Werk

Titel: Algebra und Zahlentheorie

Jahr: 1941

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0023|log4

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

23. Band, Heft 1 18. September 1940 S. 1—48

Algebra und Zahlentheorie.

Kombinatorik, Lineare Algebra, Formen:

Narasimha Murti, V.: On a problem of arrangements. I. J. Indian Math. Soc., N. s. **4**, 39—43 (1940).

$2n + 1$ Personen werden an n Tagen zum Gastmahl geladen und sitzen um einen runden Tisch. Läßt es sich so einrichten, daß jede Person an den n Tagen immer neue Nachbarn erhält? Das Problem wird hier ganz allgemein erledigt, während bei früheren Arbeiten einschränkende Voraussetzungen über die Zahl $2n + 1$ gemacht werden mußten. *Kowalewski* (Prag).

Bose, R. C.: On the construction of balanced incomplete block designs. Ann. of Eugen. **9**, 353—399 (1939).

Es handelt sich hier um eine sehr gründliche Untersuchung gewisser kombinatorischer Gebilde, die eine Verallgemeinerung der Steinerschen Dreiersysteme darstellen. Als „vollständige (λ, μ, k)-Konfiguration" wird bei v Elementen folgendes Gebilde bezeichnet: Die v Elemente sind zu je k in Gruppen geordnet derart, daß jede μ-gliedrige Kombination der v Elemente in λ Gruppen vorkommt. Im Steinerschen Falle ist $\lambda = 1, \mu = 2, k = 3$. In vorliegender Arbeit wird, ohne λ und k einzuschränken, $\mu = 2$ angenommen. Die betrachteten Gebilde sind bei biologischen Untersuchungen aufgetreten. *Kowalewski* (Prag).

● **Dörrie, Heinrich: Determinanten.** München u. Berlin: R. Oldenbourg 1940. 216 S. geb. RM. 11.—.

Dieses Buch schließt sich in Geist und Stil an das Buch desselben Verf. „Triumph der Mathematik" (Breslau 1933) an. Verf. stellt sich hier die Aufgabe, das Vorurteil, daß die Determinantenlehre trocken sei, zu entkräften und die Determinantenmethode, die immerhin noch weit davon entfernt sei, Gemeingut aller mathematisch interessierten Kreise zu sein, diesen „Königsweg in der Mathematik", jedem, der für die Schönheit mathematischen Denkens empfänglich sei, so bequem wie möglich zugänglich zu machen. — Darnach wird vor allem interessieren, auf welchem Wege Verf. seine Leser zu den Hauptsätzen der Determinantentheorie führt; dieser Weg ist nicht neuartig: Verf. beginnt mit einer Untersuchung über gerade und ungerade Permutationen, die ja in keinem Falle erspart bleiben kann, und definiert sodann die Determinante in gewöhnlicher Weise als die alternierende Summe der Produkte ihrer Elemente. Daraus folgen leicht die Sätze über die Entwicklung nach einer Zeile (Spalte), über die Vertauschung von Zeilen oder Spalten, der Laplacesche Entwicklungssatz und der Produktsatz, für welchen zwei Beweise gegeben werden. Darauf kommt eine kurze Darstellung des Matrizenkalküls, darunter auch der bekannte Satz über die Determinante eines Produktes von Matrizen, und sodann die Lehre von der Auflösung der linearen Gleichungen. Es mag überraschen, daß Verf. erst hier seine Leser mit der wichtigsten Anwendung der Lehre vertraut macht, also glaubt, ihnen ein beträchtliches Maß von abstraktem Denken zumuten zu dürfen. Die Darstellungsweise ist hier (§§ 13—14) und bei der Behandlung des Vektorbegriffes (§ 15) auch nicht immer so klar und einfach, wie man es wohl wünschen möchte. Dagegen sind die abschließenden Paragraphen über die reziproke (= adjungierte) Determinante, über symmetrische und schiefsymmetrische Determinanten, sowie der Satz von Hadamard sehr schön ausgearbeitet. — Das Hauptgewicht des Buches, auch dem Umfange nach, liegt auf dem zweiten, die Anwendungen betreffenden Teil; man kann wohl sagen, daß der erste, theoretische Teil des Buches nur um des zweiten willen geschrieben und diesem als notwendiges Übel vorangestellt worden ist. Hier zeigt sich auch die Stärke des Verf., an kleinen, klar herausgearbeiteten Einzelproblemen die vorzügliche Wirkung der Methode ins Licht zu stellen. Er beginnt mit arithmetischen Anwendungen, unter denen die Auflösungen der kubischen und biquadratischen Gleichungen besonders originell, und ferner einige Anwendungen auf algebraische Zahlen, sowie eine ausführliche Behandlung der Resultante, Diskriminante und der Funktionaldeterminante enthalten sind. Es folgen die linearen Transformationen (mit besonderer Beachtung der orthogonalen, Herleitung der Cayleyschen Formel), wonach eine Untersuchung der quadratischen Formen (Trägheitssatz von Sylvester, Säkulargleichung)

diesen Absatz beschließt. Die geometrischen Anwendungen betreffen zur Hauptsache den Dreiecks- und Tetraederinhalt, einige Relationen zwischen Winkeln und zwischen Strecken, das Ausarten von Kegelschnitten und Flächen zweiten Grades im Zusammenhang mit dem Range ihrer Koeffizientenmatrix und zum Schluß die Transformation auf Hauptachsen. Für das Verständnis dieser Entwicklungen wäre an mehreren Stellen die Beigabe einer erläuternden Figur von Nutzen. *W. Gröbner* (Berlin).

Paternò, Gaetano: Determinanti θ-involutori. Ist. Lombardo, Rend., IV. s. **73,** 3—9 (1940).

Der Inhalt dieser kurzen Note läßt sich in der Sprache der Matrizenrechnung, die der Verf. nicht verwendet und daher von Determinanteneigenschaften spricht, wo Ref. die entsprechenden Matrizeneigenschaften definiert, folgendermaßen angeben: Eine quadratische Matrix $\mathfrak{A}$ soll ϑ-involutorisch heißen, wenn

$$\mathfrak{A}^2 = \begin{pmatrix} \sin^2\vartheta, & \cos^2\vartheta, & \ldots, & \cos^2\vartheta \\ \cos^2\vartheta, & \sin^2\vartheta, & \ldots, & \cos^2\vartheta \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cos^2\vartheta, & \cos^2\vartheta, & \ldots, & \sin^2\vartheta \end{pmatrix} = \mathfrak{S}_\vartheta .$$

Da sich $|\mathfrak{S}_\vartheta|$ durch elementare Umformungen leicht als

$$(-1)^{n-1}\cos^{n-1}2\vartheta[1 + (n-2)\cos^2\vartheta]$$

errechnen läßt, so ist damit das Quadrat einer ϑ-involutorischen Determinante bestimmt. Beziehungen zwischen den Elementen einer ϑ-involutorischen Matrix und ihren adjungierten Unterdeterminanten folgen, wenn $\mathfrak{A}^*$ die zu $\mathfrak{A}$ adjungierte Matrix bedeutet, aus der Gleichung $|\mathfrak{A}|\mathfrak{A} = \mathfrak{S}_\vartheta \mathfrak{A}^*$. Die Gleichung

$$(\mathfrak{A} - x\mathfrak{E})(\mathfrak{A} + x\mathfrak{E}) = \mathfrak{S}_\vartheta - x^2\mathfrak{E}$$

zeigt, daß die Quadrate der charakteristischen Wurzeln von $\mathfrak{A}$ als charakteristische Wurzeln der reellen symmetrischen Matrix $\mathfrak{S}_\vartheta$ sämtlich reell sind. Die Determinante $|\mathfrak{S}_\vartheta - x^2\mathfrak{E}| = (-1)^n(x^2 + \cos 2\vartheta)^{n-1}[x^2 - (n-2)\cos^2\vartheta - 1]$ errechnet sich wieder leicht durch elementare Umformungen. Über die Bedeutung und Konstruktion derartiger Determinanten sagt die Arbeit nichts. *T. Rella* (Wien).

