B_2, \ldots, B_k$ enthaltenen Gruppenelementen erzeugt wird. *Béla v. Sz. Nagy.*

Jarník, Vojtěch: Zur Gitterpunktlehre der Ellipsoide

$$\alpha_1(u_1^2 + \cdots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + \cdots + u_r^2) \leqq x.$$

1. Abh. Věstník Král. Čes. Sp. Nauk Nr **3**, 1—63 (1940).

Jarník, Vojtěch: Zur Gitterpunktlehre der Ellipsoide

$$\alpha_1(u_1^2 + \cdots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + \cdots + u_r^2) \leqq x.$$

2. Abh. Čas. mat. fys. **70**, 1—33 (1940).

Im folgenden sei r_1, r_2 ganz, $z = \mathrm{Min}(r_1, r_2) \geqq 4$, $r = r_1 + r_2$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, α_1/α_2 irrational; $Q = Q(u) = \alpha_1(u_1^2 + \cdots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + \cdots + u_r^2)$ sei eine quadratische Form. Für $x > 0$ sei $A_Q(x)$ die Anzahl der im Ellipsoid $Q(u) \leqq x$ liegenden Gitterpunkte; $V_Q(x)$ sei der Inhalt dieses Ellipsoids, $\mathsf{P}(x) = \mathsf{P}_Q(x) = A_Q(x) - V_Q(x)$, $M(x) = M_Q(x) = \int_0^x \mathsf{P}_Q^2(y)\,dy$. Es seien p_n/q_n die Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung der Zahl α_1/α_2 ($p_0/q_0 = [\alpha_1/\alpha_2]$, $(p_n, q_n) = 1$, $q_n > 0$); man setze

$$\gamma = \gamma(\alpha_1, \alpha_2) = \limsup_{v\to\infty} \frac{\log q_{v+1}}{\log q_v}, \qquad \vartheta = \vartheta(\alpha_1, \alpha_2) = \liminf_{v\to\infty} \frac{\log q_{v+1}}{\log q_v},$$

$$f_1 = f_1(Q) = \limsup_{x\to\infty} \frac{\log M(x)}{\log x}, \qquad f_2 = f_2(Q) = \liminf_{x\to\infty} \frac{\log M(x)}{\log x}.$$

Weiter bezeichnet $\varphi(x)$ stets eine solche positive, stetige Funktion, für die $\varphi(x) \cdot x^{-1}$ nicht abnehmend ist. Mit $\psi(x)$ bezeichnet man stets die zu φ inverse Funktion. $c_1, c_2, \ldots$ sind positive Zahlen, die nur von $r_1, r_2, \alpha_1, \alpha_2$ abhängen; $c(t, v)$ bedeutet z. B. eine positive, nur von $r_1, r_2, \alpha_1, \alpha_2, t, v$ abhängige Zahl. Endlich sei

$$F(x) = F_Q(x) = x^{r-1} \sum_v \sum_{m,n} \frac{1}{q_v^2 n^{r_1-2} m^{r_2-2}} \cdot \mathrm{Min}\left(1, \left(\frac{q_{v+1} mn}{x}\right)^z\right);$$

dabei läuft v über alle Zahlen mit $p_v > 0$, bei einem gegebenen v läuft m (bzw. n) über alle positiven Teiler der Zahl p_v (bzw. q_v). — Das Hauptergebnis der ersten Abhandlung ist folgendes: Es sei $z \geqq 6$. Für $x > c_1$ ist $c_2 F(x) < M(x) < c_3 F(x)$; allgemeiner: es sei $0 \leqq \mu < 1$; dann ist $c_2(\mu)F(x) < M(x) - M(\mu x) < c_3(\mu)F(x)$ für $x > c_1(\mu)$. Die Bedeutung dieses Satzes liegt darin, daß die Größenordnung der Funktion M dieselbe ist wie bei der Funktion F, die eine Summe der positiven Glieder ist. Dabei ändert sich nicht die Größenordnung der Funktion F, wenn man die Glieder mit $q_v > x$ wegläßt. Zur Untersuchung des Verlaufs der Funktion F genügt also eine verhältnismäßig kleine Anzahl der Glieder in F. Der Verlauf der Funktion F — also auch der Verlauf der Funktion M — wird in einer Reihe von Sätzen (Satz 1—16) in der 1. Abhandlung untersucht. Aus dieser Reihe nehme ich folgende Sätze heraus (alle gelten für $z \geqq 6$, manche haben schon eine spezielle Form): I. $f_1 = r - 1 - \frac{2}{\gamma}$ (Satz 6). II. Im Gegensatz zu f_1 ist f_2 nicht allgemein eindeutig durch die Zahlen $r_1, r_2, \gamma, \vartheta$ bestimmt (Satz 7). Im Satze 8 werden Ungleichungen nach oben und unten für f_2 abgeleitet. III. Wenn aber $\vartheta > z + 2$ ist, so ist $f_2 = r - 1 - \frac{2z}{z + 2 + \frac{d}{\gamma}}$, wo $d = 2$

(bzw. $=1, =0$) für $|r_1 - r_2| = 0$ (bzw. $=1, >1$) ist (Satz 14). Man kann noch schärfere Ergebnisse ableiten, z. B. IV. Findet man eine Funktion φ, so daß $0 < \limsup_{v\to\infty} \frac{q_{v+1}}{\varphi(q_v)} < \infty$ gilt (es gibt immer eine solche Funktion), dann ist

$$0 < \limsup_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x^{r-1}} \psi^2(x) < \infty$$

