Werk

Titel: Algebra und Zahlentheorie

Jahr: 1941

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0023|log24

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

chungen, die Takakazu Seki in seinem Werke Kaihô-sansiki gegeben hat, erläutert. Diese Methode ist ganz identisch mit der sog. Hornerschen Methode, die Horner erst 1819 veröffentlicht hat. T. Seki verdankt die Idee der unvollständigen Methode der Schrift Yoki-sanpô (1275), hat sie aber zu einem einheitlichen allgemeinen Verfahren entwickelt. Der Verf. macht auch darauf aufmerksam, daß in demselben Werke von Seki die Newtonsche Methode der sukzessiven Approximationen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung inhaltlich vorkommt. In moderner Sprechweise hat Seki die Gleichung $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$ durch $x = y + \alpha$ (α ist die erste Approximierte der Wurzel) in $f(y + \alpha) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n = 0$ transformiert und bemerkt, daß dabei

$$b_n = f(\alpha), \qquad b_{n-1} = f_1(\alpha) = n a_0 \alpha^{n-1} + (n-1) a_1 \alpha^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$$

ist. Seki bemerkte aber nicht, daß $f_1(x)$ die Ableitung von $f(x)$ ist. Daraus leitete er $\beta = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f_1(\alpha)}$ als die zweite Approximierte der Wurzel, und $\gamma = \beta - \frac{f(\beta)}{f_1(\beta)}$ als die dritte usw. ab, was nichts anderes als die Newtonsche Methode ist. *Fujiwara.*

Minoda, Takashi: On „Katuyô Sampô, book 3" of Takakazu Seki. Tôhoku Math. J. **47,** 99—109 (1940) [Japanisch].

In dem hinterlassenen Werke, Katuyô-sampô (1712) von Takakazu Seki findet man ein Kapitel, das von den regelmäßigen Polygonen handelt. Darin sind die Gleichungen, welche zwischen der Seitenlänge eines regelmäßigen n-seitigen Polygons, dem Radius des Umkreises und dem Radius des Inkreises bestehen, für die Fälle $n = 3, 4, 5, \ldots, 20$, zu finden. Verf. dieser Note erläutert die Methode des Katuyô-sampô an den beiden Fällen $n = 11, 17$; ferner gibt er die vollständige Berichtigung der Druckfehler in Katuyô-sampô und auch in dem anderen Werke von Seki, das als Urschrift des Katuyô-sampô diente. *Fujiwara* (Sendai).

Hofreiter, Nikolaus: Nachruf auf Philipp Furtwängler. Mh. Math. Phys. **49,** 219—227 (1940).

Biographie mit Schriftenverzeichnis. *H. Geppert* (Berlin).

Glagolev, N. A.: Maurice Oeagne (1862—1938). Uspechi mat. nauk. **7,** 322—326 (1940) [Russisch].

Hagstroem, K.-G.: Reinhold Palmqvist †. Skand. Aktuarie Tidskr. **23,** 62—65 (1940).

Biographie mit Schriftenverzeichnis. *Harald Geppert* (Berlin).

Tschebotarev, N. G.: Samnil Osipowitsch Schatunowskij. (Zum zehnjährigen Todestag.) Uspechi mat. nauk. **7,** 316—321 (1940) [Russisch].

Gheorghiu, Gh. Th.: George Ţiţeica. Gaz. mat. **45,** 281—288, 339—344, 396 bis 405 u. 452—457 [Rumänisch].

Lony, Gustav: Die Mathematische Gesellschaft in Hamburg in den Jahren 1890 bis 1940. Mitt. math. Ges. Hamburg **8,** Tl 1, 7—41 (1940).

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra, Polynome, Invariantentheorie:

Witt, Ernst: Ein Identitätssatz für Polynome. Mitt. math. Ges. Hamburg **8,** Tl. 2, 188—189 (1940).

Funktionentheoretischer Beweis eines vom Ref. algebraisch bewiesenen Satzes (dies. Zbl. **16,** 99; **21,** 99). *Rohrbach* (Berlin-Nikolassee).

Măties, I. V.: Beiträge zur Auflösung der Gleichungen vierten Grades. Gaz. mat. **45,** 565—571 (1940) [Rumänisch].

Verf. setzt zur Auflösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades in x zwei Gleichungen $y = \frac{a_1 x^2 + b_1 x + c_1}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2}$ und $y^2 + my + n = 0$ an, erhält aus diesen durch Elimination von y eine Gleichung vierten Grades in x, identifiziert diese mit der gegebenen Gleichung und ver-

gleicht die Koeffizienten. Nach einigen Vereinfachungen erhält er eine kubische Resolvente für den allgemeinen Fall $a_2 \neq 0$. Er untersucht dann weiter die beiden Sonderfälle $a_2 = 0$, $b_2 \neq 0$ und $a_2 = b_2 = 0$, $c_2 \neq 0$. Ist $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$ die gegebene Gleichung, so führt der erste Sonderfall auf die Bedingung $AD^2 - B^2E = 0$, der zweite auf $B^3 + 8A^2D - 4ABC = 0$. *Max Zacharias* (Berlin).

Landherr, W.: Algebraischer Beweis eines Satzes aus der Matrizenrechnung. Mh. Math. Phys. **49**, 197—198 (1940).

Der Satz wurde von Radon mit Stetigkeitsbetrachtungen bewiesen (dies. Zbl. **21**, 291). *Rohrbach* (Berlin-Nikolassee).

Oldenburger, Rufus: Infinite powers of matrices and characteristic roots. Duke math. J. **6**, 357—361 (1940).

Sei A eine komplexe Matrix, $A^\infty = \lim_{n \to \infty} A^n$. Verf. gibt notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz und speziell für das Nullwerden von A^∞. Anschließend werden einige Sätze über die Lage der charakteristischen Wurzeln von Matrizen abgeleitet, insbesondere Sätze von Frobenius und von Hirsch einfacher bewiesen. *Rohrbach* (Berlin-Nikolassee).

Specht, Wilhelm: Klassifikation der halblinearen Transformationen. Math. Z. **46**, 637—649 (1940).

Die Klassifikation der halblinearen Transformationen in einem Körper der Charakteristik 0 für einen Automorphismus endlicher Ordnung ist mehrfach durchgeführt worden (siehe Jacobson, dies. Zbl. **13**, 146; Haantjes, dies. Zbl. **17**, 53; Nakayama, dies. Zbl. **17**, 3; Asano und Nakayama, dies. Zbl. **18**, 4). Die Aufgabe kann auf folgende rein matrizentheoretische Fragestellung zurückgeführt werden: Es sei Z zyklisch über dem Körper k der Charakteristik 0, $[Z:k] = m$, und S ein erzeugender Automorphismus von Z/k. Zwei in Z rationale Matrizen A, B heißen S-ähnlich, wenn eine in Z rationale, reguläre Matrix P gleichen Grades existiert, so daß $P^{-1}AP^S = B$ ist. Gesucht sind kennzeichnende Invarianten der Klassen S-ähnlicher Matrizen. — Es sei $N_\lambda(A) = A^{1+S+\cdots+S^{\lambda-1}}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ und $r_\lambda(A) = \text{Rang } N_\lambda(A)$. Dann gilt: $r_1(A), \ldots, r_n(A)$ und die Elementarteiler von $N_m(A)$ bilden ein vollständiges Invariantensystem. Die bisherigen Beweise verwenden allgemeine abstrakte algebraische Hilfsmittel (Köthesche Theorie der einreihigen Ringe, Studium der p-adischen Erweiterungen $Z^*(x)_p$, wo $Z^*(x)$ der Quotientenkörper des Polynomringes $Z^*[x]$ bedeutet, in welchem $x\alpha = \alpha^S x$ mit $\alpha \in Z$ ist). Verf. zeigt, daß die üblichen Methoden der Matrizentheorie für die Lösung der Aufgabe durchaus ausreichen. Die Arbeit gliedert sich naturgemäß in die Behandlung der beiden Fälle einer regulären und einer singulären Matrix. Im zweiten Falle macht Verf. vom folgenden interessanten Satz Gebrauch: Ist die charakteristische Funktion der Norm von A von der Gestalt $|xE - N_m(A)| = f_1(x)f_2(x)$ und sind $f_1(x)$, $f_2(x)$ zwei teilerfremde Polynome in k, so kann man zu A eine S-ähnliche Matrix $B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ angeben, so daß die Gleichungen $|xE - N_m(B_i)| = f_i(x)$ $(i = 1, 2)$ bestehen. *H. L. Schmid* (Berlin).

Turri, T.: Condizioni per la identità proiettiva di antiomografie. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari **10**, 1—15 (1940).