Potron: Sur les matrices non négatives et les solutions positives de certains systèmes linéaires. Bull. Soc. Math. France **67,** 56—61 (1939).

Quelques généralisations et applications des théorèmes de Frobenius pour les matrices aux éléments non négatifs. *N. Obrechkoff* (Sofia).

Specht, Wilhelm: Zur Theorie der Matrizen. II. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **50,** Abt. 1, 19—23 (1940).

Es werden kennzeichnende Klasseninvarianten für die Klassen unitär-ähnlicher Matrizen ($B = U^*AU$, $UU^* = E$, U^* transponiert-konjugiert zu U) angegeben. Verf. betrachtet dafür die Matrizendarstellung $G(X, Y) = X^{\alpha_1}Y^{\beta_1}X^{\alpha_2}Y^{\beta_2}\ldots X^{\alpha_n}Y^{\beta_n}$ der multiplikativ abgeschlossenen Menge $\mathfrak{G}$ aller der Elemente mit $\alpha_i, \beta_i \geqq 0$ einer freien Gruppe mit zwei Erzeugenden. Mit Hilfe eines hinreichenden Kriteriums dafür, daß eine Gruppe (hier die Gruppe der $G(A, A^*)$) vollreduzibel ist (dies. Zbl. **22,** 195) folgt: A und B sind dann und nur dann unitär-ähnlich, wenn für alle $G(X, Y)$ die Spuren von $G(A, A^*)$ und von $G(B, B^*)$ einander gleich sind. Ferner ist A dann und nur dann unitär-unzerlegbar, wenn jede mit A und A^* vertauschbare Matrix V die Gestalt $V = \alpha E$ hat. Besitzt die allgemeine derartige Matrix V genau r verschiedene charakteristische Wurzeln der Vielfachheiten $n_1, n_2, \ldots, n_r$, so kann A unitär auf entsprechende Kästchenform transformiert werden; die Teilmatrizen sind unitär-unzerlegbar und im wesentlichen eindeutig bestimmt. (Teil I vgl. dies. Zbl. **14,** 195.) *E. Schulenberg* (Berlin).

Rados, Gustav: Über einige von Hermiteschen abgeleitete Formen. Mat. természett. Értes. **58,** 639—649 u. deutsch. Zusammenfassung 650—651 (1939) [Ungarisch].

Es sei H eine Hermitesche Form. Die k-te Potenz (= die k-te iterierte Faltung) die k-te induzierte Form und die k-te adjungierte Form von H werden die k-ten abgeleiteten Formen von H genannt. Ist H positiv definit (semidefinit), so sind auch ihre

abgeleiteten Formen positiv definit (semidefinit). Ist H negativ definit (semidefinit), so sind ihre k-ten abgeleiteten Formen positiv definit (semidefinit) bzw. negativ definit (semidefinit), je nachdem k eine gerade bzw. ungerade Zahl ist. Ist H indefinit, so ist ihre k-te Potenz positiv definit bzw. indefinit, je nachdem k gerade bzw. ungerade ist. Die adjungierten und induzierten Formen einer indefiniten Hermiteschen Form sind wieder indefinit. *Gy. v. Sz. Nagy* (Szeged).

Rados, Gustav: Eine elementare Herleitung der Kennzeichen definiter und semidefiniter Hermitescher Formen. Mat. természett. Értes. **58**, 652—664 u. deutsch. Zusammenfassung 665—666 (1939) [Ungarisch].

Es sei $H = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} x_\alpha \bar{x}_\beta$ eine Hermitesche Form (so daß $a_{\beta\alpha} = \bar{a}_{\alpha\beta}$ ist). Ist $D_k = |a_{\alpha\beta}|$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, k)$ der Hauptminor k-ten Grades der Determinante D_n von H, so gilt der Satz: H ist dann und nur dann positiv definit bzw. negativ definit, wenn $\operatorname{sg} D_k = 1$ bzw. $\operatorname{sg} D_k = (-1)^k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ist. — Ist H eine singuläre Hermitesche Form vom Range r, so kann man ihre Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ so anordnen, daß $D_r \neq 0$ und $D_{r+1} = D_{r+2} = \cdots = D_n = 0$ sind. Die so normierte Form H ist dann und nur dann positiv bzw. negativ semidefinit, wenn $\operatorname{sg} D_k = 1$ bzw. $\operatorname{sg} D_k = (-1)^k$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ ist. *Gy. v. Sz. Nagy* (Szeged).

Rados, Gustav: Über die Kroneckersche Komposition von Hermiteschen Formen. Mat. természett. Értes. **58**, 667—670 u. deutsch. Zusammenfassung 671—672 (1939) [Ungarisch].

Unter der Kroneckerschen Komponierten $A \times B$ der Matrizen $A = \|a_{gh}\|$ $(g, h = 1, 2, \ldots, m)$ und $B = \|b_{g',h'}\|$ $(g', h' = 1, 2, \ldots, n)$ versteht man die Matrix

$$\left\|\begin{array}{cccccccc}
a_{11}b_{11} & a_{12}b_{11} & \cdots & a_{1m}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1n} & a_{12}b_{1n} & \cdots & a_{1m}b_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{11}b_{n1} & a_{12}b_{n1} & \cdots & a_{1m}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{nn} & a_{12}b_{nn} & \cdots & a_{1m}b_{nn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1}b_{11} & a_{m2}b_{11} & \cdots & a_{mm}b_{11} & \cdots & a_{m1}b_{1n} & a_{m2}b_{1n} & \cdots & a_{mm}b_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1}b_{n1} & a_{m2}b_{n1} & \cdots & a_{mm}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{nn} & a_{m2}b_{nn} & \cdots & a_{mm}b_{nn}
\end{array}\right\|$$

Ist $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ die zu A bzw. B gehörige bilineare Form, so bedeutet $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ die zu $A \times B$ gehörige bilineare Form, die Kroneckersche Komponierte von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Hermitesche Formen, so ist $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ dann und nur dann eine Hermitesche Form, wenn $A \times B = B \times A$ ist. — Im folgenden wird vorausgesetzt, daß $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ Hermitesche Formen sind. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ definit bzw. semidefinit, so ist auch $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ definit bzw. semidefinit. Ist $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ vom Range r bzw. s, so ist $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ vom Range rs. Ist $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ definit bzw. indefinit, so ist $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ indefinit. — Ist $\mathfrak{A}$ definit bzw. semidefinit und setzt man $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \times \cdots \times \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{\times K}$ (K Faktoren), so ist auch $\mathfrak{A}^{\times K}$ eine definite bzw. semidefinite Hermitesche Form. *Gy. v. Sz. Nagy* (Szeged).

Petr, K.: Rationale kanonische Form einer linearen Substitution. Čas. mat. fys. **69**, 9—21 u. deutsch. Zusammenfassung 22 (1940) [Tschechisch].

