Werk

Titel: Geometrie

Jahr: 1940

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0022|log44

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Myers, D. M.: An integraph for the solution of differential equations of the second order. J. sci. Instrum. **16**, 209—222 (1939).

Das besprochene Instrument ist eine Verallgemeinerung des bekannten Integraphen von Abdank-Abakanowitz, es arbeitet ebenso wie dieses mit scharfkantiger Integrierrolle und gibt im Falle einer einfachen Integration die gleiche (ziemlich große) Genauigkeit. Allgemein vermag es die Lösungen der Gleichung $ay'' + by' + cy + d = 0$ aufzuzeichnen, wobei b und c Konstante sind, a und d aber Funktionen einer der Veränderlichen x, y, y' sein können. Bemerkenswert sind die beim Instrument arbeitenden Gelenkwerke. Der Fall, daß nur d veränderlich, und zwar eine Funktion von x ist, erweist sich als einfach. Ist auch a veränderlich oder hängt d von einer anderen Variablen als x ab, so treten gewisse Zusatzgeräte in Funktion. Sind sowohl a wie d variabel, so muß das Instrument im allgemeinen von zwei Personen bedient werden. Der eine Fahrstift wird auf elektrischem Wege geführt. *Nyström* (Helsinki).

Brown, S. Leroy: A mechanical harmonic synthesizer-analyzer. J. Franklin Inst. **228**, 675—694 (1939).

Beschreibung eines mit 30 Elementen ausgeführten Analysators höchster Genauigkeit. Ausgehend von diesem Gerät werden Verfahren und Formeln aufgezeigt, um auch eine größere Zahl harmonischer Elemente zu ermitteln. *J. Sutor* (Danzig).

Geometrie.

Grundlagenfragen, Nichteuklidische Geometrie:

Nagel, Ernest: The formation of modern conceptions of formal logic in the development of geometry. Osiris **7**, 142—224 (1939).

Die Geschichte der Geometrie hat von der Ansicht, daß Geometrie die apodiktische Wissenschaft vom Raume ist, zu der Auffassung geführt, daß sie ein System von Verabredungen und Definitionen darstellt, geeignet, Körper zu ordnen und zu messen. Verf. gibt eine geschichtliche Darstellung der projektiven Geometrie unter Hervorhebung dieses Gesichtspunktes. Es wird gezeigt, wie die Behauptung, Geometrie sei die Wissenschaft von den quantitativen Beziehungen zwischen Ausdehnungsgrößen durch die Entdeckung der in der projektiven Geometrie vorherrschenden Lageverhältnisse widerlegt wird (Desargues, Poncelet, Gergonne). Zu ihrer Widerlegung trägt weiter die Einführung nicht unmittelbar anschaulicher Begriffe (uneigentlicher, imaginärer Punkt; Monge, Poncelet) bei. Indem Poncelet der Ursache nachforschte, warum algebraische Hilfsmittel oft beweiskräftiger sind als geometrische, kam er, wenn auch nicht bewußt, zu der Auffassung, daß ein geometrisches Diagramm ein abstraktes Zeichen sei, das wie ein algebraisches Zeichen gewissen Rechenregeln unterworfen ist. Seine Entwicklungen verstärken die Gründe dafür, daß Geometrie nichts mit räumlichen Beziehungen zu tun hat. Von Gergonne stammt der Ansatz für die Entdeckung des Begriffes „implizite Definition". Grassmann war einer der ersten Mathematiker, die ausdrücklich feststellten, daß die Mathematik eine Wissenschaft von ausschließlich formaler Struktur ist. Durch seine Einführung der imaginären Elemente zeigte v. Staudt, daß es in der Geometrie nicht darauf ankommt, was man sich unter einem Punkt vorstellt, sondern darauf, welchen Beziehungen das Punkt genannte Element genügt. Daß die Geometrie weder die Lehre von den Größenverhältnissen noch die Lehre vom Raum ist, folgt schon aus dem Bisherigen. Daß sich diese Erkenntnis trotzdem nicht gleich durchsetzte, hatte mancherlei Gründe. Einer der Gründe war der, daß zunächst der Punkt das einzige Raumelement war. Er verlor diese Sonderstellung des absolut einfachsten Elements durch die Entdeckung des Dualitätsprinzips. Der Prioritätsstreit zwischen seinen Entdeckern Gergonne und Poncelet wird vom Standpunkt des Verf. aus beleuchtet. „Gergonnes Prinzip liegt dem Wesen der Dinge näher" (J. Steiner). Chasles bemerkt, daß man durch Transformationen an Stelle des Punktes andere Raumelemente einführen kann. Die zentrale logische Idee von Plücker besteht darin, daß ein mathematischer Beweis nur von postulierten Beziehungen zwischen abstrakten Zeichen handelt, die unabhängig davon sind, welche anschauliche Interpretation man ihnen gibt. Auf diesen Erkenntnissen bauen sich die neueren Entwicklungen auf, die durch die Namen Pasch, Hilbert, Klein und durch das Auftreten der Nichteuklidischen Geometrie gekennzeichnet sind. Nach Poincaré ist keine Geometrie wahrer als die andere, sie kann nur zweckmäßiger sein. *E. A. Weiss* (Bonn).

Gorn, Saul: On incidence geometry. Bull. Amer. Math. Soc. **46**, 158—167 (1940).

Auf der Grundlage dimensionstheoretischer Betrachtungen entwickelt Verf. ein Axiomensystem für drei- und höherdimensionale Inzidenzgeometrien. Aus diesen Verknüpfungsaxiomen, denen das Archimedische Axiom als Stetigkeitsaxiom in inzidenzmäßiger Form angefügt ist, werden die unmittelbar folgenden Inzidenzbeziehungen hergeleitet und eine Art „Streckenrechnung" eingeführt, wodurch die durch das Axiomensystem definierten Inzidenzgeometrien algebraisiert werden. Die Beziehungen dieses Axiomensystems zum Mengerschen (Ann. of Math. (2) **37**, **38**; dies. Zbl. **14**, 76; **16**, 268) und zu den ähnlichen Untersuchungen von Birkhoff und von Neumann werden herausgestellt und sodann die allgemeinen Sätze der Inzidenzgeometrien bewiesen. — Im 3. Abschnitt folgt ein Vergleich mit den Hilbertschen Verknüpfungsaxiomen für den R_3; es werden Äquivalenzbetrachtungen angestellt und der Desarguessche Satz in der neuen axiomatischen Theorie formuliert und bewiesen, wodurch die Tragweite der Inzidenzgeometrien des Verf. und seiner Methoden an dem einen grundlegenden Satz erprobt wird. Der anschaulich-geometrische Inhalt der Inzidenzgeometrien ist dabei in einen reinen Formalismus übergeführt, dem eine anschaulich geometrische Deutung wohl nur sehr schwer zu unterlegen sein wird. *Steck* (München).

Glagoleff, Nil: Sur les axiomes d'appartenance de la géométrie euclidienne. Rec. math. Moscou, N. s. **6**, 221—225 (1939).

Während in den Hilbertschen Verknüpfungsaxiomen nur die Inzidenz zwischen Punkt und Gerade und die Inzidenz zwischen Punkt und Ebene als Grundbegriffe auftreten, verwendet der Verf. auch noch die Inzidenz zwischen Gerade und Ebene als Grundbegriff. Sein System von Verknüpfungsaxiomen enthält als „axiomes de la connexion" die Aussagen, daß die Inzidenz eine symmetrische Beziehung ist und daß der Punkt A mit der Ebene α inzidiert, wenn A mit der Geraden g und g mit α inzidiert, und ferner fünf voneinander unabhängige „axiomes de l'appartenance", unter denen das Parallelenaxiom auftritt; es ist vermieden, die Aussage, daß auf einer Geraden Punkte existieren, unter die Axiome aufzunehmen. *Bachmann* (Marburg a. d. L.).

Bachmann, Friedrich: Stufen der absoluten Geometrie. Die Frage nach der Unabhängigkeit der Anordnung. Math. Ann. **117**, 197—234 (1940).

Diese Arbeit schließt an eine Begründung der ebenen absoluten Geometrie an, in der keine Anordnungsbegriffe auftraten (Bachmann, dies. Zbl. **15**, 36; Bachmann und Reidemeister, dies. Zbl. **15**, 312). Es wird jetzt die Frage entschieden, ob eine solche Geometrie notwendig anordenbar ist oder ob die Anordnungsaxiome von den Axiomen der absoluten Geometrie unabhängig sind. Verf. beschränkt sich auf den Fall, daß noch ein neues Axiom gilt, das (für die ordinär absolute oder nichteuklidische Geometrie) folgendermaßen lautet: Wenn zwei Geraden keinen Schnittpunkt besitzen, so haben sie entweder ein gemeinsames Lot, oder sie sind zueinander nichteuklidisch parallel. Eine absolute Geometrie, die dieses Axiom erfüllt, heißt von erster Stufe. Durch Hinzunahme weiterer Kongruenzaxiome werden höhere Stufen definiert. Für die erste Stufe gilt: es gibt sowohl anordenbare als nichtanordenbare euklidische Geometrien; eine hyperbolische Geometrie existiert genau in den reellen Körpern und ist stets eindeutig anordenbar; die elliptischen Geometrien sind nicht immer anordenbar. Das Axiom der Streckenübertragbarkeit hat zur Folge, daß die Geometrien stets anordenbar sind; es gibt allerdings im euklidischen Falle noch wesentlich verschiedene Anordnungen. Wenn aber zudem das Axiom gilt, daß ein rechtwinkliges Dreieck existiert, von dem die Hypotenuse und eine Kathete vorgegeben sind, so ist auch diese letzte Geometrie stets eindeutig anordenbar. Bei den Beweisen wird die Cayleysche Geometrie betrachtet, in welcher die absolute Geometrie als Eigentlichkeitsgebiet enthalten ist, und werden die algebraischen Äquivalente der Geometrien der verschiedenen Stufen untersucht. — Zum Schluß wird das Mittelpunktsaxiom und die Hjelmslevsche Begründung der absoluten Geometrie betrachtet: es gibt sowohl

im singulär als im ordinär absoluten Falle nichtanordenbare Geometrien, die das Hjelmslevsche Axiomensystem erfüllen. *O. Bottema* (Deventer, Niederlande).

Steck, Max: Das schwache E.P.-Axiom und die Beweise der Anordnungsaxiome. Math. Ann. **117**, 195—196 (1940).

In dem Liebmann-Steckschen Axiomensystem der projektiven Geometrie werden die Anordnungssätze mittels des E.P.-Axioms bewiesen. Es wird jetzt gezeigt, daß man die Hilbertschen Anordnungsaxiome II, 1 bis II, 3 mit Hilfe des „schwachen E.P.-Axioms" beweisen kann, welches folgendermaßen formuliert wird: Außer parabolischen und hyperbolischen Punkten gibt es in bezug auf jeden nicht zerfallenden Kegelschnitt noch mindestens einen elliptischen Punkt. *O. Bottema* (Deventer).

Sagastume Berra, A. E.: Die Doppelverhältnisse in der abstrakten Geometrie und die verschiedenen Definitionen der Projektivität zwischen Gebieten erster Stufe. Contrib. estud. ci. fís. mat. **1**, 435—443 (1938) [Spanisch].

Axiomatische Begründung der projektiven Geometrie der Ebene. Nach Aufstellung von drei Inzidenzpostulaten werden zwei Würfe C- (Cremona)- projektiv genannt, wenn sie durch die Aufeinanderfolge einer endlichen Anzahl projektiver Operationen (Projizieren und Schneiden) ineinander übergeführt werden können. Dann folgt das 4. Postulat: Sind zwei auf einer Geraden gelegene Punktquadrupel C-projektiv $\left(\overline{\underset{C}{A}}\right)$ und fallen drei Paare zugeordneter Punkte zusammen, so fallen auch die Punkte des vierten Paares zusammen. Dann gelingen die Beweise der Sätze von Pappus und Desargues. Die Beziehung $\overline{\underset{C}{A}}$ gestattet eine Klasseneinteilung im Bereiche der geordneten Punktquadrupel. Die Klasse, zu der ein Punktquadrupel A, B, C, D gehört, wird Doppelverhältnis $(ABCD)$ genannt. Summe und Produkt der Doppelverhältnisse $(ABCX)$ und $(ABCY)$ werden definiert und zu einem Punkte wird der konjugiert-komplexe Punkt eingeführt. Es wird gezeigt, daß die Doppelverhältnisse einen Körper bilden. — Umgekehrt kann man von einem Körper ausgehen, projektive Punkt- und Geradenkoordinaten definieren und zeigen, daß die entstehende Geometrie den vier aufgestellten Postulaten genügt. — An Stelle der C-Projektivität können auch andere Definitionen der Projektivität zugrunde gelegt werden. Besteht eine eineindeutige Beziehung zwischen zwei Gebieten 1. Stufe derart, daß sich die Doppelverhältnisse ihrer Elemente entsprechen, so heißen die Gebiete S- (Steiner-) projektiv, wird nur das Entsprechen harmonischer Quadrupel verlangt, so heißen sie v. S.- (v. Staudt-) projektiv. Der Verf. untersucht zum Schluß die Beziehungen zwischen diesen drei Arten von Definitionen der Projektivität. *E. A. Weiss* (Bonn).

Neumann, J. v., and I. Halperin: On the transitivity of perspective mappings. Ann. of Math., II. s. **41**, 87—93 (1940).

Es wird ein einfacher Beweis für die Transitivität der Perspektivität in einer kontinuierlichen Geometrie gegeben. Es wird bewiesen, daß in jedem komplementären modularen Verband, in dem beliebige Vereinigungen $\sum_{\alpha<\Omega} a_\alpha$ stets existieren und $c \cdot \sum a_\alpha = \sum c \cdot a_\alpha$ gilt, aus $a_1 \sim a_2, \ldots, a_n \sim a_{n+1}$, $a_1 a_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} a_i$, stets $a_1 \sim a_{n+1}$ folgt ($\sim$ bedeutet perspektiv). Daraus folgt dann nach v. Neumann (Continuous Geometry, Vorlesungsausarbeitung Princeton 1936—1938) die Transitivität im allgemeinen Fall. *G. Köthe* (Münster).

Reidemeister, Kurt: Die Transitivität der Winkelkongruenz. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **49**, Abt. 2, 74—75 (1940).

Verf. gibt einen neuen, einfachen Beweis für das fünfte Hilbertsche Kongruenzaxiom, die Transitivität der Winkelkongruenz. Seine Beweisanordnung vermeidet den früher in diesem Zusammenhang [bei Rosenthal, Math. Ann. **71**, 257 (1912)] gebrauchten dritten Kongruenzsatz für Dreiecke, an dessen Stelle hier der Nachweis tritt, daß alle rechten Winkel kongruent sind. *M. Steck* (München).

Bachmann, Friedrich: Die Bewegungsgruppe einer ebenen Cayleyschen Geometrie. J. reine angew. Math. **181**, 242—252 (1940).

Die Übertragung des Begriffes einer Cayleyschen Geometrie und ihrer Bewegungen auf eine absolute quadratische Form mit Koeffizienten in einem Körper K (der Charakteristik $p \neq 2$, sonst beliebig) folgt nicht ohne weiteres und braucht manche Erklärungen. Man beweist zuerst, daß die hyperbolischen ebenen Geometrien über K eine einzige Klasse darstellen, während sich die elliptischen Geometrien in mehrere Klassen einteilen lassen, die durch die Signaturen $\{a_1, a_2\}$ zu bezeichnen sind. Hier sind a_1, a_2 entweder gleich 1 oder nicht quadratische, von Null verschiedene Zahlen in K. — Die elliptischen Geometrien bilden eine Klasse von isomorphen Individuen, sind also in abstracto identisch, wenn die zugehörigen Signaturen durch einen Automorphismus des Körpers ineinander übergehen. — Jeder dieser ebenen Cayleyschen Geometrien wird eine Klasse von isomorphen Quaternionensystemen über K eineindeutig zugeordnet. Ist $Q_0(\xi, \xi) = a_1\xi_1^2 + a_2\xi_2^2 + a_1a_2\xi_3^2$ die normierte Diagonalgestalt der der Geometrie zugrunde liegenden absoluten Form, so lautet das in Frage stehende Quaternionensystem

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_1 i_2, \quad i_1^2 = -a_1, \quad i_2^2 = -a_2, \quad i_1 i_2 = -i_2 i_1.$$

Abgesehen von dem hyperbolischen Fall $\{1, -1\}$ bilden diese verallgemeinerten Quaternionen immer einen Schiefkörper. — Verf. zeigt, daß die Bewegungen jeder räumlichen Cayleyschen Normgeometrie (d. h. einer Geometrie, deren metrische Form eine quadratische Diskriminante besitzt und folglich auf die Diagonalgestalt $\xi_0^2 + a_1\xi_1^2 + a_2\xi_2^2 + a_1a_2\xi_3^2$ gebracht werden kann) durch die quaternionische multiplikative Gruppe $\varrho x^* = axb$ darzustellen sind ($N(a)\,N(b) \neq 0$, ϱ in K) und umgekehrt. Daraus ergibt sich für die in der Ebene $\xi_0 = 0$ induzierten Cayleyschen Bewegungen die Darstellung $\varrho x^* = ax\bar{a}$. *D. Barbilian* (Bucureşti).

