Werk

Titel: Analysis

Jahr: 1941

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0024|log8

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Jacobsthal, Ernst: Über die Funktionalgleichung $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Norske Vid. Selsk., Forh. **12**, 74—75 (1939).

Nach De la Vallée-Poussin ist die einzige Lösung der im Titel genannten Funktionalgleichung $f(x)=cx$, falls man von $f(x)$ die Beschränktheit in einem festen (im übrigen beliebig kleinen) Intervall fordert. Hierfür gibt Verf. einen neuen Beweis, indem er mit $f(x_0)\neq 0$ $\Phi(x)=f(x_0)^{-1}f(x_0x)-x$ bildet und zeigt, daß Φ für jede rationale Zahl verschwindet, jede rationale Zahl zur Periode hat und für jedes rationale r der Gleichung $\Phi(rx)=r\Phi(x)$ genügt, woraus erst die Beschränktheit und dann das identische Verschwinden von $\Phi(x)$ erschlossen wird. *Harald Geppert.*

Analysis.

Allgemeines:

● **Picone, Mauro: Appunti di analisi superiore.** Napoli: Rondinella 1940. XVI, 847 pag. geb. L. 110.—.

Dem Vorwort nach will das Werk dem Jünger der Mathematik zu seiner analytischen Unterweisung und als Hilfsmittel der Forschung dienen. Es betont die mit den Naturwissenschaften verbundenen Zweige der Mathematik. Ihre Spaltung in eine „reine" und „angewandte" Mathematik lehnt Verf. ab und redet der Einheit dieser Wissenschaft das Wort, die s. E. gerade wegen der Anwendungen nicht hoch genug ausgebildet und mit genügend allgemeinem Inhalt erfüllt werden kann. Das Buch ist auch für Physiker und Ingenieure mit Nutzen lesbar; diese finden in ihm z. B. die in ihr Fach schlagenden Teile der Lehre von den Integralgleichungen. In der mathematischen Physik legt Verf. mehr Wert darauf, allgemeine Verfahren zu lehren, als Einzelaufgaben mit besonderen Kunstgriffen zu lösen. Der reiche Inhalt des ebenso weit in die Breite wie in die Tiefe reichenden Werkes läßt sich hier nur andeuten; er gliedert sich in sieben Abschnitte: I. Funktionentheorie. [Komplexe Integration. Sätze von Cauchy, Morera, Weierstraß, Laurent. Residuen. Anwendung auf die Berechnung uneigentlicher Integrale. Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen (V.).] II. Grundlehren von den harmonischen Funktionen (h. F.). [Ihre allgemeinen Eigenschaften. Kelvinsche Verwandlung. Innere und äußere Dirichletsche Aufgabe (D. A.). Analytisches Verhalten der h. F. zweier V. Integralsätze (von Green, Stokes, Gauß) in zwei und drei V. Neumannsche Aufgabe (N. A.) in der Ebene. Harmonische Reihen im Raume.] III. Grundeigenschaften der Fourierschen Reihen. [Die Fragestellung. Fouriersche Reihen in der Physik. Besselsche Ungleichung. Parsevalscher Satz. Einfachste Kennzeichen der Konvergenz. Funktionen beschränkter Schwankung, zweiter Mittelwertsatz und die Lehren von Jordan und Lebesgue. Reihenabschnitte. Bestimmung einer Funktion durch ihre Fourierschen Vorzahlen. Mittlere Konvergenz der Abschnitte. Besondere Beispiele Fourierscher Reihen.] IV. Laplacesche Funktionen und Reihen. [Hilfssätze über reelle Funktionen. Poissonsches Integral auf der Kugel. Kugelfunktionen n-ter Ordnung. Schläflis Ausdruck des Legendreschen Polynoms. Summenformel von Christoffel. Abschätzung der Kugelfunktionen. Poissonsche und gewöhnliche Summierung der Laplaceschen und Legendreschen Reihe.] V. Ergänzungen zur Lehre von den h. F. [Satz von Harnack. Singularitäten h.er F. Satz von Poincaré-Hadamard-Noaillon. D. A., gemischte und N. A. für Kreisring und Kugelschale. Verwandlungen bei den Randwertaufgaben h.er F. in zwei und drei V.: D. A. und N. A. für Halbebene und Halbraum, für die Ellipse. D. A. für Winkelraum und Streifen.] VI. Fouriersche und Legendresche Doppel- (und vielfache) Reihen. [In ähnlichem Aufbau wie III.] VII. Über einige klassische Gleichungen der mathematischen Physik. [Orthogonalisierung. Annäherung einer Funktion durch lineare Verbindungen gegebener. Annäherung im Mittel. Besselsche Differentialgleichung. Lineare Integralgleichungen: Iterierte Kerne. Lösender Kern. Eigenwerte und Eigenfunktionen. Versetzte Gleichung. Fredholmsche Sätze. Volterrasche

Integralgleichungen zweiter Art. Anwendung auf lineare Differentialgleichungen. Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen. Ihre Größt- und Kleinst-Eigenschaften. Entsprechende Behandlung der Systeme von Integralgleichungen. Allgemeines über lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung: Die allgemeinen Aufgaben von Cauchy und Dirichlet. Die zweite bei elliptisch-parabolischen nichtnegativen Gleichungen. Schwingungsartige und nichtschwingungsartige Vorgänge. Allgemeine Lösungsverfahren: Überführung der Aufgabe in eine Integralgleichung. Greensche Funktion. Verfahren der Abbildung; Beispiele: Laplacesche und Fouriersche Abbildung. Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen nach Ritz.]
L. Koschmieder (Graz).

Tambs Lyche, R.: Über den Satz von Rolle. Norsk mat. Tidsskr. **22**, 105—109 (1940) [Norwegisch].

Der Beweis des Satzes von Rolle wird gewöhnlich auf den Existenzsatz zurückgeführt: Eine stetige Funktion in einem geschlossenen Intervall hat ein Maximum in diesem Intervall. Verf. gibt einen „konstruktiven" Beweis des Satzes von Rolle mit Hilfe von Intervallschachtelungen, wobei er über den Konvergenzgrad des Verfahrens genaue Aussagen machen kann. Gegen G. Kowalewskis konstruktiven Beweis (Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, 2. Aufl., S. 62) erhebt Verf. den Einwand, daß der Beweis nicht im üblichen Sinne konstruktiv sei, da i. a. nicht angegeben werden kann, mit welcher Genauigkeit gewisse Zwischenschritte ausgeführt werden müssen.
H. L. Schmid (Berlin).

Fubini, G.: Der Mittelwertsatz für nichtdifferenzierbare Funktionen. Publ. Inst. Mat., Rosario **2**, 25—28 (1940) [Spanisch].

Für eine in einem Intervall stetige, nicht notwendig differenzierbare Funktion $f(x)$ läßt sich ein Mittelwertsatz beweisen; er besagt geometrisch, daß zu jeder Sekante der Kurve eine parallele Sekante gefunden werden kann, bei der die Endabszissendifferenz einen beliebig vorgegebenen kleinen Wert h annimmt:

$$\frac{1}{k}(f(a+k)-f(a))=\frac{1}{h}(f(a+\theta k+h)-f(a+\theta k)),\quad 0<\theta<1,$$

wobei bei gegebenen $f(x)$, a, k die Größe θ eine Funktion von h ist, für die $\lim_{h\to 0}\theta k$ existiert.
Harald Geppert (Berlin).

Levi, Beppo: Über einen Satz von Weierstraß, den Satz von Rolle und den vorangehenden Satz von Fubini. Publ. Inst. Mat., Rosario **2**, 29—34 (1940) [Spanisch].

Der vorangehende Beweis von Fubini setzte den Abszissenwert einer (nach dem Weierstraßschen Satze notwendig vorhandenen) Extremstelle als bekannt voraus. Um über die reine Existentialaussage hinauszukommen, entwickelt Verf. einen neuen konstruktiven Beweis jenes Mittelwertsatzes, der im wesentlichen eine Schachtelungskonstruktion der extremumsverdächtigen Stellen ist. *Harald Geppert* (Berlin).

Freudenthal, Hans: Eine Restabschätzung bei der Taylorschen Formel und ihre Anwendung auf die logarithmische und die binomische Reihe. Nieuw Arch. Wiskde **20**, 269—272 (1940).

Wenn man in der Schlömilchschen Restformel $\varphi(t)=(1-ct)^n$ setzt, gelingt es mit ganz einfachen Abschätzungen sowohl für die logarithmische Reihe als auch für die binomische Reihe bei beliebigen Exponenten, den vollen Konvergenzbereich zu ermitteln, was bei Verwendung der Cauchyschen oder der Lagrangeschen Restformel nicht möglich ist. *F. Knoll* (Wien).

Juškow, P. P.: Die Tabularmethode der annähernden Integration. Appl. Math. a. Mech., N. s. **3**, Nr 4, 181—187 u. dtsch. Zusammenfassung 188 (1939) [Russisch].

L'au. démontre la formule de quadrature suivante: soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions définies dans l'intervalle (a, b) et possédant des dérivées continues $f'(x)$, $f''(x)$ et

$\varphi'(x)$. Alors on a

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x)dx + R,$$

où

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}, \quad x_0 = a, \quad x_n = b, \quad |R| \leqq \frac{(b-a)^3}{24n^2}(3M_1N_1 + M_2N),$$

$M_1 = \max|f'(x)|$, $M_2 = \max|f''(x)|$, $N = \max|\varphi(x)|$, $N_1 = \max|\varphi'(x)|$, $a \leqq x \leqq b$.

N. Obreschkoff (Sofia).

Gonçalves, J. Vicente: Sur l'intégrale prise sur un contour variable. Portugaliae Math. **1**, 343—345 (1940).

$\mathfrak{C}_n$ sei eine Folge streckbarer Kurven beschränkter Länge; sie mögen in dem Sinne gegen eine Grenzkurve $\mathfrak{C}$ streben, daß es auf $\mathfrak{C}$ eine „dichte" Menge $\{u\}$ gibt, deren Entsprechungen v_n auf $\mathfrak{C}_n$ ebenfalls dicht liegen und gleichmäßig gegen $\{u\}$ streben: $\varepsilon_n \to 0$, $|u - v_n| < \varepsilon_n$. [Die Zuordnung erfolgt durch Abbildung von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_n$ auf ein festes Parameterintervall!] Unter dieser Annahme ist auch $\mathfrak{C}$ streckbar. — Ist dann $f(x)$ integrierbar auf allen $\mathfrak{C}_n$, stetig auf $\mathfrak{C}$, so gilt $\int_{\mathfrak{C}_n} f(x)dx \to \int_{\mathfrak{C}} f(x)dx$. *Ullrich.*

Bonferroni, C. E.: Di uno speciale determinante formato con determinanti di Gram e di Landsberg. Boll. Un. Mat. ital., II. s. **2**, 115—121 (1940).

Es seien $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n$ L-integrierbare reelle Funktionen des reellen, in einem Gebiete ω des Raumes S_k variablen Punktes P. Man nennt Landsbergsche Determinante die folgende

$$G_{uv} = \begin{vmatrix} \int u_1 v_1 dP & \ldots & \int u_1 v_n dP \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int u_n v_1 dP & \ldots & \int u_n v_n dP \end{vmatrix}, \qquad (G_{uv} = G_{vu})$$

die sich auf die Gramsche reduziert, wenn $u_i = v_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ist. Es seien $u_i, v_i, \ldots, w_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, m Gruppen von je n Funktionen. Nach Einführung der symmetrischen Determinanten

$$H_{uv\ldots w} = \begin{vmatrix} G_{uu} & G_{uv} & \ldots & G_{uw} \\ G_{vu} & G_{vv} & \ldots & G_{vw} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ G_{wu} & G_{wv} & \ldots & G_{ww} \end{vmatrix}$$

beweist Verf., daß für jedes m, $H_{uv\ldots w} \geqq 0$. Ist $m = 2$, so hat man $H_{uv} = 0$ dann und nur dann, wenn die u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, linear äquivalent zu den v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sind, d. h. wenn die u_i lineare Kombinationen der v_i und die v_i solche der u_i sind. Es werden verschiedene Erweiterungen und genauere Bestimmungen gegeben. *L. Cesari.*

Rados, Gustav: Eine neue Herleitung der Gramschen Kriterien. Mat. természett. Értes. **59**, Tl 1, 7—16 u. dtsch. Zusammenfassung 17—18 (1940) [Ungarisch].

L'aut. démontre, qu'en posant

$$D = |f_i(x_j)|_{i,j=1,2,\ldots,n},$$

pour le déterminant de Gram on obtient

$$(1) \qquad G = \left|\int_a^b f_i(x) f_j(x)dx\right|_{i,j=1,2,\ldots,n} = \frac{1}{n!}\int_a^b\int_a^b \cdots \int_a^b D^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

d'où découle le critère connu de linéaire dépendance. On trouve une formule analogue lorsque $f_i(x)$ sont des fonctions de la variable complexe x. La formule (1) est à rapprocher à une autre analogue, trouvée par Stieltjes (Correspondance d'Hermite et de Stieltjes **1**, 109) et démontrée par lui de la même manière. L'affirmation de l'aut. que la condition $G = 0$ est suffisante pour la dépendance linéaire dans (a, b) des fonctions $f_i(x)$, intégrables R dans (a, b), n'est pas exacte. Les fonctions

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leqq 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}, \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 \leqq x < 1 \end{cases}$$

sont intégrables R et linéairement indépendantes dans $(-1, 1)$. Le déterminant de Gram de ces fonctions est évidemment égal à zéro. *T. Popoviciu* (Bucureşti).

Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

Velmin, V. P.: Über einen Näherungsausdruck für e^x mittels algebraischer Funktionen. Gedenkwerk D. A. Gravé, Moskau 34—47 (1940) [Russisch].

In $\Phi(x, y) = \varphi_0 y^m + \varphi_1 y^{m-1} + \cdots + \varphi_m$ sei φ_i ein Polynom von x von höchstens n_i-tem Grad $(i = 0, 1, \ldots, m)$. Hat der Exponent σ in der Entwicklung $\Phi(x, e^x) = A_\sigma x^\sigma + A_{\sigma+1} x^{\sigma+1} + \cdots$ $(A_\sigma \neq 0)$ den höchsten Wert, der bei gegebenen $m, n_0, n_1, \ldots, n_m$ möglich ist, so soll $\Phi(x, y)$ ein Polynom maximaler Ordnung (P.m.O.) in bezug auf das System $m, n_0, n_1, \ldots, n_m$ heißen. $\Phi(x, y) = 0$ stellt dann eine algebraische Kurve dar, die in $(0, 1)$ einen Berührungspunkt möglichst hoher Ordnung mit der Kurve $y = e^x$ hat. Durch Vorgabe des Systems $m, n_0, n_1, \ldots, n_m$ wird das zugehörige P.m.O. bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Es ist $\sigma = m + n_0 + n_1 + \cdots + n_m$. Es wird ein Verfahren zur Bestimmung des P.m.O. bezüglich des Systems $m, n_0, n_1, \ldots, n_m$ aus einem P.m.O. bezüglich des Systems $m-1, n_0, n_1, \ldots, n_{m-1}$ angegeben. Für eine Reihe von speziellen Systemen (wie $n_0 = n_1 = \cdots = n_m = n$) wird die Bestimmung der P.m.O. eingehender behandelt. Für $m = 1$, $n_0 = n_1 = n$ ergeben sich Polynome $\theta_n(x)$ mit $\lim \theta_n(x) = e^{\frac{x}{2}}$. Der Ausdruck $\theta_n(x)/\theta_n(-x)$ führt auf die Euler-Lambertsche Kettenbruchentwicklung von e^x. *Wassilij Höffding.*

Obreschkoff, N.: Neue Quadraturformeln. Abh. preuß. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. **1940**, 1—20 (Nr 4).

Aus der Taylorentwicklung einer $(n+k+1)$-mal differenzierbaren reellen Funktion leitet der Verf. durch Bildung Cesàroscher Mittel die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} A_n^k[f(a+h) - f(a)] &= \sum_{\mu=1}^{n} A_{n-\mu}^k \frac{h^\mu}{\mu!} f^{(\mu)}(a) \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^{k} (-1)^\mu A_n^{k-\mu} \frac{h^\mu}{\mu!} f^{(\mu)}(a+h) + A_n^k R_n \end{aligned}\right\}, \qquad A_n^k = \binom{n+k}{n},$$

mit dem Restgliede

$$R_n = \frac{(-1)^k}{(n+k)!} \int_a^{a+h} (a+h-t)^n (t-a)^k f^{(n+k+1)}(t)\, dt$$

her und gewinnt daraus durch Einführung von $F(x) = f'(x)$ eine allgemeine Quadraturformel. Der zuerst betrachtete Sonderfall $k = n$ liefert eine bereits von K. Petr [Časopis **44** (1915)] angegebene Formel und stellt eine Verallgemeinerung der Newtonschen Trapezformel dar; durch Intervallteilung entsteht daraus eine Verallgemeinerung der Simpsonschen Formel. Aus der allgemeinen Formel $(k \neq n)$ werden Erweiterungen einer Maclaurinschen und der Newtonschen Quadraturformel entwickelt. Verf. zeigt an Zahlenbeispielen, daß seine Formeln genauere Näherungswerte liefern als die bekannten Quadraturformeln mit entsprechender Gliederzahl. *P. E. Böhmer.*

Jackson, Dunham: Orthogonal polynomials with auxiliary conditions. Trans. Amer. Math. Soc. **48**, 72—81 (1940).

Es werden Systeme von Polynomen $\{p_n(x)\}$ untersucht, die in einem endlichen Intervall der x-Achse gegenseitig orthogonal sind und gewisse zusätzliche lineare homogene Bedingungsgleichungen erfüllen. [Vgl. die frühere Arbeit desselben Verf.: A new class of orthogonal polynomials. Amer. Math. Monthly **46**, 493—497 (1939), wo die speziellen Bedingungen $p_n(1) = \pm p_n(-1)$ untersucht werden, und die das gleiche Problem aus einem anderen Gesichtspunkt behandelnde Arbeit des Ref., dies. Zbl. **21**, 308.] — Den Hauptzweck der Arbeit bilden die Konvergenzbeweise für die betreffenden Orthogonalreihen; daher beschränkt sich Verf. von vornherein auf solche Systeme von in $(-1, 1)$ orthogonalen Polynomen, für welche eine Christoffelsche

Formel ermittelt werden kann. Die größte Schwierigkeit liegt dann im Nachweis für die Beschränktheit der Polynome, wenigstens innerhalb eines ganz in $(-1, 1)$ gelegenen abgeschlossenen Intervalls. Diese Aufgabe wird durch Zurückführung auf die Legendreschen Polynome in einigen besonderen Fällen gelöst, wo Bedingungen von der Art $p_n(y_i) = \pm p_n(-y_i)$, $p_n'(1) = \pm p_n'(-1)$, $p_n(1) = h p_n(-1)$, $p_n''(1) = 0$ usw. vorliegen. Die Methode des Verf. ist noch verallgemeinerungsfähig, aber es scheint, daß eine wesentliche Verallgemeinerung ohne neue Gedanken nicht leicht erreichbar sein dürfte. *Gröbner* (Wien).

Perron, Oskar: Über die Approximation stetiger Funktionen durch trigonometrische Polynome. Math. Z. **47**, 57—65 (1940).

Eine Folge nichtnegativer, nicht identisch verschwindender trigonometrischer Polynome $P_n(x)$ heißt zulässig, wenn zu jedem Paar beliebig kleiner positiver Zahlen ε, δ eine Zahl n_0 existiert, so daß $\varepsilon \int_0^{2\pi} P_n(t)\,dt > \int_0^{2\pi-\delta} P_n(t)\,dt$ für $n > n_0$ ist. Ist $f(x)$ eine stetige Funktion der reellen Veränderlichen x und $f(x + 2\pi) = f(x)$, so wird $f(x)$ durch $Q_n(x)$, wobei

$$Q_n(x) \cdot \int_0^{2\pi} P_n(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\, P_n(t - x)\,dt,$$

gleichmäßig approximiert $\left(f(x) = \lim_{n\to\infty} Q_n(x)\right)$. Die von De La Vallée Poussin und Fejér benutzten Polynome erweisen sich als Sonderfälle. Setzt man die Funktionen $P_n(x)$ als Kosinuspolynome voraus, so kann man die Funktionen $Q_n(x)$ als summatorische Annäherungen von $f(x)$ auffassen. Es folgt dann für unstetige Funktionen $\lim_{n\to\infty} Q_n(x) = \frac{1}{2} \lim_{t\to 0} [f(x + t) + f(x - t)]$. Eine Verallgemeinerung auf „zulässige" Polynome $P_n(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ und auf Funktionen $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ von mehreren Veränderlichen ist leicht durchführbar. *F. Knoll* (Wien).

Lozinski, S.: Sur la convergence forte des procédés d'interpolation. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **28**, 203—206 (1940).

Es sei $f(x)$ eine in dem Intervall $(0, 2\pi)$ definierte Funktion und $U_n(f; x)$ das trigonometrische Interpolationspolynom n-ter oder niedrigerer Ordnung, das in den Punkten $x_k^{(n)} = \frac{2k\pi}{2n+1}$, $k = 1, 2, \ldots, 2n + 1$, dieselben Werte wie $f(x)$ annimmt. — Wenn $f(x)$ beschränkt und in $(0, 2\pi)$ R-integrierbar ist (d. h. nach Mengoli-Cauchy), dann hat man für jedes $p > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - U_n(f; x)|\,dx = 0.$$

Dieser Satz ist von J. Marcinkiewicz (dies. Zbl. **16**, 19) nur für die stetigen, periodischen Funktionen bewiesen worden. Es sei außerdem $g(x)$ eine L-integrierbare Funktion, so daß auch $|g(x)| \log |g(x)|$ L-integrierbar ist. Dann ist $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} U_n(f; x) g(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\,dx$. Die einfache L-Integrierbarkeit von $g(x)$ ist hier nicht ausreichend. *L. Cesari* (Pisa).

Bergman, Stefan, and W. T. Martin: A modified moment problem in two variables. Duke math. J. **6**, 389—407 (1940).

Untersuchungen über das Momentenproblem in zwei Veränderlichen, wo die quadratisch integrierbare Funktion Φ_1 gemäß

$$\int_0^1 \int_0^1 \Phi(v_1, v_2) v_1^{\lambda_n} v_2^{\mu_n}\,dv_1\,dv_2 = y_n$$

zu bestimmen ist, bei gegebenen y_n und λ_n, μ_n $\left(R(\lambda_n) > -\frac{1}{2},\ R(\mu_n) > -\frac{1}{2}\right)$. *Rolf Nevanlinna* (Helsinki).

Reihen:

Darevsky, W.: Sur certains problèmes de la théorie des séries divergentes. Rec. math. Moscou, N. s. **7**, 549—587 u. franz. Zusammenfassung 587—590 (1940) [Russisch].

L'au. démontre des théorèmes pour l'étude de la possibilité de sommer une série donnée au moyen d'un certain ensemble de méthodes régulières: 1. Quelle que soit une série divergente et quel que soit le nombre fini γ, on peut toujours construire une méthode régulière qui est une méthode linéaire et une méthode des facteurs de convergence simultanément et telle que la série donnée est sommable par cette méthode et a pour somme le nombre γ. 2. Quelle que soit une série divergente et quel que soit le nombre γ fini ou infini, on peut toujours construire au moyen d'une matrice fonctionnelle une méthode régulière telle que la série donnée est sommable par cette méthode et a pour somme le nombre γ. 3. Soit M un ensemble de méthodes régulières telles que 1) chaque méthode de l'ensemble M est simultanément une méthode linéaire et une méthode des facteurs de convergence et 2) chaque méthode de l'ensemble M jouit de cette propriété qu'elle n'élargit pas les limites d'indétermination de la série à laquelle on l'applique. Alors, quelle que soit la série divergente et quel que soit le nombre γ compris entre les limites inférieure et supérieure de ses sommes partielles, on peut toujours indiquer une méthode de l'ensemble M telle que la série donnée est sommable par cette méthode et a pour somme le nombre γ. — La seconde question traitée est le problème d'unicité. Enfin le théorème suivant est démontré: Soit donnée une méthode linéaire régulière. Quelle que soit la série divergente, on peut toujours, en intercalant entre ses termes une infinité dénombrable de zéros, construire une série qui n'est plus sommable par la méthode donnée. *N. Obreschkoff* (Sofia).

Garten, V.: Über den Vergleich der Cesàroschen und Hölderschen Mittelbildungen. Math. Z. **47**, 111—124 (1940).

Verf. betrachtet die den gewöhnlichen Hölderschen Mitteln einer Folge s_n entsprechenden Integralmittel

$$h^{(k)}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x h^{(k-1)}(t)\,dt\,, \qquad h^{(0)}(x) = s(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots;\ 0 < x \to \infty)$$

einer Funktion $s(x)$ und die den gewöhnlichen Cesàroschen Mitteln von s_n entsprechenden Rieszschen Mittel

$$c^{(k)}(x) = \frac{k}{x^k}\int_0^x (x-t)^{k-1} s(t)\,dt \qquad (k = 1, 2, \ldots;\ 0 < x \to \infty)$$

von $s(x)$. Daß der Äquivalenzsatz auch für diese Integralmittel gilt, hat E. Landau [Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig **65**, 131—138 (1913)] gezeigt. Die Hauptlimites von $h^{(k)}(x)$ seien mit h_k und H_k $(h_k \leqq H_k)$, diejenigen von $c^{(k)}(x)$ mit c_k und C_k $(c_k \leqq C_k)$ bezeichnet, ferner sei $H_k - h_k = \Omega(H_k)$, $C_k - c_k = \Omega(C_k)$ gesetzt. — Zunächst gibt Verf. in übersichtlicher Weise eine permanente lineare Transformation M_k an, welche die Rieszschen in die Hölderschen Mittel gleicher Ordnung überführt, womit die eine Hälfte des Äquivalenzsatzes erneut bewiesen ist, und leitet aus ihr eine schon von J. Schur [Math. Ann. **74**, 447—458 (1913)] und E. Landau (a. a. O.) angegebene $C \to H$-Transformation ab. Insbesondere dient jedoch M_k zu einem Vergleich der Schwankungsintervalle der H_k-Mittel mit denen der C-Mittel gleicher und höherer Ordnung, sofern $\Omega(H_k)$ endlich ist. Ein Sonderfall des in dieser Richtung erzielten Ergebnisses ist die folgende Abschätzung:

$$k!\,\Omega(H_k) - (k! - 1)\,\Omega(C_{k+1}) \leqq \Omega(C_k) \leqq k!\,\Omega(H_k) + (k! - 1)\,\Omega(C_{k+1})\,,$$

die gilt, wenn h_k und H_k endlich sind, und die eine Verallgemeinerung eines (sich ursprünglich auf gewöhnliche Mittel beziehenden) Satzes von Dobrowolski (Bull. int. Acad. Polon. Sci., sér. A. **1925**, 259—264) darstellt, welcher aussagt: Es ist $\Omega(C_k) = k!\,\Omega(H_k)$, sofern $\Omega(C_{k+1}) = 0$ ist. — Weiter gibt Verf. die zu M_k inverse