Es handelt sich um eine Vereinfachung des in Dicksons „Höhere Algebra" (Leipzig 1929) gegebenen Verfahrens. Die im folgenden auftretenden Koeffizienten von Polynomen und Elemente von Matrizen sollen einem kommutativen Körper K angehören. Es soll die Substitution (1) $X_i = a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n$ $(i = 1, \ldots, n)$, kurz $[X] = A[x]$ durch (2) $[x] = C[y]$, $[X] = C[Y]$ (wo die Determinante $|C| \neq 0$ ist) auf die kanonische Form $[Y] = B[y]$ gebracht werden. Das Haupthilfsmittel ist die folgende Operation Δ, die auf jede Linearform $L = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$ in $x_1, \ldots, x_n$ angewandt werden kann: $\Delta x_i = a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n$, $\Delta L = c_1 \Delta x_1 + \cdots + c_n \Delta x_n$; ist $\varphi(\lambda) = d_0 \lambda^m + d_1 \lambda^{m-1} + \cdots + d_m$, so setze man $\varphi(\Delta) L = d_0 \Delta^m L + d_1 \Delta^{m-1} L + \cdots + d_m L$, wo $\Delta^k L = \Delta^{k-1}(\Delta L)$. Nach (1) ist $X_i = \Delta x_i$ und wegen (2) auch

$Y_i = \Delta y_i$. Jeder Linearform $L(x)$ wird nun eindeutig (bis auf einen Faktor in K) das Polynom $h(\lambda)$ niedrigsten Grades zugeordnet, für welches $h(\Delta)\,L = 0$ ist (h „gehört" zu L). Gehört h_1 zu L_1, h_2 zu L_2 und ist h_3 das kleinste gemeinsame Vielfache von h_1, h_2, so ist h_3 das Polynom niedrigsten Grades mit $h_3(\Delta)L_1 = h_3(\Delta)L_2 = 0$, und es gibt eine Linearform, zu welcher h_3 gehört. Durch sukzessive Anwendung dieses Satzes folgt: Es gibt ein Polynom $g(\lambda) = \lambda^t - b_t\lambda^{t-1} - \cdots - b_1\lambda^0$ und eine Linearform $L(x)$, so daß g zu L gehört und g das niedrigste Polynom mit $g(\Delta)\,x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ ist. Setzt man $y_1 = L(x), \ldots, y_t = \Delta^{t-1}L(x)$, so ist (wegen $Y_i = \Delta\, y_i$) $Y_1 = y_2$, $Y_2 = y_3, \ldots, Y_t = b_1 y_1 + \cdots + b_t y_t$. Wählt man noch geeignet die $(n - t)$ letzten Zeilen von C^{-1}, so hängen $Y_{t+1}, \ldots, Y_n$ nur von $y_{t+1}, \ldots, y_n$ ab; verfährt man analog mit diesen $(n - t)$ Unbestimmten, so kommt man schrittweise zum Ziel. Es werden auch die im Falle eines reduziblen $g(\lambda)$ auftretenden Vereinfachungen behandelt und der Zusammenhang von (1) mit der Substitution $[X'] = A_1[x]$, $A_1 = a_1 A^{s-1} + a_2 A^{s-2} + \cdots + a_s A^0$ für den Fall betrachtet, daß $g(\lambda)$ in Linearfaktoren zerfällt. *Jarník* (Prag).

Abstrakte Algebra:

Richardson, A. R.: Abstract algebra. Math. Gaz. **24**, 15—24 (1940).

Es wird an Hand von zahlreichen, sehr verschiedenartigen Beispielen die grundlegende Bedeutung klargemacht, die die einfachsten Begriffsbildungen der formalen Algebra (Gleichheit, Kongruenzklasseneinteilung, Anordnung, Abbildung, Iso- und Automorphismus usw.) für die mannigfachsten Gebiete der Mathematik besitzen. Verhältnismäßig ausführlich verweilt die Note bei den Begriffsbildungen aus der Theorie der Verbände, der „structures". *Krull* (Bonn).

● **Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Bd. 1: Algebra und Zahlentheorie. Tl. 1: A. Grundlagen. B. Algebra. 2., völl. neubearb. Aufl. Hrsg. v. H. Hasse u. E. Hecke. H. 5.** Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1939. 135 S. u. 7 Abb. RM. 9.60.

Krull, Wolfgang: Allgemeine Modul-, Ring- und Idealtheorie. S. 1—54.

Wie in dem „Idealbericht" des Verf. (Erg. Math. **4**, 3; dies. Zbl. **11**, 197) zerfällt die Idealtheorie auch hier in eine additive und eine multiplikative Idealtheorie. Die additive Idealtheorie wird für Ringe mit Maximalbedingung (O-Ringe) entwickelt; sie geht vom Begriff des Primärideals und des primären Ringes aus, untersucht die additive Zerlegung der Ringe und die Durchschnittsdarstellung der Ideale, untersucht die Dimensionstheorie, insbesondere der „Stellenringe", und das Verhalten der Ideale bei Ringerweiterung. Die multiplikative Idealtheorie geht von den beiden eng zusammenhängenden Problemen: Zerlegung in Primideale und Gruppeneigenschaft der (gebrochenen) Ideale, aus. Sie beschäftigt sich mit ganz-abgeschlossenen Ringen und hängt nach Krull mit der Bewertungstheorie eng zusammen. Das letzte Kapitel untersucht, unter Kombination der additiven Methoden mit den multiplikativen Fragestellungen, die einartigen O-Ringe. Hierher gehören Untersuchungen über umkehrbare Ideale, Führersätze, Grad- und Normensätze und Differentensätze. *van der Waerden* (Leipzig).

Moriya, Mikao: Bewertungstheoretischer Aufbau der multiplikativen Idealtheorie. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I Math. **8**, 109—144 (1940).

Gegenstand der Untersuchung sind diejenigen Integritätsbereiche, die vom Ref. unter bewertungstheoretischen Gesichtspunkten als „endlich diskrete Hauptordnungen" bezeichnet wurden, und die man idealtheoretisch dadurch charakterisieren kann, daß in ihnen jedes ganze Ideal im Sinne der van der Waerden-Artinschen Äquivalenztheorie einem eindeutig bestimmten Produkt von endlich vielen Primidealen äquivalent ist [vgl. Krull, Idealtheorie, Erg. Math. u. Grenzgeb. **4**, Nr 37 (1935); dies. Zbl. **11**, 197; van der Waerden, Moderne Algebra II, § 103; dies. Zbl. **22**, 298]. Es wird auf rein bewertungstheoretischer Grundlage die Idealtheorie in den genannten Integritätsbereichen und ihren endlichen algebraischen Erweiterungen, die selbst endliche diskrete

Hauptordnungen darstellen, entwickelt. Die Sonderstellung der Noetherschen „Fünfaxiomeringe", in denen jedes ganze Ideal Primidealprodukt und nicht nur einem Primidealprodukt äquivalent ist, wird ausführlich gewürdigt. Der Zweck der Arbeit ist nicht die Entwicklung einer völlig neuen Methode. Es soll vielmehr eine im einzelnen sorgfältig ausgeführte ausführliche Darstellung gegeben werden, die gegenüber früheren Behandlungen des gleichen Gegenstandes den Vorzug besitzt, daß sie soweit irgend möglich mit elementaren bewertungstheoretischen Überlegungen auskommt und von idealtheoretischen Begriffen nur das unbedingt Notwendige heranzieht. In einer Arbeit aus dem Jahre 1937 (Math. Z. **42**, 767—773; dies. Zbl. **17**, 149) hat Ref. in aller Kürze die Idealtheorie nicht nur der endlichen, sondern auch der unendlichen algebraischen Erweiterungen endlicher diskreter Hauptordnungen entwickelt, allerdings dem dortigen Standpunkt entsprechend unter stärkerer Benutzung spezifisch idealtheoretischer Hilfssätze. Die vorliegende Moriyasche Arbeit dürfte die geeignete Grundlage bilden für eine im Sinne der Bewertungstheorie vereinfachte Herleitung der Hauptergebnisse von Math. Z. **42**. *Wolfgang Krull* (Bonn).