Verf. beweist: Notwendig und hinreichend dafür, daß zwei durch die Matrizen A und B dargestellte Antihomographien projektiv identisch seien, ist, daß die charakteristischen Wurzeln der Matrix $\|B\bar{B} - \varrho I\|$ aus denen der Matrix $\|A\bar{A} - \varrho I\|$ durch Multiplikation mit einer reellen positiven Konstante erhalten werden. — Der Beweis knüpft an einige vom Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **22**, 195) erhaltene Ergebnisse an, auf Grund deren man beweisen kann, daß jede Antihomographie in elementare Antihomographien zerlegbar ist, die sich in drei Typen klassifizieren lassen und durch das Verhalten ihrer Quadrate gekennzeichnet sind. Man beweist daher den Satz zunächst für diese elementaren Antihomographien, wobei die Tatsache eine Rolle spielt, daß man mittels linearer Substitutionen die Matrix jeder Antihomographie in eine reelle Matrix transformieren kann. — Weitere Bemerkungen des Verf. beziehen

sich auf projektiv unterschiedene Antihomographien, deren Quadrate projektiv identisch sind; in diesem Falle erhält man die charakteristischen Wurzeln der Matrix $\|B\bar{B} - \varrho I\|$ aus denen der Matrix $\|A\bar{A} - \varrho I\|$, indem man sie mit einer notwendigerweise nicht reellen und positiven Konstanten multipliziert. Beispiele aus dem gewöhnlichen S_3 beleuchten die Ergebnisse. *L. Campedelli* (Firenze).

Rados, Gustav: Vertauschbare Hermitesche Matrizen und die zugehörigen Hermiteschen Formen. Mat. természett. Értes. **59**, Tl 1, 1—4 u. deutsch. Zusammenfassung 5—6 (1940) [Ungarisch].

Die Faltung zweier vertauschbarer definiter Hermitescher Formen ist stets eine definite Hermitesche Form. Die Faltung zweier vertauschbaren Hermiteschen Formen, von denen entweder beide definit sind oder die eine definit und die andere semidefinit ist, ist eine semidefinite Hermitesche Form, deren Rang höchstens dem Produkte der Rangzahlen der Komponenten gleich ist. *Gy. v. Sz. Nagy* (Szeged).

McGavock, William G.: Annihilators of quadratic forms with applications to Pfaffian systems. Duke math. J. **6**, 462—473 (1940).

Sind $F \neq 0$, $G \neq 0$ Formen im Grassmannschen Ringe $\mathfrak{G}$ und ist $FG = 0$, so wird F Annihilator von G genannt. Den Schwerpunkt der Arbeit bildet der Beweis des folgenden Satzes: Wenn für quadratische Formen F, G und lineare Formen $\omega_1, \ldots, \omega_r$ in $\mathfrak{G}$ die Beziehungen $\Omega F^\lambda G^{\varrho-\lambda+1} = 0$ $(\lambda = 0, \ldots, \varrho + 1)$, $\Omega F^\varrho \neq 0$, $\Omega G^\varrho \neq 0$ bestehen, wobei Ω das Produkt $\omega_1 \ldots \omega_r$ bedeutet, so werden die ΩF und ΩG von einem Produkte von ϱ linearen Formen in $\mathfrak{G}$ gleichzeitig annihiliert. Dieser Satz wird zu Untersuchungen über Beziehungen zwischen den Invarianten Pfaffscher Systeme, und zwar der Dimension (r), Klasse (p), Spezies (σ) und des Halbranges (ϱ), verwendet. Beweis der Ungleichung $\sigma \leqq 2\varrho + r - 1$; Konstruktion von Pfaffschen Systemen mit $r > 2$, $\varrho \leqq \sigma \leqq 2\varrho$, $p = 5\varrho + r - \sigma$. *O. Borůvka.*

Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

Ore, Oystein: Remarks on structures and group relations. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich **85**, Beibl. Nr 32, 1—4 (1940).

Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, daß drei Elemente eines beliebigen Verbandes einen Dedekindschen bzw. distributiven Teilverband erzeugen. Anwendungen auf die Verbände aus den Untergruppen einer Gruppe. So gilt z. B., daß in jeder Gruppe zwei Normalteiler und eine beliebige dritte Untergruppe stets einen Dedekindschen Teilverband erzeugen. *G. Köthe.*

MacLane, Saunders: Modular fields. Amer. Math. Monthly **47**, 259—274 (1940).

Eine Gesamtübersicht über alte und neue Sätze und Fragestellungen in der Theorie der Körper mit Charakteristik p, unter besonderer Berücksichtigung der inseparablen Körpererweiterungen. *van der Waerden* (Leipzig).

Teichmüller, Oswald: Über die sogenannte nichtkommutative Galoissche Theorie und die Relation $\xi_{\lambda,\mu,\nu}\xi_{\lambda,\mu\nu,\pi}\xi^{\lambda}_{\mu,\nu,\pi} = \xi_{\lambda,\mu,\nu\pi}\xi_{\lambda\mu,\nu,\pi}$. Deutsche Math. **5**, 138—149 (1940).

K sei ein Schiefkörper endlichen Ranges über P, und $\mathfrak{Z}$ sei der Unterkörper aller bei allen Automorphismen von K/P fest bleibenden Elemente. $\mathfrak{Z}$ ist natürlich im Zentrum Z von K enthalten. Nun gilt folgende Verallgemeinerung eines Hauptsatzes der Galoisschen Theorie: Ordnet man jedem Zwischenkörper X zwischen $\mathfrak{Z}$ und K die Gruppe $\mathfrak{g}$ derjenigen Automorphismen zu, die X elementweise fest lassen, so ist X umgekehrt die Gesamtheit der Elemente von K, die bei $\mathfrak{g}$ fest bleiben. Ist insbesondere $\mathfrak{Z} = \mathsf{P}$, so kann man für X jeden Zwischenkörper zwischen P und K nehmen. Dazu ist notwendig und hinreichend: 1. daß Z über P galoissch und separabel ist, 2. daß jeder Automorphismus von Z/P sich zu einem Automorphismus von K fortsetzen läßt. Hat K die Eigenschaft 2, so hat auch ein beliebiger voller Matrixring A über K die Eigenschaft 2 und umgekehrt. Nun wird gefragt, wie sich diese Eigenschaft am Faktorensystem von A auswirkt. Als Zerfällungskörper wird ein Z umfassender, über P

galoisscher und separabler Körper S gewählt; das Faktorensystem sei $\alpha_{\varrho,\sigma}$. Dann bedeutet die Eigenschaft 2, daß gewisse Quotienten aus den $\alpha_{\varrho,\sigma}$ und ihren Konjugierten sich auf die Gestalt $c_\sigma c_\tau^\sigma c_{\tau\sigma}^{-1}$ bringen lassen, also je ein zerfallendes Faktorensystem bilden. Die Algebrenklassen mit dieser Eigenschaft bilden eine Untergruppe der Algebrenklassengruppe. Diese enthält wieder eine Untergruppe, bestehend aus den Algebren A, die sich in einfache Algebren B mit Zentrum P einbetten lassen derart, daß A aus allen mit Z elementweise vertauschbaren Elementen von B besteht. Zu jeder Algebrenklasse der erstgenannten (größeren) Untergruppe läßt sich in Z ein System von Elementen $\xi_{\lambda,\mu,\nu}$ eindeutig bis auf Multiplikation mit $\varkappa_{\lambda,\mu}\varkappa_{\lambda\mu,\nu}(\varkappa_{\mu,\nu}^{\lambda}\varkappa_{\lambda,\mu\nu})^{-1}$ definieren, für das immer die im Titel genannte Relation gilt, derart daß $\xi_{\lambda,\mu,\nu} = \varkappa_{\lambda,\mu}\varkappa_{\lambda\mu,\nu}(\varkappa_{\mu,\nu}^{\lambda}\varkappa_{\lambda,\mu\nu})^{\tau-1}$ dann und nur dann, wenn die Algebrenklasse zur kleineren Untergruppe gehört (d. h. wenn ihre Algebren sich in der angegebenen Weise einbetten lassen). Ist Z zyklisch, so fällt die größere Untergruppe mit der kleineren zusammen.

van der Waerden (Leipzig).

● **Albert, A. Adrian: Structure of algebras. (Amer. math. Soc. Coll. Publ. Vol. 24.)** New York: Amer. Math. Soc. 1939. XII, 210 pag. $ 4.—.

Shaw, James Byrnie: Algebras defined by groups whose members are of the form A^xB^y. Duke math. J. **5**, 839—855 (1939).

In dieser Note beschäftigt sich Verf. mit Gruppen, die aus den Elementen von der Gestalt A^xB^y erzeugt werden. Für solche Gruppen wird die Reduktion des Gruppenringes ausgeführt, was theoretisch schon in der allgemeinen Theorie bekannt ist. Die angegebenen vielen Beispiele werden für die weiteren Untersuchungen des Gruppenringes nötig sein.