Transformation $\mathfrak{M}_k$ an, welche die Hölderschen in die Rieszschen Mittel überführt. Eine solche $H \to C$-Transformation wurde bisher nur für gewöhnliche Mittel aufgestellt [vgl. J. Schur, S.-B. Berlin. math. Ges. **29** (1930)]. Mit dem Nachweis der Permanenzeigenschaft von $\mathfrak{M}_k$ ist nun auch die andere Hälfte des Äquivalenzsatzes erneut bewiesen. Vor allem wird jedoch $\mathfrak{M}_k$ dazu benützt, die folgenden, ohne zusätzliche Bedingung über die der Limitierung unterworfene Funktion $s(t)$ geltenden Ungleichungen aufzustellen:

$$k!\,[(1+\delta_k)\,h_k - \beta_k H_k] \leqq c_k \leqq C_k \leqq k!\,[(1+\delta_k)\,H_k - \beta_k h_k],$$

$$(*) \qquad \Omega(C_k) \leqq k!\,(1+\gamma_k)\,\Omega(H_k).$$

β_k, δ_k und $\gamma_k = \beta_k + \delta_k$ hängen nur von k ab und werden genau angegeben. Die in (*) auftretende Konstante $k!\,(1+\gamma_k)$ kann durch keine bessere ersetzt werden. Für gewöhnliche Mittelbildungen hat C. E. Winn [C. R. Paris **194**, 2273—2275 (1932); dies. Zbl. **4**, 391] die Abschätzung $\Omega(C_k) \leqq 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)\,\Omega(H_k)$ angegeben. Demgegenüber ist (*) im allgemeinen besser. *Meyer-König* (Stuttgart).

Meyer-König, Werner: Limitierungsumkehrsätze mit Lückenbedingungen. II. Math. Z. **45**, 479—494 (1939).

Verf. hat in einer früheren Arbeit [Math. Z. **45**, 447—478 (1939); dies. Zbl. **21**, 219—220] die Frage untersucht, inwieweit das Auftreten von Lücken bei einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ die Konvergenz derselben nach sich zieht, falls die Reihe nach einem Cesàroschen oder Hölderschen Verfahren summierbar ist. Dabei wird von dem Auftreten von „Lücken" schon dann gesprochen, wenn die Reihe eine Folge von Teilstücken aufweist, deren Glieder einer Einschränkung ihrer Größenordnung unterworfen sind, jedoch keineswegs zu verschwinden brauchen. Die vorliegende Arbeit bringt die entsprechende Untersuchung für das Euler-Knoppsche Verfahren 1. Ordnung (E-Verfahren). — (1) Entsprechend der Gültigkeit des O-$E \to K$-Satzes mit der Konvergenzbedingung $a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ geht Verf. in erster Linie darauf aus, Lückenumkehrsätze für Lückenintervalle der Länge $\vartheta\sqrt{n}$ zu gewinnen. Ob ein Lückensatz mit dieser Länge der Lückenintervalle ohne Zusatzvoraussetzungen gilt, was den Verhältnissen bei den C- und H-Verfahren entsprechen würde, konnte bisher nicht entschieden werden. Dagegen lassen sich Lückensätze dieser Art unter zusätzlichen Voraussetzungen über die sämtlichen Reihenglieder angeben. Als schärfstes Resultat des Verf. in dieser Richtung sei genannt: Für die Indexfolge n_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) sei $n_{\nu+1} - n_\nu > \vartheta\sqrt{n_\nu}$ mit einem $\vartheta > 0$. Erfüllen dann die Reihenglieder a_n die Lückenbedingung $a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ für $n \neq n_\nu$, sowie die Zusatzbedingung $a_n = O(n^\alpha)$ für $n = n_\nu$ (α beliebig reell), so folgt aus $E\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$. — (2) Solange nicht feststeht, ob $\vartheta\sqrt{n}$ wirklich das für das E-Verfahren maßgebliche Lückenintervall ist, hat es Interesse, auch die Verhältnisse bei Lücken anderer Größenordnung zu untersuchen. Einen Lückensatz mit Lücken der Länge ϑn hat Y. Okada [Bull. Amer. Math. Soc. **43**, 536—540 (1937); dies. Zbl. **17**, 254] angegeben. Verf. beweist einige verwandte Sätze, wobei in den Lücken von der Länge ϑn nichtverschwindende Glieder der Größenordnung $O\left(\frac{1}{n}\right)$ zugelassen werden. Die Anwendung dieser Sätze auf Potenzreihen liefert in Verbindung mit der bekannten Tatsache, daß eine Potenzreihe in einer gewissen Umgebung jedes regulären Punkts der Konvergenzgrenze E-summierbar ist [vgl. K. Knopp, Math. Z. **15**, 226—253 (1922)], unmittelbar einige Aussagen über das Verhalten der Potenzreihen am Rande des Konvergenzkreises. *F. Lösch* (Rostock).

Agnew, Ralph Palmer: On Tauberian theorems for double series. Amer. J. Math. **62**, 666—672 (1940).

Es sei $\sum a_{\mu\nu}$ eine unendliche Doppelreihe mit den arithmetischen Mitteln $\sigma_{\mu\nu}=(\mu\nu)^{-1}\sum_{m=1,\,n=1}^{\mu,\,\nu} s_{mn}$ ihrer Teilsummen $s_{\mu\nu}=\sum_{m=1,\,n=1}^{\mu,\,\nu} a_{mn}$. Aus $\lim_{\mu,\,\nu\to\infty}\sigma_{\mu\nu}=s$ folgt $\lim_{\mu,\,\nu\to\infty} s_{\mu\nu}=s$, wenn die Umkehrbedingung $(\mu^2+\nu^2)\,a_{\mu\nu}<M$ erfüllt ist [vgl. K. Knopp, Math. Z. **45**, 573—589 (1939), insbes. 581; dies. Zbl. **23**, 28]. Die Frage liegt nahe, ob nicht (in Analogie zu den Verhältnissen bei einfachen Reihen) die schwächere Bedingung $\mu\nu a_{\mu\nu}<M$ auch schon eine ausreichende Umkehrbedingung ist. Verf. zeigt, daß dies nicht der Fall ist. Sogar das gleichzeitige Erfülltsein der 3 Bedingungen (*) $\lim_{\nu\to\infty}\mu\nu|a_{\mu\nu}|=0$ (für festes $\mu=1, 2, \ldots$), $\lim_{\mu\to\infty}\mu\nu|a_{\mu\nu}|=0$ (für festes $\nu=1, 2, \ldots$), $\lim_{\mu,\,\nu\to\infty}\mu\nu|a_{\mu\nu}|=0$ reicht nicht aus, um allgemein von $\sigma_{\mu\nu}\to s$ auf $s_{\mu\nu}\to s$ zu schließen, ja selbst dann nicht, wenn man noch die Existenz der Limites $\lim_{\nu\to\infty}\sigma_{\mu\nu}$ (für festes $\mu=1, 2, \ldots$) und $\lim_{\mu\to\infty}\sigma_{\mu\nu}$ (für festes $\nu=1, 2, \ldots$) voraussetzt und die erstrebte Behauptung $s_{\mu\nu}\to s$ auf die geringere Aussage $\lim_{\mu\to\infty}\left(\lim_{\nu\to\infty} s_{\mu\nu}\right)=s$ reduziert. Verf. zeigt ferner, daß die 3 Bedingungen (*) keine ausreichende Umkehrbedingung darstellen bei gewissen allgemeinen Klassen von Limitierungsverfahren, welche die C-Verfahren beliebiger positiver Ordnung und das A-Verfahren enthalten. [Vgl. zu dem Gegenstand auch die Note des Ref., Math. Z. **46**, 157—160 (1940); dies. Zbl. **23**, 311—312.] *Meyer-König.*

Ghizzetti, Aldo: Sui coefficienti di Eulero-Fourier di una funzione limitata. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **9**, 215—223 (1940).

Es sei $f(t)$ eine beschränkte in $(0, 2\pi)$ integrierbare Funktion, und a_0, a_n, b_n, $n=1, 2, \ldots$, (*) seien deren Euler-Fouriersche Koeffizienten. Man kann $0\leqq f(t)\leqq 1$ annehmen. Verf. beweist die Existenz beachtenswerter Ungleichungen in bezug auf die Koeffizienten (*), die den größt- oder kleinstmöglichen Wert für einen Koeffizienten a_n oder b_n als Funktion der vorhergehenden bestimmen. Für $n=1$ oder $n=2$ z. B. erhält man

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}\leqq\frac{2}{\pi}\sin\pi a_0 \quad (**) \qquad \sqrt{a_2^2+b_2^2}\leqq\frac{2}{\pi}\sin\pi a_0-\frac{\pi}{2}(a_1^2+b_1^2)\tan\frac{\pi a_0}{2},$$

in denen die Gleichheitszeichen für besondere, vom Verf. bezeichnete Funktionen gelten. (**) ist ein Sonderfall der folgenden Ungleichung

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2}\leqq\frac{2}{\pi}\sin\pi a_0. \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Weitere Ungleichungen für $n>2$ werden in einer folgenden Arbeit aufgestellt werden.

L. Cesari (Pisa).

Szász, Otto: On strong summability of Fourier series. Trans. Amer. Math. Soc. **48**, 117—125 (1940).

Es sei $f(t)$ eine mit 2π periodische Funktion der Klasse L und

$$f(t)\sim\tfrac{1}{2}a_0+\sum_1^\infty(a_\nu\cos\nu t+b_\nu\sin\nu t)\equiv\sum_0^\infty A_\nu(t)$$

ihre Fourierreihe. Ferner sei $\Phi(x,t)=\frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)-2s\}$. — (1) Nach Hardy-Littlewood [C. R. Acad. Sci., Paris **156**, 1307—1309 (1913)] ist die Fourierreihe von $f(t)$ an einer Stelle x stark summierbar zur Summe s in dem Sinne, daß für ihre Teilsummen s_ν die Beziehung $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_0^n|s_\nu-s|^2=0$ besteht, falls $f(t)$ in einer Umgebung von x quadratisch integrabel ist und überdies $\int_0^t\{\Phi(x,u)\}^2du=o(t)$ gilt. L. Fejér gab kürzlich (vgl. dies. Zbl. **19**, 340) unter der spezielleren Voraussetzung, daß $\Phi(x,t)\to 0$ für $t\downarrow 0$ gilt, zwei neue Beweise für die starke Summierbarkeit der

Fourierreihe von $f(t)$. Verf. zeigt in der vorliegenden Note, daß sich diese Beweise vereinfachen lassen, indem man an Stelle der Teilsummen s_n die Größen $s_n - \frac{1}{2}A_n$ betrachtet, und baut sie sodann aus zu Beweisen des Hardy-Littlewoodschen Satzes. — (2) Daran anschließend wird noch ein neuer, die Methoden der komplexen Funktionentheorie vermeidender Beweis des folgenden Satzes von Hardy-Littlewood (vgl. dies. Zbl. 12, 296) gegeben: Aus $\int_0^t |\Phi(x,u)|\,du = o(t)$ für $t \downarrow 0$ folgt $\sum_0^n [s_\nu(x) - s]^2 = o(n \log n)$ für $n \to \infty$. *F. Lösch* (Rostock).

Izumi, Shin-ichi, and Tatsuo Kawata: Notes on Fourier series. 11. Inequality theorem in the strong summability. Tôhoku Math. J. 47, 14—17 (1940).

Bezeichne $s_n(x)$ die n-te Partialsumme, $\sigma_n(x)$ das n-te $(C, 1)$-Mittel der Fourierreihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Ist $f(x) \in L^p (p > 1)$, so gilt bekanntlich für $\alpha > 0$ fast überall $\sum_{k=0}^{n} |s_k(x) - \sigma_k(x)|^\alpha = o(n)$. Es wird gezeigt, daß die Funktionen $\sum_{k=0}^{n} |s_k(x) - \sigma_k(x)|^\alpha$ für $f(x) \in L$ im allgemeinen keine integrierbare Majorante haben. Dies folgt unmittelbar aus den beiden folgenden, von den Verff. für Kosinusreihen bewiesenen Abschätzungen:

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|s_k(x) - \sigma_k(x)|}{k}\,dx \geqq \text{Konst.} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k},$$

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{|s_k(x) - \sigma_k(x)|}{k}\,dx \geqq \text{Konst.} \frac{\log n}{n} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{f(x)}{x}\,dx.$$

G. Alexits (Budapest).

Spezielle Funktionen:

Toscano, Letterio: Relazioni tra i polinomi di Laguerre e di Hermite. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 2, 460—466 (1940).