Mori, Shinziro: Zerlegung der Hauptideale aus Polynomringen in minimale Primideale. III. J. Sci. Hirosima Univ. A **10**, 1—6 (1940).

Der Hauptsatz der Note II des Verf. (dies. Zbl. **20**, 341) wird verallgemeinert: Ist jedes Hauptideal eines Integritätsbereiches J als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellbar, so läßt sich jedes Hauptideal in $\overline{J} = J[x_1, x_2, \ldots]$ (die x_i sind Unbestimmte in beliebiger Mächtigkeit) auch als Potenzprodukt von endlich vielen in $\overline{J}$ minimalen Primidealen darstellen. Beim Beweis werden folgende Sätze abgeleitet: Ist $\mathfrak{p}$ in J minimales Primideal, so auch $\overline{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}[x_1, x_2, \ldots]$ in $\overline{J}$. Diese Primideale in $\overline{J}$ heißen von erster Art. Es gibt auch Primideale in $\overline{J}$, die kein Element aus J enthalten, Primideale zweiter Art. Solche erhält man folgendermaßen: $\overline{\pi}$ sei ein Primelement in $\overline{J}$. Die Gesamtheit aller Elemente aus $\overline{J}$, deren Produkt mit irgendeinem Element aus J durch $\overline{\pi}$ teilbar ist, ist ein minimales Primideal zweiter Art in $\overline{J}$. *G. Köthe* (Münster i. W.).

Maeda, Fumitomo: Ideals in a Boolean algebra with transfinite chain condition. J. Sci. Hirosima Univ. A **10**, 7—36 (1940).

L sei im folgenden eine verallgemeinerte $\aleph$-Boolesche Algebra (die Kardinalzahl besagt, daß in L Vereinigungen und Durchschnitte von weniger als $\aleph$ Elementen immer existieren). L erfüllt die $\aleph$-Kettenbedingung, wenn jede auf- oder absteigende wohlgeordnete Kette von Elementen $\ldots a_\alpha < a_\beta \ldots$ eine kleinere Mächtigkeit als $\aleph$ hat. Ist $\mathfrak{a}$ ein $\aleph$-Ideal in L, so ist der Restklassenverband $L/\mathfrak{a}$ ebenfalls eine verallgemeinerte Boolesche Algebra mit Nullelement. Erfüllt $L/\mathfrak{a}$ die $\aleph$-Kettenbedingung, so heißt $\mathfrak{a}$ ein Basisideal bezüglich der Kettenbedingung. Die Menge $\mathfrak{B}_\aleph$ aller Basisideale bildet eine verallgemeinerte $\aleph$-Boolesche Algebra. Bildet man in diesem Verband die Menge $\Phi^*_\aleph$ aller dualen Ideale, so erhält man sogar eine kontinuierliche Boolesche Algebra (d. h. eine solche, in der beliebige Vereinigungen und Durchschnitte gebildet werden können). Diese Ergebnisse sind zum Teil Verallgemeinerungen von Resultaten von J. v. Neumann (vgl. Continuous Geometry, Vorlesungsausarbeitung, Princeton 1935/37). Anwendung auf die Maßfunktion $\Phi(a)$ in einer $\aleph_1$-Booleschen Algebra L_1: $\Phi(a)$ ist eine Maßfunktion, wenn $\Phi(a) \geqq 0$ und reell ist für alle $a \in L_1$ und $\Phi(a) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(a_i)$ ist, sobald a die Vereinigung der a_i ist und $a_i \cap a_j = 0$ für alle $i \neq j$. Wird $\Phi < \psi$ gesetzt, so gilt: Wenn aus $\psi(a) = 0$ stets $\Phi(a) = 0$ folgt, so bilden die Maßfunktionen von L_1 eine verallgemeinerte $\aleph_1$-Boolesche Algebra $\mathfrak{F}_1$, und die Menge aller $\aleph_1$-Ideale in $\mathfrak{F}_1$ ist eine kontinuierliche Boolesche Algebra. Für dieses Resultat wird noch ein zweiter, von der Theorie der Ideale in einer Booleschen Algebra unabhängiger Beweis gegeben. Eine weitere Anwendung auf die Spektraltheorie eines komplexen

Euklidischen Raumes $\mathfrak{H}$: Eine Familie von Projektionen $E(a)$ in $\mathfrak{H}$, die für alle a einer $\aleph_1$-Booleschen Algebra L_1 erklärt sind, mit den Eigenschaften $\alpha)$ $E(a)E(b) = 0$ für $a \cap b = 0$, $\beta)$ $E(a) = E(a_1) + E(a_2) + \cdots$, wenn a direkte Summe der a_i ist, $\gamma)$ $E(1) = 1$, wird als Zerlegung der Identität im allgemeinen Sinne bezeichnet. Die Menge aller $a \in L_1$, für die $E(a)f = 0$ ist, bildet ein Basisideal $\mathfrak{a}_f$ für die $\aleph_1$-Kettenbedingung in L_1. Es wird bewiesen, daß die Menge $\mathfrak{R}_E$ aller $\mathfrak{a}_f$, $f \in \mathfrak{H}$, ein duales $\aleph_1$-Ideal in $\mathfrak{P}_{\aleph_1}$ ist, daher ist $\mathfrak{R}_E$ eine verallgemeinerte $\aleph_1$-Boolesche Algebra und die Menge θ_E^* aller dualen $\aleph_1$-Ideale in $\mathfrak{R}_E$ ist eine kontinuierliche Boolesche Algebra. Für die Elemente $\mathfrak{a}^*$ dieses Verbandes θ_E^* läßt sich eine Zerlegung $F(\mathfrak{a}^*)$ der Identität definieren, die sich als Erweiterung der Zerlegung $E(a)$ herausstellt. *G. Köthe.*

Krasner, Marc: Remarque au sujet d'„Une généralisation de la notion de corps". (Journ. de Math., 1938, p. 367—385.) J. Math. pures appl., IX. s. **18**, 417—418 (1939).

Sachliche und Druckfehlerberichtigungen zu der in dies. Zbl. **20**, 200 besprochenen Arbeit. *Harald Geppert* (Berlin).

Kalscheuer, Franz: Die Bestimmung aller stetigen Fastkörper über dem Körper der reellen Zahlen als Grundkörper. Abh. math. Semin. Hansische Univ. **13**, 413—435 (1940).