K. Shoda (Osaka).

Mori, Shinziro: Über die Produktzerlegung der Hauptideale. 3. J. Sci. Hirosima Univ. A **10**, 85—94 (1940).

In Verallgemeinerung früherer Ergebnisse [vgl. J. Sci. Hirosima Univ. A **9**, 145 (1939); Referat folgt; Teil I vgl. dies. Zbl. **18**, 200] wird bewiesen: R sei ein kommutativer Ring mit Einselement, in dem jedes Hauptideal als Potenzprodukt endlich vieler Primideale darstellbar ist. R ist dann die direkte Summe endlich vieler Ringe R_i mit Einselementen, die entweder Integritätsbereiche oder primäre Ringe sind. Im zweiten Fall ist das einzige Primideal ein Hauptideal, im ersten brechen für jedes Hauptideal (a) die Idealquotientenketten $(a):\mathfrak{a}_1 \subset (a):\mathfrak{a}_2 \subset (a):\mathfrak{a}_3 \subset \cdots$ stets ab, und jedes höchste Primideal eines beliebigen Hauptideals ist stets umkehrbar. Von diesem Satz gilt auch die Umkehrung.

G. Köthe (Münster i. W.).

Pall, Gordon: On the arithmetic of quaternions. Trans. Amer. Math. Soc. **47**, 487—500 (1940).

Eine Quaternion $t = t_0 + i_1 t_1 + i_2 t_2 + i_3 t_3$ heißt eigentlich mod m, wenn $(t_0, t_1, t_2, t_3, m) = 1$. Zuerst wird ein neuer Beweis für den Satz gegeben: Wenn die Quaternion v eigentlich mod m ist, $m/\mathrm{Norm}(v)$, m ungerade und positiv, dann hat v genau 8 linksassoziierte Rechtsteiler mit der Norm m. Hierauf werden die Beziehungen zwischen der Gleichung $m = \sum_{i=0}^{3} t_i^2$ und der Kongruenz $\sum_{i=1}^{3} v_i^2 \equiv 0 \pmod m$ klargelegt. Es werden dann Bedingungen angegeben, daß Quaternionen dieselben Teiler mit gegebener Norm haben. Mit Hilfe von Quaternionen werden schließlich bekannte Beziehungen abgeleitet, die zwischen der Klassenzahl binärer quadratischer Formen und den Darstellungen von ternären Formen bestehen.

N. Hofreiter (Wien).

Zahl- und Funktionenkörper:

Humbert, Pierre: Théorie de la réduction des formes quadratiques définies positives dans un corps algébrique K fini. Comment. math. helv. **12**, 263—306 (1940).

Verf. überträgt die Theorie von Minkowski über die arithmetische Äquivalenz der quadratischen Formen ins Algebraische. Gegeben sei ein endlicher algebraischer

Zahlkörper K vom Grade g über dem Körper der rationalen Zahlen und eine natürliche Zahl $n \geqq 2$. Große und kleine deutsche Buchstaben bezeichnen Matrizen vom Typus n-mal n bzw. n-mal 1 (wenn nichts anderes gesagt wird) mit ganzen Elementen in K. Für eine beliebige Matrix x bedeutet $\bar{x}$ und x' die konjugiert komplexe bzw. transponierte. Es wird nach Siegel $\mathfrak{S}[x] = x'\mathfrak{S}\bar{x}$ gesetzt. Die Konjugierten von K seien $K^{(1)}, \ldots, K^{(g)}$, so daß $K^{(k)} (k = 1, \ldots, g_1)$ reell, $K^{(g_1+k)}$, $K^{(g_1+g_2+k)}$ $(k = 1, \ldots, g_2)$ konjugiert komplex sind $(g = g_1 + 2g_2)$. Es sei $\gamma = g_1 + g_2$. Wird ein deutscher Buchstabe mit einem oberen Index versehen wie $\mathfrak{A}^{(k)}$, so liegt die Matrix in $K^{(k)}$. Was immer x bedeutet, sind $x^{(1)}, \ldots, x^{(g)}$ die entsprechenden Konjugierten, ausgenommen $x = \mathfrak{S}$. Eine Folge $\mathfrak{S}^{(k)} (k = 1, \ldots, \gamma)$ von Hermiteschen (für $k = 1, \ldots, g_1$ symmetrischen) Matrizen wird ein System S genannt, wenn die entsprechenden Hermiteschen (für $k = 1, \ldots, g_1$ quadratischen) Formen in $K^{(k)}$ positiv definit sind. Ist $\mathfrak{U}$ unimodular ($|\mathfrak{U}|$ = Einheit in K), so heißt das transformierte System $\mathfrak{S}^{(k)}[\mathfrak{U}^{(k)}]$ $(k = 1, \ldots, \gamma)$ (kurz $S[U]$) äquivalent zu S. Es sei $\mathfrak{S} = (s_{ij})$. Deutet man die Real- und Imaginärteile von $s_{ij}^{(k)}$ $(1 \leqq i \leqq j \leqq n;\ k = 1, \ldots, \gamma)$ als Koordinaten im $\left(\frac{n}{2}(ng + g_1)\right.$-dimensionalen) Euklidischen Raum, den man zugrunde gelegt denkt, so bilden die Punkte S eine Punktmenge P. Verf. stellt das Problem, über zwei Systeme S_1, S_2 zu entscheiden, ob sie äquivalent sind, und löst es, indem er den Fundamentalbereich bezüglich der Gruppe aller $\mathfrak{U}$ bestimmt. Der soll ein Gebiet sein, das zu jedem Punkt S einen äquivalenten enthält und nur dann mehr als einen, wenn es sich um Randpunkte handelt. Die darin enthaltenen S heißen reduziert. Es erweisen sich die $\mathfrak{F} = \omega\mathfrak{E}$ (ω = Einheit, $\mathfrak{E}$ = Einheitsmatrix in K) leicht als die einzigen Matrizen $\mathfrak{U}$, mit denen $S[U] = S$ für alle S gilt. Den folgenden Betrachtungen wird ein Lemma an die Spitze gestellt: Nimmt man die $\mathfrak{S}$ entsprechende Form in der üblichen Gestalt $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}]$ an und setzt $\tau x = \sum_{k=1}^{\gamma} x^{(k)}$ („Spur" von x), so gibt es zu gegebenem $\mathfrak{S}$ nur endlich viele $\mathfrak{x}$ so, daß $\tau\mathfrak{S}[\mathfrak{x}]$ unter einer gegebenen Schranke bleibt. (Hätte man statt S und $K^{(1)}, \ldots, K^{(g)}$ nur $\mathfrak{S}$ und K betrachtet, so gälte ein ähnliches Lemma nicht und könnte ein „Fundamentalbereich" kein Gebiet mehr sein.) Die Reduktion von S erfolgt durch zwei Transformationen. Hilfsmatrix von S heißt eine reguläre (nicht notwendig unimodulare) Matrix $\mathfrak{A}$, wenn für das transformierte System $\dot{S}$ der $\dot{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}[\mathfrak{A}] = (\dot{s}_{ij})$ (die oberen Indizes (k) wurden weggelassen) vor allem $\tau\dot{s}_{11}$, dabei noch $\tau\dot{s}_{22}, \ldots$, endlich dabei noch $\tau\dot{s}_{nn}$ minimal ist und gewisse einfache weitere Bedingungen stattfinden (erste Transformation). Umgestaltet lauten diese zwei Bedingungen: (I) $\tau(\dot{s}_{ll}) \leqq \tau(\dot{\mathfrak{S}}[\mathfrak{y}])$ für alle nicht notwendig ganzen $\mathfrak{y} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, für die $\mathfrak{A}\mathfrak{y}$ ganz ist und $\eta_l, \ldots, \eta_n$ nicht alle verschwinden $(l = 1, \ldots, n)$, (II) $-\frac{\pi}{w} \leqq \arg \dot{s}_{1l}^{(1)} \leqq \frac{\pi}{w}$, wobei w die Anzahl der ω ist $(l = 2, \ldots, n)$. Die Hilfsmatrix ist bis auf einen Faktor $\mathfrak{F}$ eindeutig bestimmt. Nun werde in (I), (II) ein beliebiges (ganzes) reguläres $\mathfrak{A}$ gemeint. Erst im Satz 7 wird bewiesen, daß alle Ungleichungen (I) aus einer endlichen Anzahl von ihnen folgen. So ergibt sich, daß all die (I), (II) genügenden $\dot{s}_{ij}^{(k)}$ ein Gebiet $R(\mathfrak{A})$ definieren, das ein konvexer Winkelraum ist, begrenzt von endlich vielen durch den Nullpunkt gehenden Flächen. Auch gilt $R(\mathfrak{U}\mathfrak{A}) = R(\mathfrak{A})$, wenn $\mathfrak{U}$ unimodular ist. Gestützt auf Minkowskis Satz über die linearen Formen gewinnt man Satz 1: Es ist Norm $(|\mathfrak{A}|) \leqq c$ für alle Hilfsmatrizen, wobei c nur von K und n (nicht aber von S) abhängt. Satz 2 besagt weiter, daß sich alle $\mathfrak{A}$ in der Gestalt $\mathfrak{U}\mathfrak{A}_\nu$ schreiben lassen, wobei $\mathfrak{U}$ unimodular ist und $\mathfrak{A}_\nu$ einer endlichen Menge $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_N$ angehört, die wieder nur von K und n abhängt. Das transformierte System $\ddot{S}$ der $\ddot{\mathfrak{S}} = \dot{\mathfrak{S}}[\mathfrak{A}_\nu^{-1}]$ (zweite Transformation) ist reduziert. Läßt man hier für $\dot{S}$ alle Punkte von $R(\mathfrak{A}_\nu)$ zu, so entsteht wieder ein Gebiet R_ν mit ähnlichen Eigenschaften. Nach Satz 3 ist der Durchschnitt $R = P \cap R_1 + \cdots + R_N$ ein Fundamentalbereich. Nach Satz 5 läßt sich jeder Randpunkt S von R durch eine