Verf. beweist, daß zwei Formeln von Kogbetliantz über den Ausdruck von $L_n^{(\alpha)}\left(\frac{x^2}{2}\right)$ als Summe der Polynome $H_{2k}(x)$ und von $L_n^{(\alpha)}(x)$ als Summe von $L_k^{(\beta)}(x)$, $\alpha > \beta$, aus dem Uspenskyschen Integralausdruck von $L_n^{(\alpha)}(x)$ durch $H_{2k}(x)$ bzw. von $L_n^{(\alpha)}(x)$ durch $L_n^{(\beta)}(x)$ gewonnen werden können. Dabei wird die Formel

$$H_n(x) = (-1)^n n! \lim_{a \to 0} \left[a^n L_n^{\left(\frac{1}{a^2} + k\right)}\left(\frac{x}{a} + \frac{1}{a^2}\right)\right]$$

bewiesen, die für den besonderen Fall $k = -1$ früher von G. Palamà bewiesen worden war (vgl. dies. Zbl. 20, 222). *Giovanni Sansone* (Firenze).

Feldheim, E.: Une propriété caractéristique des polynômes de Laguerre. Comment. math. helv. 13, 6—10 (1940).

Nach Erdélyi gilt für die verallgemeinerten Laguerreschen Polynome

$$\lambda^n L_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda - 1)^{n-k} \binom{n+\alpha}{n-k} L_n^{(\alpha)}(x).$$

Es wird gezeigt, daß unter allen Orthogonalpolynomen $\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} x^k$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ die Laguerreschen Polynome im wesentlichen die einzigen sind, die ein Multiplikationstheorem der Gestalt

$$\lambda^n \Phi_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{n} A_{nk} (\lambda - 1)^{n-k} \Phi_k(x)$$

besitzen. *Schoblik* (Brünn).

Sastry, B. S.: Note on a type of generalised Laguerre polynomial. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **10**, 176—180 (1939).

Varma, R. S.: On the polynomial $\pi_n(x)$. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **11**, 21—22 (1940).

A. Angelescu a envisagé les polynomes (ce Zbl. **18**, 356, avec une légère modification)

$$\Pi_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x} A_n(x)],$$

où A_n est de degré n et $A_n' = nA_{n-1}$ et dont les polynomes de Laguerre

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^n)$$

sont un cas particulier. B. S. Sastry retrouve la fonction génératrice des polynomes $\Pi_n(x)$, établit la formule $\Pi_n' = n(\Pi_{n-1}' - \Pi_{n-1})$ et démontre les relations réciproques

$$\Pi_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (n-i)! \binom{n}{i}^2 A_i,$$

$$A_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (n-i)! \binom{n}{i}^2 \Pi_i.$$

R. S. Varma établit la formule d'addition

$$\Pi_n(x+y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Pi_i(x) L_{n-i}(y) - \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) \binom{n}{i} \Pi_i(x) L_{n-i-1}(y).$$

T. Popoviciu (Bucureşti).

Feldheim, Ervin: Équations intégrales pour les polynomes d'Hermite à une et plusieurs variables, pour les polynomes de Laguerre, et pour les fonctions hypergéométriques les plus générales. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **9**, 225—252 (1940).

Verf. schöpft aus einer von ihm früher gefundenen Formel $\mathfrak{F}$ (dies. Zbl. **23**, 31, Zeile 23f.) eine neue, in der die Hermiteschen Polynome der Ebene auftreten,

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2) H_m\left(\frac{t+\xi}{\lambda}\right) H_n\left(\frac{t+\eta}{\mu}\right) dt = \lambda^{-m} \mu^{-n} H_{mn}(x, y);$$

diese entspringen mit $\xi = (\lambda^2 - 1)x - y$, $\eta = -x + (\mu^2 - 1)y$ der Entwicklung

$$\exp\{2h\xi + 2k\eta - [(\lambda^2 - 1)h^2 - 2hk + (\mu^2 - 1)k^2]\} = \sum_{m,n}^{0,\infty} \frac{h^m}{m!} \frac{k^n}{n!} H_{mn}(x, y).$$

Verf. verallgemeinert (1) auf Hermitesche Polynome von N Veränderlichen und kehrt die so entstehende Beziehung um. — Der zweite Teil der Arbeit befaßt sich mit den Gegenbauerschen Polynomen $V_n^{(s)}(x)$, aus denen die $H_n(x)$ ja durch einen Grenzübergang entstehen; das Seitenstück zu $\mathfrak{F}$ in den $V_n^{(s)}$ ist aber schon erheblich verwickelter als $\mathfrak{F}$, so daß Verf. sich nicht darauf einläßt, (1) auf die $V_n^{(s)}$ zu übertragen. — Der dritte Teil betrifft die hypergeometrischen Funktionen (h. F.) und Laguerreschen Polynome $L_n^{(\alpha)}(x)$. Verf. gewinnt für Lauricellas h. F. F_A unter der Annahme $\Re e\,\alpha > \Re e\,\gamma > 0$ die Integralgleichung

$$(2_A) \qquad \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma-1} F_A(\alpha; \beta_1, \ldots, \beta_n; \gamma_1, \ldots, \gamma_n; xx_1, \ldots, xx_n)\,dx$$
$$= [\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\gamma)]/\Gamma(\alpha) F_A(\gamma; \beta_1, \ldots, \beta_n; \gamma_1, \ldots, \gamma_n; x_1, \ldots, x_n)$$

und eine entsprechende (2_D) für F_D. Sie verallgemeinern die für $n = 1$ von Erdélyi angegebenen Formeln (dies. Zbl. **17**, 163). — Durch Grenzübergang folgert Verf. die den Beziehungen (2_A), (2_D) entsprechenden für Humberts konfluente h. F. — Wenn man in (2_A) $n = 2$, $\alpha = \varepsilon^{-1}$ setzt und x durch εx ersetzt, so findet man mit $\varepsilon \to 0$, falls $\Re e\,\gamma > 0$,

$$(3) \qquad \int_0^\infty x^{\gamma-1} e^{-x} G(\beta_1, \gamma_1, xy) G(\beta_2, \gamma_2, xz)\,dx = \Gamma(\gamma) F_2(\gamma; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; y, z);$$

sind die β negative ganze Zahlen, so gehen die Kummerschen Funktionen G in Laguerresche Polynome über. — Ähnlich wie (3) ergeben sich Integralformeln, bei denen der wesentliche Teil des Integranden das Produkt einer Besselschen und einer G-Funktion ist. — Für $n = 3$ kommt man zu Werten von Integralen wie

$$\int_0^\infty x^{\frac{\alpha+\beta}{2}} e^{-x} J_{\alpha+\beta}\left(2\sqrt{xy}\right) G(\gamma, \alpha+1, x) G(\delta, \beta+1, x)\, dx.$$

Koschmieder (Graz).

Pevnyi, B. G.: On the asymptotic expansion of Whittaker's functions. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **28**, 308—309 (1940).

Verf. befaßt sich mit der asymptotischen Entwicklung:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} e^{-\frac{z}{2}} z^k M_{k,m}(z) \sim \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+s)}{s!\,\Gamma(\alpha-s)(-z)^s},$$

wo $M_{k,m}$ die Whittakersche Funktion bedeutet, und insbesondere mit der Restformel:

$$R_n(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} e^{-\frac{z}{2}} z^k M_{k,m}(z) - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\beta+s)}{s!\,\Gamma(\alpha-s)(-z)^s}.$$

Die Gleichung $R_n(z) = 0$ besitzt eine Wurzel, für die Verf. eine asymptotische Formel angibt. Weiter gibt Verf. für die Größe R_n eine Integraldarstellung an und leitet auch aus dieser Integraldarstellung eine asymptotische Formel für die Nullstelle von R_n ab.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Pevnyi, B. G.: Some functional equations for generalized hypergeometric series and Whittaker's functions. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **28**, 310—312 (1940).

Verf. geht von einer Integralgleichung aus, die Koshliakov für die verallgemeinerten Laguerreschen Polynome angegeben hat und stellt sich zum Ziel, eine analoge Gleichung für verallgemeinerte hypergeometrische Funktionen und Whittakersche Funktionen abzuleiten. Er geht dabei von einer Identität aus, in der eine verallgemeinerte hypergeometrische Funktion als Integral in der komplexen Ebene dargestellt wird, wobei der Integrand wieder eine solche Funktion als Faktor enthält. Durch Umformung dieser Identität gelangt er zur obengenannten Integralgleichung für die verallgemeinerten Laguerreschen Polynome. Als weiteren Sonderfall betrachtet er eine Integraldarstellung für die hypergeometrische Reihe, welche kürzlich von Erdélyi abgeleitet wurde. Durch Betrachtung besonderer Werte des Argumentes und der Indizes gelangt Verf. zu einer Integraldarstellung einer Whittakerschen Funktion, wobei der Integrand eine andere Whittakersche Funktion als Faktor enthält.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Humbert, Pierre: Sur une formule de M. Nielsen. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Ser. I **60**, 61—63 (1940).

Niels Nielsen hat in seiner „Theorie des Integrallogarithmus", Leipzig 1906, S. 33 für die beiden Transzendenten

$$C(x) = \int_x^\infty \cos(x^2)\, dx, \qquad S(x) = \int_x^\infty \sin(x^2)\, dx$$

eine falsche Formel angegeben, nach der $C^2(x) + S^2(x)$ eine Funktion von x^2 allein sein müßte, was durch die Reihenentwicklungen widerlegt wird. Man erhält hingegen die richtige Formel durch Zurückführung auf die Krampsche Transzendente und Anwendung der Laplaceabbildung:

$$C^2(x) + S^2(x) = \int_0^\infty e^{-2xu} \frac{\sin(u^2)}{u}\, du.$$

Harald Geppert (Berlin).

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Jelchin, M.: Sur une méthode d'évaluation de la phase d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Matematika. Učenye Zapiski Moskov gosud. Univ. **45**, 97—107 u. franz. Zusammenfassung 107—108 (1940) [Russisch].

Die Differentialgleichung $\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0$ kann bekanntlich mittels der Substitution $y = z \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{T_0}^{t} p(x)\,dx\right)$ auf die Form $\ddot{z} = I(t)z$ gebracht werden; die allgemeine Lösung der transformierten Gleichung ist $z = \left(R/\sqrt{\omega(t)}\right)\cos\left(\int_{T_0}^{t}\omega(x)dx+\gamma\right)$, wobei R, γ beliebige Konstante und $\omega(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $-\frac{1}{2}(\omega'/\omega)' + \frac{1}{4}(\omega'/\omega)^2 - \omega^2 = I(t)$ bedeuten. Der Ausdruck $\int_{T_0}^{t}\omega(x)dx + \gamma$ wird als die Phase der Lösung bezeichnet. In der vorliegenden Arbeit beschreibt der Verf. eine Methode zur approximativen Berechnung der Phase, die im wesentlichen darin besteht, daß das Intervall (T_0, t) in Teilintervalle zerlegt und die Phase unter Annahme eines konstanten Wertes der Funktion $I(t)$ in jedem der Teilintervalle berechnet wird.

O. Borůvka (Brünn).

Franzoni, Triestina: Sull'integrazione approssimata di una particolare equazione differenziale. Boll. Un. Mat. ital., II. s. **3**, 32—36 (1940).

Verf. behandelt die angenäherte Integration der Differentialgleichung

$$y'' + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 y = 0, \tag{1}$$

in der λ eine reelle stetige positive Funktion von x sei. Die schon von D. Graffi (dies. Zbl. **20**, 82) verwendete Transformation

$$y = \sqrt{\frac{I\lambda}{\pi}}\sin\vartheta, \qquad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{4\pi I}{\lambda}}\cos\vartheta$$

führt (1) in das System

$$\frac{dI}{dx} = I\frac{d\log\lambda}{dx}\cos 2\vartheta, \qquad (2)\ \frac{d\vartheta}{dx} = \frac{2\pi}{\lambda} - \frac{1}{2}\frac{d\log\lambda}{dx}\sin 2\vartheta$$

über. Bezeichnet man mit $\vartheta_0 = \vartheta(0)$ den Anfangswert von ϑ und ersetzt man in der rechten Seite von (2) $\sin 2\vartheta$ durch den Näherungswert $\sin 2\vartheta_0 + 2(\vartheta_1 - \vartheta_0)\cos 2\vartheta$, so bestimmt Verf. ϑ_1 aus der linearen Differentialgleichung

$$\frac{d\vartheta_1}{dx} = -\left[\frac{d\log\lambda}{dx}\cos 2\vartheta_0\right]\vartheta_1 - \frac{1}{2}\frac{d\log\lambda}{dx}[\sin 2\vartheta_0 - 2\vartheta_0\cos 2\vartheta_0] + \frac{2\pi}{\lambda},$$

und zeigt, daß zu vorgelegtem $\varepsilon > 0$ im Intervall $(0, \nu)$ die Ungleichung $|\vartheta - \vartheta_1| < \varepsilon$ erfüllt ist, wobei ν eine positive Zahl bedeutet, die der Ungleichung

$$\varepsilon > \varepsilon\int_0^{\nu}\left|\frac{d\log\lambda}{dx}\right|dx + \int_0^{\nu}\left|\frac{d\log\lambda}{dx}\right|(\vartheta_1 - \vartheta_0)^2 dx$$

genügt.

Giovanni Sansone (Firenze).

Butlewski, Zygmunt: Sur les intégrales oscillantes et bornées d'une équation différentielle du second ordre. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **9**, 187—200 (1940).