Blaschke, Wilhelm, e Hans Terheggen: Trigonometria hermitiana. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. **3**, 153—161 (1939).

In der elliptischen Hermiteschen Ebene untersuchen Verff. Eigenschaften, die bezüglich der Gruppe G_8 der Hermiteschen Bewegungen, die durch die Gleichungen $x_i' = \sum_{k=0}^{2} a_{ik}x_k$ mit $\sum_j a_{ji}\bar{a}_{jk} = \delta_{ik}$ ($\bar{a}$ konjugiert komplex zu a) dargestellt werden, invariant sind. Nach Vorgabe von drei Punkten x, y, z und den Polen X, Y, Z der durch sie bestimmten Dreiecksseiten findet man, daß das Produkt der Sinus zweier Seiten mit dem Sinus der Seite, die ihre Pole verbindet, sich mit dem Seitenpaar nicht ändert (Sinussatz). Der Kosinus der Seite des Polardreiecks läßt sich mittels der Seiten des gegebenen Dreiecks und einer Invarianten ω, die ebenfalls durch das Dreieck bestimmt wird, ausdrücken (Kosinussatz). Die Bedingung $e^{i\omega} = 1$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß das gegebene Dreieck in einer normalen Kette N_{II} (mit zwei reellen Dimensionen) enthalten sei. Schließlich werden weitere invariante Winkel angegeben, die sich durch die betrachteten Elemente ausdrücken lassen.

E. Bompiani (Rom).

Elementargeometrie, Darstellende Geometrie:

Cavallaro, M. Vincenzo G.: Sur la géométrie du triangle. Bull. sci. École polytechn. Timişoara **9**, 7—16 (1939).

„Équimédianiques" nennt Verf. Dreiecke, deren Seiten zu den Seitenhalbierenden eines geg. ΔABC senkrecht stehen in Punkten, die ein zu ΔABC ähnlich gelegenes Dreieck bilden. Er berechnet die Seiten und den Flächeninhalt eines solchen Dreiecks und findet die ersten proportional zu den Seitenhalbierenden des geg. Dreiecks und den letzten prop. zu $\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{\Delta ABC}$. Da diese Größe in verschiedenen anderen Größen der Dreiecksgeometrie vorkommt, so ergeben sich weitere Zusammenhänge.

Fladt (Tübingen).

Thébault, V.: Rectangles semblables associés à un triangle. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Sér. I, **60**, 5—14 (1940).

Verf. beweist den Satz: „Zeichnet man über den Seiten eines ΔABC nach innen drei ähnliche Rechtecke $BCA_1'A_2'$, $CAB_1'B_2'$, $ABC_1'C_2'$, deren Diagonalen mit BC, CA, AB einen Winkel bilden, dessen Tangens halb so groß wie der Tangens des Brocardschen Winkels ist, so treffen sich $A_1'A_2'$, $B_1'B_2'$, $C_1'C_2'$ im Lemoineschen Punkt des ΔABC" und weitere Sätze über ähnliche nach außen oder innen errichtete oder dem ΔABC einbeschriebene Rechtecke. *Fladt* (Tübingen).

Woude, W. van der: Über das Dreieck von Morley und die Hypozykloide von Steiner-Schläfli. Mathematica, Zutphen B 8, 129—134 (1940) [Holländisch].

Verf. beweist den von Ph. Franklin [J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **6**, 50—60 (1926)] angegebenen Satz: Jede der Tangenten in den drei Spitzen der Steinerschen Hypozykloide eines Dreiecks steht auf einer Seite des Morleydreiecks (d. h. des gleichseitigen Dreiecks aus den Schnittpunkten der den Seiten des Grunddreiecks anliegenden inneren Winkeldrittelnden) senkrecht. *Max Zacharias.*

Rangaswami, K.: The theory of the general contact circles of a triangle. J. Indian Math. Soc., N. s. **3**, 254—261 (1939).

The common contact circle of a point P with respect to a triangle is the circle through the points of contact with the sides, of the unique inconic of the triangle whose centre is P. As two isogonal conjugated points have the same contact circle and these points are the singular members of a linear ∞^3-system of conic envelopes — called infocal conics — inpolar to the rectangular hyperbolas through the in-and ex-centres of the triangle, the author is able to give an extension of the notion of contact circle. He defines the contact circle of an infocal conic C as the harmonically conjugated conic of the reciprocal of C with respect to the Steiner inscribed ellipse of the triangle. Various properties of the general contact circle are given. We cite the following theorem: if an infocal conic passes through the symmedian point of the triangle, its contact circle touches the nine points circle. *O. Bottema* (Deventer, Niederlande).

Thébault, V.: Géométrie du triangle et du tétraèdre. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Sér. I **59**, 347—357 (1939).

1. M et M' sont deux points conjugués isogonaux par rapport au triangle ABC; $A_1B_1C_1$ et $A_1'B_1'C_1'$ les triangles podaires de M et M' par rapport à ABC; $A_nB_nC_n$ et $A_n'B_n'C_n'$ les triangles podaires de M et M' pour $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$ et $A_{n-1}'B_{n-1}'C_{n-1}'$. Les triangles $A_3B_3C_3$ et $A_3'B_3'C_3'$ sont semblables à ABC; $A_nB_nC_n$ et $A_{n+3}B_{n+3}C_{n+3}$ sont semblables. Relations concernant les rayons des cercles circonscrits et les aires des triangles podaires successifs de M et M'. Cas spécial: M et M' sont équidistants du centre du cercle circonscrit. 2. Sphères associées au tétraèdre. Solution d'une question posée par Neuberg. *O. Bottema.*

Chisini, O.: Sul calcolo del volume del tetraedro. Period. Mat., IV. s. **20**, 24—31 (1940).

Über verschiedene Methoden zur Inhaltsbestimmung eines Tetraeders. Der Verf. gibt eine kurze Ableitung der Formel $V = \frac{1}{3} bh$, indem er das Tetraeder in zwei Tetraeder und zwei Prismen zerteilt und den Satz vom Volumenverhältnis ähnlicher Tetraeder benutzt. *Bottema.*

Thébault, V.: Über einige einem Tetraeder assoziierte Kugeln. Gaz. mat. **45**, 292—295 (1940) [Rumänisch].

Ein Vierflach $ABCD$ habe die Kantenlängen $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $DA = a'$, $DB = b'$, $DC = c'$, die Umkugel (O) mit dem Halbmesser R. Das antikomplementäre Vierflach, d. h. das Vierflach aus den durch die Ecken des gegebenen Vierflachs parallel zu den Gegenflächen gelegten Ebenen, sei $A_1B_1C_1D_1$ mit der Umkugel (O_1) mit dem Halbmesser R_1. Die Örter der Punkte, deren Entfernungen von B und C in den konstanten Verhältnissen $m:n$ oder $n:m$ stehen, seien die Kugeln (S_a), (Σ_a). Dann haben die Punkte A und D bezüglich (S_a) die Potenzen $(P_a) = |(m^2b^2 - n^2c^2):(m^2 - n^2)|$ und $(P_d) = |(m^2c'^2 - n^2b'^2):(m^2 - n^2)|$ unabhängig von der Länge a. Durch zyklische Vertauschung erhält man je 5 weitere Kugeln (S) und (Σ). Sind insbesondere $m^2 = a'^2 + b^2 + c'^2$, $n^2 = a'^2 + b'^2 + c^2$ und entsprechend für die übrigen Kugeln, so hat O_1 bezüglich der 6 Kugeln (S) die gleiche Potenz $9R^2$. Sind (P_a'), (P_d') die Potenzen von A und D bezüglich der Kugel (Σ_a), so ist $(P_a) + (P_a') + (P_d) + (P_d') = b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2$, $(P_a) - (P_a') = (P_d) - (P_d')$. *Max Zacharias* (Berlin).

Egerváry, E.: On orthocentric simplexes. Acta Litt. Sci. Szeged **9**, 218—226 (1940).

Zeichnet man in einem Dreieck ABC den Höhenschnittpunkt H, so ist umgekehrt jede der Ecken A, B, C Höhenschnittpunkt im Dreieck HBC, HCA, HAB. Im Raum R_n kommt die Eigenschaft nur einem „orthozentrischen Simplex" zu. Verf. ermittelt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür: die Kanten P_iP_j müssen die Bedingungen $\overline{P_iP_j}^2 = \lambda_i + \lambda_j$, $i, j = 0, 1, \ldots, n+1$, $i \neq j$, erfüllen, wo die Parameter nur durch die Bedingungen

$$\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{\lambda_{n+1}} = 0, \quad \lambda_i + \lambda_j > 0 \text{ für } i \neq j$$

beschränkt sind. Ein einziges der λ_i ist negativ. Die kartesischen Koordinaten von $n+1$ der Ecken — die letzte und einzige innere Ecke liege im Ursprung —, sind die Elemente einer orthogonalen Matrix und umgekehrt. Weiter ergibt sich noch eine Verallgemeinerung des Satzes vom Feuerbachschen Kreis, die nicht so einfach formuliert werden kann und samt den Beweisen in der Abh. selbst nachgesehen werden muß.

Fladt (Tübingen).

Vivanti, G.: Un teorema di geometria piana. Bol. mat. **12**, 257—259 (1939).

Im Boll. mat. (3) **1**, 29 (1939) wird an folgenden, 1824 von einem anonymen Verf. bewiesenen Satz erinnert: Der Ort der Punkte P in der Ebene eines regelmäßigen n-Ecks, für die das zugehörige Fußpunktvieleck konstanten Inhalt hat, ist ein Kreis um den Mittelpunkt des regelmäßigen Vielecks. Für $n = 4$ ist der Inhalt des Fußpunktvielecks für alle Punkte der Ebene konstant. Verf. zeigt, daß dieser Satz bestehen bleibt, wenn man die Lote durch gerade Linien ersetzt, die gegen die Seiten des regelmäßigen Vielecks unter einem Winkel $\lambda \neq 0$ geneigt sind, und daß der Inhalt zu $\sin 2\lambda$ umgekehrt proportional ist. Die beiden Sätze sind übrigens als Sonderfälle in einem (vom Verf. nicht zitierten) allgemeinen Satz von J. Steiner enthalten [J. reine angew. Math. **2**, 263—267 (1826); Werke **1**, 139—143 (1881)]: „Zieht man aus einem in der Ebene eines gegebenen Vielecks beliebig angenommenen Punkte P nach den Seiten des Vielecks Gerade, die respektive mit gegebenen Geraden parallel sind, so ist, wenn der Flächeninhalt desjenigen Vielecks, dessen Scheitel in den Fußpunkten jener Geraden liegen, konstant bleiben soll, der Ort des Punktes P die Peripherie eines bestimmten Kegelschnitts. Die Form dieses Kegelschnitts und die Lage seines Mittelpunkts bleiben unverändert, wenn auch der Inhalt des eingeschriebenen Vielecks größer oder kleiner angenommen wird, d. h. durch Veränderung dieses Inhalts entstehen ähnliche, ähnlich liegende und konzentrische Kegelschnitte."

Zacharias (Berlin).

Montel, Paul: Über die Quadratur des Kreises. An. Soc. Ci. Argent. **128**, 321—330 (1939) [Spanisch].

Merz, K.: Würfelzerlegungen. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich **84**, 236—244 (1939).

Durch Schnittebenen und Auswahl von Scheitelzellen an Doppelstrecken läßt sich der Würfel in ein- und zweiseitige Teilvielflache zerlegen. Dabei können die Doppelstrecken in einem Bündel liegen oder auf Kanten eines inneren Polyeders. Als Beispiele werden angeführt: 1. ein 10-(einseitig) und ein 28-Flach (zweiseitig); 2. Würfel mit Innentetraeder ergeben wieder ein 10- und 28-Flach; 3. Würfel mit Innenoktaeder ergeben ein einseitiges 32-Flach und ein zweiseitiges 62-Flach, und 4. gewisse Vereinfachungen. — Von den Polyedern werden die Netze und die Zusammenhangszahlen angegeben.

W. Nowacki (Bern).

Coxeter, H. S. M.: Regular and semi-regular polytopes. I. Math. Z. **46**, 380—407 (1940).

Die Arbeit ist eine zusammenfassende Darstellung der Theorie der regulären und halbregulären Polytope; der vorliegende erste Teil befaßt sich mit den ebenen und den räumlichen Gebilden (vgl. dies. Zbl. **10**, 275; **13**, 296; **14**, 151; **20**, 207f). In § 1 werden die gleichförmigen Polyeder behandelt: die fünf regulären Körper, die 13 Archimedischen Körper, das Prisma und das Antiprisma. § 2 handelt von den durch Spiegelung an Ebenen erzeugten Gruppen, § 3 von deren graphischen Darstellung. In § 4 werden diese Gruppen abstrakt definiert. § 5 gibt Wythoffs Konstruktion der gleichförmigen Polyeder, ausgehend von den Keplerschen Ebenenüberdeckungen mit regulären Vielecken, die auch bekannt sind als Aufteilung der Ebene in Wirkungs-

bereiche [vgl. F. Laves, Z. Kristallogr. **78** (1931); dies. Zbl. **2**, 111]. In § 6 wird die Gruppe des Oktaeders mit eingeschriebenem Ikosaeder behandelt. § 7 gibt die Einteilung der dem Polyeder umschriebenen Kugel in sphärische Dreiecke. In § 8 wird ein Satz von Pappus über die Verteilung der Ecken in zueinander reziproken regulären Körpern verallgemeinert und bewiesen. Die Ausfüllung des Raumes mit gleichförmigen Polyedern wird in § 9 eingehend auseinandergesetzt, und in einem Anhang wird auf die Zusammenhänge mit den Cayleyschen Farbengruppen eingegangen.

J. J. Burckhardt (Zürich).

Dehn, Max: Über Ornamentik. Norsk mat. Tidsskr. **21**, 121—153 (1939).

Gambier, Bertrand: Cercles perpendiculaires et un paradoxe relatif aux imaginaires. Bull. Sci. math., II. s. **63**, 233—238 (1939).

Im R_3 heißen zwei Kreise zueinander senkrecht, wenn sie sich in zwei Punkten schneiden und wenn die Tangenten in einem derselben aufeinander senkrecht stehen. Die Fragestellung der Note ist dann die folgende: Bestimmung der Kreise, die zu zwei nicht verschlungenen und nicht auf ein und derselben Kugel liegenden Kreisen des R_3 senkrecht sind. Es wird gezeigt, daß das Problem zwei Lösungen hat; die eine Lösung ist ein reeller Kreis, während der andere imaginär ist, aber reelle Gleichungen besitzt. Beide Kreise sind konjugiert. Das Problem wird zunächst rechnerisch behandelt, dann auf ein ebenes Problem zurückgeführt und dieses rein geometrisch (synthetisch) gelöst. Als ebenes Problem lautet es so: Man hat zwei Punktepaare (a, a'), (b, b'); man sucht ein neues Punktepaar (c, c') derart, daß (a, a', c, c') auf ein und demselben Kreis liegen, daß die Chordalen a, a' und c, c' in bezug auf diesen Kreis konjugiert sind, daß ferner (b, b', c, c') auf einem zweiten Kreis liegen und ebenfalls ein harmonisches Verhältnis bilden. *Steck.*

● **Graf, Ulrich: Darstellende Geometrie. 2., verb. u. verm. Aufl.** Leipzig: Quelle & Meyer 1940. 204 S. u. 335 Abb. geb. RM. 4.—.

Die zweite Auflage betont in stärkerem Maße als die erste (dies. Zbl. **16**, 129) das konstruktive Element der darstellenden Geometrie, die Verf. mit Recht und ganz im Sinne Emil Müllers die „Grammatik des Technikers" nennt. Neue Anwendungsbeispiele aus Bau- und Maschinenwesen, Architektur und Photogrammetrie wurden aufgenommen, einige Abschnitte auch in theoretischer Hinsicht erweitert (Zentralriß des Kreises u. a.). Sehr klar und einprägsam die Zusammenfassung der behandelten Abbildungsarten nach den sie begründenden geometrischen Verwandtschaften und deren Invarianten. *H. Horninger* (Berlin).