Ein Fastkörper $\mathfrak{R}$ ist Modul endlichen Ranges über einem Grundkörper $\mathfrak{k}$; in $\mathfrak{R}$ gelten alle Rechenregeln für einen Schiefkörper mit Ausnahme eines der beiden distributiven Gesetze. Ist $\mathfrak{k}$ bewertet, so kann man in $\mathfrak{R}$ einen komponentenweisen Limes erklären. Gilt $\lim a_i b_i = \lim a_i \cdot \lim b_i$, so heißt $\mathfrak{R}$ stetig. Verf. stellt sich die Aufgabe, alle stetigen Fastkörper über dem Körper der reellen Zahlen zu bestimmen. Bildet man von einem stetigen Fastkörper vom Rang n die reguläre Darstellung, so bilden die Matrizen (ohne die Nullmatrix) eine n-parametrige kontinuierliche Gruppe. Der zugehörige Liesche Infinitesimalring L muß eine Matrizendarstellung besitzen, in der kein Element den Eigenwert 0 hat außer der Nullmatrix. Der Hauptteil der Arbeit besteht nun in der Bestimmung aller solchen Lieschen Ringe über dem Körper der reellen Zahlen. Vorher wird bewiesen, daß im Fall $\mathfrak{k}$ algebraisch abgeschlossen nur der eindimensionale Liesche Zahlenring $L = (x)$ solche Darstellungen besitzt. Ist $\mathfrak{k}$ der Körper der reellen Zahlen, so gibt es vier Systeme: 1. $L = (x)$, 2. $L = (x, y)$ mit $x \circ y = 0$ ($\circ$ bedeutet die Multiplikation im Lieschen System), 3. $L = (h, e_1, e_2)$, 4. $L = (h, e_1, e_2, r)$. Dabei ist das System 3. der Infinitesimalring der Drehgruppe und Teilsystem von 4., das folgende Multiplikationstafel besitzt: $h \circ e_1 = -e_2$, $h \circ e_2 = e_1$, $e_1 \circ e_2 = -h$, $l \circ r = 0$ für alle $l \subset L$. Als nächstes werden für diese Systeme alle Darstellungen ohne den Eigenwert 0 bestimmt. Bildet man aus diesen Matrizen A die Matrizen e^A, so erhält man nun kontinuierliche Gruppen, die darauf zu untersuchen sind, ob sie die Multiplikationsgruppen von Fastkörpern sind (nach Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie, dies. Zbl. **18**, 9). System 1. liefert so den Körper der reellen Zahlen, System 2. den Körper der komplexen Zahlen, System 3. nichts, System 4. den Schiefkörper der Quaternionen und eine einparametrige Schar von Fastkörpern, die man durch Abänderung der Quaternionenmultiplikation so erhalten kann: ξ, η seien Quaternionen, $\xi \cdot \eta$ bedeute die Quaternionenmultiplikation, $N\xi$ sei die Norm des Quaternions ξ. Führt man nun die neue Multiplikation $\xi \times 0 = 0 \times \xi = 0$, $\xi \times \eta = \xi \cdot P_{N\xi} \cdot \eta \cdot P_{N\xi}^{-1}$ ein, wobei $P_{N\xi}^{1}$ das Quaternion $\cos\left(\frac{1}{y}\log N\xi\right) + i\sin\left(\frac{1}{y}\log N\xi\right)$ bedeutet, so erhält man einen vom Parameter y abhängigen Fastkörper. Diese Fastkörper sind sämtlich nicht isomorph untereinander, sie sind echte Fastkörper, da sie das rechtsseitige Distributivgesetz verletzen. Sie haben untereinander und mit dem Schiefkörper der Quaternionen die Gruppe der Quaternionen der Norm 1 gemeinsam. Der Körper R der reellen Zahlen liegt nicht im Zentrum, es gilt vielmehr, daß ein stetiger Fastkörper endlichen Ranges über R, der R im Zentrum enthält, nicht echt ist.

G. Köthe (Münster i. W.).

Zahlentheorie:

Siegel, Carl Ludwig: Einheiten quadratischer Formen. Abh. math. Semin. Hansische Univ. **13**, 209—239 (1940).

Eine ganzzahlige unimodulare Matrix $\mathfrak{C}$ heißt eine Einheit der quadratischen Form $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} = \mathfrak{S}[\mathfrak{x}]$ mit rationalzahliger Matrix $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$, $|\mathfrak{S}| \neq 0$ und $\mathfrak{x}' = (x_1, \ldots, x_m)$ wenn $\mathfrak{S}[\mathfrak{C}] = \mathfrak{C}'\mathfrak{S}\mathfrak{C} = \mathfrak{S}$ ist. Die Gesamtheit dieser $\mathfrak{C}$ bildet die Einheitengruppe von $\mathfrak{S}$. Verf. gibt eine zusammenhängende Einführung in die Theorie der Einheiten quadratischer Formen. Die Bestimmung aller Einheiten von $\mathfrak{S}$ steht in engem Zusammenhang mit der Minkowskischen Reduktionstheorie positiver quadratischer Formen, die vollständig entwickelt wird. — Da die Einheitengruppe definiter Formen endlich ist, richtet sich das Hauptaugenmerk auf indefinite Formen. $\mathfrak{S}$ sei eine solche mit von 0 verschiedener Determinante und von der Signatur $n, m - n$, d. h. es soll eine reelle Matrix $\mathfrak{C}$ geben, so daß $\mathfrak{S} = \mathfrak{D}[\mathfrak{C}]$, wo $\mathfrak{D}$ die Diagonalmatrix aus n Diagonalelementen $+1$ und $m - n$ Diagonalelementen -1 bedeutet. Bestimmt man zur positiven Form $\mathfrak{H} = \mathfrak{C}'\mathfrak{C}$ eine unimodulare ganzzahlige Matrix $\mathfrak{U}$ derart, daß $\mathfrak{H}[\mathfrak{U}]$ im Minkowskischen Sinne reduziert ist, dann heißt $\mathfrak{S}[\mathfrak{U}]$ reduziert. Es gibt nur endlich viele verschiedene solche reduzierte Matrizen: $\mathfrak{S}[\mathfrak{U}_k]$ $(k = 1, \ldots, g)$ sei ein vollständiges System. $\mathfrak{H}$ genügt der Gleichung (1) $\mathfrak{H}\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$. Jedes positive reelle $\mathfrak{H}$ (in Zeichen: $\mathfrak{H} > 0$), welches diese Gleichung befriedigt, kann in der angegebenen Weise gewonnen werden. Die Gesamtheit aller solcher Lösungen $\mathfrak{H}$ bildet eine $n(m-n)$ dimensionale Mannigfaltigkeit M, wie auf Grund der Parameterdarstellung

$$(2) \qquad \mathfrak{H} = 2\mathfrak{Z} - \mathfrak{S}, \quad \mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} \mathfrak{T}^{-1} & \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{Y}' \\ \mathfrak{Y}\mathfrak{T}^{-1} & \mathfrak{Y}\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{Y}' \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{T} = \mathfrak{S}^{-1}\begin{bmatrix} \mathfrak{E} \\ \mathfrak{Y} \end{bmatrix} > 0$$

festgestellt wird; dabei ist $\mathfrak{T}$ n-reihig und $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix. Bestimmt man zu einer Lösung $\mathfrak{H} > 0$ von (1) $\mathfrak{U}_\mathfrak{H}$ ganzzahlig unimodular derart, daß $\mathfrak{H}[\mathfrak{U}_\mathfrak{H}]$ reduziert ist, so gilt für ein k aus der Reihe $1, \ldots, g$ die Gleichung $\mathfrak{S}[\mathfrak{U}_\mathfrak{H}] = \mathfrak{S}[\mathfrak{U}_k]$, d. h. $\mathfrak{U}_\mathfrak{H}\mathfrak{U}_k^{-1}$ ist eine Einheit von $\mathfrak{S}$. Alle Einheiten von $\mathfrak{S}$ können so dargestellt werden. M wird durch die Einheiten $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{S}$ vermöge $\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}[\mathfrak{U}]$ in sich übergeführt. Die Einheitengruppe von $\mathfrak{S}$ ist in M diskontinuierlich und besitzt in M einen Fundamentalbereich mit einfachen Eigenschaften. Sie wird von endlich vielen Einheiten erzeugt und besteht bis auf einen Ausnahmefall aus unendlich vielen Elementen. Zum Schluß wird, wenn $\mathfrak{P}' = \begin{pmatrix} \mathfrak{D} & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{B} & \mathfrak{A} \end{pmatrix}$ eine beliebige reelle Matrix mit von 0 verschiedener Determinante ist, im $\mathfrak{Y}$-Raum [von (2)] ein gegenüber den Transformationen

$$\mathfrak{Y} \to (\mathfrak{A}\mathfrak{Y} + \mathfrak{B})(\mathfrak{C}\mathfrak{Y} + \mathfrak{D})^{-1}, \quad \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}[\mathfrak{P}]$$

invariantes Volumenelement angegeben und ein Maß für die Einheitengruppe zu $\mathfrak{S}$ definiert. Diese Gruppenmaße haben in der analytischen Theorie der quadratischen Formen Bedeutung erlangt. *Maaß* (Heidelberg).