unimodulare Matrix $\mathfrak{U}(\neq \mathfrak{F})$ wieder in einen Randpunkt T transformieren und nach Satz 6 kommt man für alle Paare S, T mit endlich vielen $\mathfrak{U}$ aus. Als Anwendung folgt der Satz von Hurwitz, daß die Gruppe der unimodularen Matrizen $\mathfrak{U}$ in K eine endliche Anzahl Erzeugende hat. Für sie kann man die $\mathfrak{U}$ aus Satz 6 und die $\mathfrak{F}$ nehmen.

L. Rédei (Budapest).

Hasse, H.: Produktformeln für verallgemeinerte Gausssche Summen und ihre Anwendung auf die Klassenzahlformel für reelle quadratische Zahlkörper. Math. Z. **46**, 303—314 (1940).

Die Schwierigkeiten, die auftreten, wenn man die Klassenzahl eines reellen quadratischen Zahlkörpers nach der Dirichletschen Formel berechnen will, führen darauf, gewisse verallgemeinerte Gaußsche Summen zu betrachten:

$$\tau_a(\psi_m) = \sum_{x \text{ in } \mathfrak{G}^m} \psi_m(x)\, e^{\frac{2\pi i}{p} Sp(ax)},$$

wobei a eine feste Zahl $\neq 0$ aus einem endlichen Körper der Charakteristik p und ψ_m ein Charakter der Gruppe $\mathfrak{G}^m$ aller m-ten Potenzen $\neq 0$ aus diesem Körper ist, sowie die Produkte $\prod_r \tau_r(\psi_m)$, wobei r ein Repräsentantensystem eines Elementes der von $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^m$ nach $\mathfrak{G}^k/\mathfrak{G}^m$ gebildeten Faktorgruppe durchläuft, durch genaueres Eingehen auf ihre gruppentheoretische Struktur auszumultiplizieren. Die sich hierbei ergebenden Produktformeln ermöglichen, wie hier für den Fall der Primzahldiskriminanten ausgeführt wird, die Berechnung der Klassenzahl eines reellen quadratischen Körpers in wesentlich ebenso einfacher Weise wie bei den imaginär-quadratischen Körpern.

Reichardt (Leipzig).

Lednew, N. A.: Über die Einheiten relativ-zyklischer algebraischer Zahlenkörper. Rec. math. Moscou, N. s. **6**, 227—260 u. deutsch. Zusammenfassung 260—261 (1939) [Russisch].

Hilberts Satz 91 [Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **4**, 273 (1894—1895)] lautet: Ist K/k zyklisch und $[K:k]$ eine ungerade Primzahl, so existiert in K stets ein System von $r+1$ Grundeinheiten ($r+1 = r_1 + r_2$, r_1 Anzahl der reellen, $2r_2$ Anzahl der komplexen Körper unter den konjugierten Körpern k). — Verf. verallgemeinert diesen Satz, indem er 1. eine zyklische Erweiterung K/k beliebiger Ordnung betrachtet, 2. die Einheitengruppe ε^{1-S} ersetzt durch die Einheitengruppe $\varepsilon^{a_0 + a_1 S + \cdots + a_m S^m}$ (ε Einheiten von K, S erzeugende Substitution der Galoisgruppe von K/k vom Grade n, a_i ganze rationale Zahlen, für welche das Polynom $a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ prim ist zum Polynom $1 + x + \cdots + x^{n-1}$). Hilberts Satz 127 (ebenda, 336) lautet: Sei l eine ungerade Primzahl, $\zeta = e^{2\pi i/l}$ und $k(\zeta + \zeta^{-1})$ der durch $\zeta + \zeta^{-1}$ bestimmte reelle Unterkörper des Kreiskörpers $k(\zeta)$, so ist ein beliebiges System von Grundeinheiten von $k(\zeta + \zeta^{-1})$ stets auch für den Körper $k(\zeta)$ ein System von Grundeinheiten (k Körper der rationalen Zahlen). — Verf. verallgemeinert diesen Satz, indem er k durch eine beliebige endlich-algebraische Erweiterung des Körpers der rationalen Zahlen und $k(\zeta)$ durch den Kreiskörper der l^h-ten Einheitswurzeln ersetzt. — Nach dem deutschen Auszug referiert; das dort mehrfach auftretende Wort „Potenz" muß durch „Ordnung" ersetzt werden.

H. L. Schmid (Berlin).

Gut, Max: Mittel aus Dirichlet-Reihen mit reellen Resteharakteren. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich **85**, Beibl. Nr 32, 214—224 (1940).

Verf. hat (dies. Zbl. **16**, 6) einen Typus unendlicher algebraischer Körper definiert und nachgewiesen, daß der Vereinigungskörper aller zyklischen Körper von festem Primzahlgrad q, sowie der Körper, der aus allen quadratischen Irrationalitäten besteht, zu diesem Typus gehören. Ist dieser Körper $k = \lim_{i=\infty} k_i$, k_0 der rationale Zahlkörper und n_i der absolute Grad, $\zeta_i(s)$ die Dedekindsche Zetafunktion von k_i, dann existiert $\lim_{i=\infty} [\zeta_i(s)]^{1/n_i} = Z(s)$ (dies. Zbl. **16**, 6, Satz 1). Dieses Ergebnis wurde durch die Theorie der algebraischen Körper von unendlich hohem Grade gewonnen. Im Falle des Ver-

einigungskörpers aller absolut-zyklischen Körper vom Primzahlgrad q ist diese Grenzfunktion der Limes des geometrischen Mittels aller L-Reihen des rationalen Zahlkörpers, deren Charakter die Eigenschaft hat, daß seine q-te Potenz für jede natürliche Zahl als Argument entweder gleich 1 oder 0 ist. In vorliegender Arbeit zeigt Verf., daß im Spezialfall $q = 2$ nicht nur das geometrische, sondern auch das arithmetische und das harmonische Mittel von gleichen geeigneten Folgen aller L-Reihen direkt, ohne die Theorie der algebraischen Körper von unendlich hohem Grade, bestimmt werden kann. Die Durchführung beruht auf einem Lemma (S. 216—217), mit dessen Hilfe derartige Mittel noch für weitere Typen von gewöhnlichen Dirichlet-Reihen mit reellen Restcharakteren erhalten werden können; einige spezielle Fälle als Beispiele am Schluß. *Kienast* (Küsnacht).

Speiser, Andreas: Gruppen aus der Klassenkörpertheorie. J. reine angew. Math. **182**, 178—179 (1940).

Kurze Darstellung einiger gruppentheoretischer Probleme: 1. Halbreduzierte Gruppen treten auf bei der Untersuchung der Einheiten relativ-galoisscher Körper sowie bei der Frage, welche Teile eines Klassenkörpers sich schon an Teilkörper des Grundkörpers anheften lassen. 2. Das Verhalten verschränkter Gruppendarstellungen bei Adjunktion von Einheitswurzeln. 3. Die Struktur der Hilbertschen Untergruppenreihe im Zusammenhang mit dem Problem der rein arithmetischen Begründung der Klassenkörpertheorie. *Reichardt* (Leipzig).

Châtelet, François: Groupe exceptionnel d'une classe de cubiques. C. R. Acad. Sci., Paris **210**, 200—202 (1940).