Deschewoj, G. M.: Anwendung der Methode der Koordinatendarstellung auf die Auflösung von Aufgaben in der Perspektive. Ann. Inst. Mines Léningrad **12**, H. 3, 45—67 u. deutsch. Zusammenfassung 67 (1939) [Russisch].

Verf. gibt eine Einführung in die (bekannten) Methoden der perspektivischen Achsonometrie und beschränkt sich dabei auf den Fall, daß die vertikal gedachte Bildebene mit einer Koordinatenebene zusammenfällt. Behandelt werden zunächst die Darstellung von Punkten, Geraden, Ebenen und die einfachen Beziehungen dieser Grundgebilde untereinander; die Umlegung einer Ebene in die Bildebene und die Lösung der metrischen Grundaufgaben. Die abgeleiteten Methoden werden angewendet bei der Abbildung von Kreisen, Vielflachen, Drehflächen, dem Schnitt von Drehflächen mit Ebenen und mit Geraden und dem Schnitt von krummen Flächen untereinander.

W. Schmid (Brünn).

Johansson, Ingebrigt: Etwas über Axonometrie. Norsk mat. Tidsskr. **22**, 1—4 (1940) [Norwegisch].

Verf. zeigt, wie einige axonometrische Konstruktionen mit Benutzung einer zur z-Achse parallelen Hilfsebene, andere mittels Drehung einer Koordinatenebene um ihre Spur ausgeführt werden können. *Max Zacharias* (Berlin).

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK
22. Band, Heft 9 5. August 1940 S. 385—432

Geometrie.

Projektive und algebraische Geometrie:

● **Amodeo, Federico: Ursprung und Entwicklung der projektiven Geometrie.** (**Publ. d. Inst. de Mat. Vol. 1, Nr. 3.**) Rosario: República Argent. 1939. 219 S. [Spanisch].

Übersetzung der in dies. Zbl. **22**, 3 besprochenen Arbeit ins Spanische. *Geppert.*

Bottema, O.: Die Klassifizierung der Affinitäten. Nieuw Arch. Wiskde **20**, 184—191 (1940) [Holländisch].

Eine affine Transformation $\mathfrak{x}' = A\mathfrak{x} + \mathfrak{c}$ im R_n wird gegeben durch eine quadratische Matrix A, der noch eine Spalte $\mathfrak{c}$ angehängt ist. Nun werden Normalformen angegeben, auf die alle affinen Transformationen zurückgebracht werden können. Die Matrix A hat dabei die bekannte Jordansche Normalform; die Spalte $\mathfrak{c}$ besteht entweder aus lauter Nullen oder aus Nullen und einer Eins; der letzte Fall kann nur dann eintreten, wenn eine charakteristische Wurzel von A gleich 1 ist. Es gibt dann ein „Kästchen" wie:

$$x_1' = x_1 + x_2$$
$$x_2' = x_2 + x_3$$
$$x_3' = x_3 + 1.$$

Es folgt: Zwei affine Transformationen sind affin äquivalent, wenn sie projektiv äquivalent sind und in der uneigentlichen Hyperebene projektiv äquivalente Transformationen induzieren. *van der Waerden* (Leipzig).

Deaux, R.: Décomposition d'une homographie plane en un produit de deux involutions. Mathesis **53**, 210—213 (1939).

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der altbekannten Aufgabe, eine gegebene ternäre Homographie in ein Produkt von zwei Polaritäten oder von zwei harmonischen Perspektivitäten zu zerlegen. Diskussion der Existenz und der Anzahl der Lösungen. Bestimmung der involutorischen Projektivitäten, die eine gegebene harmonische Perspektivität in eine andere, ebenfalls gegebene harmonische Perspektivität verwandeln. Zweck des Verf. ist, eine weitere Untersuchung über ternäre Homographien vorzubereiten. *E. G. Togliatti* (Genova).

Deaux, R.: Homographies racines carrées d'une homographie ternaire. Mathesis **53**, 277—286 (1939).

Es handelt sich um die Konstruktion der ternären Homographien x aus einer gegebenen ternären, nicht identischen Homographie ω, so daß $x^2 = \omega$ gilt. Die Durchführung ist rein geometrisch und benützt die Ergebnisse früherer Arbeiten (dies. Zbl. **21**, 247; **22**, 160) des Verf. *Steck* (München).

Deaux, R.: Réciprocités racines carrées d'une homographie ternaire. Mathesis **54**, 49—59 (1940).

Die Arbeit stellt eine Fortsetzung und Vervollständigung der Ergebnisse der vorstehend besprochenen Note des Verf. dar und bringt zunächst die Einteilung der behandelten Homographien in fünf Typen T_i; jeder derselben ist eine Reziprozität (in vereinigten Ebenen) assoziiert, die als Produkt zweier harmonischer Homologien fester Zentren und Achsen resultiert. Jede Homographie T_i kann als Quadrat von ∞^1 Reziprozitäten aufgefaßt werden. Die Typen T_i sind durch ihre Fixelemente folgendermaßen charakterisiert: T_1: Die harmonische Homologie; T_2: Die Homographie besitzt nur drei reelle Fixpunkte; zwei einander entsprechende reelle Punkte gehören einem Kegelschnitt an, der zwei der Fixgeraden in ihren Treff-

punkten mit der dritten berührt; T_3: Die Homographie besitzt nur einen reellen und zwei konjugiert-imaginäre Fixpunkte mit denselben Spezialisierungen wie bei T_2; T_4: Die Homographie besitzt nur zwei Fixpunkte und erzeugt auf ihrer Verbindungsgeraden eine Involution; T_5: Die Homographie besitzt nur einen einzigen Fixpunkt. — Ihnen entsprechen fünf verschiedene Typen von Reziprozitäten R_i, die im einzelnen näher untersucht und deren ausgezeichnete Elemente angegeben werden. *Steck.*

Zito, Ciro: Omografie dello S_3 nel corpo complesso che ammettono un complesso lineare unito non speciale. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. **3**, 257—270 (1939).

Es wird eine Klassifikation der Kollineationstypen des Raumes unter dem Gesichtspunkt durchgeführt, ob Kollineationen eines bestimmten Typus keinen regulären linearen Komplex invariant lassen können (diese Typen werden in § 1 synthetisch bestimmt), einen linearen Komplex unter gewissen Voraussetzungen invariant lassen (diese Voraussetzungen, Beziehungen zwischen den charakteristischen Wurzeln einer Kollineation, werden in § 2 abgeleitet) oder stets lineare Ruhekomplexe besitzen. Die gleiche Aufgabe wird in § 3 mit Hilfe Kleinscher Linienkoordinaten behandelt, und das Ergebnis wird dann in § 4 und § 5 in der Geometrie der Punkte des R_5 oder der von einem Punkte des R_6 ausgehenden Geraden geometrisch gedeutet. *Weiss.*

Baron, H.: Nachtrag zur Erweiterung des Satzes von Desargues. Mh. Math. Phys. **49**, 53—54 (1940).

Vgl. die Arbeiten des Verf. in Mh. Math. Phys. **45**, 335 (1937) und **46**, 377 (1938); dies. Zbl. **19**, 75. *O. Bottema* (Deventer, Niederlande).

Robinson, R. T.: Theorems on perspectivity. Math. Gaz. **24**, 9—14 (1940).

A plane cuts the edges of a tetrahedron $ABCD$ in six points forming a complete quadrilateral. If UVW is the triangle formed by the diagonals, then 1) the triangular faces $BCD, \ldots$ are each of them in perspective with the triangle UVW from points A_1, B_1, C_1, D_1, respectively; 2) the tetrahedra $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ are in perspective from UVW and from a fourth point Ω; 3) if we consider the three tetrahedra $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, ΩUVW, then each pair is in perspective from the four vertices of the remaining tetrahedron, etc. The proofs are given by means of analytical geometry. *O. Bottema* (Deventer, Niederlande).

Weitzenböck, R.: Ein Satz über assoziierte Geraden im R_4. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **43**, 13—17 (1940).

1, 2, 3 und 4 seien vier Geraden im R_4. Es sei S_{12} der dreidimensionale Raum, der 1 und 2 verbindet. S_{12}, S_{23} und S_{31} schneiden sich in einer Geraden, welche mit 4 den Raum S bildet. Sodann gehen S, S_{12}, S_{23} und S_{31} durch eine fünfte Gerade, die Assoziierte zu 1, 2, 3 und 4 (vgl. dies. Zbl. **20**, 389). Es wird bewiesen: a) Fünf assoziierte Geraden allgemeiner Lage können nicht Erzeugende derselben Quadrik im R_4 sein. b) Die fünfte Gerade ist der Ort der Kegelspitzen der dreidimensionalen Kegel zweiter Ordnung, die die vier ersten Geraden enthalten. *J. Haantjes.*

● **Spampinato, Nicolò: Lezioni di geometria superiore. Fasc. 1: Introduzione dei numeri complessi, duali, bireali, bicomplessi e biduali col metodo delle matrici quadrate del 2. ordine. Fasc. 2: Gli S_r proiettivi legati alle algebre doppie reali o complesse, dotate di modulo e loro rappresentazione.** Catania: Circolo mat. 1938—1939. Fasc. 1: 64 pag. L. 12.—, Fasc. 2: 88 pag. L 18.—.

● **Comessatti, Annibale: Elementi della teoria generale delle coniche. 2. ediz. parzialmente rifatta.** Padova: Cedam, Casa ed. dott. A. Milani 1939. VI, 115 pag. L. 15.—.

Lorent, H.: Compléments à un théorème de Poncelet. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége 8, 532—538 (1939).

Partendo dal noto teorema di Poncelet secondo cui, se esiste un triangolo circoscritto a una conica e iscritto in un'altra, esistono infiniti triangoli in tali condizioni, si indicano alcune proprietà di tale sistema di triangoli. *P. Buzano* (Torino).

Simonazzi, Eugenia: Su di un tema di concorso. Period. Mat., IV. s. **20**, 40—54 (1940).

Algebraische und projektive Behandlung der Lemniskate und Berechnung einiger an ihr konstruierbaren Flächenstücke. *Harald Geppert* (Berlin).

Fano, Gino: Sulle curve ovunque tangenti a una quintica piana generale. Comment. math. helv. **12**, 172—190 (1940).

Unter den Kurven der Ordnung $2n$, die eine ebene allgemeine Kurve 5. Ordnung C^5 in allen Treffpunkten berühren, d. h. mit ihr $5n$ Berührungspunkte gemein haben, untersucht Verf. die Quartiken C^4. Er beginnt mit der Feststellung, daß diese sich auf $2^{2 \cdot 6} = 4096$ verschiedene Systeme verteilen, von denen jedes die Dimension 4 hat, mit Ausnahme des Systems der doppelten Kegelschnitte, das von der Dimension 5 ist; unter diesen Systemen gibt es 2015 derart, daß jedes derselben ein System von Kegelschnitten enthält, die die C^5 in allen Treffpunkten berühren, vermehrt um ∞^2 doppelt gezählte Geraden. Verf. bezeichnet diese Systeme als vom ersten Typ, während die übrigen 2080 Systeme als zweiter Typ bezeichnet werden; zu keinem von beiden wird das System der doppelten Kegelschnitte gezählt. — Auf einige Betrachtungen über die Scharen der Berührungspunkte der C^4 mit der C^5 und die Zahl (nämlich 496) der C^2, die in jedem der vorgenannten Systeme enthalten sind, entwickelt Verf. eine interessante Erzeugung dieser Systeme, die sie zu gewissen Figuren des S_3 und des S_4 in Beziehung setzt. — Es bezeichne V^3 eine kubische Hyperfläche des S_4 und r eine auf ihr gelegene Gerade; man betrachtet die ∞^2 Kegelschnitte γ, die auf der V^3 von den durch r gehenden Ebenen ausgeschnitten werden. Bezieht man deren System projektiv auf die Punkte einer Ebene α, so ist der Ort derjenigen Punkte von α, die den in Geradenpaare zerfallenden γ entspricht, eine allgemeine C^5. Die ∞^4 Hyperebenenschnitte F^3 der V^3, die die Kurven γ zweifach schneiden, sind auf die Doppelebene α abbildbar, wobei die Übergangskurven C^4 sind, die die C^5 in allen Treffpunkten berühren und ein System des ersten Typs bilden. Umgekehrt kann man von jedem System des ersten Typs aus zu einer geeigneten V^3 des S_4 gelangen, von der aus man in der geschilderten Weise das Ausgangssystem erhält. Die Systeme des zweiten Typs hängen hingegen mit denjenigen Involutionen zusammen, die auf den Ebenen des S_3 von der bekannten Montesanoschen Kegelschnittkongruenz ausgeschnitten werden; letztere besteht aus den Schnittkurven der ∞^2 kubischen Flächen, die durch eine Raumkurve C_5^7 7. Ordnung des Geschlechts 5 hindurchgehen. Bildet man in geeigneter Weise die Kegelschnitte dieser Kongruenz auf die Punkte einer Ebene α ab, so wird jede weitere Ebene des S_3 mit α in eine Korrespondenz (2, 1) gebracht, und auf α entsteht eine Verzweigungskurve 4. Ordnung, die in allen Treffpunkten eine gewisse C^5 berührt und die zusammen mit weiteren analogen ∞^3 C^4 ein vierdimensionales System des zweiten Typs bildet. Weitere Betrachtungen des Verf. hängen damit zusammen, daß die vorhin betrachtete C_5^7 als Projektion einer kanonischen C_5^8 des S_4 aufgefaßt werden kann. — Im Laufe der Untersuchung erhält Verf. einige Nebenresultate; ein Teil davon bezieht sich auf gewisse Kubiken, die in allen Treffpunkten eine Quartik berühren, der andere auf die oben erwähnte Montesanosche Kongruenz; schließlich beweist Verf. die Möglichkeit, die linke Seite der Gleichung einer allgemeinen ebenen C^n als symmetrische Determinante linearer Koordinatenverbindungen zu schreiben, wodurch ein von Hesse (1855) für $n = 4$ und von Milne (1927) für $n = 5$ erhaltenes Ergebnis auf beliebige n erweitert wird. Die Überlegungen des Verf. sind mit Ausnahme gelegentlicher analytischer Betrachtungen durchweg synthetisch. *Campedelli* (Firenze).

Emch, Arnold: Properties of plane elliptic cubics and pencils of cubics derived by the quadratic transformation. Mh. Math. Phys. **49**, 55—63 (1940).

L'A. considera la trasformazione quadratica involutoria T d'equazioni $\varrho x_i' = 1/x_i$ $(i = 1, 2, 3)$, che ha i punti fondamentali $A_1(1, 0, 0)$, $A_2(0, 1, 0)$, $A_3(0, 0, 1)$ ed i punti uniti $B_0(1, 1, 1,)$, $B_1(-1, 1, 1)$, $B_2(1, -1, 1)$ $B_3(1, 1, -1)$. Preso un punto $A(a_1, a_2, a_3)$

ed il fascio di rette per esso, su ogni retta del fascio vi è una coppia di punti coniugati in T; la totalità di queste coppie sta sulla cubica ellittica:

$$(1) \qquad a_1 x_1(x_2^2 - x_3^2) + a_2 x_2(x_3^2 - x_1^2) + a_3 x_3(x_1^2 - x_2^2) = 0,$$

che si dice „isologa" del punto A. — Le cubiche (1) costituiscono una rete $|L|$, che ha i punti A_i $(i = 1, 2, 3)$ ed i punti B_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ come punti base. Ogni cubica di $|L|$ è trasformata in sè dalla T. — L'invariante assoluto della (1) è una funzione simmetrica di a_1, a_2, a_3, che si esprime come quoziente di due polinomi di grado 12. I punti, per i quali le cubiche isologhe hanno lo stesso invariante, stanno su una curva spezzata in 6 coniche: una conica è determinata dai punti B_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ e da uno dei punti di coordinate (a_1, a_2, a_3), (a_1, a_3, a_2), (a_2, a_1, a_3), (a_2, a_3, a_1), (a_3, a_1, a_2) (a_3, a_2, a_1). — La curva jacobiana della $|L|$ è costituita dai 6 lati del quadrilatero, che ha i vertici B_i $(i = 0, 1, 2, 3)$. — Per una coppia di punti coniugati in T passa un fascio di cubiche di $|L|$, nel quale vi sono 6 cubiche spezzate in una retta ed in una conica. L'A. studia alcune proprietà della configurazione costituita dai 12 punti doppi di tali 6 cubiche. *Conforto* (Rom).

Longhi, Ambrogio: Sulle involuzioni di ordine n e specie $n-1$ in un campo binario. Comment. math. helv. **12**, 164—171 (1940).