Verf. betrachtet die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\left[\theta(t)\frac{dx}{dt}\right] + f(t, x) = 0, \tag{*}$$

in der $\theta(t) > 0$ eine stetige, für jedes $t \geqq t_0$ differenzierbare Funktion und $f(t, x)$ eine für jedes $t \geqq t_0$ und jedes x stetige Funktion ist. Ein für alle $t \geqq t_0$ existierendes Integral $x(t)$ von (*) wird oszillierend genannt, wenn $x(t)$ unendlich viele Nullstellen $[t_n]$ besitzt mit $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$. Verf. beweist u. a. folgendes: I) Wenn a) $\lim_{t\to+\infty}\theta(t) > 0$ (endl. oder unendl.); b) $f(t, x) > 0$ für alle $x > 0$, $f(t, x) < 0$ für alle $x < 0$; c) $\lim_{t\to+\infty} f[t, x(t)] = G > 0$ (G endl. oder unendl.) für jede stetige Funktion $x(t)$, für die

$\lim_{t\to+\infty} x(t)=g>0$ (g endl. oder unendl.) ist, dann ist jedes Integral $x(t)$ von (*), das für alle $t\geqq t_0$ existiert, oszillierend. Außerdem gibt es in jedem Intervall (t_n, t_{n+1}) ein einziges τ_n, $t_n<\tau_n<t_{n+1}$, in dem $x'(\tau_n)=0$. Es sei $x_n=x(\tau_n)$, $n=1,2,\ldots$. II) Wenn b), c) gilt und d) $f(t,x)$ eine in bezug auf t für jedes x und für jedes $t\geqq t_0$ differenzierbare Funktion ist; e) $f(t,x)=-f(t,-x)$; f) $\partial\theta(t)f(t,x)/\partial t<0$ für alle $x>0$, $t\geqq t_0$ ist, dann ist die Folge $[|x_n|]$ für jedes oszillierende Integral $x(t)$ von (*) wachsend. II') Gilt b), c), d), e) und f') $\partial\theta(t)f(t,x)/\partial t>0$ für jedes $x>0$, $t\geqq t_0$, dann ist die Folge $[|x_n|]$ abnehmend, und $x(t)$ ist deshalb beschränkt. *L. Cesari.*

Cesari, Lamberto: Un nuovo criterio di stabilità per le soluzioni delle equazioni differenziali lineari. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **9**, 163—186 (1940).

Gegeben ist die Differentialgleichung (1) $y''+\varphi(x)y=0$ und vorausgesetzt wird $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=a>0$; dann sind die Integrale der Gleichung (1) im Gebiet $(x_0, +\infty)$ sämtlich beschränkt, falls eine der beiden folgenden Voraussetzungen erfüllt ist: 1) $|\varphi(x)-a|$ ist im Gebiet $(x_0,+\infty)$ absolut integrabel [vgl. M. Fukuhara-M. Nagumo, Proc. Imp. Acad. Tokyo **6**, 131—132 (1930)], oder 2) $|\varphi(x)-a|$ ist im Gebiet $(x_0, +\infty)$ von beschränkter Schwankung [vgl. A. Wiman, dies. Zbl. **14**, 19 und auch R. Caccioppoli, Rend. R. Acc. Naz. Lincei (6) **11**, 251—254 (1930)]. Auf Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung wurde das Kriterium 1) von M. Hukuhara (dies. Zbl. **9**, 16) und L. Cesari (dies. Zbl. **21**, 126; **22**, 338) erweitert. In vorliegender Arbeit erweitert Verf. das Kriterium 2) auf homogene und nichthomogene lineare Differentialgleichungen und Systeme solcher in Normalform und zeigt an einem Beispiel, daß seine Ergebnisse sich nicht verbessern lassen. — Für den homogenen Fall beweist er folgendes: Sind in dem Differentialsystem (2) $y_\lambda'(x)=\sum_{\mu=1}^{n}[a_{\lambda,\mu}+f_{\lambda,\mu}(x)+\varphi_{\lambda,\mu}(x)]y_\mu(x)$ ($\lambda=1,2,\ldots,n$) die Funktionen $f_{\lambda,\mu}(x)$ im Gebiet $(x_0,+\infty)$ von beschränkter Schwankung, gilt ferner $\lim_{x\to\infty} f_{\lambda,\mu}(x)=0$, sind weiter die Funktionen $\varphi_{\lambda,\mu}(x)$ im Gebiet $(x_0,+\infty)$ absolut integrabel, und haben die Wurzeln ϱ der Gleichung $|a_{\lambda,\mu}-\delta_{\lambda,\mu}\varrho|=0$ ($\delta_{\lambda,\mu}=1$ für $\lambda=\mu$, $\delta_{\lambda,\mu}=0$ für $\lambda\neq\mu$) sämtlich nichtpositive Realteile, wobei diejenigen mit verschwindendem Realteil einfach sind, und haben ferner die Wurzeln der Gleichung $|a_{\lambda,\mu}+f_{\lambda,\mu}(x)-\delta_{\lambda,\mu}\varrho(x)|=0$ im Gebiete $(x_0,+\infty)$ nichtpositive Realteile, so sind sämtliche Integrale des Systems (2) beschränkt. *G. Sansone* (Firenze).

Mambriani, A.: La derivazione d'ordine qualunque e la risoluzione dell'equazione ipergeometrica. Boll. Un. Mat. ital., II. s. **3**, 9—18 (1940).

Die Ableitung der Ordnung ω ($R\omega<0$) werde durch

$$D_{x_0}^{\omega}f(x)=\frac{1}{(-\omega-1)!}\int_{x_0}^{x}f(t)(x-t)^{-\omega-1}dt$$

definiert. Verf. beweist, daß die Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$x(1-x)y''-\{(\alpha+\beta+1)x-\gamma\}y'-\alpha\beta y=0$$

spezielle Zweige der Ausdrücke

(1) $D^{\alpha-1}\{x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}\}$, (2) $D^{\alpha-1}\{x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}\int x^{\gamma-\alpha-1}(1-x)^{\beta-\gamma}D^{-\alpha}0\,dx\}$

und von Linearkombinationen derselben mit konstanten Koeffizienten sind. Aus (1) leitet man auf elegante Weise die klassischen Integrale von Euler und Jacobi her. Weitere Ergebnisse gewinnt Verf. aus (2), indem er für $D^{-\alpha}0=B^{-\alpha+1}$ den speziellen Zweig $\frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}$ wählt. *Giovanni Sansone* (Firenze).

Moore, M. G.: Fundamental systems of solutions for linear difference equations. Duke math. J. **6**, 652—657 (1940).

This paper studies the generalized difference equation

(1) $$\sum_{\mu=1}^{N}c_\mu f(x+\alpha_\mu)=0$$

with constant coefficients c_μ and with complex spans α_μ. There are particular solutions of (1) which are of the form $x^q \exp(t_m x)$ $(q = 0, 1, 2, \ldots, w(m) - 1)$ associated with the zero t_m of the function $h(t) = \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu \exp(\alpha_\mu t)$, the order of t_m being $w(m)$. The author investigates the problem how extensive a class of solutions can be obtained by taking linear combinations of these particular solutions and the limits of converging sequences of such linear combinations. For this purpose the author introduces a sequence of contour-integrals which defines a formal expansion of an arbitrary function into the series of the fundamental solutions of (1), and gives the convergence-theorems of this series, which is called F-series in this paper, for various classes of functions. Finally this paper gives us the following fundamental theorems: (I) Let $f(x)$ be analytic throughout an open region U containing the polygon P (the smallest closed convex polygon containing $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$) and let (1) be satisfied for x in a neighborhood of the origin. Let $\bar{P}$ be the smallest closed convex polygon containing a set of β_μ which are so defined that $\beta_\mu - \alpha_\mu + \alpha_\nu$ is a point of $\bar{P}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, N)$. Then if $\bar{P}$ contains P and is contained in U, the F-series converges uniformly to $f(x)$ in $\bar{P}$. (II) Let $f(x)$ be an integral function which satisfies (1). Then its F-series converges to $f(x)$ throughout the finite plane, the convergence being uniform in any closed region. The reviewer thinks it not unnecessary to remark that, as the author of this paper points out, the F-series for the real problem is a special case of the reviewer's Cauchy series which is defined for a more general functional equation and that it will be of some interest to investigate how the results and the methods adopted in Cauchy series can be extended for the case of the complex problem, in view of the present paper.

T. Kitagawa (Hukuoka).

Shin, D.: On solutions of the system of quasi-differential equations. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **28**, 391—395 (1940).

Es seien P, Q, R, Λ quadratische Matrizen n-ter Ordnung, deren Elemente komplexe Funktionen einer reellen Veränderlichen x sind; insbesondere mögen die Elemente λ_{ik} der Matrix Λ von einem komplexen Parameter λ rational abhängen: $\lambda_{ik} = (a_{ik}\lambda + b_{ik}) : (c_{ik}\lambda + d_{ik})$. Es handelt sich um Untersuchungen betreffend Lösungen F der Differentialgleichung (1) $F^{[1]} - \Lambda F = F^*$, wobei F^* einen von x abhängenden Vektor mit n Komponenten bedeutet und $F^{[1]}$ mittels des Vektors $F^{[0]} = PF$ in folgender Weise definiert ist: $F^{[1]} = iQ(dF^{[0]}/dx) + RF^{[0]}$. Ein Vektor F wird als eine Lösung von (1) bezeichnet, wenn die Komponenten von $F^{[0]}$ absolut stetig sind und $F^{[1]} - \Lambda F$ fast überall mit F^* übereinstimmt. Unter gewissen Bedingungen betreffend die P, Q, R, Λ, F^* gilt über die Lösungen F der Differentialgleichung (1) ein dem klassischen skalaren Falle ähnlicher Existenzsatz, und die homogene Differentialgleichung $F^{[1]} - \Lambda F = 0$ besitzt n unabhängige Lösungen. Die Lösungen werden hinsichtlich der Eigenschaft L_2 im Zusammenhang mit den Werten des Parameters λ weiter beschrieben (vgl. D. Schin, dies. Zbl. **23**, 317). *O. Borůvka* (Brünn).

Halpern, S.: Quelques remarques sur les systèmes aux différentielles totales. Matematika. Učenye Zapiski Moskov gosud. Univ. **45**, 93—96 u. franz. Zusammenfassung 96 (1940) [Russisch].

Im System

$$(1)\qquad \left.\begin{aligned} L_i\{w\} \equiv \frac{\partial w_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{p} a_{ij}(t, u) w_j = F_i(t, u) \\ M_i\{w\} \equiv \frac{\partial w_i}{\partial u} - \sum_{j=1}^{p} b_{ij}(t, u) w_j = \Phi_i(t, u) \end{aligned}\right\} i = 1, 2, \ldots p$$

seien die Koeffizienten a_{ij}, b_{ij} und die rechten Seiten F_i, Φ_i stetige Funktionen von t, u

in einem bestimmten Bereiche. Unter den Verträglichkeitsbedingungen

$$\|a_{ij}\| = A, \quad \|b_{ij}\| = B; \quad AB - BA = \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial t},$$

$$L_i\{\Phi\} - M_i\{F\} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, p$$

hat das System (1) die Lösung

$$(2) \qquad w_i = \int_{(t_0, u_0)}^{(t, u)} \sum_{j=1}^{p} \{F_j(t_0, u_0) w_i^j(t, u, t_0, u_0)\, dt_0 + \Phi_j(t_0, u_0) w_i^j(t, u, t_0, u_0)\, du_0\},$$

wo w_i^j das Fundamentalsystem der Lösungen des homogenen Systems (1) bedeutet. Die Lösung (2) hat ähnliche Eigenschaften wie die Lösung des Systems der linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen. Die Formel (2) ist der bekannten Formel von Cauchy ähnlich. *Rádl* (Prag).

Pfeiffer, G.: Sur la représentation spéciale d'une équation linéaire en Jacobiens aux dérivées partielles du premier ordre à plusieurs fonctions inconnues, satisfaisant aux conditions de M. Hamburger, et d'un système d'équations linéaires en Jacobiens, satisfaisant aux conditions de M. Hamburger généralisées. Rec. Trav. Inst. Math. Acad. Sci. RSS Ukraine Nr 5, 17—29 u. franz. Zusammenfassung 30 (1940) [Ukrainisch].

Untersuchungen betreffend partielle Differentialgleichungen von der Form

$$(1) \quad M + \sum_{\sigma, \tau}^{k, n} M_\tau^\sigma \frac{\partial z_\sigma}{\partial x_\tau} + \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2 \\ \tau_1, \tau_2}}^{k, n} M_{\tau_1 \tau_2}^{\sigma_1 \sigma_2} \frac{\partial (z_{\sigma_1}, z_{\sigma_2})}{\partial (x_{\tau_1}, x_{\tau_2})} + \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \\ \tau_1, \tau_2, \tau_3}}^{k, n} M_{\tau_1 \tau_2 \tau_3}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} \frac{\partial (z_{\sigma_1}, z_{\sigma_2}, z_{\sigma_3})}{\partial (x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, x_{\tau_3})} + \cdots = 0,$$

wobei die Ableitungen der unbekannten Funktionen $z_1, \ldots, z_k$ nach den unabhängig Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ in Jacobischen Determinanten auftreten. Über die Koeffizienten wird vorausgesetzt, daß sie den Bedingungen von M. Hamburger genügen. Bekanntlich ist die Integration einer solchen Differentialgleichung der Integration des folgenden Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer unbekannten Funktion äquivalent: (2) $M \partial f / \partial z_\varkappa - \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^\varkappa \partial f / \partial x_\nu = 0$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$. In der vorliegenden Arbeit wird der Einfluß einer Verlängerung des Systems (2) durch Hinzufügen einer oder mehrerer Gleichungen von der Form

$$\partial f / \partial x_{n-\alpha} - a_{\alpha, 1} \partial f / \partial x_1 - \cdots - a_{\alpha, n-\alpha-1} \partial f / \partial x_{n-\alpha-1} = 0 \quad (\alpha = 0, 1, \ldots)$$

auf die Gleichung (1) untersucht, und es werden Gleichungen (1) aufgestellt, die den verlängerten Systemen (2) entsprechen. Diese Untersuchungen werden dann auf Systeme von Differentialgleichungen von der Form (1) erweitert. *O. Borůvka.*

Petrowsky, I.: Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen. Bull. Univ. État Moscou, Sér. Int., Sect. A: Math. et Mécan. **1**, Fasc. 7, 1—74 (1938).