Vandiver, H. S.: On general methods for obtaining congruences involving Bernoulli numbers. Bull. Amer. Math. Soc. **46**, 121—123 (1940).

In Anlehnung an ein vom Verf. [Bull. Amer. Soc. Math. **43**, 418—423 (1937); dies. Zbl. **17**, 341] gegebenes Theorem gibt er folgenden Satz: Die b_i seien die Bernoullischen Zahlen, rekursiv definiert durch $b_0 = 1, (b+1)^n = b_n$, wo bei Ausführung der Potenz b^i durch b_i zu ersetzen ist. Ist dann $(x_1, \ldots, x_s)$ ein Vektor mit nichtnegativen ganzen Zahlen als Koordinaten, $(a_1, \ldots, a_s)$ ein ganzzahliger Vektor und gilt bei festem k für jedes $i (0 \leqq i < k)$ die Kongruenz

$$\sum_{t=1}^{s} a_t \binom{x_t}{i} \equiv 0 \bmod p^{k-i},$$

so gilt für jede natürliche Zahl $n \not\equiv 0 \pmod{p-1}$ die Kongruenz

$$\sum_{i=1}^{s} \{a_i b_{n+\bar{(p-1)}x_i}/[n + (p-1)x_i]\} \equiv 0 \bmod p^j,$$

wo $j = \min(k, n-1)$ ist. (Die Schlußformel ist S. 121, Z. 6 von unten durch Druckfehler entstellt.) Die Beweisführung ist nur angedeutet. Verf. wendet die Formel noch zu einem neuen Beweise eines von Beeger [Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 684–686 (1938); dies. Zbl. **19**, 292] herrührenden Satzes an. *Holzer* (Wien).

Feldheim, Ervin: Rectification à la note „Un problème de la théorie élémentaire des nombres". Bull. Soc. France Math. **67**, 100—101 (1939).

Berichtigung des bei der Besprechung in dies. Zbl. **19**, 50 aufgedeckten Fehlers ohne Abänderung der Endergebnisse. *H. Geppert* (Berlin).

Moessner, Alfred: Zahlentheoretische Untersuchungen und Resultate. Tôhoku Math. J. **46**, 234—238 (1940).

Yamada, Kaneo: Eine Bemerkung zum Fermatschen Problem. Tôhoku Math. J. **45**, 249—251 (1939).

E. Gottschalk (dies. Zbl. **18**,5) hat bewiesen, daß die Fermatsche Gleichung $x^p + y^p + z^p = 0$ keine ganze rationale Lösung mit $(xyz, p) = 1$ besitzt, wenn p eine ungerade Primzahl ist, die selbst (aber nicht ihr Quadrat) in $a \pm b$ aufgeht, wo a, b nur die Primfaktoren 2, 3, 5, 11, 17 bzw., falls $p \equiv 5 \pmod 6$, nur Primfaktoren unterhalb 20 enthalten. Verf. setzt sich zum Ziel, diesen Satz als Folge einer Eisensteinschen Kongruenz nachzuweisen. — Die Ableitungen des Verf. sind zum großen Teil falsch. Er setzt $T(g^i) = (g^i \pmod{p^2} - g^i \pmod p)/p$, wobei $a \pmod m$ die kleinste positive ganze Zahl kongruent $a \bmod m$ bezeichnet, und behauptet z. B. (2) $T(g^{i+j(p-1)}) \equiv j\,T(g^{i+p-1}) \pmod p$; dies ist auch für die oben genannten Primzahlen und deren primitive Wurzeln g falsch, wie das Gegenbeispiel $p = 7$, $g = 5$, $i = j = 2$ zeigt. Die Kongruenz (3) $T(g^{i+p-1}) \equiv g^{i-1}\,T(g^p) \pmod p$ ist ebenfalls falsch; Gegenbeispiel: $p = 7, g = 5, i = 2$. Die daraus erschlossene Kongruenz (4) ist falsch. Ebenso ist die Kongruenz (7) nur für $i = 1$ richtig (Gegenbeispiel: $p = 7$, $g = 5, i = 2$). Die anderen Kongruenzen des ersten Paragraphen sind nachgeprüft und zumindest für $0 < g < p$ als richtig befunden. *E. Bessel-Hagen* u. *V. Jarník*.

Krasner, Marc: Sur le théorème de Fermat. C. R. Acad. Sci., Paris **210**, 92—94 (1940).

Es wird gezeigt, daß die Ergebnisse einer früheren Note des Verf. (vgl. dies. Zbl. **22**, 114) erhalten bleiben, wenn man die Voraussetzungen $z \equiv 0 \pmod 2$, $x \not\equiv 0 \pmod 2$, $y \not\equiv 0 \pmod 2$ durch $z \not\equiv 0 \pmod 2$, $M = xy \not\equiv 0 \pmod 4$ ersetzt. Hier haben x, y, z dieselben Bedeutungen wie in der genannten Note. *Cahit Arf* (Istanbul).

Obláth, Richard: Über die Zahl $x^2 - 1$. Mathematica, Zutphen B **8**, 161—172 (1940).

Die Frage, ob zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen (von den trivialen Ausnahmen $-1,0$; 0,1; 8,9 abgesehen) beide volle Potenzen (mit einem ganzzahligen Exponenten > 1) ganzer Zahlen sein können, ist zwar seit vielen Jahrhunderten an der Tagesordnung, aber bis heute noch nicht erledigt. Verf. beginnt mit einem historischen Überblick über die bisher erreichten Resultate und wendet sich dann der spezielleren diophantischen Gleichung (1) $x^2 - 1 = y^n$ zu. Er beweist eine Reihe von Sätzen, die teils die Unmöglichkeit dieser Gleichung für ganze x, y zeigen, wenn der Exponent n gewisse besondere Formen hat, teils die Unmöglichkeit von (1) aussagen, wenn die Basis x gewisse besondere Formen hat. Zum Schluß folgert er aus einem bekannten Satz von Siegel, daß (1) bei festem n höchstens eine Lösung in nicht verschwindenden ganzen Zahlen x, y haben kann. *Bessel-Hagen* (Bonn).

Broderick, T. S.: On proving certain properties of the primes by means of the methods of pure number theory. Proc. roy. Irish Acad. A **46**, 17—24 (1940).