Einige Eigenschaften einer Linearschar $g_n^{n-1} = I$ auf einem rationalen Träger; als solcher dient am besten in den Beweisen eine rationale normale C^n. Ein „Hauptpaar" von I besteht aus zwei Punkten P, P', so daß beide Gruppen $P + (n-1)P'$ und $P' + (n-1)P$ der Involution I angehören. I enthält $\binom{n-1}{2}$ solche Hauptpaare. Jedem Punkte P entsprechen $n-1$ Punkte $P_1 P_2 \ldots P_{n-1}$, so daß die Gruppen $P + (n-1)P_i$ der Involution I angehören; bei veränderlichem P beschreibt die Gruppe $P P_1 \ldots P_{n-1}$ eine algebraische γ_n^1 vom Index 2; je nachdem n gerade oder ungerade ist, enthält I die γ_n^1 vollständig oder hat I mit γ_n^1 nur zwei Gruppen gemein. Es folgen verschiedene Sätze über die Hauptpaare von I und über die Schar γ_n^1. — Ist der Träger von I eine rationale C^n eines Raumes S_{n-1}, so liefern die Hauptpaare von I die sog. „Hauptsehnen" der C^n; im Falle eines geraden n erhält man nochmals eine bekannte Ausdehnung eines Satzes von Bertini und Laguerre (dies. Zbl. **7**, 127), dem im Falle eines ungeraden n ein neuer Satz entspricht. — Eine andere Gestalt erhalten die gefundenen Sätze, wenn I diejenige g_n^{n-1} ist, die ein Linearsystem von Hyperflächen auf einer rationalen C^m eines Raumes S_r ausscheidet. — Es wird schließlich der Fall besonders betrachtet, wo C^m einen Knotenpunkt besitzt. *Togliatti.*

Cherubino, Salvatore: Qualche applicazione dell'indice di Kronecker alle corrispondenze algebriche tra curve. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **9**, 1—11 (1940).

Eine algebraische Korrespondenz zwischen zwei Kurven gleichen Geschlechtes möge die $2p$ Basiszykel der einen Riemannschen Fläche in linear unabhängige Zykel der anderen transformieren. Nun wird behauptet, daß dabei zwei sich nicht schneidende Zykel γ_r und γ_s wieder in zwei Zykel γ_r' und γ_s' mit der Schnittpunktszahl Null transformiert werden. Aus dieser falschen Behauptung werden weitere Schlußfolgerungen gezogen; z. B. wird geschlossen, daß eine gewisse $2p$-reihige Matrix $T T^*$ Diagonalform hat, was ebenfalls nicht stimmt. *van der Waerden* (Leipzig).

Haenzel, G.: Geometrie und Wellenmechanik. Die Operatoren der Diracschen Wellengleichung, ihre geometrische Struktur und Bedeutung. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **49**, Abt. 1, 215—242 (1940).

Nach einem eingehenden Bericht über die Symmetrisierung der Diracschen Wellengleichung für Einelektron- bzw. Zweielektronensysteme, der sich eng an die Eddingtonsche Darstellung anschließt, wendet sich Verf. der Frage nach der Struktur der 6 zeitartigen und 10 (einschließlich der Identität) raumartigen Linearisatoren E_{ik} zu. Bekanntlich weist das System dieser 16 Operatoren eine gewisse Isomorphie mit den 16 automorphen Kollineationen einer Kummerschen Fläche auf. Sind Γ_i $(i = 0, 1, \ldots 5)$ die zu dieser Fläche gehörigen linearen Strahlenkomplexe, von denen $i = 1, 2, 3$

rechtsgewunden, die übrigen aber linksgewunden sind, so ordnet Verf. jedem Operator E_{ik} (ausschließlich der Identität) des Einelektronensystems das Produkt $E_{ik} = \Gamma_i \Gamma_k$ zu. Auf diese Weise entsprechen die raumartigen bzw. zeitartigen E_{ik} den hyperbolischen bzw. elliptischen Schnittkongruenzen von Γ_i, Γ_k. Die Einteilung in Pentaden, Tetraden usw. der E_{ik} geht auf anschauliche Verhältnisse im Raume der Γ_i zurück. Durch Übergang von diesem Raum zu einer Doppelebene der Kummerschen Fläche sind die Versinnlichungen der E_{ik} noch einfacher aus der Figur eines Pascalschen Sechsecks zu entnehmen. Vermöge zweier zueinander in bezug auf einen Punkt symmetrisch gelegener Pascalfiguren kann man die Struktur der Operatoren eines Zweielektronensystems beherrschen. — Eine weitere geometrische Deutung der E_{ik} entsteht, wenn man statt der linearen Komplexe Γ_i die quadratischen Kongruenzen C_i^2 ($i = 0, \ldots 5$) zugrunde legt, die aus den Doppeltangenten der Kummerschen Fläche bestehen. Dann ist die biquadratische Regelfläche R_{ik}, Schnitt von C_i und Γ_k, das Bild des Operators E_{ik}.
D. Barbilian (Bucureşti).

Barrau, J. A.: Eine Abbildung der Ähnlichkeitstransformationen der Ebene auf die Punkte des vierdimensionalen Raumes. Mathematica, Zutphen B 8, 97—121 (1939) [Holländisch].

Verf. betrachtet die Ähnlichkeitstransformationen der Ebene und bildet diejenige Lage einer veränderlichen Ebene, welche aus der Transformation $x' = cx - sy + a$, $y' = sx + cy + b$ entsteht, auf den Punkt P des vierdimensionalen Raumes mit den homogenen orthogonalen Koordinaten (c, s, a, b, h) ab. Die Punkte der beweglichen Ebene stimmen dann je überein mit einer Geraden einer linearen elliptischen Kongruenz. Die feste Ebene wird mit der Ebene OAB des Koordinatensystems identifiziert. Mit einer Bildkurve p in R_4 stimmt eine Schar von Ähnlichkeitstransformationen überein; die Bahnkurven erhält man, indem man p aus den ∞^2 Strahlen der Kongruenz auf OAB projiziert. Ist p eine Gerade, so bekommt man eine Schar mit geraden Bahnkurven; die bezügliche „Bewegung" hat der Verf. eine „Geradrotation" genannt. Er betrachtet weiter Ebenen und dreidimensionale Räume im Bildraum, ist imstande, mittels seiner Abbildung Konstruktionen in der „Kinematik der Ähnlichkeitstransformationen" auszuführen, und gibt Beiträge zur Liniengeometrie in R_4, welche offenbar mit der Geometrie der Geradrotationen übereinstimmt. *O. Bottema* (Daventer).

Speitkamp, Fritz: Ein Gegenstück zu Blaschkes „Ebene Kinematik". Bonn: Diss. 1939. 45 S.

Man kann jede Bewegung der euklidischen Ebene nach E. Study beschreiben mittels vier homogener Parameter α_i:

$$(\alpha_0^2 + \alpha_3^2)\,\bar{x} = (\alpha_0^2 - \alpha_3^2)\,x + 2\alpha_0\alpha_3 y \quad + 2(\alpha_1\alpha_3 - \alpha_0\alpha_2),$$
$$(\alpha_0^2 + \alpha_3^2)\,\bar{y} = -2\alpha_0\alpha_3 x \; + (\alpha_0^2 - \alpha_3^2)\,y + 2(\alpha_0\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3).$$

Deutet man diese Parameter α_i als homogene projektive Punktkoordinaten in einem R_3, so erhält man eine zuerst von W. Blaschke [Z. Math. Physik **60**, 61—91 (1911)] eingehend untersuchte Abbildung der ebenen Bewegungen auf die Punkte des Raumes, bei der den Umlegungen dessen Ebenen entsprechen. Dieser Raum erhält durch die Bildmannigfaltigkeit der singulären Bewegungen $\alpha_0^2 + \alpha_3^2 = 0$ sogenannte „quasielliptische" Struktur und kann als ein Grenzfall des elliptischen Raumes aufgefaßt werden. — Diese bekannten Verhältnisse werden im ersten Abschnitt der Arbeit kurz auseinandergesetzt. — Man kann aber auch (und dies ist der Grundgedanke der Arbeit) als Parameter der Bewegung die Größen

$$s_1 = \alpha_0, \quad s_2 = \alpha_3, \quad s_{11} = \alpha_1\alpha_3 - \alpha_0\alpha_2, \quad s_{22} = \alpha_0\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3$$

wählen, die pseudohomogen sind mit folgender Äquivalenzrelation:

$$(s_1, s_2;\, s_{11}, s_{22}) \sim (\varrho s_1, \varrho s_2;\, \varrho^2 s_{11}, \varrho^2 s_{22}), \quad \varrho \neq 0.$$

Man kann daher die fünf im gewöhnlichen Sinne homogenen Größen:

$$X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = s_1^2 + s_2^2 : 2s_{11} : 2s_{22} : 2s_1 s_2 : s_1^2 - s_2^2$$

in einem R_4 als projektive Punktkoordinaten deuten, zwischen denen offenbar die

quadratische Relation $X_0^2 - X_3^2 - X_4^2 = 0$ besteht. Man hat so die Bewegungen der Ebene abgebildet auf die Punkte einer zweifach singulären M_3^2 des R_4. Die singulären Bewegungen übertragen sich auch hier auf die Punkte zweier ausgezeichneter erzeugender Ebenen: $X_0 = 0$, $X_3 \pm iX_4 = 0$ der M_3^2. Maßgebend für die ebene Kinematik ist nun bei ihrer Deutung auf M_3^2 eine gemischte siebenparametrige Gruppe von projektiven Automorphien. Ihr gegenüber werden die einfachsten Gebilde auf M_3^2 klassifiziert. Die entsprechenden Figuren im quasielliptischen Raum werden angegeben. Waren z. B. den Umlegungen dort die Ebenen zugeordnet, so entsprechen ihnen auf M_3^2 gewisse geradlinige Flächen dritter Ordnung, die als Planarflächen bezeichnet und genauer studiert werden. Das Analogon aber der Geraden des quasielliptischen Raumes ist die sogenannte Hauptparabel auf M_3^2. — Die von Geraden und Hauptparabeln verschiedenen Kurven auf M_3^2 bestimmen in der Ebene eindeutig zwangläufige Bewegungen. Als Beispiele hierfür werden einige einfache Geradführungen und die allgemeinste Kreisführung behandelt. *K. Strubecker.*

Rosenfeldt, Kurt: Über algebraische Flächen mit Büscheln elliptischer Kurven. J. reine angew. Math. **182**, 51—53 (1940).

Mittels der von H. W. E. Jung entwickelten Theorie der algebraischen Flächen (Algebraische Flächen. Hannover 1925) führt Verf. die birationale Abbildung derjenigen Flächen, die ein lineares Büschel elliptischer Kurven mit wenigstens einem einfachen oder doppelten Basispunkt tragen, auf Doppelebenen durch. Letztere sind bekanntlich entweder rational oder halbrational, d. h. Regelflächen äquivalent; dies zeigt Verf. durch den Nachweis $P_i = 0$ $(i = 2, 3 \ldots)$ für die erhaltenen Doppelebenen.

Harald Geppert (Berlin).

Godeaux, Lucien: Sur les surfaces normales de genres un de l'espace à cinq dimensions possédant huit points doubles. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **8**, 427—433 (1939).

Eine algebraische Normalfläche F mit $p_a = p_g = P_i = 1$ ist bekanntlich dann und nur dann das Bild einer Involution zweiter Ordnung auf einer Trägerfläche, deren sämtliche Geschlechter gleich Eins sind, wenn sie 8 konische Doppelpunkte besitzt und unter den durch diese gehenden Hyperquadriken solche vorhanden sind, die F in jedem Treffpunkt berühren. Diese Bedingungen sind voneinander unabhängig, wenn F einem S_3 oder S_4 angehört; hier wird dasselbe für die im S_5 liegenden $F = F_8$ nachgewiesen. F bildet dann 29 Involutionen vom obengenannten Typ ab. F_8 läßt sich birational in eine F_4 des S_3 abbilden, die 8 paarweise windschiefe Geraden g eines linearen Komplexes enthält; F_4 trägt 8 Büschel elliptischer C_5; die C_5 eines Büschels haben 7 von den Geraden g zu Trisekanten, während sie die 8. nur in einem Punkt treffen.

Harald Geppert (Berlin).

Pompilj, Giuseppe: Sulla rappresentazione algebrica dei piani multipli diedrici. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. **3**, 194—214 (1939).

Verf. untersucht die mehrfachen Ebenen mit einer dyedrischen Monodromiegruppe und die Flächen F, die auf diese Ebenen abgebildet werden können. Eine dyedrische (transitive) Gruppe G der Ordnung $2n$ kann, als Substitutionsgruppe, über $2n$ oder n Buchstaben wirken: im ersten Falle a) hat G als Erzeugende die Substitutionen $T = (z_1 z_3 \ldots z_{2n-1})\,(z_2 z_4 \ldots z_{2n})$ und $S = \begin{pmatrix} z_1 z_2 z_3 \ldots z_{2n-1} z_{2n} \\ z_2 z_1 z_{2n} \ldots z_4 \quad z_3 \end{pmatrix}$; im zweiten Falle b) die Substitutionen $T = (z_1 z_2 \ldots z_n)$ und $S = \begin{pmatrix} z_1 z_2 z_3 \ldots z_r \quad \ldots z_n \\ z_2 z_1 z_n \ldots z_{n+3-r} \ldots z_3 \end{pmatrix}$. Folglich kann eine dyedrische mehrfache Ebene, mit Monodromiegruppe der Ordnung $2n$, entweder eine $2n$-fache oder eine n-fache Ebene sein. — Im Falle a) kann als projektives Bild der Fläche F die Fläche: (A) $z^{2n} - q_{nd} z^n + p_{2d}^n = 0$ angenommen werden, die eben durch Projektion aus dem Fernpunkte der z-Achse Z_∞ eine $2n$-fache dyedrische Ebene ergibt: q_{nd} und p_{2d} sind dabei Polynome in x, y der Ordnungen nd bzw. $2d$. Um dies zu beweisen, betrachtet der Verf. eine $2n$-fache dyedrische Ebene mit Monodromiegruppe der Ordnung $2n$; einem Punkte dieser Ebene entsprechen $2n$ Punkte auf F, deren dritte Koordinaten $z_1 \ldots z_{2n}$ seien. Dann untersucht Verf., wie sich die Größen:

$$u_h = z_1 + \varepsilon^h z_3 + \cdots + \varepsilon^{h(n-1)} z_{2n-1}, \qquad (h = 1, \ldots, n;\ \varepsilon^n = 1)$$
$$v_h = z_2 + \varepsilon^{h(n-1)} z_4 + \cdots + \varepsilon^h z_{2n}$$

durch S und T transformieren, woraus sich leicht der eben erwähnte Schluß ziehen läßt. Analog beweist man, daß im Falle b) die Fläche

(B′) $\quad z^n - np_{2d}z^{n-2} + c_2p_{2d}^2z^{n-4} + \cdots + c_rp_{2d}^rz^{n-2r} + \cdots + c_mp_{2d}^mz - q_{nd} = 0,$

falls $n = 2m + 1$ oder

(B″) $\quad z^n - np_{2d}z^{n-2} + \cdots + c_rp_{2d}^rz^{n-2r} + \cdots + c_{m-1}p_{2d}^{m-1}z^2 + (-1)^m 2p_{2d}^m - q_{nd} = 0,$

falls $n=2m$, sich als projektives Bild der F annehmen läßt. Setzt man in (B′), (B″) $z=u+v$, $p_{2d} = uv$, $q_{nd} = u^n + v^n$, so muß eine Identität in u, v entstehen, woraus sich die Bedeutung der Zahlen $c_2, \ldots c_m$ ergibt. — Sind p und q allgemeine Polynome, so folgt durch Untersuchung der Singularität der Fläche (A) in Z_∞, daß die Verzweigungskurve der $2n$-fachen Ebene eine n-mal gezählte Kurve $\varphi = 0$ ist, für die $q_{nd}^2 - 4p_{2d}^n = a^2\varphi$, wo das Polynom a prim mit p und q ist und eine gewisse Doppelkurve der F darstellt. Die Verzweigungskurve im Falle b) ergibt sich leicht, da die Flächen (A) als Galoissche Resolventen der Flächen (B′), (B″) betrachtet werden können. Ist nämlich $n = 2m + 1$, so ist die Verzweigungskurve die m-mal gezählte Kurve $\varphi = 0$. Ist $n = 2m$, so ist die Verzweigungskurve $\psi_1^m\psi_2^{m-1} = 0$ mit $\varphi = \psi_1\psi_2$ und $q + 2p^m = b^2\psi_1$, $q - 2p^m = c^2\psi_2$. — Die Fläche (A) kann auf eine zweimal gezählte Fläche (B′) oder (B″) abgebildet werden: ein Punkt von (B′) oder (B″) entsteht aus zwei Punkten, die in einer der n Involutionen zweiter Ordnung, die auf (A) existieren, konjugiert sind. Verf. macht davon eine Anwendung, indem er eine Fläche (A) konstruiert, deren kanonisches System mit einer rationalen Involution 6. Ordnung zusammengesetzt ist. Für diese Fläche ist $p_g = 6$, $p^{(1)} = 25$. *Conforto* (Rom).