Einige Bemerkungen über die Bestimmung der in einem Zahlkörper gelegenen Lösungen endlicher Ordnung von $y^2 = x^3 + ax + b$. Z. B. ergibt sich dabei: Die Gleichungen, die dieselbe Invariante wie $y^2 = x^3 - x - 1$ haben, besitzen in einem beliebigen quadratischen Zahlkörper keine solche Lösung. *Reichardt* (Leipzig).

Barbilian, D.: Axiomatische Begründung des Abelschen Theorems im Großen. Disquisit. Math. et Phys., Bucureşti **1**, 5—22 (1940).

Wenn in einer additiven abelschen Gruppe die Gleichung $nX = B$ für $n > 1$ stets mehr als eine, aber nur endlich viele Lösungen besitzt, so bilden die Elemente endlicher Ordnung eine Untergruppe, die direkte Summe von r Gruppen vom Typus der rationalen Zahlen modulo 1 ist. Unter Zuhilfenahme von r Symbolen $\Omega_1, \ldots, \Omega_r$ kann man alle Lösungen der Gleichung $nX = 0$ in der Form $\sum \frac{m_i}{n} \Omega_i$ darstellen, wobei mit den m_i modulo n gerechnet wird. Die Gruppe der Divisorenklassen der Ordnung Null einer algebraischen Kurve vom Geschlecht p erfüllt die genannten Voraussetzungen, und zwar ist $r = 2p$. Legt man eine engere Äquivalenzdefinition für die Punktgruppen auf der Kurve zugrunde, indem man gewisse Doppelpunkte als „virtuell nicht vorhanden" betrachtet (d. h. sie in der Definition der adjungierten Kurven nicht berücksichtigt), so erhöht sich die Zahl r um die doppelte Anzahl dieser Doppelpunkte; die Gruppe wird dann die direkte Summe aus der zuerst betrachteten Gruppe und gewissen akzessorischen Gruppen, die zu jenen mehrfachen Punkten gehören. *van der Waerden* (Leipzig).

Jung, Heinrich W. E.: Zur Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher. I. Divisorenklassen. J. reine angew. Math. **180**, 219—244 (1939).

Es sei gestattet, die Sätze, die der Verf. in seiner Begriffssprache formuliert, in die Sprache der algebraischen Geometrie zu übersetzen. Divisoren sind Kurven auf einer irred. singularitätenfreien algebr. Fläche, deren irreduzible Bestandteile (Primdivisoren) mit ganzzahligen (auch negativen) Vielfachheiten versehen sind. Gehören zwei Divisoren einer linearen Schar an, so heißen sie äquivalent. $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{R})$ bezeichnet die Schnittpunktszahl der Divisoren $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$. Ist $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ für jeden Primdivisor $\mathfrak{P}$, so heißen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ algebraisch äquivalent und man schreibt $\mathfrak{Q} \approx \mathfrak{R}$. Ist $\mathfrak{Q} \approx 0$, so heißt $\mathfrak{Q}$ ein Nulldivisor. $\mathfrak{Q}$ ist dann und nur dann Nulldivisor, wenn

$(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}) = 0$ ist und es zwei (möglicherweise zusammenfallende) Primdivisoren $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ mit $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}) > 0$, $(\mathfrak{L}, \mathfrak{Q}) = 0$ und $(\mathfrak{M}, \mathfrak{Q}) = 0$ gibt. Die Gruppe der Nulldivisoren besitzt eine kontinuierliche Untergruppe R_0 mit nur endlich vielen Nebenklassen. R_0 besteht nach Severi aus ∞^γ Divisorenklassen, wo $\gamma = p_g - p_a$. Ist $\mathfrak{Q}$ Nulldivisor, so ist ein Vielfaches $\lambda\mathfrak{Q} \equiv 0$ im Sinne von Severi, d. h. es ist $\lambda\mathfrak{Q} = \mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G}_2$, wo $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ derselben irred. algebr. Schar angehören. — Die Divisoren $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_r$ heißen algebraisch verbunden, wenn eine Linearkombination $\lambda_1\mathfrak{c}_1 + \cdots + \lambda_r\mathfrak{c}_r \approx 0$ ist. Sie sind dann auch algebraisch abhängig im Sinne von Severi. Die Maximalzahl der algebraisch unabhängigen Divisoren ist die Picardsche Zahl ϱ, die in bekannter Weise mit den Integralen 3. Gattung zusammenhängt. Unter gewissen (leider nicht genannten) Voraussetzungen über die „Stellendefinition" gilt $\varrho \geqq 2$. — Für den Fall, daß die vorgelegte Fläche die Gesamtheit der Punktepaare zweier algebr. Kurven ist, werden alle Nulldivisoren bestimmt. Das Ergebnis kann als Satz über Korrespondenzen so formuliert werden: Ist $\mathfrak{H}$ eine (λ, μ)-Korrespondenz zwischen zwei Kurven und ist $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) = 2\lambda\mu$, so hat $\mathfrak{H}$ die Wertigkeit Null. Schließlich werden solche Flächen betrachtet, auf denen ein basispunktfreies irreduzibles Kurvenbüschel existiert. Diejenigen Nulldivisoren, die aus Kurven dieses Büschels oder deren irreduziblen Bestandteilen bestehen, werden bestimmt. Dann wird bewiesen: Wenn ein Nulldivisor $\mathfrak{R}$ auf jeder irreduziblen Kurve des Büschels und außerdem auf einer einzigen, nicht zum Büschel gehörigen Kurve Punktgruppen ausschneidet, die alle ~ 0 sind, so ist ein Vielfaches von $\mathfrak{R}$ und unter gewissen weiteren Voraussetzungen sogar $\mathfrak{R}$ selbst äquivalent Null. *van der Waerden* (Leipzig).

Jung, Heinrich W. E.: Zur Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher. II. Zusammenhang zwischen linearen Integralen zweiter und dritter Gattung. J. reine angew. Math. **181**, 68—82 (1939).

Nachdem einige Sätze von Severi über vollständige nichtlineare Kurvenscharen auf einer algebraischen Fläche neu hergeleitet sind, wird gezeigt, daß man aus einem linearen Integral 3. Gattung durch Differentiation nach den Parametern $\zeta_1, \ldots, \zeta_\gamma$, von denen es abhängt, $\gamma = p_g - p_a$ linear unabhängige Integrale 2. Gattung erhalten kann. Aus diesen, den γ linear unabhängigen Integralen 1. Gattung und den Funktionen des Körpers kann man jedes Integral 2. Gattung zusammensetzen. Schließlich wird eine Formel hergeleitet, die dem Satze von der Vertauschung von Parameter und Argument für Integrale 3. Gattung entspricht: sie drückt eine Summe $w + W$ linear durch die 2γ linear unabhängigen Integrale 1. und 2. Gattung aus, wobei w ein Integral 3. Gattung auf der Fläche und W ein analoges Integral auf der γ-dimensionalen Parametermannigfaltigkeit (der „Picardschen Mannigfaltigkeit") der Integrale 3. Gattung ist. *von der Waerden* (Leipzig).

Zahlentheorie:

Grün, Otto: Eine Kongruenz für Bernoullische Zahlen. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **50**, 111—112 (1940).

Sind die B_n die Bernoullischen Zahlen

$$(B_1 = 1/2,\ B_2 = 1/6,\ B_4 = 1/30, \ldots,\ B_{2i+1} = 0 \quad \text{für} \quad i > 1),$$

weiter n eine beliebige natürliche Zahl (S. 111 heißt es allerdings mit überflüssiger Einschränkung positive gerade Zahl), l eine natürliche Primzahl, k eine zu l prime natürliche Zahl, endlich $[x]$ das größte Ganze von x, so beweist Verf.: Es gilt $(k^n - 1)\,B_n/n k^{n-1} \equiv \sum_{m=1}^{l-1} m^{n-1}[km/l] \bmod l$. Verf. gibt u. a. folgende Anwendung: Bei einer Fermatschen Gleichung des Falles I, also einer Gleichung $x^l + y^l + z^l = 0$ mit ganzen rationalen zu l primen x, y, z, gilt das bekannte Kummersche Kriterium: Mit $0 < i < l$, $t = -\frac{y}{x}$, $\varphi_i(t) = \sum_{n=1}^{l-1} n^i t^n$ wird $\varphi_i(t)\,B_{l-1-i} \equiv 0 \bmod l$. Verf. zeigt nun

mit Hilfe der oben stehenden Kongruenz, daß diese $l-1$ Kongruenzen durch die folgenden ersetzt werden können: $\sum_{n=1}^{l-1}([kn/l]t^n/n) \equiv 0 \bmod l$. Hierbei kann k wie vorhin die Werte $1, 2, \ldots, l-1$ annehmen. Die Arbeit ist außerordentlich knapp gefaßt und leider durch einige Druckfehler entstellt. Bemerkt sei, daß die „leichte Umformung" (S. 112, Z. 11 v. u.), mit der Verf. vom Kummerschen Kriterium zu seinen Kongruenzen gelangt, am leichtesten wohl ausgeführt werden kann, indem man seine weiteren Rechnungen, daß umgekehrt das Kummersche Kriterium aus der obigen Formel folgt, rückwärts ausführt. *Holzer* (Wien).