Für das System der partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{(k_s)} A_{ij}^{(k_s, k_1, \ldots, k_n)}(t) \frac{\partial^{k_0 + k_1 + \cdots + k_n} u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$$

$(i = 1, \ldots, N; t \in (0, T); x_i$ reell), wobei sich die innere Summe auf alle ganzen $k_s \geqq 0$, deren Summe eine Zahl M nicht übertrifft und in der $k_0 < n_j$ (> 0) ist, bezieht, wird der Begriff der gleichmäßig korrekten Stellung des Cauchyschen Problems folgendermaßen erklärt: Für jedes $0 \leqq t_0 < T$ und für jedes System von beschränkten Funktionen $\varphi_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)$ $(k = 0, \ldots, n_i - 1)$, deren partielle Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung L ebenfalls beschränkt sind, gibt es ein einziges System von Funktionen u_i, die 1. samt allen partiellen Ableitungen von genügend hoher Ordnung beschränkt sind, für $t_0 < t \leqq T$ das System befriedigen und sich für $t = t_0$ mit ihren

Ableitungen nach t bis zur Ordnung $n_i - 1$ auf die $\varphi_i^{(k)}$ reduzieren; 2. diese Lösung u_i ändert sich mit den Funktionen $\varphi_i^{(k)}$ und ihren partiellen Ableitungen bis zur Ordnung L stetig, und zwar gleichmäßig in bezug auf t_0. Unter der Voraussetzung, daß die Funktionen $A_{ij}^{(k_0, k_1, \ldots, k_m)}(t)$ und f_i beschränkte partielle Ableitungen von genügend hoher Ordnung besitzen, gibt der Verf. eine notwendige und hinreichende Bedingung für die gleichmäßig korrekte Stellung des Cauchyschen Problems an. In diesem Zusammenhang werden dann gewisse sog. parabolische und hyperbolische Systeme mit tiefliegenden Mitteln eingehend untersucht. *O. Borůvka* (Brünn).

Karimov, Dsh. H.: Über die periodischen Lösungen der nichtlinearen differentialen Gleichungen des parabolischen Typus. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **28**, 403—406 (1940).

Ein Existenzsatz betreffend die Lösungen der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) $\partial[P(x)\partial z/\partial x]/\partial x - \partial z/\partial t = \Phi(x,t) + \mu f(z)$. Unter gewissen Bedingungen über die Funktionen $P(x)$, $\Phi(x,t)$, $f(z)$, von denen insbesondere die Periodizität in bezug auf t der Funktion $\Phi(x,t)$ und die Möglichkeit ihrer Entwicklung nach den Funktionen $X_n(x)$ eines orthogonalen und normalen Systems: $\Phi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(t) X_n(x)$ $(X_n(0) = X_n(\pi) = 0)$ hervorzuheben ist, besitzt die Gleichung (1) eine einzige, mit stetiger Ableitung erster (in bezug auf t) und zweiter (in bezug auf x) Ordnung versehene und in bezug auf t periodische Lösung, welche die folgenden Anfangsbedingungen erfüllt: $z(0,t) = z(\pi,t) = 0$, $z(x,0) = z(x,1)$. Zum Beweise des Satzes wird die Lösung mittels sukzessiver Approximationen konstruiert. Das Resultat stellt eine Verallgemeinerung eines vom Verf. früher bewiesenen Satzes dar (vgl. dies. Zbl. **22**, 226). *O. Borůvka* (Brünn).

Drinfeld, G.: Sur les opérateurs permutant les invariants intégraux d'un groupe continu de transformations. Rec. Trav. Inst. Math. Acad. Sci. RSS Ukraine Nr **5**, 117—121 u. franz. Zusammenfassung 122 (1940) [Ukrainisch].

Es sei G_r eine r-parametrige kommutative Transformationsgruppe mit den linear unabhängigen infinitesimalen Operatoren $X_1(f), \ldots, X_r(f)$. Ein infinitesimaler Operator $Z(f) = Z_i \partial f/\partial x^i$ transformiert dann und nur dann die Integralinvarianten aller Ordnungen von G_r in der Weise, daß jede Integralinvariante $\int A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \cdots dx^{\alpha_p}$ in $\int B_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \cdots dx^{\alpha_p}$ übergeht, wobei

$$B_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = Z(A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}) + \sum_i A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} j \alpha_{i+1} \ldots \alpha_p} (\partial Z_j/\partial x^{\alpha_i})$$

ist, wenn G_r eine in der durch die infinitesimalen Operatoren $X_1(f), \ldots, X_r(f), Z(f)$ erzeugten $(r+1)$-parametrigen Gruppe invariante Untergruppe ist (für $r = 1$ vgl. Drinfeld, dies. Zbl. **23**, 320). *O. Borůvka* (Brünn).

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Malkin, I. F.: On the problem of the conduction of heat in cylindrical shafts and shells. Appl. Math. a. Mech., N. s. **3**, Nr 2, 23—40 u. engl. Zusammenfassung 40 (1939) [Russisch].

Fortsetzung früherer Arbeiten des Verf. [Appl. Math. a. Mech., N. s. **2**, Nr 3, 317 usw.; 331 usw.; N. s. **2**, Nr 4, 487 usw. (1939)]. Es wurde eine Methode für die Ausrechnung der Verteilung der Temperaturen in Platten angegeben. Jetzt wird dieselbe Methode zur Untersuchung kreisförmiger Zylinder (auch hohler) angewendet. *Janczewski* (Leningrad).

Wavre, Rolin: Sur l'intégrale de Cauchy étendue à une ligne ouverte. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 22) **57**, 78—79 (1940).

Verf. sucht Fälle, wo das im Titel genannte Integral in einem Gebiete identisch verschwindet, und stellt Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf, die in Zusammenhang mit diesem Problem stehen. *G. af Hällström* (Åbo).

Wavre, Rolin: A propos d'un problème d'attraction et les fonctions orthogonales aux fonctions harmoniques. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 22) **57**, 113—115 (1940).

Es wird die Aufgabe gelöst, bei gegebenem Körper verschiedene Massendichten zu bestimmen, die im Außenraume eines Körpers D dasselbe Potential erzeugen und dieselben Trägheitsmomente besitzen. Dies ist im allgemeinen auf unendlich verschiedene Arten möglich und die (als stetig angenommenen) Funktionen, die im Außenraume von D das Potential Null erzeugen, sind orthogonal zu allen in D harmonischen Funktionen. Umgekehrt läßt sich zeigen, daß sich jede in D stetige Funktion eindeutig als Summe einer in D harmonischen und einer stetigen Funktion darstellen läßt, die zu allen im Inneren von D harmonischen Funktionen von gleichmäßig beschränktem Quadratintegral über D orthogonal ist. *G. Tautz* (Breslau).

Soudan, Robert: Sur la déformabilité d'un corps à potentiel constant. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 22) **57**, 79—82 (1940).

Verf. beweist: Es läßt sich eine infinitesimale Deformation eines homogenen anziehenden Körpers bestimmen, deren Dicke proportional mit ε ist und derart, daß die Änderung ΔU des Newtonschen Potentials U des Körpers der Bedingung

$$\Delta U \leqq \varepsilon^n A$$

genügt. Der Sinn verschiedener Formeln des Verf. wurde Ref. nicht klar. *Tautz.*

Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Levi, Beppo: Über das System $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)\,dx = p(y)$; $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xy)\,dy = q(x)$.

Publ. Inst. Math., Rosario **1**, Nr 1, 8 S. (1939) [Spanisch].

Nennt man ein System, für das $p(y) \equiv 0$ und $q(x) \equiv 0$ ist, homogen, so wird zunächst bewiesen, daß sich die allgemeine Lösung des Problems in der für lineare Systeme bekannten Weise aus einer partikulären Lösung des inhomogenen Systems und der allgemeinen Lösung des homogenen Systems aufbauen läßt. Ist eine beliebige Funktion $\psi(x, y)$ so beschaffen, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, y)dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, y)dy \quad \text{existieren und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, y)dy,$$

und eine beliebige Funktion $\lambda(\xi)$ an die Bedingung gebunden $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(\xi)d\xi = 1$, so hat die allgemeine Lösung des homogenen Problems die Form:

$$\Phi(x, y) = \psi(x, y) - \lambda(x)\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, y)dx - \lambda(y)\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, y)dy + \lambda(x)\lambda(y)\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, y)dx.$$

Erfüllen die Funktionen $p(y)$ und $q(x)$ die Bedingung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} q(x)dx = M,$$

so ist $p(y)q(x)/M$ eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems. Für Polynome $p(y)$ und $q(x)$ ist jedoch die obige Bedingung nicht erfüllt. Für den Fall $p(y) \equiv y^n$ und $q(x) \equiv x^n$ wird jedoch eine partikuläre Lösung in der Gestalt

$$\overline{\varphi}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sum_{\alpha=0}^{n} a_\alpha x^\alpha y^{n-\alpha}\right) e^{-(x+y)^2}$$

ermittelt (die Koeffizienten a_α sind in geeigneter Weise zu bestimmen). Mittels dieser Lösung läßt sich die Lösung von $p(y) \equiv y^n$ und $q(x) \equiv 0$ ausdrücken und darauf schließlich die Lösung der Aufgabe für beliebige Polynome $p(y)$ und $q(x)$ zurückführen. *F. Knoll* (Wien).

Kawata, Tatsuo: A relation between the theories of Fourier series and Fourier transforms. Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 255—261 (1940).

Verf. beweist die beiden folgenden Sätze, welche gewisse Analogien zwischen

Fourierreihen und Fouriertransformationen erklären: (1) Es sei $f(x) \in L_p(-\infty, +\infty)$ für ein $p > 1$ und besitze die Fouriertransformation $F(t)$ in $L_q(-\infty, +\infty)$ für ein $q \geqq 1$. Ist dann $\varphi(t)$ diejenige mit $2R$ periodische Funktion, welche in $(-R, +R)$ mit $F(t)$ übereinstimmt und ist $\varphi(t) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{R}t}$ ihre Fourierreihe, so besteht die Beziehung $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^p \leqq \frac{A_p}{R^{p-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx$. Dabei ist A_p eine nur von p, nicht aber von $f(x)$ und R abhängige Konstante. (2) Es sei $\varphi(t) \in L(-R, +R)$ mit $2R$ periodisch, und es sei die aus ihren Fourierkoeffizienten c_n gebildete Reihe $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^p$ $(p > 1)$ konvergent. Definiert man dann $F(t)$ durch $F(t) = \varphi(t)$ in $(-R, +R)$ und $F(t) = 0$ in $|t| \geqq R$, so gilt für ihre (in L_∞ existierende) Fouriertransformation $f(x)$ die Beziehung $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx \leqq B_p R^{p-1} \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^p$. Dabei ist B_p eine nur von p, nicht aber von $\varphi(t)$ und R abhängige Konstante. — Als Anwendung leitet Verf. noch mit Hilfe von (1) aus dem Satz von Hausdorff-Young über Fourierreihen den entsprechenden Satz von Titchmarsh über Fouriertransformationen her. *F. Lösch* (Rostock).

Funktionalanalysis, Funktionalräume:

Faedo, Sandro: Il principio di Zermelo per gli spazi astratti. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **9**, 263—276 (1940).

Im Raume S der Punkte P mit den reellen Koordinaten $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sei ein Modul $\Delta(P)$ definiert, der folgende Eigenschaften besitzt: 1. $\Delta(P) \geqq 0$; 2. für den Anfangspunkt $P(0, 0, \ldots)$ ist $\Delta(P) = 0$; 3. $\Delta(P)$ ist eine nichtabnehmende, stetige Funktion einer jeden Koordinate a_n; 4. sind $\Delta(P_n)$ für die Punkte $P_n(a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ beschränkt, so ist $\Delta(P)$ endlich; 5. ist $\Delta(P)$ endlich, so ist für die Punkte $P^n(0, \ldots, 0, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)$ $\lim_{n\to\infty} \Delta(P^n) = 0$; 6. es gibt eine nur von M abhängende Zahl K_M so, daß für den Abstand $\Delta(P, Q) = \Delta(P - Q)$ der Punkte P, Q, deren Moduln $\Delta(P) \leqq M$, $\Delta(Q) \leqq M$ sind, die Ungleichung $\Delta(P, Q) \leqq K_M[\Delta(P) + \Delta(Q)]$ erfüllt ist. Verf. betrachtet den Raum S_Δ jener Punkte P von S, für welche $\Delta(P)$ endlich ist. Er gibt eine gewisse Vorschrift an, welche einer jeden abgeschlossenen Menge in S_Δ einen bestimmten Punkt dieser Menge zuordnet. Das Zermelosche Auswahlaxiom ist also im Falle abgeschlossener Mengen eines S_Δ vermeidbar. Der Raum S_Δ umfaßt u. a. den Fréchetschen, den Hilbertschen und Pseudo-Hilbertschen Raum als Spezialfälle. *G. Hajós* (Budapest).