Godeaux, Lucien: Observations sur les variétés algébriques à trois dimensions sur lesquelles l'opération d'adjonction est périodique. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **9**, 2—11 (1940).

Auf einer algebraischen V_r sei ein irreduzibles Linearsystem von V_{r-1} vorgegeben, $|V'_{r-1}|$, $|V''_{r-1}| \ldots$ seien seine sukzessiven Adjungierten; existiert dann eine niedrigste Zahl p, so daß $|V^{(p)}_{r-1}| = |V_{r-1}|$ ist, so hat die Adjunktion auf V_r die Periode p und V_r besitzt keine $1, 2 \ldots (p-1)$-fach kanonischen Mannigfaltigkeiten, aber eine p-fach kanonische Mannigfaltigkeit der Ordnung Null. Ist $r = 2$ und handelt es sich um eine reguläre Fläche ($p_a = p_g$), so führt eine leichte Betrachtung der Dimensionen der Systeme zur Aussage, daß nur $p = 1$ oder 2 sein kann; bei einer vollständig regulären V_3 kann p nur 1 sein, d. h. jedes lineare Flächensystem auf V_3 ist dann mit seinem Adjungierten identisch. Man kann die Definition der Periode erweitern: Auf der regulären V_3 sei $|F|$ ein irreduzibles Linearsystem von Flächen mit $p_a > 3$ und $|F'| = |F_1 + \Delta_1|$, $|F'_1| = |F_2 + \Delta_2|, \ldots |F'_{p-2}| = |F_{p-1} + \Delta_{p-1}|$, $|F'_{p-1}| = |F|$, wobei die festen Bestandteile Δ_i von F'_{i-1} Fundamentalmannigfaltigkeiten von $|F|$ bedeuten, dann hat die Adjunktion auf V_3 die Periode p, und das p-fach kanonische System von V_3 besteht aus $|\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_{p-1}|$. In diese Begriffsbildung fügen sich die früher vom Verf. gefundenen V_3 mit $P_g = 0$, $P_2 = 1$, $P_3 = 0, \ldots$ bzw. $P_g = P_2 = 0$, $P_3 = 1$, $P_4 = 0, \ldots$ ein, die sich als Bilder von Involutionen auf solchen V_3 gewinnen lassen, deren sämtliche Geschlechter 1 sind [Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **23**, 93—101 (1937); dies. Zbl. **16**, 371. Bull. Sci. math., II. s. **61**, 82—96 (1937); dies. Zbl. **17**, 129)]. *Harald Geppert* (Berlin).

Shreve, Darrell R.: On a certain class of symmetric hypersurfaces. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 948—951 (1939).

Semplici osservazioni sopra le ipersuperficie d'ordine n di uno $S_r(x_1 x_2 \ldots x_{r+1})$, che sono invarianti rispetto al gruppo totale delle permutazioni sopra $r + 2$ coordinate omogenee $x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}, x_{r+2}$ con $\sum_1^{r+2} x_i = 0$. In particolare l'A. si occupa, anche dal punto di vista della realità, delle ipersuperficie d'equazione $\sum_1^{r+2} x_i^n = 0$ con n numero dispari, studiandone i punti doppi ed i punti analoghi ai punti di Eckhardt. *Conforto.*

Eger, Max: Sur la jacobienne d'un système de Pfaff. C. R. Acad. Sci., Paris **209**, 82—84 (1939).

Etant donné, sur une variété algébrique V_n sans singularités, un système de Pfaff de $\lambda + 1$ équations ($\lambda \leqq n - 1$) (1) $w_0 = 0$, $w_1 = 0, \ldots, w_\lambda = 0$, où w_i sont des formes rationnelles du point de V_n, on appelle variété jacobienne de (1) le lieu des

points où les w_i ne sont pas linéairement indépendantes. Une forme $w = \sum a_i w_i$ est dite permise, si toute variété polaire Ω à n dimensions de w, est une intégrale de $w = 0$. Si en un point O de Ω, l'espace linéaire tangent est $x^1 = 0$, w peut s'écrire, au voisinage de O, sous la forme (2) $w = \frac{1}{x_1^k}(K_1 dx^1 + x^1 \psi)$ où ψ est une forme régulière en O et ne contient pas dx^1. (2) peut être étendue au cas où Ω est l'intersection de p hypersurfaces polaires non tangentes. On montre que l'intersection de la variété jacobienne de w et d'une forme différentielle F de degré k, avec Ω, coïncide avec la jacobienne de F et Ω. *G. Vranceanu* (Bucureşti).

Todd, J. A.: Invariant and covariant systems on an algebraic variety. Proc. London Math. Soc., II. s. **46**, 199—230 (1940).

Zweck dieser Abhandlung ist zunächst (§ 3) die Einführung einer Reihe birational invarianter Äquivalenzsysteme Y_h auf einer algebraischen V_d eines r-dimensionalen Raumes S_r; ebenso wie die kanonischen Systeme X_{d-k} der verschiedenen Dimensionen $d - k$ aus den M_{d-k+i} $(i = 0, \ldots, k)$, d. h. den Orten der Punkte von V_d, deren Tangential-S_d einen gegebenen $S_{r-d+k-i-2}$ in einem S_{k-i-1} schneiden, erhalten werden können, so können die Systeme Y_{d-k} aus den N_{d-k+i} konstruiert werden, die Orte der Punkte von V_d sind, deren Tangential-S_d einen gegebenen $S_{r-d-k-i}$ in einem Punkt schneiden. Die Systeme X und Y sind durch folgende Relation verbunden: $\sum (-1)^i (X_{d-k+i} \cdot Y_{d-i}) \equiv 0$ $(i = 0, 1, \ldots, k;\ k = 1, 2, \ldots)$, wo $(X_{d-k+i} \cdot Y_{d-i})$ eine Schnittmannigfaltigkeit bedeutet; die Systeme Y können durch die X ausgedrückt werden; man hat z. B. $Y_{d-1} \equiv X_{d-1}$, $Y_{d-2} \equiv (X_{d-1}^2) - X_{d-2}, \ldots$, und dies zeigt die Invarianz der Systeme Y, welche im folgenden eine wichtige Rolle spielen. — Im § 4 werden eine auf einer V_r liegende V_d und die kovarianten Systeme der V_d und V_r betrachtet; als solche erscheinen z. B. die invarianten Systeme von V_d und ihre Schnitte mit denjenigen von V_r. Gewisse lineare Kombinationen jener Schnittsysteme liefern folgende neuen kovarianten Systeme:

$$\begin{aligned} X_k[V_d, V_r] &= \sum (-1)^i (X_{k+i}[V_d] \cdot Y_{r-i}[V_r]); \\ Y_k[V_d, V_r] &= \sum (-1)^i (Y_{k+i}[V_d] \cdot X_{r-i}[V_r]); \end{aligned} \qquad (i = 0, 1, \ldots, d-k)$$

sie besitzen folgende Eigenschaft: Die Schnitte von $X_k[V_d, V_r]$ oder $Y_k[V_d, V_r]$ mit einer auf V_r liegenden V_{r-1}, die V_d in V_{d-1} schneidet, fallen mit $X_{k-1}[V_{d-1}, V_{r-1}]$ oder $Y_{k-1}[V_{d-1}, V_{r-1}]$ zusammen. — Im § 5 wird die F_{d-k} untersucht, die Ort der Punkte P von V_d ist, wo eine Gerade existiert, die V_d in P $(k+1)$-punktig berührt und durch einen gegebenen allgemeinen Punkt O hindurchgeht. — Im § 6 wird der Ort Γ_h $(h = 2d - r,\ 2d \geqq r)$ der uneigentlichen Doppelpunkte von V_d durch die Systeme Y_h des § 3 und durch die Hyperebenenschnitte von V_d ausgedrückt. — Die so erhaltene Formel wird dann so umgestaltet, daß sie auch im Falle einer auf einer V_r liegenden V_d noch gültig bleibt (§ 7). — In der ganzen Abhandlung hat man ziemlich komplizierte Rechnungen algebraischen Charakters zu entwickeln. Zum besseren Verständnis des algebraischen Teils der Untersuchung läßt Verf. einen ersten Paragraphen vorangehen, wo verschiedene Identitäten und Formeln in einem beliebigen kommutativen Ring ausgerechnet werden. Sie finden ihre geometrische Deutung schon im § 2, wo der sogenannte „Äquivalenzring" einer algebraischen V_d eingeführt wird; es handelt sich um einen kommutativen Ring, dessen Elemente geordnete Gruppen $[x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(d)}]$ bedeuten, wo die $x^{(k)}$ Äquivalenzsysteme der Dimension k sind, und wo die Operationen der Summe und des Produkts folgendermaßen definiert werden:

$$[x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(d)}] + [y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(d)}] = [x^{(0)} + y^{(0)}, \ldots, x^{(d)} + y^{(d)}];$$

$$[x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(d)}] \cdot [y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(d)}] = [t^{(0)}, t^{(1)}, \ldots, t^{(d)}],$$

wo $t^{(k)} = \sum (x^{(p)} \cdot x^{(q)})$ und $p + q = d + k$. *E. G. Togliatti* (Genova).

Paxia, Salvatore: Sulle varietà iperalgebriche nell'algebra dei numeri tricomplessi. Atti Accad. Gioenia Cattania, VI. s. **2**, mem. 10, 1—25 (1937).

Differentialgeometrie:

Wedemeyer, A.: Die Tangente der Azimutgleiche. Z. Vermessungswes., Stuttg. **69,** 188—189 (1940).

Die Konstruktion der Tangente an die genannte sphärische Kurve wird schnell und übersichtlich durch reine Winkelbeziehungen gewonnen, indem die Verhältnisse der Ebene analog auf die Kugel übertragen werden. In der Note finden sich Literaturhinweise auf ähnliche Untersuchungen des Verf. *U. Graf* (Danzig).

Turrière, Émile: Une nouvelle courbe de transition pour les raccordements progressifs: La radioïde pseudo-elliptique. Bull. Soc. Math. France **67,** 62—99 (1939).

Für das im Feldmeßwesen, Straßen- und Eisenbahnbau oft behandelte Problem des Übergangsbogens wird eine neue Lösung vorgeschlagen: die pseudoelliptische Radioide, d. h. eine Kurve mit der Gleichungsform $\operatorname{tg}\frac{x-y}{k} = \mathfrak{T}\mathfrak{g}\frac{x+y}{k}$, ($k$ konstant), bezogen auf ein rechtwinkliges x, y-System, für das die x-Achse die geradlinige Trasse und der Ursprung der Anfangspunkt des Übergangsbogens ist. Die vorgeschlagene Kurve hat den Vorzug, daß sie sich auf elementare Weise rektifizieren läßt. Alle für die Praxis erforderlichen Absteckdaten werden hergeleitet und an mehreren Beispielen im Vergleich mit den anderen Lösungen des Übergangsbogens erläutert. Dem ausführlichen Literaturverzeichnis ist noch hinzuzufügen: Lachmann und Rothe, Zur Konstruktion des Übergangsbogens für Eisenbahngleise. Z. angew. Math. Mech. **2,** 45—57 (1922), und Schramm, Der vollkommene Gleisbogen. Seine Gestaltung als Kurve mit stetigem Krümmungsverlauf. Berlin 1931. *U. Graf* (Danzig).

Bonea, I.: Einige Bemerkungen über die Bestimmung der Schnittebene in der stereographischen Projektion. Bull. sci. Ecole polytechn. Timişoara **9,** 115—126 (1939) [Rumänisch].

Il s'agit d'une projection stéréographique sur un plan coupant la sphère, le centre de projection se trouvant en l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire. L'aut. se propose de déterminer ce plan de manière que dans la projection d'un cercle de centre opposé au centre de projection, les erreurs de la déformation linéaire remplissent certaines conditions. Application à la construction de la carte géographique de la Roumanie. *T. Popoviciu* (Cernăuţi).

Hristow, Wl. K.: Reihenentwicklungen für die ebene Meridiankonvergenz der stereographischen Projektion. Z. Vermessungswes., Stuttg. **69,** 186—188 (1940).

Verf. gibt eine einfache Herleitung der ebenen Meridiankonvergenz der stereographischen Abbildung mittels Doppelreihen, die nach steigenden Potenzen a) des geographischen Breitenunterschiedes und des geographischen Längenunterschiedes, b) der ebenen rechtwinkeligen Koordinaten fortschreiten. Glieder fünfter Ordnung sind vernachlässigt. *Schmehl* (Potsdam).

Ansermet, A.: L'emploi en géodésie de coordonnées polaires conformes. Schweiz. Z. Vermessgswes. **37,** 235—240 (1939).

Sollen verschiedene konforme Abbildungen der Kugel oder des Ellipsoids in der Ebene miteinander verglichen werden, so erweist sich die gebräuchliche Darstellung mit Verwendung rechtwinkliger Koordinaten als wenig geeignet. Hingegen ist es verhältnismäßig leicht, eine derartige Vergleichung mit Hilfe von Polarkoordinaten vorzunehmen; sie läuft im wesentlichen auf die Untersuchung kleiner Zusatzglieder hinaus, deren geometrische Deutung in einfacher Weise möglich ist. Vergrößerungsverhältnis und Meridiankonvergenz werden gesondert behandelt.

H. Schmehl (Potsdam).

Geissler, Johannes: Beitrag zur Theorie doppelquadratischer Leitgleichungen von ebenen Berührungstransformationen: Singularitäten der Zerfallskurven. Dresden: Diss. 1939. 39 S.

Verf. schreibt die doppelquadratische Leitgleichung einer ebenen Berührungstransformation in der Form

$$\Omega(x/y) \equiv \sum p_{ik}(x) y_i y_k \equiv \sum q_{ik}(y) x_i x_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Man könnte schreiben $\Omega \equiv \sum a_{ik}^{lm} x_i x_k y_l y_m$, wobei die a sowohl bezüglich der oberen wie der unteren Indizes symmetrisch sind; Verf. zieht es jedoch vor, die Doppelindizes zu vermeiden und an Stelle von $a_{ik}^{11}, a_{ik}^{22}, a_{ik}^{33}, a_{ik}^{23}, a_{ik}^{31}, a_{ik}^{12}$ zu schreiben $a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, f_{ik}, g_{ik}, h_{ik}$. Vermöge (1) entspricht dem Punkt $x_1^0 : x_2^0 : x_3^0$ ($y_1^0 : y_2^0 : y_3^0$) der Ebene I (II) der Kegelschnitt $\Omega(x^0/y) = 0$ ($\Omega(x/y^0) = 0$). Entartete Kegenschnitte (also Geradenpaare im allgemeinen) sind den Punkten der Zerfallskurven $X(x) \equiv |p_{ik}(x)| = 0$ und $Y(y) \equiv |q_{ik}(y)| = 0$ zugeordnet. Wenn $X \equiv 0$ bzw. $Y \equiv 0$, dann ist jedem Punkt der Ebene I bzw. II ein Ge-

radenpaar zugeordnet. — Die Größen X und Y sind homogene Formen 6. Grades mit 28 Gliedern, welche man durch wiederholte Aufspaltung der Determinanten $|p_{ik}|$ und $|q_{ik}|$ erhält. Die Untersuchung der allgemeinsten Zerfallskurve ist somit aussichtslos. Verf. beschränkt sich daher auf Vereinfachungen, und zwar solche, bei denen die Veränderlichen x und y symmetrisch behandelt werden. Zunächst sollen in I und II die Zerfallskurven durch die Ecken der Koordinatendreiecke gehen, und es soll in jeder Ebene der Doppelpunkt des einer Ecke zugeordneten entarteten Kegelschnittes der mit dieser Ecke der anderen Ebene gleichlautende Eckpunkt sein. Diese Forderungen sind bei Verwendung doppelter Indizes gleichbedeutend mit den Beziehungen (2) $a_{ii}^{ik} = a_{ik}^{ii} = 0$ $(i, k = 1, 2, 3)$. Die Punkte 1:0:0, 0:1:0, 0:0:1 sind dann in I und II zugleich Doppelpunkte der Zerfallskurven $X = 0$ und $Y = 0$. — Sodann werden die zwei Fälle betrachtet, wo in beiden Ebenen die drei Paare von Doppelpunktstangenten der Zerfallskurven entweder mit den betreffenden Seitenpaaren des Dreiecks der Doppelpunkte zusammenfallen oder sie harmonisch trennen. Wenn die analytischen Bedingungen für beide Fälle zusammentreffen, sind die Ecken des Koordinatendreiecks dreifache Punkte der Zerfallskurven, und die Bedingungen hierfür lassen sich zusammenfassen in der Gleichung