Fitting, F.: Die Konstruktion magischer Quadrate von gerader Zellenzahl. Deutsche Math. **5**, 125—138 (1940).

Zur Darstellung des Planes, nach welchem hier magische Quadrate (m. Q.) konstruiert werden, dient Fig. 3 (S. 130). Wir besetzen je vier mit gleichen Buchstaben benannte Felder dieser Figur mit 0055 oder 1144 oder 2233. Bei 0055 kann die Einordnung sein: entweder $\underset{+r_0}{\boxed{\begin{matrix}55\\00\end{matrix}}}$ oder $\underset{-r_0}{\boxed{\begin{matrix}00\\55\end{matrix}}}$ oder $\underset{+k_0}{\boxed{\begin{matrix}50\\50\end{matrix}}}$ oder $\underset{-k_0}{\boxed{\begin{matrix}05\\05\end{matrix}}}$ oder $\underset{+d_0}{\boxed{\begin{matrix}50\\05\end{matrix}}}$ oder $\underset{-d_0}{\boxed{\begin{matrix}05\\50\end{matrix}}}$. Die unter diese Quadrate (Q.) gesetzten Zeichen deuten symbolisch an: 1. Durch r, k, d, daß entweder in den Reihen oder den Kolonnen oder den Diagonalen des Rechtecks, dessen Ecken die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Felder von Fig. 3 bilden, gleiche Zahlen stehen sollen. 2. Durch + oder −, daß das linke obere Feld des Rechteckes die größere oder die kleinere der beiden Zahlen ist. 3. Der Index 0 wurde hinzugefügt, um die symbolische Darstellung auf die Fälle 1144 und 2233 auszudehnen. Für 1144 und 2233 geschah dies durch Änderung des Index 0 in 1 bzw. 2. — Trennt man nun von Fig. 3 den linken oberen Quadranten ab, in welchem alle Buchstaben den Index 1 haben, und ersetzt $a_1 \ldots i_1$ durch je eines unserer vier Felder umfassenden Symbole, so erhält man ein 9feldriges symbolisches Q., welchem nur dann ein 36feldriges, in allen Reihen, Spalten und Diagonalen gleichsummiges Q. entspricht, wenn jede Reihe r entweder zweimal mit gleichem Index und verschiedenen Vorzeichen oder gar nicht aufweist und Entsprechendes für k in den Spalten und d in den Diagonalen gilt. 4a und 4b sind solche symbolische Q., welche, zu 36feldrigen ausgeführt, die magischen Fig. 2a und 2b (S. 129) von der besonderen Beschaffenheit liefern, daß das eine die 6er, und das andere die 1er der Zahlen $0, \ldots, 35$ eines 36feldrigen m.Q. enthält. Die Bedingungen, welche zwei symbolische Q. erfüllen müssen, um in dieser Weise „zusammenzupassen", sind in der Mitte von S. 130 unter 1 und 2 angegeben. Aus einem solchen Paar zusammenpassender symbolischer Q. lassen sich auf doppelte Weise noch sehr zahlreiche weitere 36feldrige m.Q. ableiten, einmal durch Abänderung der Symbole in den Q. nach den S. 130 (4. Zeile von unten bis S. 131 oben) angegebenen Regeln 1, 2, 3, 4 und weiterhin dadurch, daß man die Zahlen $0, \ldots, 5$ in dem 6er- und dem 1er-Q. eines der so gefundenen 36feldrigen m.Q. 2stellig macht, indem man setzt $0 = 00$, $1 = 01$, $2 = 02$, $3 = 10$, $4 = 11$, $5 = 12$. Die Zahlen des 36feldrigen m.Q. werden damit 4stellig, worauf man es in 4 gleichfalls magische „Komponenten" zerlegen kann (S. 126, Zeile 10—14 von oben). Jede Permutation dieser Komponenten liefert ein weiteres 36feldriges m.Q., dessen dekadische Zahlen mittels des Verzeichnisses (C) (S. 127 und 128) gefunden werden können. In Absatz V (S. 132) wurde diese r, k, d-Methode auf das allgemeine Problem der $(2m)^2$feldrigen m.Q. ausgedehnt. *Fitting* (M.-Gladbach).

Moessner, Alfred: Einige numerische Identitäten. Bull. sci. École polytechn. Timişoara **9**, 245—255 (1940).

Richard, Ubaldo: Risoluzione elementare dell'equazione indeterminata $u^2 + v^2 = p$, essendo p un numero primo. Atti Accad. Sci. Torino **75**, 268—273 (1940).

Verf. gibt einen einfachen Beweis des bekannten Existenz- und Eindeutigkeitssatzes der ganzzahligen positiven Lösung der diophantischen Gleichung $u^2 + v^2 = p$, in der $p \equiv 1 \bmod 4$ prim ist. Dieser geometrisch veranschaulichte Beweis ist begrifflich mit demjenigen identisch, der durch ein auch für die Gleichungen $u^2 + 2v^2 = p$, $u^2 + 3v^2 = p$, p Primzahl, gültiges Verfahren, von einer beliebigen Lösung der Kongruenz $u^2 + v^2 \equiv 0 \bmod p$ ausgehend, die Lösung der verlangten Gleichung herstellt (vgl. auch M. Cipolla, Encicl. Mat. element. **1**, Parte I, 338 (1930)]. *M. Cipolla.*

Trost, Ernst: Über eine Verallgemeinerung eines Satzes von Fermat. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich **85**, Beibl. Nr 32, 138—142 (1940).

Nach Fermat hat die diophantische Gleichung $(2X^2 - 1)^2 = 2Y^2 - 1$ keine nichtnegativen ganzzahligen Lösungen außer den drei trivialen $X = 0$, $Y = 1$;

$X = 1$, $Y = 1$; $X = 2$, $Y = 5$. „Man kann sich fragen, ob noch weitere Formen $MX^2 - N$ mit positiven ganzen Koeffizienten M und N die Eigenschaft haben, daß das Quadrat von genau zwei der durch die Form dargestellten Zahlen wieder durch die Form dargestellt wird. Es soll hier eine einparametrige Schar solcher Formen angegeben werden." Im Falle $M = N(N+1)$ ist die diophantische Gleichung $(MX^2 - N)^2 = MY^2 - N$ äquivalent mit der folgenden $N[(N+1)X^2 - 1]^2 = (N+1)Y^2 - 1$ und hat stets die trivialen Lösungen $X = 0$, $Y = 1$ und $X = 2$, $Y = 4N + 1$. Verf. zeigt, daß sie für $N = D^2$, wo D eine von 1 verschiedene natürliche Zahl bedeutet, außer den trivialen Lösungen keine weiteren in nichtnegativen ganzen Zahlen hat. Beim Beweise wird ein von Ljunggren (s. dies. Zbl. **16**, 8) mit Hilfe der Einheitentheorie hergeleiteter allgemeiner Satz über die Lösungen der Gleichungen $Ax^4 - By^4 = \pm 1$ herangezogen. *Bessel-Hagen* (Bonn).

Florescu, I. B.: Wann ist das Produkt von vier ganzen, in arithmetischer Folge liegenden Zahlen ein Quadrat? Gaz. mat. **45**, 406—409 u. 463—465 (1940) [Rumänisch].

Pillai, S. S.: On m consecutive integers. 2. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **11**, 73—80 (1940).

Verf. behandelt, in Fortführung von Untersuchungen in seiner Dissertation (Madras) (Teil I. vgl. dies. Zbl. **23**, 108), die bekannte Fragestellung, ob ein Produkt von m aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen eine r-te Potenz sein kann, beweist noch einmal die Unmöglichkeit in gewissen, von ihm in der Dissertation angegebenen Spezialfällen und zeigt, daß es eine Konstante $c = c(m)$ gibt, so daß für $r > c$ der betrachtete Fall nicht eintreten kann. Man vergleiche hierzu den entsprechenden Satz von Erdös (J. London Math. Soc. **14**, 245—249 (1939). *Rohrbach* (Berlin-Nikolassee).

Johnson, L. Louise: On the diophantine equation $x(x+1)\ldots(x+n-1) = y^k$. Amer. Math. Monthly **47**, 280—289 (1940).

Beweis einiger Fälle n, k, in denen die angegebene Gleichung höchstens eine Lösung hat. *Rohrbach.*

Tchacaloff, Lhristo, et Chr. Karanicoloff: Résolution de l'équation $Ax^m + By^m = z^p$ en nombres rationnels. C. R. Acad. Sci., Paris **210**, 281—283 (1940).