Fréchet, Maurice: Sur les espaces distanciés. Gedenkwerk D. A. Gravé, Moskau 265—267 (1940).

Bemerkungen zu dem Beweis von M. Kunugui [Proc. Imp. Acad. Tokyo **11**, 351 bis 353 (1935); dies. Zbl. **14**, 256], daß jeder metrische Raum zu einer Teilmenge eines vollständigen Banachraumes isometrisch ist. *G. Köthe* (Gießen).

Gantmacher, Vera, und Vitold Šmulian: Über schwache Kompaktheit im Banachschen Raum. Rec. math. Moscou, N. s. **8**, 489—491 u. deutsch. Zusammenfassung 492 (1940) [Russisch].

Ist K eine schwach kompakte Menge in einem Banachraum E, so gibt es zu jeder beschränkten Folge von Funktionalen f_n, $\|f_n\| \leqq 1$, eine Teilfolge f_{n_i} und ein $f_0 \in \overline{E}$, $\|f_0\| < 1$, so daß $\lim f_{n_i}(x) = f_0(x)$ ist für jedes x aus K. (Nach dem Auszug referiert.) *G. Köthe* (Gießen).

Sirvint, G.: Schwache Kompaktheit in den Banachschen Räumen. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **28**, 199—202 (1940).

Mitteilung einer Reihe von Sätzen ohne Beweise. Charakteristisch für den Inhalt sind die folgenden Sätze. — Es sei E ein separabler Raum vom Typus (B). Damit

$G \subset E$ schwach kompakt sei, ist es notwendig und hinreichend, daß für eine beliebige Folge $f_n(x)$ von linearen Operationen auf E, für die $f_n(x) \to 0$, diese Konvergenz quasi-gleichmäßig auf G stattfindet (d. h. man kann zu $\varepsilon > 0$ und $N > 0$ endlich viele Indizes $n_1, n_2, \ldots, n_k$ derart finden, daß 1) $n_i > N$ für jedes i, 2) es zu jedem $x \in G$ wenigstens ein n_i gibt, so daß $|f_{n_i}(x)| < \varepsilon$). — Es wird gesagt, daß die Folge f_n von linearen Operationen auf E eigentlich schwach gegen 0 strebt, wenn $F(f_n) \to 0$ für jede lineare Operation F gilt, die in dem Raume E^* der linearen Operationen von E definiert ist. Notwendig und hinreichend hierfür ist, daß für jede Teilfolge f_{n_k} von f_n, $f_{n_k}(x)$ auf der Einheitskugel von E quasi-gleichmäßig gegen 0 strebt. — Es folgen Kriterien für die schwache Vollstetigkeit einer linearen Transformation, die einen Raum E in einen separablen Raum E_1 transformiert. Ist E_1 der Raum C der stetigen Funktionen auf dem Intervall (a, b), so wird die allgemeine Form einer solchen Transformation angegeben. *Béla v. Sz. Nagy* (Szeged).

Bohnenblust, F.: An axiomatic characterization of L_p-spaces. Duke math. J. **6**, 627—640 (1940).

The fundamental theorem proved in this paper is as follows: Any partially ordered, separable, Banach space of at least three dimensions in which "property P" is valid is "strongly equivalent" to one of the following spaces: (a) $l_{p,n}$, $l_{p,\infty}$ $(1 \leqq p < \infty)$, whose elements are finite or infinite sequences $x = \{\xi_n\}$ with a finite norm $\|x\| = (\sum |\xi_n|^p)^{1/p}$, (b) $L_p (1 \leqq p < \infty)$, whose elements are Lebesgue measurable functions over the interval (0, 1) with a finite norm $\left(\int |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$, (c) any direct sum of (a) and (b) with the same number p, where the norm is given as the $l_{p,2}$ norm of the norms of the components, (d) $l_{\infty,n}$, whose elements are $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ with the norm $\max(|\xi_n|)$, (e) C_0, whose elements are sequences converging to zero with the norm $\max(|\xi_n|)$. Herein the "property P" means that, if a and b are two elements of the linear space which can be split up as the sum of two mutually orthogonal elements: $a = a_1 + a_2$, $|a_1| \wedge |a_2| = 0$; $b = b_1 + b_2$, $|b_1| \wedge |b_2| = 0$, in such a way that $\|a_1\| = \|b_1\|$ and $\|a_2\| = \|b_2\|$, then the norms of the elemente a and b must be equal. The notion of "strong equivalence" is defined as follows: Two Banach spaces are said to be equivalent if there exists a norm preserving one-to-one correspondence between their elements. If the spaces are partially ordered, and the correspondence can be so chosen to be also order preserving, they will be said to be strongly equivalent. The fundamental idea of this paper, it seems to the reviewer, lies in reducing the property P into the functional equation $f(\xi, f(\eta, \zeta)) = f(f(\xi, \eta), \zeta)$ for any $\xi, \eta, \zeta > 0$, by considering $f_{a,b}(\xi, \eta) = \left\| \xi \frac{a}{\|a\|} + \eta \frac{b}{\|b\|} \right\|$, where a and b are the elements of the space. *T. Kitagawa* (Hukuoka).

Kakutani, Shizuo: On the uniform ergodic theorem concerning real linear operations. Jap. J. Math. **17**, 5—12 (1940).

Let T be a linear operation on a real Banach space E to E. Introduce a complex Banach space $E^* = E + \sqrt{-1}E$ of points $z = x + \sqrt{-1}y$ $(x, y \in E)$ with norm $\|z\| = \|x\| + \|y\|$ and scalar multiplication $\alpha z = ax - by + \sqrt{-1}(bx + ay)$ $(\alpha = a + \sqrt{-1}b,\ a, b$ real). Then by $T \cdot z = T \cdot x + \sqrt{-1}\, T \cdot y$ a real linear operation on E^* to E^* is defined. Let T satisfy i) $\|T^n\| \leqq C$ $(n = 1, 2, \ldots)$, ii) there exists an integer $m > 0$ and a completely continuous linear operation on E^* to E^* such that $\|T^m - V\| < 1$. Then it is proved that the proper values λ of T of modulus 1 are finite in number and satisfy the relation $\lambda^N = 1$ with common integer N. This is an elegant extension of a theorem due to M. Fréchet (this Zbl. **9**, 264), generalised by the reviewer (this Zbl. **21**, 422). The proof, which appeals to a theorem of the author and the reviewer (this Zbl. **19**, 414, 416), is short and plain. The result plays an essential rôle in the operator-theoretical treatment of the Markoff process. A matrix analogue of the result is also obtained, which may be compared with the well-known theorem due to G. Frobenius: If the maximum modulus of all the proper values of

a matrix $P = (p_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$ with non-negative elements be 1; then 1 is a proper value of P and all proper values of P of modulus 1 are roots of unity. *Kôsaku Yosida.*

Yosida, Kôsaku: An abstract treatment of the individual ergodic theorem. Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 280—284 (1940).

Let S be a linear space of the type (F), which is also semiordered in such a manner that the following conditions are satisfied: a) $\inf(x, y)$ and $\sup(x, y)$ are continuous in x and y in the topology defined by the norm $\|\cdots\|$, b) $x \geqq y \geqq -x$ implies $\|x\| \geqq \|y\|$, c) if we write $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} x_n = x$ in the case when $\overline{\operatorname{Lim}}_{n\to\infty} x_n = \inf_n \sup_{m\geqq n} x_m$ and $\underline{\operatorname{Lim}}_{n\to\infty} x_n = \sup_n \inf_{m\geqq n} x_m$ both exist and coincide, then $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} x_n = x$ implies $\|x_n - x\| \to 0$. — Let T_n be a sequence of continuous linear transformations of S in itself. Assume that $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} T_n x$ exists for all points x of a set of second category in S. If to a point $y \in S$ there corresponds a point $\bar{y} \in S$ such that $\|T_n y - \bar{y}\| \to 0$, $T_n \bar{y} = \bar{y}$ (for all n), $\operatorname{Lim}_{n\to\infty}(T_n y - T_n T_m y) = 0$ (for all m), then $\bar{y} = \operatorname{Lim}_{n\to\infty} T_n y$. — The author calls this theorem an abstract form af the individual ergodic theorem. As a matter of fact, it gives a possibility to derive "individual" ergodicity (expressed by $\operatorname{Lim} T_n y = \bar{y}$) from the "statistical" one (expressed by $\|T_n y - \bar{y}\| \to 0$). — It is shown how Wiener's m-parameter individual ergodic theorem may be derived from this theorem. — From the further applications we cite only the following one: Let T be a continuous linear transformation of L^p in itself $(p \geqq 1)$. Assume that to any $x(t) \in L^p$ there corresponds an $X(t) \in L^p$ such that $|T^n x(t)| \leqq X(t)$ almost everywhere $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Then it is possible to associate to any $x \in L^p$ an $\bar{x} \in L^p$ such that for $n \to \infty$:

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_1^n T^m x - \bar{x} \right\| \to 0 \quad \text{and} \quad \text{(almost every-where)} \quad \frac{1}{n} \sum_1^n T^m x(t) \to \bar{x}(t).$$

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Šilov, G.: Sur la théorie des idéaux dans les anneaux normés de fonctions. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **27**, 900—903 (1940).

Für gewisse normierte Ringe aus Funktionen $x(t)$, die auf einer Menge S erklärt sind, werden die Ideale untersucht, vor allem die Frage, wann jedes Ideal als die Menge aller auf einer bestimmten Teilmenge von S verschwindenden Funktionen aufgefaßt werden kann. *G. Köthe* (Gießen).

Bochner, S.: Additive set functions on groups. Ann. of Math., II. s. **40**, 769—799 (1939).

Let $\mathfrak{G}$ be a set with elements $x, y, \ldots$ and J the class of subsets of $\mathfrak{G}$. J is called Jordan field if and only if 1. 0 (empty set) $\in J$, $E \in J$ implies $\mathfrak{G} - E \in J$, 2. $E_1, E_2 \in J$ implies $E_1 \cdot E_2 \in J$, $E_1 + E_2 \in J$, 3. a numerical function $vE = |E|$, $0 \leqq |E| \leqq 1$, $|0| = 0$, $|\mathfrak{G}| = 1$, being defined for each $E \in J$, and 4. $E_1 \cdot E_2 = 0$ implies $|E_1 + E_2| = |E_1| + |E_2|$. Partition $\delta = \delta(E_\nu)$ of $\mathfrak{G}$ is a representation of $\mathfrak{G}$ as a finite sum of mutually exclusive elements E_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ in J. When $f(x)$ is a bounded real function on $\mathfrak{G}$, its Riemann integral is defined by the value

$$\lim_\delta \sum_\nu \sup_{x\in E_\nu} f(x) \cdot |E_\nu| \quad \text{or} \quad \lim_\delta \sum_\nu \inf_{x\in E_\nu} f(x) \cdot |E_\nu|,$$

if they coincide, where $\lim_\delta$ is taken in the Moore-Smith sense. — This value is denoted by $\int f(x)\,dv$. Let R be the entity of such (integrable) functions $f(x)$, and R_0 the subclass of R consisting of functions $f(x)$ such that corresponding to any $\varepsilon > 0$ there exists a partition $\delta(E_\nu)$ that the oscillation of $f(x)$ is $< \varepsilon$ on each E_ν. If for each $f(x) \in R$ the norm $\|f(x)\|_p = \left(\int |f(x)|^p dv\right)^{1/p}$ $(p \geqq 1)$ is introduced and the so normed space is denoted by R_p, then the step-functions are dense in R_p. — $f(x)$ is called a step-function if there exists a partition $\delta(E_\nu)$ such that $f(x)$ is constant on each E_ν. — Let C be the