(3) $$(a_{11}^{22}\, a_{11}^{33} - (a_{11}^{23})^2)\,(a_{22}^{11}\, a_{33}^{11} - (a_{23}^{11})^2) = 16\,(a_{12}^{31}\, a_{31}^{12} - a_{12}^{12}\, a_{31}^{31})^2.$$

Sollen außerdem noch die Kegelschnitte $p_{ii}(x) = 0$ und $q_{ii}(x) = 0$ in I und II aus den Seiten des Dreiecks der dreifachen Punkte $X = 0$ und $Y = 0$ bestehen, dann muß noch gefordert werden, daß

(4) $$a_{ii}^{kk} = 0 \quad (i \neq k;\ i, k = 1, 2, 3); \qquad a_{ii}^{kj},\ a_{kj}^{ii} \neq 0 \quad (i, k, j = 1, 2, 3;\ i \neq k, j;\ k \neq j).$$

Verf. bevorzugt nun zwei Gruppen von Beziehungen zwischen den a_{ik}^{lm}, durch deren jede die Forderungen (2) bis (4) erfüllt werden können. Im ersten Falle zerfällt für $X \equiv 0$, $Y \equiv 0$ die Leitgleichung in ein Produkt von zwei Bilinearformen und somit die durch $\Omega = 0$ vermittelte Berührungstransformation in zwei Dualitäten, welche zusammen jedem Punkt ein Geradenpaar zuordnen. Bezeichnet man mit y^* den Doppelpunkt des Geradenpaares in II, welches dem Punkt x in I entspricht, dann ist der Doppelpunkt des dem Punkt y^* entsprechenden Geradenpaares in I wiederum der Punkt x, d. h. es findet eine involutorische Kollineation zwischen den Punkten der Ebenen I und II statt. — Im zweiten der vom Verf. behandelten Fälle bleibt die Leitgleichung auch für $X \equiv 0$, $Y \equiv 0$ irreduzibel. Die polare Zuordnung der Punkte x und y findet statt wie im ersten Fall. Vermittels einer Koordinatentransformation ergibt sich, daß dem Punkt x (y) der Ebene I (II) vermöge $\Omega = 0$ das Tangentenpaar durch y^* (x^*) an den Kegelschnitt $\Phi(y/y) = 0$ $(\Phi(x/x) = 0)$ zugeordnet wird. Dabei ist

$$\Phi(x/x) \equiv \sum x_i^2 - \sum x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k)$$

und $\Omega(x/y) \equiv \Omega(y/x) \equiv \sum (x_i x_k y_j^2 - x_j(-x_j + x_i + x_k) y_i y_k)$ $(i, k, j = 1, 2, 3;\ i, k \neq j;\ i \neq k)$. Im übrigen ist die durch $\Omega = 0$ vermittelte Transformation keine Berührungstransformation im Lieschen Sinne; es verschwindet überdies auch die Liesche Determinante. Wenn $X \not\equiv 0$, $Y \not\equiv 0$, läßt sich Ω auf die Form transformieren

$$\Omega(x/y) \equiv \Omega(y/x) \equiv \sum x_i x_k y_j^2 + (x_1 + x_2 + x_3) \sum x_j y_i y_k \ (i, k, j = 1, 2, 3;\ i, k \neq j;\ i \neq k).$$

Zum Schluß untersucht Verf. für $X \not\equiv 0$, $Y \not\equiv 0$ in den bisher betrachteten Fällen einige Eigenschaften der Punkthauptkurven (d. h. der den Punkten zugeordneten Kegelschnitte) und stellt die Gleichung der Geradenhauptkurven auf, die für einige spezielle Geraden diskutiert wird. Die Geradenhauptkurven entsprechen den Geraden vermöge $\Omega = 0$ und sind die Einhüllenden der ∞^1 Kegelschnitte, welche den ∞^1 Punkten der Geraden zugeordnet sind. — Durch verschiedene Zeichnungen sucht Verf. die entwickelten Beziehungen anschaulich zu machen. *W. Neumer* (Worms).

Kowalewski, Gerhard: Die Ausnahmegruppen der Pickschen Geometrie. Mh. Math. Phys. **49**, 64—72 (1940).

Die Cesàrosche natürliche Geometrie läßt sich, wie Pick zuerst gezeigt hat, auf jede transitive r-gliedrige Gruppe G_r von Punkttransformationen übertragen, welche die Elemente $(r-2)$-ter Ordnung transitiv transformiert. Jede transitive G_r, die diese Eigenschaft nicht besitzt, ist ähnlich mit der Gruppe der Ableitung $y^{(r-2)}$. Der Verf. zeigt, daß man auch für sie eine Art natürlicher Geometrie aufstellen kann, wenn man als Bezugselement $\mathfrak{B}$ benutzt ein Element $(r-3)$-ter Ordnung $x, y, y', \ldots, y^{(r-3)}$ zusammen mit einem Punkte $x, \bar{y}$, der dieselbe Abszisse x hat, wie der Punkt x, y dieses Elementes. Er führt das wirklich aus für den Fall $r = 5$, indem er sich dabei auf das reelle Gebiet beschränkt. Jeder Punkt x, y bekommt in bezug auf das Element $\mathfrak{B}$ gewisse Relativkoordinaten, und wenn man $\mathfrak{B}$ längs eines Kurvenpaares $K, \overline{K}$ variieren läßt, so daß $x, y, y', \ldots, y^{(r-2)}$ auf K liegt, $x, \bar{y}$ auf $\overline{K}$, erhält man Identitätsbedingungen, die aussagen, daß x, y ein fester Punkt ist, und in denen eine infinitesimale Trans-

formation steckt, die der Verf. Schmiegungstransformation nennt. Man kann von natürlichen Gleichungen des Kurvenpaares reden. Die Fixpunkte der Schmiegungstransformation führen zur Betrachtung gewisser Evoluten des Kurvenpaares.
Engel (Gießen).

Humbert, Pierre: Sur les courbes planes de l'espace attaché à l'opérateur Δ_3. C. R. Acad. Sci., Paris **209**, 590—591 (1939).

Definiert man als Abstand der Punkte x, y und x_0, y_0 die Größe $((x-x_0)^3+(y-y_0)^3)^{1/3}$, so erhält man drei isotrope Richtungen $x^3+y^3=0$. Sind auf einer Geraden drei Punkte A_1, A_2, A_3 gegeben, so heißt ein Punkt B auf ihr zu A harmonisch-konjugiert bezüglich A_1, A_2, A_3, wenn $\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{AA_2}+\frac{1}{AA_3}=\frac{3}{AB}$ ist; entsprechend bei 5 Richtungen. Die Richtung μ' heißt zu μ orthogonal, wenn sie zu μ oder μ zu ihr harmonisch-konjugiert bezüglich der isotropen Richtungen ist; es gibt also zu einer Richtung zwei orthogonale. Mit diesen Begriffsbildungen erhalten gewisse Kubiken interessante Eigenschaften; z. B. ist für $y^3-3p^2x=0$ die eine der beiden Subnormalen konstant und die Kurve besitzt auf der x-Achse zwei Brennpunkte, d. h. solche mit drei isotropen Tangenten. Beim „Pseudokreis" $x^3+y^3=a^3$ geht die eine Normale beständig durch den Nullpunkt. *Harald Geppert* (Berlin).

Kampen, E. R. van: A remark on asymptotic curves. Amer. J. Math. **61**, 992—994 (1939).

L'Autore stabilisce una proprietà delle curve asintotiche, uscenti da un punto iperbolico P, di una superficie S appartenente allo spazio ordinario, in relazione alla sezione di S col piano tangente in P. *Mario Villa* (Bologna).

Lane, Ernest P.: A theorem on surfaces. Bull. Amer. Math. Soc. **46**, 117—120 (1940).

Si prova il seguente teorema: Se le asintotiche di una superficie appartengono a complessi lineari, le asintotiche di un sistema sono non soltanto equivalenti proiettivamente fra loro, ma anche alle asintotiche delle rigate costituite dalle tangenti asintotiche dell'altro sistema nei punti di un'asintotica del sistema dato. *E. Bompiani.*

Levi-Civita, T.: La trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie. Rend. Semin. mat. fis. Milano **12**, 1—33 (1938).

Nach einer historischen Einleitung untersucht der Verf. zuerst die Dreiecke aus Kreisbögen. Die sechs Elemente des zugehörigen Sekantendreiecks werden als Funktionen der sechs Elemente des Kreisbogendreiecks ausgedrückt. Durch Einsetzen der so gefundenen Funktionen in die Formeln der elementaren Trigonometrie findet man Beziehungen zwischen den Elementen des Kreisbogendreiecks (wenn man sich auf „genügend kleine" Kreisbogendreiecke beschränkt). — Diese Methode kann auf ein Dreieck ABC angewandt werden, das aus drei beliebigen Bögen $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ auf einer allgemeinen Fläche besteht. Zu diesem Zweck wird zuerst die (bekannte) Beziehung zwischen dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$ und dem geodätischen Bogen $\overline{AB}$ hergestellt. Es zeigt sich dann, daß die oben geschilderte Methode in erster Annäherung auf das Dreieck ABC (das dem Kreisbogendreieck entspricht) und auf das zugehörige geodätische Dreieck (das dem Sekantendreieck entspricht) ohne weiteres angewandt werden kann. In der zweiten Näherung spielt die Gaußsche Krümmung der Fläche eine Rolle, aber alles spielt sich so ab, als ob die Fläche von konstanter Gaußscher Krümmung wäre. — Schließlich werden auch allgemeine Vorschriften für höhere Annäherungen angegeben. *Hlavatý* (Prag).

Tonolo, A.: Estensione di un teorema trigonometrico di Gauss sui triangoli geodetici. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **29**, 175—179 (1939).

Nach einem Gaußschen Satze gilt bis zur dritten Ordnung zwischen den Winkeln G_h eines geodätischen Dreieckes auf einer Fläche σ und den Winkeln Φ_h eines geradlinigen euklidischen Dreieckes mit denselben Seitenlängen die folgende Beziehung: $\Phi_h = G_h - S(2K_h + K_{h+1} + K_{h+2})/12$. Dabei bedeutet S den Inhalt des gerad-

linigen Dreieckes und K_h, K_{h+1}, K_{h+2} die Werte der Gaußschen Krümmung der Fläche σ in den entsprechenden Scheiteln des Dreieckes auf der Fläche. Diese Beziehung wird in der vorliegenden Arbeit auf beliebige Dreiecke auf einer Fläche verallgemeinert, und zwar in der Weise, daß die Berechnung eines solchen Dreieckes mittels gewisser bis zur 4. Ordnung geltenden Formeln auf die Berechnung eines geradlinigen euklidischen Dreieckes zurückgeführt wird. *O. Borůvka* (Brünn).

Mihailescu, Tiberiu: Sur les réseaux isothermes-conjugués à courbes planes. C. R. Inst. Sci. Roum. **3**, 477—481 (1939).

L'Autore completa mediante alcune proprietà geometriche i risultati di C. A. Nelson (questo Zbl. **4**, 129) sulle superficie dello spazio proiettivo ordinario che possiedono un doppio sistema isotermo coniugato di curve piane. Il procedimento seguito è quello del riferimento mobile del Cartan. *P. Buzano* (Torino).

Finikoff, S.: Sur le réseau des lignes doubles dans la correspondance ponctuelle de deux surfaces et sur la correspondance A des surfaces. Rec. math. Moscou, N. s. **6**, 475—417 (1939) [Russisch].

Es sei eine gegenseitig eindeutige Korrespondenz zwischen den Punkten zweier Flächen S und S' innerhalb des gleichen projektiven Raumes gegeben. In einem Paare entsprechender Punkte gibt es durch einen von ihnen mindestens zwei Tangenten, die die entsprechenden Tangenten durch den anderen Punkt treffen. Die von diesen eingehüllten Kurven nennt man nach L. Ermolaeff die Doppellinien der Korrespondenz. — Verf. untersucht die folgenden Fälle: 1. Die Doppellinien bilden ein konjugiertes Kurvennetz auf S und S'. 2. Sie bilden die Asymptotenlinien von S und S'. 3. S und S' entsprechen sich in der Art, daß sich die Haupttangenten entsprechender Punkte treffen, ohne daß sich die Asymptotenlinien entsprechen. Der Fall 2 führt zu bemerkenswerten Zusammenhängen mit den Flächenpaaren von Demoulin-Godeaux, für die die Lieschen Quadriken in entsprechenden Punkten zusammenfallen, und der Fall 3 ergibt Zusammenhänge mit den Flächen von Jonas und ihren Transformierten. (Vgl. auch dies. Zbl. **10**, 177; **11**, 83, 244.) *E. Bompiani* (Rom).

Rossinski, S.: Sur la déformation des congruences rectilignes avec conservation de certains systèmes spéciaux de surfaces réglées. Rec. math. Moscou, N. s. **5**, 573—629 u. franz. Zusammenfassung 629—636 (1939) [Russisch].

Rossinski, S.: Sur le problème général de la déformation des congruences avec conservation de certains systèmes spéciaux de surfaces réglées. Rec. math. Moscou, N. s. **6**, 307—326 u. franz. Zusammenfassung 327—330 (1939) [Russisch].

Frühere Arbeiten des Verf. werden weitergeführt (dies. Zbl. **10**, 418; **13**, 128; **20**, 166). Mit jeder Tangentenebene einer Fläche S wird starr je eine Gerade verbunden; die Fläche wird stetig verbogen, wodurch sich auch die Kongruenz C aller betrachteten Geraden deformiert. Es werden die folgenden Aufgaben gestellt: I. Wie müssen S und C beschaffen sein, damit die Hauptschränkungsflächen der Kongruenz bei der Deformation wieder in Hauptschränkungsflächen verwandelt werden? II. Gibt es in der Kongruenz a) konjugierte [oder b) isokline, oder c) orthogonale] Regelflächensysteme, die bei der beschriebenen Deformation beständig konjugiert (oder isoklin, oder orthogonal) bleiben? (Die Bezeichnungen konjugiert, isoklin und orthogonal beziehen sich auf die Schnittgeraden der Tangentenebenen beider Flächen des Systems, welche durch denselben Strahl der Kongruenz gehen und auf die ihm entsprechende Sanniasche Indikatrix.) — In der ersten Arbeit löst man I. und II. für die Fälle, daß die Kongruenzgeraden 1. in den betreffenden Tangentenebenen von S liegen bzw. 2. senkrecht zu denselben stehen. I. wird unter der Annahme behandelt, daß S eine Hauptbasis der Verbiegung besitzt, d. h. ein konjugiertes Kurvennetz, welches bei der Verbiegung immer konjugiert bleibt. Die Aufgabe II. wird unter der Annahme sowohl A) einer beliebigen Verbiegung, als auch A*) einer Verbiegung mit Hauptbasis behandelt. Aus der Fülle der sich ergebenden Resultate in den verschiedenen Fällen führen wir als Beispiele an: I 1. S kann eine beliebige Fläche sein, die eine Hauptbasis mit einer

Familie geodätischer Kurven besitzt; I 2. S kann eine Gesimsfläche sein; die Hauptschränkungsflächen der Kongruenz entsprechen den Krümmungslinien von S. IIb2, Annahme A: S muß auf eine Spiralfläche verbiegbar sein; C gehört zu den von Vincensini studierten Spiralkongruenzen (dies. Zbl. 4, 20); die permanenten isoklinen Regelflächensysteme entsprechen den Minimalkurven auf S. IIc1 und IIc2 erhalten unter A eine negative, unter A* eine positive Antwort. — In der zweiten Arbeit werden IIa unter A und A* und IIc unter A bei beliebiger Lage der Kongruenzgeraden bezüglich der betreffenden Tangentenebenen diskutiert; die Antwort auf IIc ist wiederum verneinend. *B. Petkantschin* (Sofia).

Efimoff, N.: Déformation du voisinage d'un point parabolique d'une surface. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **26**, 134—136 (1940).