Les auteurs envisagent l'équation indéterminée $Ax^m + By^n = z^p$ (1), dont les exposants m, n, p sont des nombres entiers et dont les coefficients A et B sont des nombres rationnels donnés. Ils démontrent que, si les exposants m, n, p sont premiers entre eux deux à deux, on peut trouver neuf nombres entiers λ, μ, ν; λ_1, μ_1, ν_1; λ_2, μ_2, ν_2 vérifiant les conditions

$$m\nu - n\nu_1 = 0, \quad n\lambda_1 - p\lambda_2 = 0, \quad p\mu_2 - m\mu = 0,$$
$$m\lambda - p\lambda_2 = 1, \quad n\mu_1 - m\mu = 1, \quad p\nu_2 - n\nu_1 = 1$$

et tels que

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} = 1,$$

et qu'ensuite toutes les solutions en nombres rationnels de l'équation (1) se déduisent des solutions en nombres rationnels de l'équation $AX + BY = Z$ grâce aux formules

$$x = X^{\lambda} Y^{\mu} Z^{\nu}, \quad y = X^{\lambda_1} Y^{\mu_1} Z^{\nu_1}, \quad z = X^{\lambda_2} Y^{\mu_2} Z^{\nu_2}.$$

Bessel-Hagen (Bonn).

Pillai, S. S.: On $v(k)$. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **9**, 175—176 (1939).

$v(k)$ denotes the least value of s for which every n is representable in the form $n = \pm x_1^k \pm x_2^k \pm \cdots \pm x_s^k$; the methods used are analogue to those of Hardy-Wright, „An introduction to the theory of numbers", ch. XXI (this Zbl. **20**, 292). *J. F. Koksma* (Amsterdam).

Pipping, Nils: Goldbachsche Spaltungen der geraden Zahlen x für $x = 60\,000 - 99\,998$. Acta Acad. Åboens. **12**, Nr 11, 1—18 (1940).

Als Fortsetzung einer früheren Arbeit (s. dies. Zbl. **18**, 345) gibt Verf. eine 14 Seiten

lange Tabelle aller geraden Zahlen x des genannten Intervalles, für die nicht schon die Differenz zur nächstkleineren Primzahl (außer etwa $x-1$) eine Primzahl ist. Der Prozentsatz dieser „b-Zahlen" zeigt mit 23,4% im neuen Gebiet gegen 20,8% im alten unter 60000 zwar einen leichten Anstieg, bleibt aber immer noch erstaunlich mäßig. Die Tabelle verzeichnet jeweils die kleinste Primzahl, welche eine Goldbachsche Spaltung für x leistet. Unter diesen braucht man als größte 293, und zwar bei $x = 63274$, dann 283 bei $x = 84116$. — Da ferner, wie Ref. noch bemerken möchte, 99989 eine Primzahl ist ($100000 = 11 + 99989$), so ist nunmehr die Goldbachsche Vermutung im ersten Hunderttausend erwiesen. *Alexander Aigner* (Graz).

Pillai, S. S.: On numbers which are not multiples of any other in the set. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **10**, 392—394 (1939).

Ist $F(x) = \sum_{b_r \leqq x} \frac{1}{b_r}$, wo in der Zahlenfolge $\{b_\varrho\} = b_1, b_2, \ldots, b_r, \ldots$ keine Zahl ein Vielfaches einer anderen Zahl der Folge ist, so gilt nach F. Behrend (dies. Zbl. **12**, 52): $F(x) = O\left(\log x / \sqrt{\log\log x}\right)$. Verf. zeigt: Für unendlich viele Folgen $\{b_\varrho\}$ ist $F(x) \geqq C \log x / \sqrt{\log\log x}$ mit einer explizit angebbaren Konstanten C. *Rohrbach.*

Vinogradow, I.: Estimations of trigonometrical sums. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. Nr **5/6**, 505—523 u. engl. Zusammenfassung 523—524 (1938) [Russisch].

Beweis von 2 Sätzen über Abschätzungen von trigonometrischen Summen. Teilresultat von Satz 1: Es seien n, m, a, q, P, Q ganze Zahlen, $n \geqq 13$, $q > 0$, $(a, q) = 1$, $P > 0$, $1 \leqq q \leqq P$, $m \leqq q^{(n+1)^{-3}}$. Es seien ferner $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ und θ reelle Zahlen mit $|\theta| < 1$, $a_{n+1} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$ und $F(z) = a_1 z + \cdots + a_{n+1} z^{n+1}$. Dann gilt für die trigonometrischen Summen $S = \sum_{z=Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i m F(z)}$ die Abschätzung $|S| < 16 n P q^{-\varrho}$ mit $\varrho = 1/(n+1)^3 \log(n+1)$. — Satz 2: Sei $n \geqq 14$, P und Q wie oben und $F(z)$ eine reelle Funktion, welche im Intervall $Q < z \leqq Q + P$ den Ungleichungen

$$\frac{1}{A} \leqq \frac{F^n(z)}{n!} \leqq \frac{l}{A}, \qquad \left|\frac{F^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\right| \leqq \frac{h}{A P^{2/3}}$$

mit $P \leqq A \leqq P^2$, $l \leqq 2^n$, $h \leqq 2^n$ genügt. Dann gilt für die Summe $S = \sum_{z=Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i F(z)}$ die Ungleichung

$$|S| \leqq 8 n P^{1-\varrho} \qquad \text{mit} \qquad \varrho = 1/(n+1)^3 \log(n+1).$$

(Nach dem Auszug referiert.) *H. L. Schmid* (Berlin).

Vinogradow, I.: Simplest trigonometrical sums with primes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **23**, 615—617 (1939).

Es werden (ohne Beweis) mehrere Abschätzungen für trigonometrische Summen gegeben. Die ersten drei Sätze behandeln Summen der Gestalt $\sum \exp\left[2\pi i \frac{a}{q} p^n\right]$ mit ganzen a und q, wobei $(a, q) = 1$ und die Summe über alle Primzahlen p genommen ist, die $> N - A$ und $\leqq N$ (mit ganzen A und N) sind. Wird anstatt $A = O(B)$ die Bezeichnung $A \ll B$ benutzt, so gelten folgende Abschätzungen: 1) $S \ll A\, r^{3\varepsilon - 1} q^{\eta - \frac{1}{2}}$, falls die positiven Konstanten ε und η der Ungleichung $\eta < \varepsilon \leqq 1/3$ genügen und $N e^{-r - 2\varepsilon} \ll A \leqq N$, $0 < q < \exp[r^\varepsilon]$ ist. 2) $S \ll A q^{\eta - \frac{1}{2}}$, falls fünf Konstanten, $\alpha, \sigma, \varepsilon, \eta$ und h existieren und entweder a) die letzten drei Konstanten positiv und < 1 sind, $4\alpha + 6\sigma = \frac{1}{1+h}$, $N^{1-\alpha} \leqq A \leqq N$ und $\exp[r^\varepsilon] < q \leqq N^\sigma$ ist, oder b) die letzten zwei Konstanten positiv und < 1 sind und $0 < \varepsilon < \delta$, $3\alpha + 5\sigma = \frac{1}{1+h}$, $N^{1-\alpha} \leqq A \leqq N$ und $N^\varepsilon < q \leqq N$ ist. — Die übrigen Sätze beziehen sich auf Summen der Form $S = \sum_{x=Q+1}^{Q+P} \exp[2\pi \inf(x)]$ mit ganzen und positiven P, Q und m, wobei, wie üblich, entweder I) $f(x) = a_{n+1} x^{n+1} + \cdots + a_1 x$ mit $a_{n+1} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(a, q) = 1$,

$|\theta| < 1$ ist oder $f(z)$ sich annähernd wie ein Polynom vom Grade $n+1$ benimmt in dem Sinne, daß II) $\frac{1}{A} \leqq \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \leqq \frac{l}{A}$, $\left|\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\right| \leqq \frac{f}{AP^{\frac{1}{2}}}$ $[P \leqq A \leqq P^2; l \leqq 2^n, f \leqq 2^n]$ für $Q < z \leqq Q + P$ gilt. In beiden Fällen erhält Verf. sehr gute Abschätzungen. Im Falle I) mit $n \geqq 13$ ergibt sich, wenn noch $\nu = \frac{1}{n+1}$ gesetzt wird: 3) $|S| < 15nPq^{-\varrho}$ bzw. $|S| < 15nm^{\frac{1}{2}\varrho}Pq^{-\varrho}$ mit $\varrho = \frac{1}{(n+1)^3 \lg(n+1)}$, wenn $1 \leqq q \leqq P$ und $m < q^{\nu^3}$ bzw. m beliebig ist. 4) $|S| < 5 \cdot 7nP^{1-\varrho}$ bzw. $|S| < 5 \cdot 7nm^{\frac{1}{2}\varrho}P^{1-\varrho}$ mit $\varrho = \frac{1}{(n+1)^3 \lg\mu(n+1)}$, wenn $P \leqq q \leqq P^n$, $q = P^\mu$ und $m \leqq P^{\nu^3}$ bzw. m beliebig ist. 5) $|S| < 5 \cdot 7\frac{n}{\tau}P^{1-\varrho}$ bzw. $|S| < 5 \cdot 7\frac{n}{\tau}m^{\frac{1}{2}\varrho}P^{1-\varrho}$, wenn $P \leqq q < P^{n+1}$, $q = P^{n+1-\tau}$ und $m \leqq P^{\tau\nu^3}$ bzw. m beliebig ist. Im Falle II) mit $n \geqq 14$ ergibt sich $|S| < 5 \cdot 7nP^{1-\varrho}$ mit $\varrho = \frac{1}{(n+1)^3 \lg 2(n+1)}$. *V. G. Avakumović* (Beograd).