class of bounded functions everywhere defined on $\mathfrak{G}$ and $M_x f(x)$ a numerical function defined for all $f(x) \in C$ such that 1. C contains $f(x) \equiv 1$, 2. $f_1 \in C$, $f_2 \in C$ imply $f_1 \cdot f_2 \in C$, $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in C$ for every constants c_1, c_2, 3. $f \in C$ implies $\bar{f} \in C$, 4. if $f \in C$ and f is real, then $|f| \in C$, 5. $M_x 1 = 1$, 6. $M_x(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 M_x f_1 + c_2 M_x f_2$, 7. $f(x) \geqq 0$ implies $M_x f(x) \geqq 0$, 8. if $f_n (\in C)$ converges uniformly to f then $f \in C$ and $M_x f_n$ converges to $M_x f$. Then there exists a Jordan field J_C such that 1. C belongs to the class R_0 on that field, 2. $M_x f(x) = \int f(x)\, dv$, 3. C is dense in each R_p $(p \geqq 1)$. Put $v^* A = \inf_{\substack{f \in C \\ f \geqq \omega_A}} M_x f(x)$, $v_* A = \sup_{\substack{f \in C \\ f \leqq \omega_A}} M_x f(x)$ (ω_A is the characteristic function of A) for any $A \in \mathfrak{G}$. J_C is defined as the class of A such that $v^* A = v_* A$. As easily may be verified, J_C satisfies the required conditions. Such an J_C is called the generated Jordan field. A generated Jordan field J_C can be extended to a Lebesgue field [which is a Jordan field such that 1. $E_\nu \in J$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ implies $\sum_1^\infty E_\nu \in J$, 2. $E_\nu \uparrow (\downarrow) E$ implies $|E_\nu| \to |E|$, 3. $|E| = 0$, $E' \in E$ imply $E' \in J$] if and only if for any sequence $\{f_n(x)\} \in C$, $\lim_n f_n(x) = 0$, $|f_n(x)| \leqq K$ imply $\lim_n M_x f_n(x) = 0$. — Let $F(E)$ be a real valued set-function defined for all E in J, additive and of bounded variation. $F(E)$ is called constant in E_0 if $|E_0| > 0$ and $F(E)/|E| = F(E_0)/|E_0|$ for all $E (\in E_0)$ with positive $|E_0|$. $F(E)$ is called a step-function when there is a partition $\delta(E_\nu)$ such that $F(E)$ is constant in each E_ν. For given $p \geqq 1$ and $F(E)$, put $A(\delta) = \left(\sum_\nu |F(E_\nu)|^p / |E_\nu|^{p-1}\right)^{1/p}$ where $|F(E_\nu)|^p / |E_\nu|^{p-1}$ shall have the value 0 for $|E_\nu| = 0$ if $p > 1$. We introduce a norm by $\|F\|_p = \lim_\delta A(\delta)$ and denote the resulting complete Banach space by V_p. AC means a subspace of V_1 such that for any $\varepsilon > 0$, there is an $\eta(\varepsilon)$ tending to 0 with ε such as $|E| \leqq \eta(\varepsilon)$ implies $|F(E)| \leqq \varepsilon$. Then step-functions are dense in $V_p (p > 1)$ and AC concerning respective topology. This is a generalization to Jordan fields of the theory of Nikodym [This result is extended by Ref., Proc. Imp. Acad. Jap. **15** (1939); this Zbl. **21**, 394]. — Finally supposing that $\mathfrak{G}$ is a group, the author develops Fourier analysis of point- and set-functions. The Bessel inequality and the Riesz-Fischer theorem are proved under certain conditions. Further Plessner's theorem concerning absolute continuity and M. Riesz's theorem concerning conjugate functions are extended. *Izumi* (Sendai).

Variationsrechnung:

Tonelli, Leonida: L'analisi funzionale nel calcolo delle variazioni. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **9**, 289—302 (1940).

Dans l'article en question l'A. donne un coup d'oeil à la méthode directe, qu'il a développé dans ses derniers six lustres, et à ses progrès auxquelles ont contribué aussi des mathématiciens étrangers. — À différence des anciennes recherches variationelles qui partaient des équations différentielles, à la base de la méthode en question, qui suit les liaisons entre le Calcul des Variations et le Calcul fonctionnel, se trouve la notion de semi-continuité, proprieté comune à la plupart des fonctionnelles du Calcul des Variations. — L'article en examen développe, en manière nouvelle et originale et avec des considérations très suggestives, les points de vue suivants: la nécessité des méthodes directes, la façon dans laquelle l'analyse fonctionnelle est utilisée, les résultats atteints par la nouvelle méthode, les problèmes qu'on étudie aujourd'hui, et de plus les questions que l'analyse fonctionnelle propose aux variationistes et que l'A. va résoudre. Entre ces dernières sont très intéressantes la recherche de l'extrêmum pour des fonctionnelles très générales (et dans lesquelles rentrent celles du Calcul des Variations), et l'extension de la théorie variationelle aux espaces abstraits. *S. Cinquini.*

Cinquini, Silvio: Una nuova estensione dei moderni metodi del calcolo delle variazioni. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **9**, 253—261 (1940).

On étudie le problème du minimum de l'intégrale $\int_a^b f\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right) dx$ dans l'hypothèse que les nombres a, b ne soient pas finis tous les deux, et on fait extension à ce nouveau cas de la méthode bien connue de Tonelli en supposant, pour fixer les idées, qu'on ait $b = +\infty$, tandis que a est toujours fini. — On suppose que $f(x, y, y')$ soit une fonction définie et continue dans tous les points (x, y) d'un domaine A et pour chaque valeur finie de y', et on appelle courbe $C^{(+\infty)}$ chaque courbe $y = y(x)$, $(a \leqq x < +\infty)$ telle que: 1° tous les points $(x, y(x))$ appartiennent au domaine A; 2° dans chaque intervalle (a, t) (avec $a < t < +\infty$) la fonction $y(x)$ est absolument continue et l'intégrale (dans le sens de Lebesgue) $\int_a^t f\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right) dx$ est finie; 3° l'intégrale généralisée

$$I_{C^{(+\infty)}} = \int_a^{+\infty} f\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right) dx$$

est finie. — On appelle classe de courbes complète au fini un ensemble J de courbes $C^{(+\infty)}$ tel que chaque courbe d'accumulation au fini, qui est une courbe $C^{(+\infty)}$, appartient à J. — Des résultats atteints on rappelle, par exemple, le théorème suiant: On suppose que: a) il y a un nombre fini ω et une fonction $\psi(x)$, $(\omega \leqq x < +\infty)$ continue et telle que l'intégrale $\int_\omega^{+\infty} \psi(x) dx$ soit finie, de façon que en tous les points (x, y) de A soit $x \geqq \omega$ et $f(x, y, y') \geqq \psi(x)$ pour chaque valeur fini de y'; b) l'intégrale $I_{C^{(+\infty)}}$ est quasi régulière positive; c) pour chaque paire de nombres h, Y, avec $h > \omega$, $Y > 0$, il y a une fonction $\Phi_{h,Y}(z)$, $(0 \leqq z < +\infty)$ inférieurement bornée telle que soit $\Phi_{h,Y}(z)/z \to +\infty$, pour $z \to +\infty$, et que en tous les points (x, y) de A, qui vérifient les inégalités $\omega \leqq x \leqq h$, $|y| \leqq Y$, soit $f(x, y, y') \geqq \Phi_{h,Y}(|y'|)$; d) il y a une fonction $g(x) \geqq 0$, telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ soit finie, un nombre $\lambda > 0$ et une fonction $\varphi(u)$ définie pour $|u| \geqq \lambda$, continue, non négative et telle que soit $\int_\lambda^{+\infty} \varphi(u) du = \int_{-\infty}^{-\lambda} \varphi(u) du = +\infty$, de façon que, en tous les points (x, y) de A avec $|y| \geqq \lambda$, soit

$$f(x, y, y') - \psi(x) \geqq |y'| \varphi(y),$$

pour tous les y' qui vérifient l'inégalité $|y'| \varphi(y) \geqq g(x)$. — Alors si J est une classe de courbes $C^{(+\infty)}$: $y = y(x)$, $(a \leqq x < +\infty)$ du domaine A, laquelle est complète au fini, et si il y a un ensemble borné E de points de A tel que au moins un point $(x, y(x))$ de chaque courbe de J appartient à E, il existe au moins une courbe de J qui réalise le minimum (absolu) de $I_{C^{(+\infty)}}$. *S. Cinquini* (Pavia).

McShane, E. J.: An estimate of the Weierstrass $\mathcal{E}$-function. Ann. of Math., II. s. **41**, 314—320 (1940).

W. E. Reid hat (dies. Zbl. **17**, 267) zur Aufstellung einer hinreichenden Bedingung für das Bolzasche Problem von einer auf die Weierstraßsche Funktion $\mathcal{E}$ bezüglichen Ungleichung Gebrauch gemacht, die unter der Annahme gilt, daß die fragliche Kurve nicht singulär sei. In der vorliegenden Arbeit eliminiert Verf. diese Annahme. — Verf. setzt voraus: Die Funktionen $f(x, y, r)$ und $\varphi^\alpha(x, y, r)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m < n)$ seien endlich und stetig zugleich mit ihren partiellen Ableitungen bezüglich der r^i in allen Punkten $(x, y, r) \equiv (x, y^1, \ldots, y^n, r^1, \ldots, r^n)$ einer Menge R; eine Menge (x, y, r) heißt zulässig, wenn sie zu R gehört und die Gleichungen $\varphi^\alpha(x, y, r) = 0$ befriedigt. Ferner wird in tensorieller Bezeichnung gesetzt:

$$F(x, y, r, \lambda) \equiv \lambda^0 (f(x, y, r) + \lambda^\alpha \varphi^\alpha(x, y, r),$$
$$\mathcal{G}(x, y, r, \bar{r}, \lambda) \equiv F(x, y, \bar{r}, \lambda) - F(x, y, r, \lambda) - (\bar{r}^i - r^i) F_i(x, y, r, \lambda),$$

wo $F_i = \frac{\partial F}{\partial r_i}$ bedeutet. — Verf. beweist folgenden Satz: Voraussetzung: 1. Die Kurve C: $y = \gamma(x)$, $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$ ist derart, daß $\gamma'(x)$ stetig und (x, γ, γ') zulässig ist. 2. Es gibt eine Zahl λ^0 und m stetige Funktionen $\lambda^1(x), \ldots, \lambda^m(x)$, derart, daß man im Raume (x, y, r, λ) eine Umgebung N der Punktmenge $(x_1 \leqq x \leqq x_2, \gamma(x), \gamma'(x), \lambda(x))$ finden kann, so daß $\mathcal{G}(x, y, r, \bar{r}, \lambda) > 0$ ist, wenn (x, y, r, λ) und $(x, y, \bar{r}, \lambda)$ zwei verschiedene zulässige Mengen sind und (x, y, r, λ) zu N gehört. 3. Die Matrix $\left\| \frac{\partial \varphi^\alpha(x, \gamma, \gamma')}{\partial r^i} \right\|$ hat den Rang m im Intervall $x_1 \leqq x \leqq x_2$. Alsdann gibt es zu jeder Zahl $\sigma > 0$ eine Zahl $\mu > 0$ und eine Umgebung N_0 der Punkte $(x, \gamma(x), \gamma'(x), \lambda(x))$ im Raume (x, y, r, λ), so daß die Ungleichung $\mathcal{G}(x, y, r, \bar{r}, \lambda) \geqq \mu |\bar{r} - r|$ erfüllt ist, wenn (x, y, r, λ) in N_0 liegt, die Mengen (x, y, r) und $(x, y, \bar{r})$ zulässig sind, und $|\bar{r} - r| \geqq \sigma$ ist. *S. Cinquini* (Pavia).

Kneser, Hellmuth: Homogene Funktionen auf der Grassmannschen Mannigfaltigkeit. Bull. Soc. Math. Grèce **20**, 101—103 (1940).

L'A. arreca un complemento ad un lavoro di N. Sakellariou (questo Zbl. 22, 55). *S. Cinquini* (Pavia).

Funktionentheorie:

Khaplanov, M. G.: Sur les coefficients de Taylor d'une classe de fonctions méromorphes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **28**, 678—683 (1940).

Verf. betrachtet meromorphe Funktionen von der Form

$$(1) \qquad f(z) = P_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k}{(z - \alpha_k)^p} + \frac{b_k}{(z - \alpha_k)^{p-1}} + \cdots + \frac{l_k}{z - \alpha_k} + P_k(z) \right],$$

wo $\alpha_k \neq 0$ und die $P_\nu(z)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, Polynome sind, und entwickelt sie im Nullpunkt in eine Potenzreihe,

$$(2) \qquad f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots.$$

Konvergieren die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{|\alpha_k|^{N+p}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{|\alpha_k|^{N+p-1}}, \quad \ldots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|l_k|}{|\alpha_k|^{N+1}}$$

für ein positives ganzes N, so gilt für die Entwicklungskoeffizienten die Interpolation

$$(3) \qquad c_n = \varphi(n), \qquad (n \text{ genügend groß}),$$

wobei $\varphi(z)$ in einer Halbebene $\Re z \geqq A$ regulär und von der Form ist

$$(4) \qquad \varphi(z) = z^{p-1} \cdot \omega_1(z) + z^{p-2} \cdot \omega_2(z) + \cdots + \omega_p(z),$$
$$\omega_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}, \quad \ldots, \quad \omega_p(z) = \sum_{k=1}^{\infty} l_k e^{-\lambda_k z},$$
$$\lambda_k = \log \alpha_k \qquad \text{(komplexe Exponenten)}.$$

Umgekehrt, gilt die Interpolation (3) für eine Funktion $\varphi(z)$ von der Form (4) und besitzen die zugehörigen Dirichletschen Reihen mit komplexen Exponenten λ_k, $\Re \lambda_k \to \infty$ ein absolutes Konvergenzgebiet, so stellt die Potenzreihe (2) eine meromorphe Funktion der Form (1) dar. Die Polstellen sind e^{λ_k}. Der Beweis beruht auf einfachen Reihenumordnungen und Konvergenzbetrachtungen. *Pfluger* (Freiburg/Schweiz).

Bieberbach, Ludwig: Über Schlitzabbildungen durch rationale Funktionen. Deutsche Math. **5**, 272—273 (1940).

Vgl. dies. Zbl. **23**, 336. Anerkennung früherer Untersuchungen zum Gegenstande, nicht ohne Kritik an den Vorgängern. Erweiterung des Gültigkeitsbereiches der Aussage unter Ausdehnung des Begriffs „Schlitzbereich". *Ullrich* (Gießen).