(Satz 1). V. Es sei $|r_1 - r_2| > 3$; dann ist

$$S = \liminf_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x^{r-1-\frac{2z}{z+2}}} < \infty$$

und für $\vartheta > z+2$ gleichzeitig $S > 0$ (Satz 15); ein ähnlicher, aber komplizierterer Satz gilt für $r_1 = r_2$ (Satz 16). VI. Es ist immer $\liminf_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x^{r-3}} > 0$ (Satz 4); dagegen ist $\limsup_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x^{r-3}} < \infty$ dann und nur dann, wenn die Nenner der Kettenbruchentwicklung der Zahl α_1/α_2 beschränkt sind (Satz 3). — Ähnliche, aber nicht so scharfe Ergebnisse sind für $z \geqq 4$ in einer früheren Abhandlung des Verf. [Math. Z. **36**, 581—617 (1933); dies. Zbl. **6**, 394] bewiesen worden. In der zweiten Abhandlung untersucht Verf. anstatt $M(x)$ die Funktion $\mathsf{P}(x)$, und zwar auch in Hinsicht auf das Vorzeichen. Man setze

$$f_+ = \limsup_{x\to\infty} \frac{\log \mathrm{Max}(0, \mathsf{P}(x))}{\log x}, \qquad f_- = \limsup_{x\to\infty} \frac{\log \mathrm{Max}(0, -\mathsf{P}(x))}{\log x},$$

$$f = \limsup_{x\to\infty} \frac{\log|\mathsf{P}(x)|}{\log x}.$$

Dann gilt für $z \geqq 4: f = f_+ = f_- = \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\gamma}$ (Satz 1). Unter Anwendung des Hauptsatzes der vorigen Abhandlung wird folgendes scharfe Ergebnis abgeleitet (Satz 4): Es sei $0 \leqq \mu < 1$, $\varepsilon > 0$. Dann gilt für $z \geqq 6$: 1. $|\mathsf{P}(x)| < c_4(\varepsilon) \sqrt{\frac{F(x)}{x}} \cdot x^{\varepsilon}$ für $x > c_5(\varepsilon)$. 2. Für $x > c_6(\mu, \varepsilon)$ gibt es im Intervall $(\mu x, x)$ zwei Zahlen x_1, x_2 so, daß $\mathsf{P}(x_1) > \sqrt{\frac{F(x_1)}{x_1}}\, x_1^{-\varepsilon}$, $\mathsf{P}(x_2) < -\sqrt{\frac{F(x_2)}{x_2}}\, x_2^{-\varepsilon}$ ist. Noch wesentlich schärfere Ergebnisse gibt in einem Spezialfall folgender Satz (Satz 2): Es sei $z > 10$, die Nenner der Kettenbruchentwicklung der Zahl α_1/α_2 seien beschränkt. Dann gilt: 1. $|\mathsf{P}(x)| < c_7 x^{\frac{r}{2}-2}$ für $x > c_8$. 2. Zu jedem $x > c_9$ gibt es zwei Zahlen x_1, x_2 mit $x - \frac{c_{10}}{x} < x_i < x$ $(i = 1, 2)$, so daß $\mathsf{P}(x_1) > c_{11} x_1^{\frac{r}{2}-2}$, $\mathsf{P}(x_2) < -c_{11} x_2^{\frac{r}{2}-2}$ ist. 3. Die in 2 beschriebene Geschwindigkeit der Schwankung der Funktion P kann nicht verschärft werden. Ist nämlich $\varepsilon > 0$, $x_2 > x_1 > 1$, $\mathsf{P}(x_1) > \varepsilon x_1^{\frac{r}{2}-2}$, $\mathsf{P}(x_2) < -\varepsilon x_2^{\frac{r}{2}-2}$, so ist $x_2 - x_1 > c_{12}\frac{\varepsilon}{x_2}$. Ein ähnlich scharfer Satz wird auch im allgemeinen Fall (unbeschränkte Nenner, $z > 10$) abgeleitet (Satz 3): Es sei φ eine Funktion mit $0 < \limsup_{v\to\infty} \frac{q_{v+1}}{\varphi(q_v)} < \infty$ und A eine Zahl mit $0 < A < \limsup_{v\to\infty} \frac{q_{v+1}}{\varphi(q_v)}$. Dann gelten ähnliche Ergebnisse wie im Satz 2. Man muß nur in 1. und 2. $x^{\frac{r}{2}-1}\psi^{-1}(x)$ anstatt $x^{\frac{r}{2}-2}$ schreiben; in 2 und 3 ist die Länge des Intervalles der Größenordnung nach $\psi^{-1}(x)$ anstatt x^{-1}, und die Konstanten c sind noch von weiteren Parametern abhängig. Im Vergleich zum Satz 2 haben aber die Behauptungen des Satzes 3 folgenden Mangel: sie gelten nicht für alle x, sondern nur für diejenigen x, die von derselben Größenordnung sind, wie eines der unendlichvielen q_{v+1} mit $\frac{q_{v+1}}{\varphi(q_v)} > A$. Für die übrigen x gilt der nicht so scharfe Satz 4. Auch für $4 \leqq z \leqq 10$ werden analoge, aber nicht so scharfe Ergebnisse ab-