Verf. beweist mit den Methoden der „reinen Zahlentheorie" folgende bekannten Abschätzungen, die mit analytischen Hilfsmitteln leicht zu beweisen sind:

(1) $$A\lambda(\lambda(n)) < \sum_{p \leqq n} p^{-1} < B\lambda(\lambda(n)) \quad \text{für} \quad n > 1$$

(2) $$\sum_{p \leqq n} p^{-1} = \sum_{1 \leqq r \leqq n} r^{-1}\lambda^{-1}(r) + O(1), \qquad (3)\ \sum_{p \leqq n} p^{-1}\lambda(p) = \lambda(n) + O(\lambda(\lambda(n)));$$

hier sind alle Zahlen rational, A, B positive Konstanten, die Summen über p laufen über Primzahlen, $\lambda(n) = \sum_{1 \leqq r \leqq n} r^{-1}$ (dies ist natürlich der arithmetische Ersatz für $\log n$). Verf. betont, daß es ihm nicht gelungen ist, mit rein zahlentheoretischen Mitteln die analytisch leicht zu beweisende Beziehung $\sum_{1 \leqq r \leqq n} r^{-1}\lambda^{-1}(r) = \lambda(\lambda(n)) + O(1)$ zu beweisen, die wegen (2) zu einer Verschärfung von (1) führen würde. Vgl. auch Broderick, On obtaining an estimate of the Frequency of the Primes ..., J. London Math. Soc. **14**, 303—310 (1939); Besprechung folgt. *Jarník* (Prag).

Pillai, S. S.: On the smallest prime of the form $km + l$. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **10**, 388—389 (1939).

k, l bedeuten natürliche Zahlen, $p(k, l)$ die kleinste Primzahl $\equiv l (\mathrm{mod}\, k)$; $\varphi(k)$ ist die Eulersche Funktion. — Resultate: A. Ist $a \geqq 1$, $k > k_0(a)$, so ist die Anzahl der l mit $0 < l < k$, $(k, l) = 1$, $p(k, l) \geqq \frac{1}{a}\varphi(k)\log k$ größer als $\left(1 - \frac{1}{a}\right)\varphi(k)$ (also positiv). — B. Zu jedem l und jedem $\delta > 0$ gibt es unendlichviele k mit $(k, l) = 1$, so daß die kleinste Primzahl der Form $km + l$ ($m > 0$ ganz) größer als $(1 - \delta)k \log k$ ist. (Mit $m \geqq 0$ statt $m > 0$ wäre B. falsch; Beispiel: l = Primzahl; aus dem Wortlaut des „Theorem I" geht aber nicht hervor, daß $m > 0$ gemeint ist.) *Jarník.*

Erdös, P.: On additive properties of squares of primes. I. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **41**, 37—41 (1938).

p, q, r bedeuten ungerade Primzahlen, l, m ganze nichtnegative Zahlen. Es sei M_1 die Menge aller Zahlen der Gestalt $p^2 + q^2$, M_2 die Menge aller Zahlen, die sich auf genau eine Weise in der Gestalt $p^2 + q^2$ schreiben lassen, M_3 bzw. M_4 die Menge aller Zahlen der Gestalt $p^2 + q^2 + r^2$ bzw. $p^2 + q^2 + 2^l + 2^m$. Es sei $A_i(n)$ die Anzahl derjenigen Elemente von M_i, die $\leqq n$ sind. Es werden folgende Resultate angekündigt: für hinreichend große n ist ($d_1, \ldots, d_4$ sind positive Konstanten) (1) $A_1(n) > d_1 n(\log n)^{-2}$; (2) $A_2(n) > d_2 n(\log n)^{-2}$; (3) $A_3(n) > d_3 n$; (4) $A_4(n) > d_4 n$. Offenbar folgt (1) aus (2) und auch aus (4). Wegen (3) vgl. ein späteres und schärferes Resultat von Walfisz (dies. Zbl. **18**, 345). Im vorliegenden I. Teil wird (2) bewiesen, wobei ein Brunsches Lemma (Sieb von Eratosthenes) benutzt wird. Im Lemma 1 beachte man, daß c_4 beliebig groß gewählt werden darf [für den Beweis von (2) genügt $c_4 = 3$]. *Jarník.*

Pillai, S. S.: On the number of representations of a number as the sum of the square of a prime and a squarefree integer. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **10**, 390—391 (1939).

Es sei $R(n)$ die Anzahl der Darstellungen der natürlichen Zahl n in der Gestalt $n = p^2 + f$, $f > 0$ und quadratfrei, $p > 2$ Primzahl. Erdös (dies. Zbl. **13**, 104) hat bewiesen, daß (I) $R(n) > 0$ für hinreichend große $n \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$. Verf. zeigt, daß die Beweismethode von Erdös für $n \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ schärfer zu (II) $R(n) \sim 2\sqrt{n}(\log n)^{-1}A(n)$, ja sogar zu (III) $R(n) = 2\sqrt{n}(\log n)^{-1}A(n) + O\left(\sqrt{n}(\log n \log\log n)^{-1}\right)$ führt; dabei ist $A(n) = \Pi(1 - 2q^{-1}(q-1)^{-1})$, wo q über alle ungeraden Primzahlen mit $\left(\frac{n}{q}\right) = 1$ läuft. Ref. scheint es, daß es zum Beweis von (III) [nicht aber zum Beweis von (II)] notwendig ist, statt der von Erdös benutzten üblichen Abschätzung der Anzahl der $p \leqq x$ mit $p \equiv l (\mathrm{mod}\, k)$ eine in bezug auf k gleichmäßige Abschätzung zu benutzen, z. B. diejenige von Walfisz (dies. Zbl. **13**, 104). $M = \log\log n$ ist dann gerade noch ein zulässiger Wert. *Jarník* (Prag).

Kac, M.: Almost periodicity and the representation of integers as sums of squares. Amer. J. Math. **62**, 122—126 (1940).

Es werden die Hardyschen Untersuchungen über die durch $1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_s(n) q^n = \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\right)^s$ definierten Koeffizienten $r_s(n)$ in Zusammenhang mit fastperiodischen Folgen gebracht. Zu diesem Zweck wird als Fourierkoeffizient der Funktion $f(n)$

der Grenzwert $M\{f(n)\exp[2\pi i\lambda n]\} = \lim_{n=\infty} n^{-1}\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu)\exp[2\pi i\lambda\nu]$ definiert, falls er vorhanden, und als Fourierreihe der Ausdruck

$$\sum_{\nu} \alpha_\nu \exp[-2\pi i\lambda_\nu n], \qquad (\alpha_\nu = M\{f(n)\exp[2\pi i\lambda_\nu n]\}),$$

falls die Fourierkoeffizienten gleich 0 sind, außer für eine höchstens abzählbare Menge von λ-Werten. Verf. beweist, daß die so definierten Fourierkoeffizienten von $n^{1-s/2}r_s(n)$ existieren und gleich 0 für irrationale λ und gleich

$$\pi^{s/2}\Gamma(s/2)\,(S_{hk}/k)^s = k^{-s}\pi^{s/2}\Gamma(s/2)\left(\sum_{j=0}^{k-1}\exp[2\pi i h j^2/k]\right)^s$$

für rationale $\lambda(=h/k)$ sind; also ist die Hardy-Littlewoodsche „singular series“ $\varrho_s(n) = \pi^{s/2}\Gamma(s/2)\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}\sum_{(h,k)=1}(S_{hk})^s\exp[-2\pi i h n/k]$ gleich der „Fourierreihe“ von $n^{1-s/2}r_s(n)$. Daraus wird gefolgert: Es ist $\varrho_s(n) = n^{1-s/2}r_s(n)$ dann und nur dann, wenn $n^{1-s/2}r_s(n)$ gleichmäßig fastperiodisch ist, was für $5 \leqq s \leqq 8$ zutrifft.

V. G. Avakumović (Beograd).

Rademacher, Hans: Fourier expansions of modular forms and problems of partition. Bull. Amer. Math. Soc. **46**, 59—73 (1940).