Eine Fläche F gestatte in der Umgebung des parabolischen Punktes O die Darstellung (1) $z = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) +$ höh. Glieder, $ac - b^2 = 0$, $|a| + |b| + |c| > 0$; man nennt die Metrik von F eine Ausnahmemetrik, wenn unter den durch O laufenden geodätischen Linien mindestens zwei vorhanden sind, längs derer das Krümmungsmaß K und dK verschwinden. Es gilt dann der Satz, daß, wenn F keine Ausnahmemetrik bestimmt, alle zu F isometrischen Flächen vom Typus (1) in O den gleichen Index besitzen, falls dieser nicht unbestimmt wird. Damit sind die Voraussetzungen eines früher bewiesenen Invarianzsatzes (dies. Zbl. **22**, 166) eingeengt. Ein Gegenbeispiel zeigt, daß die Voraussetzung über die Metrik wesentlich ist. *H. Geppert.*

Pinl, M.: W-Projektionen totalisotroper Flächen. II. Čas. mat. fys. **69**, 23—35 (1940).

Sono dati alcuni esempi interessanti di superficie dello spazio a 5 dimensioni applicabili sul piano euclideo, per le quali le curve principali di tre sistemi sono piane. Questi esempi sono ricavati col metodo della „superficie figurativa" (E. Bompiani, questo Zbl. **11**, 418) da esempi di superficie totalmente isotrope in uno spazio euclideo a 7 dimensioni. (Vedi questo Zbl. **18**, 171.) *E. Bompiani* (Roma).

Bochner, S.: Harmonic surfaces in Riemann metric. Trans. Amer. Math. Soc. **47**, 146—154 (1940).

Es handelt sich um einen n-dimensionalen Riemannschen Raum mit einer definit positiven Metrik $g_{pq}(x^j)$. Die Eulerschen Gleichungen für das Variationsproblem $\int\int g_{pq}(x^j)\,(x^p_u x^q_u + x^p_v x^q_v)\,du\,dv = \min$ sind die folgenden [*] $\Delta x^i + \Gamma^i_{pq}(x^p_u x^q_u + x^p_v x^q_v) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, wobei $\partial g_{pq}(x^j)/\partial x^i = g_{p\alpha}(x^j)\Gamma^\alpha_{iq} + g_{\alpha q}(x^j)\Gamma^\alpha_{pi}$. Unter einer harmonischen Fläche (h. F.) wird eine Lösung von [*] verstanden. Es werden h. F. bezüglich ihrer Eigenschaften, die teilweise denen der h. F. im euklidischen Falle $\Delta x^i = 0$ entsprechen, untersucht. Von den Resultaten heben wir das Folgende hervor: Für je zwei in einem Bereiche Q definierte (und einigermaßen spezialisierte) h. F. $x^j(u, v)$, $y^j(u, v)$ erreicht die Funktion $H[x^j(u, v), y^j(u, v)]$, wobei $H(x^j, y^j)$ die geodätische Entfernung der Punkte x^j, y^j bedeutet, ihren Maximalwert auf der Grenze des Bereiches Q. *O. Borůvka* (Brünn).

Coburn, N.: V_m in S_n with planar points ($m \geqq 3$). Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 774—783 (1939).

A V_m in S_n with planar points has $\underset{u}{h}_{\lambda\mu} = 0$ $(u = m + 1, \ldots, n - 2)$, $h_{\lambda\mu}$ being the second fundamental affinors of V_m. If the rank of $\underset{n}{h}_{\lambda\mu}$ is > 2, then V_m in S_n with planar points are either V_m consisting of ∞^1 V_{m-1} imbedded in ∞^1 S_{m+1}, or V_m consisting of ∞^1 V_{m-1} imbedded in ∞^1 S_m, or V_m lying in S_{m+2}. In order to prove this theorem the author starts with a proof of extended Segre's theorem about V_m in S_n with axial points and then analyzes the fundamental equations (i. e. the equations of Gauss, Codazzi and Ricci). *Hlavatý* (Prag).

Levy, Harry: Conformal invariants in two dimensions. I. Čas. mat. fys. **69**, 50—56 (1940).

The author finds a method by means of which he obtains a sequence of conformal

invariants of two or more curves in the two dimensional case. Example of results: "If two curves have contact of order h, $\sqrt[4]{g^h}\,(k_1^{(h-1)} \mp k_2^{(h-1)})$ is an absolute conformal invariant." ($g = \det|g_{\lambda\mu}|$, k_1, k_2 are the geodesic curvatures of the curves, and $\mp$ is to be taken according as the curves lie on the same or opposite sides of their common tangent geodesic.) *Hlavatý* (Prag).

Yano, Kentaro: Sur les équations de Gauss dans la géométrie conforme des espaces de Riemann. Proc. Imp. Acad. Jap. **15**, 247—252 (1939).

En désignant par H^ν_{ab} le tenseur de courbure d'Euler-Schouten d'une V_m dans V_n ($a, b, c, d = 1, \ldots, m$; $\omega, \mu, \lambda, \nu = 1, 2, \ldots, n$) on trouve sans difficulté que

$$M^\nu_{ab} = H^\nu_{ab} - \frac{1}{m} g^{cd} H^\nu_{cd} g_{ab}$$

est invariant par rapport aux transformations conformes du tenseur métrique. D'autre part, on peut construire le tenseur conforme de M. Weyl $C^\nu_{\omega\mu\lambda}$ pour la V_n de même que le tenseur conforme C^d_{abc} pour la V_m. Ces deux tenseurs sont liés par une équation analogue à celle de Gauss pour une V_m dans V_n, à savoir $C^d_{abc} = B^{\omega\mu\lambda d}_{abc\nu} C^\nu_{\omega\mu\lambda} + c^d_{abc} + m^d_{abc}$. Ici les tenseurs conformes c, m ne dépendent que du $C^\nu_{\omega\mu\lambda}$, M^ν_{ab}. *Hlavatý.*

Yano, Kentaro: Sur les équations de Codazzi dans la géométrie conforme des espaces de Riemann. Proc. Imp. Acad. Jap. **15**, 340—344 (1939).

En partant du résultat obtenu dans le travail précédent, l'auteur le compare aux équations de Weingarten de la géométrie riemannienne ce qui lui permet de trouver (moyennant contraction et élimination) les équations de Codazzi dans la géométrie conforme. *Hlavatý* (Prag).

Mutô, Yosio: On some properties of hypersurfaces in a conformally connected manifold. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. **21**, 615—625 (1939).

With each point x^i of an X_n is associated an $(n+1)$-dimensional projective space $P_{n+1}(x)$ and a quadratic hypersurface $Q_n(x)$. Then a conformal connection can be defined [K. Yano and Y. Mutô, Proc. phys.-math. Soc. Jap. **21**, 270—286 (1939); this Zbl. **21**, 427]. The author considers a hypersurface X_{n-1} in X_n. This surface determines a $P_n(x)$ in $P_{n+1}(x)$ and a quadratic hypersurface $Q_{n-1}(x)$ in $P_n(x)$ as a section of $Q_n(x)$. Then a conformal connection is defined on X_{n-1}, which leaves $Q_{n-1}(x)$ invariant. Some theorems are given about umbilical points and totally umbilical hypersurfaces. The author proves: the necessary and sufficient conditions that any generalized circle of a hypersurface be a generalized circle of the underlying manifold is that the hypersurface is totally umbilic [for generalized circles see K. Yano, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **4**, 1—59 (1939); this Zbl. **22**, 170]. *J. Haantjes* (Amsterdam).

Haantjes, J.: Eine Charakterisierung der konformeuklidischen Räume. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **43**, 91—94 (1940).

Aus der Definition eines konformeuklidischen Raumes C_n folgt unmittelbar, daß die Summe $\sum_1^p m_i x_i$ für jedes System von $p(>1)$ gegenseitig senkrechten m_i-Richtungen $\left(\sum_1^p m_i = n\right)$ gleich ist $n\,x$. Dabei ist x_i die skalare Krümmung der m_i-Richtung und x die skalare Krümmung des ganzen Raumes. Verf. beweist, daß diese Bedingung auch hinreichend ist, damit der untersuchte Raum (für $n \geqq 4$) konformeuklidisch sei. *Hlavatý* (Prag).

Levine, Jack: Groups of motions in conformally flat spaces. II. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 766—773 (1939).

D'après un résultat antérieur de l'A. (ce Zbl. **14**, 180) un espace de Riemann V_n, qui admet une représentation conforme sur un espace euclidien, dont la métrique peut s'écrire $ds^2 = h^2 e_i (dx^i)^2$ ($e_i = \pm 1$) possède comme groupe de mouvement G_r, un sous-groupe du groupe général conforme G_N à $N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ paramètres.

On considère ici des sousgroupes simples G_r de G_N, obtenus par des combinaisons convenables des N transformations infinitésimales $Xf = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ de G_N et l'on détermine à l'aide des n équations $\xi^i \frac{\partial h}{\partial x^i} + h \frac{\partial \xi^\varkappa}{\partial x^\varkappa} = 0$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$, la forme de la fonction h correspondante. En particulier, en supposant $h = f(R)$, où $R = e_i (x^i)^2$, on montre que le groupe G_r de V_n coincide avec le groupe $G_{\frac{n(n-1)}{2}}$ des rotations, sauf les cas où V_n est à courbure constante et le cas où $f(R) = \alpha R^{-1}$, α constante, quand au groupe $G_{\frac{n(n-1)}{2}}$ s'associe la transformation infinitésimale des similitudes.

G. Vranceanu (Bucureşti).

Bortolotti, Enea: Contributi alla teoria delle connessioni. II. Connessioni di specie superiore, fondamenti analitici, calcolo del Vitali generalizzato. Mem. Ist. Lombardi Sci. **24**, 1—39 (1939).

Jedem Punkte einer X_n^m (oder X_m) werden affine Räume $E_{N_1} \subset E_{N_2} \subset \cdots E_{N_\nu} \subset \cdots$ zugeordnet. In jedem E_{N_ν} wird ein (überzähliges) vektorielles Bezugssystem $\underset{A_\nu}{e}$ eingeführt $\left(\underset{R_\nu A_\nu}{K}{}^{A_\nu} \underset{A_\nu}{e} = 0\right)$. An die kovariante Ableitung wird die Bedingung gestellt: $\underset{A_\nu}{e} \nabla_a \underset{R_\nu}{K}{}^{A_\nu} = 0$. (Die Indizes $A_\nu, B_\nu, \ldots$ sind selbstverständlich die zusammengesetzten [verallgemeinerten] Vitalischen Indizes.) Von den Konnexionskoeffizienten $\Gamma_{B_\nu a}^{A_\nu}$ wird die Vitalische Bedingung als erfüllt vorausgesetzt, nämlich: $\Gamma_{B_\nu 1}^{A_\nu}$ sind Tensoren. Es zeigt sich, daß $\Gamma_{B_\nu 1}^{A_\nu}$ der Projektionstensor für Vektoren des $E_{(\nu+1)}$ in $E_{(\nu)}$ ist: $v = v^{A_\nu 1} \Gamma_{A_\nu 1}^{B_\nu} \underset{B_\nu}{e} + v^{A_\nu 1} \Omega_{A_\nu 1}$. Dabei ist $\Omega_{A_\nu, a} = \overset{\nu}{\nabla}_a \underset{A_\nu}{e} - \underset{A_\nu a}{Q}$ und $\underset{A_\nu a}{Q} \equiv \partial_a \underset{A_\nu}{e} - \underset{A_\nu a}{e}$. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Erfüllung der Vitalischen Forderung läßt sich mittels den Transformationsgrößen folgendermaßen schreiben:

$$U_{A_\nu 0}^{A_\nu 1} = \delta_{A_\nu 0}^{A_\nu 1} U_{A'_\nu}^{A_\nu}, \qquad U_{A'_\nu a'}^{A_\nu 1} = \delta_{A_\nu a}^{A_\nu 1} U_{A'_\nu}^{A_\nu} \theta_{a'}^{a} + \delta_{A_\nu 0}^{A_\nu 1} \partial_{a'} U_{A'_\nu}^{A_\nu},$$

wo $\theta_{a'}^{a}$ die Transformationskoeffizienten der X_n^m (X_m) sind. — Die Bedingung, damit $E_{\nu+1}$ der (2)-Oskulationsraum ist, ist $\underset{A_\nu a}{Q} \equiv 0$. — Für jedes μ, $1 \leqq \mu \leqq \nu$ läßt sich aus einem kovarianten Vektor w_{A_ν} des E_ν ein kovarianter Vektor $w_{A_{\mu-1} 0 \ldots 0}$ des $E_{\mu-1}$ konstruieren (wo $A_{\mu-1} 0 \ldots 0$ mit $A_{\mu-1}$ der Klasse $T_{\mu-1}$ angehört und die Anzahl der angeschriebenen Nullen $\nu - \mu + 1$ ist) und falls dieser Null ist, auch ein Vektor $w_{A_{\mu,\nu}}$ der mit seinen Indizes einer „nicht-ganzen" (non intera) Klasse gehört. — Aus der schon zitierten Formel $\Omega_{A_\nu, a} = \overset{\nu}{\nabla}_a \underset{A_\nu}{e} - \underset{A_\nu a}{Q}$ folgt die geometrische Interpretation der Parallelverschiebung der kontravarianten Vektoren des E_ν: das „Differential" $dv - \underset{A_\nu a}{Q} v^{A_\nu} du^a$ liegt in dem ν-ten Hauptraum Π_ν. Dabei ist Π_ν dadurch bestimmt, daß er mit E_ν nur den untersuchten Punkt gemeinsam hat und mit E_ν den Raum $E_{\nu+1}$ bestimmt. Als Hauptraum $\Pi_{\mu,\nu}$ wird der durch $\Pi_\mu, \Pi_{\mu+1}, \ldots, \Pi_\nu$ bestimmte Raum bezeichnet. Die genaue Untersuchung dieser Haupträume gestattet dem Verf. auch die Übertragungskoeffizienten für nicht-ganze Indizesklassen zu konstruieren. Zum Schluß wird die Theorie auf drei verschiedene Möglichkeiten der zusammengestellten Indizes angewendet. Die Arbeit schließt mit zahlreichen Literaturangaben. Die geometrische Anwendung dieses Algorithmus wird (zusammen mit Ref.) demnächst (als III der Folge der Contributi) publiziert. (Vgl. dies. Zbl. **16**, 135.)

Hlavatý (Prag).

Schouten, J. A., and D. van Dantzig: On ordinary quantities and W-quantities. Classification and geometrical applications. Compositio Math. **7**, 447—473 (1940).

The first part consists of results published by J. A. Schouten [Proc. Amsterdam **41**, 568—575, 709—716 (1938); this Zbl. **19**, 86; **20**, 73]. The second part is devoted to a particular discussion of relations between quantities (ordinary as well as

W-quantities) in X_m and X_n. The paper ends with a generalisation of Stokes formulae for ordinary quantities and W-quantities. The particular results of this paper cann't be described in a short review without necessary details known only by the students of this paper. *Hlavatý* (Prag).

Kosambi, D. D.: The tensor analysis of partial differential equations. J. Indian Math. Soc., N. s. **3**, 249—253 (1939).

Verf. betrachtet das Gleichungssystem

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + H^i_{\alpha\beta}\left(u, x, p^i_\gamma\right) = 0; \qquad p^i_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}; \tag{1}$$

wobei $H^i_{\alpha\beta}$ sich derart transformiert, daß dieses System bei Transformationen von x^i $(i = 1, \ldots, n)$ und u^α $(\alpha = 1, \ldots, m)$ invariant ist. Es handelt sich darum, eine kovariante Ableitung für Größen mit lateinischen und griechischen Indizes aus $H^i_{\alpha\beta}$ abzuleiten. Es stellt sich heraus, daß die Übertragungsparameter $\gamma^h_{\alpha i}$ bzw. $\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$ sich bis auf einen Term $\tau_\alpha A^h_i$ bzw. $2\tau_{(\gamma} A^\alpha_{\beta)}$ bestimmen lassen. Die zu (1) gehörige Übertragung ist also projektiv. *J. Haantjes* (Amsterdam).

Thomas, T. Y.: Imbedding theorems in differential geometry. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 841—850 (1939).

Verf. schildert die wichtigsten Resultate über das Einbettungsproblem einer r-fach stetig differenzierbaren n-dimensionalen Mannigfaltigkeit der Differentialgeometrie in euklidische Räume. Die diesbezüglichen Sätze von Whitney (dies. Zbl. **15**, 320), Thomas (dies. Zbl. **15**, 273; **16**, 327; **22**, 84), Bochner (dies. Zbl. **17**, 89) und Allendoerfer (dies. Zbl. **16**, 418) zusammenfassend wird der Unterschied zwischen dem differentialgeometrischen und dem entsprechenden topologischen Problem betont, wobei jedoch Verf. einen Hinweis auf eine gewisse Analogie zwischen den differentialgeometrischen und topologischen Sätzen, insbesondere was die Hurewiczsche Behandlung (dies. Zbl. **8**, 233) des bekannten Menger-Nöbelingschen Einbettungssatzes betrifft, nicht unterläßt. *G. Alexits* (Budapest).