Tschebotarëw, N.: Beweis des Minkowskischen Satzes über lineare inhomogene Formen. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich **85**, Beibl. Nr 32, 27—30 (1940).

Mordell, L. J.: Tschebotareff's theorem on the product of non-homogeneous linear forms. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich **85**, Beibl. 32, 47—50 (1940).

Die erste Arbeit enthält die ausführliche deutsche Darstellung des lange unbekannt gebliebenen Beweises des Verf. für einen wichtigen Teil der Minkowskischen Vermutung über inhomogene Linearformen. Siehe das Mahlersche Referat über Tschebotarew in dies. Zbl. **18**, 110, sowie den Vortrag des Ref. im „Verslag 5° Ned. Congres van Leraren in de Wisk. en Nat.". Groningen 1940, S. 28—39. Die Mordellsche Arbeit enthält historische Bemerkungen und eine geistvolle Abänderung des Tschebotarewschen Beweises, die es ermöglicht, einen älteren Mordellschen Satz (dies. Zbl. **18**, 7) heranzuziehen, mit dessen Hilfe Mordell über Tschebotarew hinaus zeigt:
Sind

$$L_\nu(x) + c_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu}x_\mu + c_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

n inhomogene Linearformen mit reellen $a_{\mu\nu}, c_\nu$ und Det. $|a_{\mu\nu}| = 1$, so gibt es stets einen Gitterpunkt $(x_1, \ldots, x_n)$ mit

$$\prod_{\nu=1}^{n} |L_\nu(x) + c_\nu| \leqq \frac{2^{-\frac{1}{2}n}}{1 + (\sqrt{2}-1)^n} + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0 \text{ beliebig vorgegeben}).$$

J. F. Koksma (Amsterdam).

Hofreiter, Nikolaus: Über das Produkt von Linearformen. Mh. Math. Phys. **49**, 295—298 (1940).

Verf. zeigt: Es sei d die absolut kleinste Diskriminante für alle algebraischen Körper n-ten Grades, von denen r Konjugierte reell und s Paare konjugiert komplex sind. Dann gibt es n Linearformen L_i in $x_1, \ldots, x_n$ mit Determinante 1, von denen r reell und $2s$ paarweise konjugiert komplex sind, so daß die Ungleichung

$$|L_1 \ldots L_n| < \frac{1}{\sqrt{d}}$$

in ganzen rationalen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ nur die triviale Lösung hat. Anwendungen in Spezialfällen liefern u. a. Ergebnisse von Davenport (dies. Zbl. **19**, 196; **20**, 293).

J. F. Koksma (Amsterdam).

Hofreiter, Nikolaus: Diophantische Approximationen komplexer Zahlen. Mh. Math. Phys. **49**, 299—302 (1940).

Es seien n und m natürliche Zahlen, m quadratfrei, und es bedeute

$$L \equiv \alpha_1 q_1 + \cdots + \alpha_{n-1}q_{n-1} - q_n$$

eine Linearform mit beliebigen komplexen Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, jedoch nicht aus dem Körper $k(i\sqrt{m})$.

Setzt man ($\nu = 1, 2, \ldots, n$):

$$\lambda = 1, \qquad q_\nu = y_\nu + i\sqrt{m}\,z_\nu, \qquad (m \not\equiv 3 \pmod 4)$$

$$\lambda = 2, \qquad q_\nu = y_\nu + \frac{1 + i\sqrt{m}}{2} z_\nu, \qquad (m \equiv 3 \pmod 4)$$

so ist für $t > 0$ der Ausdruck

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n) = \frac{|q_1|^2}{t} + \cdots + \frac{|q_{n-1}|^2}{t} + |L|^2 t^{n-1}$$

eine positiv-definite $2n$-äre quadratische Form mit der Determinante $D = \left(\frac{m}{\lambda^2}\right)^n$. Indem Verf. die bekannten Abschätzungen quadratischer Formen benutzt [Literatur bei Ref., Diophantische Approximationen, Erg. d. Math. IV, 4, 22—24 (1936); dies. Zbl. 12, 396] und alsdann den Satz des arithmetisch-geometrischen Mittels anwendet, zeigt er: Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ linear unabhängig in bezug auf $k(i\sqrt{m})$, so gibt es unendlich viele Systeme ganzer Zahlen $q_1, \ldots, q_n$ aus $k(i\sqrt{m})$, so daß

$$|\alpha_1 q_1 + \cdots + \alpha_{n-1} q_{n-1} - q_n| < \frac{K_n}{|q_1 q_2 \cdots q_{n-1}|}$$

ist. Dabei ist

$$K_2 = \frac{1}{\lambda}\frac{\sqrt{m}}{2}, \qquad K_3 = \left(\frac{8m\sqrt{m}}{27\lambda^3\sqrt{3}}\right)^{1/2}, \qquad K_4 = \frac{m}{4\lambda^2},$$

$$K_n^2 < (n+1)! \left(\frac{2\sqrt{m}}{n\pi\lambda}\right)^n.$$

J. F. Koksma (Amsterdam).

Vijayaraghavan, T.: On the irrationality of a certain decimal. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **10**, 341 (1939).

Sehr einfacher Beweis für die Irrationalität des aus der Primzahlenfolge gebildeten Dezimalbruchs $\delta = 0{,}23571113\ldots$ Wäre nämlich δ periodisch, so gäbe es eine von s unabhängige Konstante K, so daß für jedes s die Anzahl der s-stelligen Primzahlen $\leqq K$ ist; also wäre

$$\sum_p \frac{1}{p} \leqq \sum_{s=1}^{\infty} \frac{K}{10^{s-1}}$$

konvergent. *Rohrbach* (Berlin-Nikolassee).

Popken, J.: On Lambert's proof for the irrationality of π. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **43**, 712—714 (1940).

Der Lambertsche Beweis für die Irrationalität von π kann vom Kettenbruch befreit und auf eine ganz elementare Form gebracht werden. Grundlage ist der durch Induktion leicht zu beweisende Satz, daß es zu jedem $h = 0, 1, 2, \ldots$ ganzzahlige Polynome p_h, q_h höchstens $2h$-ten Grades gibt derart, daß für $x \neq 0$ identisch

$$p_h(x^{-1}) \sin x + q_h(x^{-1}) \cos x = (-2)^h \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+h)!}{n!\,(2n+2h+1)!}\, x^{2n+1}$$

wird. Aus der Annahme $x = \frac{\pi}{4} = \frac{a}{b}$, ($a, b$ ganz) folgt dann unter Beachtung des alternierenden Charakters der rechten Seite die Ungleichung

$$0 < \left| a^{2h} p_h\left(\frac{b}{a}\right) + a^{2h} q_h\left(\frac{b}{a}\right)\right| < \sqrt{2}\,\frac{2^h |a|^{2h}}{h!},$$

und damit der Widerspruch, da die rechte Seite mit $h \to \infty$ gegen 0 strebt, das Mittelglied aber eine positive ganze Zahl ist. *Harald Geppert* (Berlin).

Leighton, Walter: Proper continued fractions. Amer. Math. Monthly **47**, 274—280 (1940).

Es sei $a_1, a_2, \ldots$ eine Folge natürlicher Zahlen. Jeder reellen Zahl y_0 ordne man eine „proper continued fraction" (kurz „p.c.f.") (1) $b_0 + \left|\frac{a_1}{b_1}\right| + \left|\frac{a_2}{b_2}\right| + \cdots$ folgendermaßen zu: $b_0 = [y_0]$; $y_{n-1} = b_{n-1} + a_n/y_n$; $b_n = [y_n]$; bei rationalem y_0 bricht der Kettenbruch ab. Der Wert von (1) ist y_0. Ein Kettenbruch der Gestalt (1) mit ganzen