Ohne Vollständigkeit anzustreben, gibt Verf. einen kurzen historischen Überblick über die Entwicklung des Problems der Anzahlbestimmung der Partitionen natürlicher Zahlen und dessen Förderung durch Ramanujan, Hardy, ihn selbst u. a. Es sei $p(n)$ die Anzahl der Partitionen der natürlichen Zahl n. Durch Anwendung der Hardy-Littlewoodschen Methode auf die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n$$

erzielten Ramanujan und Hardy als erstes bedeutendes Resultat eine Abschätzung von $p(n)$ mit einem Fehlerglied $O(n^{-\frac{1}{4}})$. Dabei wird das Verhalten von $f(x)$ in der Nähe der Einheitswurzeln einer Dedekindschen Transformationsformel für die Modulform $\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i\tau}{12}}\prod_{m=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i m\tau})$ der Dimension $-\frac{1}{2}$ entnommen, die vermöge $x = e^{2\pi i\tau}$ mit $f(x)$ in engem Zusammenhang steht. Indem Verf. bei festem n die Ordnung der Fareyteilung in der Hardy-Littlewoodschen Methode gegen ∞ gehen ließ, wurde die exakte Formel

$$p(n) = \frac{1}{\pi 2^{1/2}}\sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)k^{1/2}\frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh\frac{\pi}{k}\left[\frac{2}{3}(n-1/24)\right]^{1/2}}{(n-1/24)^{1/2}}\right) \tag{1}$$

gewonnen, wobei $A_k(n)$ eine verallgemeinerte Kloostermansche Summe ist, und darüber hinaus der allgemeine Gehalt dieser Aussage aufgezeigt. Für eine ganze Form $F(\tau)$ positiver Dimension r zur rationalen Modulgruppe mit einer für $\Im\mathrm{m}\,\tau > 0$ gültigen Entwicklung

$$F(\tau) = e^{2\pi i\alpha\tau}\sum_{m=-\mu}^{\infty} a_m e^{2\pi i m\tau} \qquad (0 \leqq \alpha < 1,\ \mu \geqq 0)$$

gilt nämlich allgemein

$$a_m = \sum_{\nu=1}^{\mu} a_{-\nu}\sum_{k=1}^{\infty} A_{k,\nu}(m)\left(\frac{\nu-\alpha}{m+\alpha}\right)^{\frac{r+1}{2}} J_{r+1}\left(\frac{4\pi}{k}[(\nu-\alpha)(m+\alpha)]^{\frac{1}{2}}\right) \tag{2}$$

für $m \geqq 0$, wobei $A_{k,\nu}(m)$ eine verallgemeinerte Kloostermansche Summe und J_{r+1} eine Besselfunktion sind. $r > 0$ ist nötig, um die Konvergenz zu sichern. Wenn für die Summen $A_{k,\nu}(m)$ eine gewisse nichttriviale Abschätzung bewiesen werden kann, wie es für die Modulinvariante $J(\tau)$ (Form zur Dimension $r = 0$) zutrifft, dann ist der

oben formulierte Satz auch für $r = 0$ richtig. Diese Untersuchungen sind von Zuckermann auf Formen zu Hauptkongruenzuntergruppen der Modulgruppe ausgedehnt worden. Nach Formel (2) kann man durch Ausrechnen der ersten Koeffizienten von $F(\tau)$ entscheiden, wann $F(\tau)$ identisch verschwindet. Diese Methode läßt sich zum Nachweis einer Reihe von Identitäten der Art

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(5m+4)x^m = 5\frac{\Pi(1-x^{5\nu})^5}{\Pi(1-x^{\nu})^6}$$

verwenden und liefert Aussagen, wie $p(5m+4) \equiv 0(5)$, die von Ramanujan zuerst entdeckt wurden. — Ein neuartiges, vom Verf. aufgeworfenes Problem der analytischen Fortsetzung wird an der Funktion $f(x)$ demonstriert. $f(x)$ hat den Einheitskreis als natürliche Grenze; es gelingt aber $f(x)$ vermöge (1) als unendliche Reihe von Funktionen zu schreiben, die sämtlich in den Bereich $|x| > 1$ fortgesetzt werden können. Führt man diese Fortsetzung aus, so erhält man eine Funktion

$$f^*(x) = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} p^*(m)\, x^{-m} \quad (|x| > 1),$$

wobei $p^*(m) = -p(-m)$ und $p(-m)$ durch (1) erklärt ist, von der Petersson zuerst gezeigt hat, daß sie identisch verschwindet. *Maaß* (Heidelberg).

Hua, Loo-Keng: Sur une somme exponentielle. C. R. Acad. Sci., Paris **210**, 520—523 (1940).

Es sei $q > 0$ ganz, $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ habe ganze Koeffizienten, $(q, a_1, \ldots, a_k) = 1$, $S(q, f) = \sum_{x=1}^{q} \exp \frac{2\pi i f(x)}{q}$. Dann wird für jedes $\varepsilon > 0$ (1) $|S(q,f)| < C(k,\varepsilon) q^{1-k^{-1}+\varepsilon}$ und für $q = p^l$ (p Primzahl, $l > 0$ ganz) schärfer (2) $|S(p^l, f)| < C(k) p^{l(1-k^{-1})}$ behauptet. Aus (2) folgt leicht (1); für $l = 1$ stammt (2) von Mordell (dies. Zbl. **5**, 246). In dem Beweis von (2) konnten wir leider auch nach Verbesserung der Druckfehler die Richtigkeit der Zeile 11 auf S. 522 (Si $\operatorname{ind} f(x) = \operatorname{ind} g_i(x), \ldots$ on a $e = 1$) nicht einsehen. Für $p = 2$, $f(x) = 4x^3 + x^2$ ist $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $t = 1$, $e = 2$ und trotzdem $\operatorname{ind} f(x) = \operatorname{ind} g_1(x) = 2$. Da dieser Schluß wesentlich für den Beweis ist, hängt die Arbeit in der Luft. *Jarník* (Prag) u. *Hlawka* (Wien).

Mardjanichvili, C., et B. Segal: Sur une estimation des sommes de Weyl. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **26**, 731—734 (1940).

Die Verff. erhalten eine sehr interessante Abschätzung der Weylschen Summen. Ihr Resultat lautet: Es sei

$$S = \sum_{x=Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i f(x)}, \quad f(x) = \alpha x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_n,$$

$n \geqq 1$, Q, $P \geqq 3$ ganz, α, α_i reell,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\lambda}{q^2}, \quad q > 0, \ (a,q) = 1, \quad |\lambda| \leqq \Lambda, \quad \Lambda \geqq 1,$$

dann ist

$$|S|^{2^n-1} < 11(L-1)(4P)^{2^n-1}\mu^{\sigma}\left(\left(\Lambda + \frac{q}{P}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{P^{n-1}}\right)\right)^{1-\varepsilon},$$

wo $\mu = \log P^{n-1} + (n-1)^L - 1$, $\sigma = \frac{(n-1)^L - 1}{L}$, $0 < \varepsilon \leqq \frac{1}{2}$ und L die kleinste ganze Zahl $> \varepsilon^{-1}$. Es ist klar, daß sich dieses Resultat noch etwas verbessern läßt. Die Zahl $11(L-1)$ kann für $n \geqq 3$ durch 8 ersetzt werden. Der Beweis stützt sich auf die klassische Abschätzung (Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie I, Satz 265) und benützt eine Abschätzung von Mardjanichvili (siehe dies. Zbl. **21**, 208) über $\sum_{1 \leqq h \leqq x} \tau_k^L(h)$, wo $\tau_k(h)$ die Anzahl der Lösungen von $x_1 \ldots x_k = h$ ist. *Edm. Hlawka.*