Michal, A. D., and A. B. Mewborn: Abstract flat projective geometry. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **25**, 440—443 (1939).

Es handelt sich um eine ohne Beweis dargelegte Reihe von Ergebnissen, die sich als eine Fortführung gewisser anderer Untersuchungen über verwandte Themen erweisen (dies. Zbl. **16**, 307; **17**, 361; **18**, 367). — Ein Banachraum B von erlaubten Koordinaten x der Klasse C^3 wird durch die Hinzufügung einer Normierungskoordinate e^{x_0} (von der Klasse C^3) zu einem B_1 erweitert. Man setzt voraus, daß $X = (x, x_0)$ ein im Sinne von Veblen und Whitehead projektives Koordinatensystem für B_1 bedeuten. Ist $A(X)$ eine projektive skalare Funktion, so daß die Fréchetschen Differentiale $A(X; Y)$ gleich auflösbaren Funktionen des projektiven kontravarianten Vektors Y aus B_1 sind, dann lassen sich die Komponenten zweier geometrischer Objekte, nämlich der projektive Zusammenhang und die projektive Krümmung, allein durch $A(X)$ erklären. — Die projektive Krümmung erweist sich als Null; daher heißen diese abstrakten Geometrien „flach“. Der projektive Zusammenhang weist eine gewisse Symmetrie auf und ist gegenüber allen auflösbaren linearen Transformationen von $A(X)$ einschließlich aller Normierungen e^{x_0} invariant. Mehr noch, bei einer Änderung des darstellenden Vektors verhält er sich genau wie der lineare Zusammenhang. — Alle diese Eigenschaften lassen sich folgendermaßen umkehren: Besitzt ein topologischer Hausdorffscher Raum in einem Banachraum (dessen Erweiterung $e^{x_0} B$ weiter mit B_1 bezeichnet wird) Koordinaten von der Klasse C^3, und setzt man in B_1 das Vorhandensein eines geometrischen Objektes (des projektiven Zusammenhanges) voraus, das gewisse 6 Aussagen erfüllt (unter ihnen 1. die Symmetrie, 2. die zu dem linearen Zusammenhang ähnlich gebaute Umformung und 3. das Verschwinden der aus diesem Zusammenhang hergestellten Krümmung), so läßt sich ein projektives Koordinaten-

system, das den 5 Axiomen von Veblen und Whitehead genügt, mittels eines Differentialsystems mit lauter Fréchetschen Differentialen für B_1 bestimmen.

D. Barbilian (Bucureşti).

Konvexe Gebilde und Verwandtes:

Beretta, L., e A. Maxia: Insiemi convessi e orbiformi. Univ. Roma Rend. Mat., V. s. **1**, 1—64 (1940).

Die umfangreiche Arbeit gibt einen zusammenfassenden Bericht mit größtenteils ausgeführten Beweisen über den Begriff der konvexen Gebilde und insbesondere die Sätze über Kurven konstanter Breite in der metrischen Geometrie der Ebene und des Raumes, sowie ihre Verallgemeinerung in der affinen und relativen Differentialgeometrie. Im Zuge der Darstellung ergeben sich an vielen Stellen Vereinfachungen und Neugestaltungen der Beweise, von denen einige hervorgehoben seien. Ein neuer Beweis des Satzes von Motzkin, der die abgeschlossenen konvexen Punktmengen dadurch kennzeichnet, daß jeder äußere Punkt bezüglich ihrer nur eine Projektion hat, ein rein affiner Beweis für den Satz von der Existenz der Stützgeraden (bzw. -ebenen). Es folgt die Zurückführung der Gebilde, in denen es zu jedem äußeren Punkt P genau einen Punkt mit größtem Abstand von P gibt, auf die hyperkonvexen Bereiche von A. E. Mayer und der Nachweis ihrer äußeren Konvexität; zu ihnen gehören insbesondere die Bereiche fester Breite. Die Behandlung der Orbiformen beginnt mit dem Bücknerschen Satz, der sie dadurch kennzeichnet, daß zwei beliebige Normalen sich stets im Innern schneiden, bespricht ihre Extremumseigenschaften, Sechsscheitelsatz, Krümmungsschwerpunkt und stößt schließlich zu folgender Erweiterung eines Bücknerschen Satzes vor: Der zum Stützwinkel φ gehörige Durchmesser einer Eilinie schneide auf dieser einen Bogen der Länge $L(\varphi)$ ab und schließe mit ihm den Flächeninhalt $A(\varphi)$ ein, $l(\varphi)$ sei der Abstand der zu den Durchmesserenden gehörenden Stützgeraden, dann ist die Beziehung $2A(\varphi) - l(\varphi)L(\varphi) = \text{konst.}$ für Orbiforme kennzeichnend. Neuartig ist die Behandlung der räumlichen Kurven fester Breite, d. h. derjenigen geschlossenen Kurven C, die von der Normalebene jedes ihrer Punkte P in genau einem Gegenpunkt P_1 unter festem Abstand PP_1 getroffen werden, mittels der sphärischen Indikatrix der Sehnen PP_1. Es folgt die Besprechung der affinen Orbiformen nach Süss und Hirakawa; neu ist der Satz, daß die einzigen Eilinien, deren Affinnormalen in Gegenpunkten parallel sind, die Mittelpunktseilinien sind. *Harald Geppert* (Berlin).

Bol, G.: Ein Satz über Eilinien. Abh. math. Semin. Hansische Univ. **13**, 319—320 (1940).

Der bekannte Satz, daß eine Eilinie, die mit einem Kreis $2k$ Punkte gemein hat, mindestens $2k$ Scheitel besitzt, läßt sich im einfachsten Falle auch umkehren: Zu einer Eilinie mit mindestens 6 Scheiteln läßt sich stets ein Kreis angeben, der sie in mindestens 6 Punkten schneidet, oder anders: Die Eilinien der zyklischen Ordnung 4 sind genau die mit 4 Scheiteln. Beweis des letzten Satzes durch Betrachtung der Berührungspunktepaare der die Eilinie zweifach von innen berührenden Kreise, durch die eine gegenläufige topologische Abbildung der Eilinie in sich mit genau zwei Doppelpunkten erklärt wird; in letzteren und nur dort liegen die Höchstwerte der Krümmung. Eine einfache Folgerung dieses Satzes ist die, daß die Jordankurven der kinematischen Eigenordnung 4 genau die konvexen Mittelpunktskurven mit 4 Scheiteln sind. Definiert man die Höchstzahl der Schnittpunkte einer Jordankurve mit ihrem Spiegelbild an einer beliebigen Geraden als ihre Spiegelordnung, so folgt weiter, daß die Jordankurven der Spiegelordnung 4 genau die konvexen Mittelpunktskurven mit 4 Scheiteln und 2 Symmetrieachsen sind. *Harald Geppert* (Berlin).

Ruban, A. N.: Sur le problème du cylindre flottant. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **25**, 350—352 (1939).

Ein homogener Zylinder möge auf dem Wasser so schwimmen, daß seine Erzeugenden stets der Wasserfläche parallel sind; es wird gefragt, welche Form sein senkrechter

Querschnitt haben muß, damit der Zylinder in jeder Lage im Gleichgewicht sei. Dies kommt auf die Bestimmung aller ebenen geschlossenen Kurven C hinaus, bei denen zu jedem Randbogen der festen Länge S eine Sehne der festen Länge L gehört. Die Frage ist durch eine früher besprochene Arbeit des Ref. erledigt (vgl. dies. Zbl, **22**, 266). Verf. beschränkt sich auf konvexe Kurven; seine Ergebnisse sind in denen des Ref. enthalten; u. a. stellt er die falsche Behauptung auf, daß, wenn S der halbe Umfang von C ist, C ein Kreis sein müsse. *Harald Geppert* (Berlin).

Salgaller, V., et P. Kostelianetz: Sur le problème du cylindre flottant. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **25**, 353—355 (1939).

Verff. beschäftigen sich mit der im vorangehenden behandelten Aufgabe, konstruieren einige nichtkonvexe Kurven C mit der genannten Eigenschaft, stellen fest, daß eine konvexe Kurve C der genannten Klasse keine Ecken besitzen kann, und gewinnen einen Satz von Salkowski (dies. Zbl. **10**, 77) wieder. Ihre Ergebnisse sind in denen der oben genannten Arbeit des Ref. enthalten. *Harald Geppert.*

Alexandroff, A. D.: Über konvexe Flächen mit ebenen Schattengrenzen. Rec. math. Moscou, N. s. **5**, 309—316 u. deutsch. Zusammenfassung 316 (1939) [Russisch].

Als konvexes Flächenstück S wird eine nicht in einer Ebene liegende, beschränkte, zusammenhängende und offene Menge auf der Oberfläche eines konvexen Körpers definiert; Schattengrenze auf S ist jede Menge von Punkten auf S, die in Stützebenen liegen, welche parallel zu einer Richtung sind. Ohne weitere Regularitätsannahmen zeigt Verf.: Ein konvexes Flächenstück mit lauter ebenen Schattengrenzen ist ein Stück entweder einer Fläche 2. Ordnung oder eines konvexen Kegels. — Das Hauptziel des Verf. ist zu zeigen, daß bei der gemachten Annahme gewisse Resultate von Gitomirski [Rec. math. Moscou, N. s. **3**, 347—351 (1938); dies. Zbl. **19**, 193; dem Ref. stand die Arbeit nicht zur Verfügung] gelten, so daß die Methode des Verf. stärker ist als die Methode von Gitomirski, welche Differenzierbarkeitsannahmen benutzt. Zu dieser Feststellung verwendet Verf. einige von Busemann und Feller (dies. Zbl. **12**, 274) gefundene Ergebnisse über konvexe Flächen. *B. Petkantschin* (Sofia).

Alexandroff, A.: Über die Oberflächenfunktion eines konvexen Körpers. (Bemerkung zur Arbeit „Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern".) Rec. math. Moscou, N. s. **6**, 167—173 u. deutsch. Zusammenfassung 173—174 (1939) [Russisch].

Die Betrachtungen schließen sich an eine frühere Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **17**, 426) an. Die Grundeigenschaften der dort eingeführten Oberflächenfunktion $F(H, \omega)$ eines konvexen Körpers werden auf kürzerem Wege abgeleitet, wobei zugleich eine Lücke in der genannten Abhandlung ausgefüllt wird. Als Mittel wird die hier aufgestellte Formel verwendet:

$$\int_{\Omega} f(\bar{n})\, F(H, d\omega) = \int_{\Sigma} f(\bar{n}(\bar{r}))\, F(d\sigma) = \int_{\Omega} f(\bar{n}(\bar{r}))\, \frac{R(\bar{r})^{n-1}}{\cos\varphi(\bar{r})}\, F(d\tau).$$

Hierin bezeichnet H einen O im Innern enthaltenden konvexen Körper des n-dimensionalen Raumes, Σ dessen Rand, Ω die Oberfläche der Einheitskugel um O. $\bar{r}$ ist der Ortsvektor eines Punktes auf Ω, $R\bar{r}$ $(R = R(\bar{r}) > 0)$ der Durchstoßpunkt auf Σ mit der Halbgeraden $\bar{r}$, $\bar{n} = \bar{n}(\bar{r})$ das Gaußsche sphärische Bild auf Ω von $R\bar{r}$, $\varphi(\bar{r})$ der Winkel zwischen $\bar{r}$ und $\bar{n}$. Einer Menge ω von Punkten n auf Ω entsprechen: eine Menge σ von Punkten $R\bar{r}$ auf Σ und eine Menge τ von Punkten $\bar{r}$ auf Ω; $F(\sigma)$ und $F(\tau)$ sind bzw. die Oberflächen von σ und τ. $f(\bar{n})$ ist eine stetige Funktion auf Ω.

B. Petkantschin (Sofia).

Dinghas, Alexander: Geometrische Anwendungen der Kugelfunktionen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, N. F. **1**, 213—235 (1940).

Für ebene Eilinien C gilt nach Hurwitz folgende Ungleichung für das isoperimetrische Defizit: $0 \leqq \frac{L^2}{4\pi} - F \leqq \frac{1}{4} Q$, worin $Q = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varrho^2\, d\varphi - F \geqq 0$ den Inhalt

der Evolute von C, ϱ den Krümmungsradius von C bezeichnen. Eine ähnliche Verschärfung gilt auch für die Quermaßintegrale der n-dimensionalen konvexen Körper K:

$$(1) \qquad 0 \leqq \frac{W_{n-1}^2}{W_n} - W_{n-2} \leqq \frac{n-1}{2n} Q_n ,$$

worin $Q_n = \frac{1}{n}\int P^2 \, d\omega - W_{n-2} \geqq 0$, $P = \frac{1}{n-1}(R_1 + \cdots + R_{n-1})$ den Mittelwert der Hauptkrümmungsradien $R_1 \ldots R_{n-1}$ von K, $d\omega$ das Flächenelement der n-dimensionalen Einheitssphäre S_n bezeichnen. — Den Beweis erbringt Verf. durch Entwicklung der Stützfunktion nach n-dimensionalen Kugelfunktionen X_ν unter Heranziehung einer entsprechenden Erweiterung und Verschärfung des Wirtingerschen Lemmas: Bedeuten ∇_1, Δ_1 den ersten und zweiten Differentialoperator in Polarkoordinaten auf S_n, so gelten für jede auf S_n eindeutige und zweimal stetig differenzierbare Funktion u, die $\int u \, d\omega = 0$ erfüllt, die Ungleichungen

$$\frac{1}{2n}\int_{S_n} \{(n-1)\nabla_1 u - \Delta_1^2 u\} \, d\omega \leqq \int_{S_n} [(n-1)u^2 - \nabla_1 u] \, d\omega \leqq 0 ,$$

wobei rechts die Gleichheit nur für $u = X_1$, links für $u = X_1 + X_2$ eintritt. — Weiterhin bestimmt Verf. diejenigen Extremalkörper, bei denen in (1) rechts die Gleichheit steht; ist K_i der Drehkörper mit der Gleichung $\left(\sum_{k \neq i}^{1 \ldots n} x_k^2\right)^{\frac{1}{3}} + x_i^{\frac{2}{3}} = c_i \geqq 0$, $K_i + h_i S_n$ konvex ($i = 1 \ldots n-1$), so sind die Extremalkörper lineare Kombinationen dieser Körper für alle zulässigen positiven Konstanten h_i; im Falle der Ebene erhält man Parallelkurven zu den Hurwitzschen Sternkurven $x_1 = 2c\cos^3\varphi$, $x_2 = 2c\sin^3\varphi$. — Aus (1) läßt sich bei stetig gekrümmten Körpern K die Existenz mindestens zweier Punkte 1, 2 auf K folgern, so daß $W_n P_1 < W_{n-1} < W_n P_2$ wird, wodurch die entsprechende ebene Ungleichung $2\pi\varrho_1 < L < 2\pi\varrho_2$ verallgemeinert wird. (1) läßt sich auf die gemischten Inhalte zweier konvexer Körper erweitern. *Harald Geppert.*

Stoker, J. J.: Unbounded convex point sets. Amer. J. Math. **62**, 165—179 (1940).

Es werden hier einfache geometrische Sätze über unbeschränkte konvexe Punktmengen im Euklidischen E_3 auf einfache Art bewiesen, Ergebnisse, die z. T. auch bei Steinitz in J. reine angew. Math. **143**, 128—175 (1913); **144**, 1—40 (1914); **146**, 1—52 (1915) auf andere Art gewonnen sind. Einfache Beispiele sind: 1. die Punkte zwischen zwei parallelen Ebenen, 2. die Punkte eines Zylinders, 3. die Punkte zur einen Seite einer Ebene. Es wird insbesondere gezeigt, daß diese 3 Beispiele alle Möglichkeiten über die topologische Struktur des Randes erschöpfen. Ein anderes Ergebnis: Genau dann gibt es einen Randpunkt mit einer Stützebene, dessen innere Halbnormale in der Menge liegt, wenn der Rand homomorph zur Ebene ist. *Blaschke* (Hamburg).

Schmidt, Erhard: Über die isoperimetrische Aufgabe im n-dimensionalen Raum konstanter negativer Krümmung. I. Die isoperimetrischen Ungleichungen in der hyperbolischen Ebene und für Rotationskörper im n-dimensionalen hyperbolischen Raum. Math. Z. **46**, 204—230 (1940).

Der Verf. hat in Math. Z. **44**, 689—788 (1939) (dies. Zbl. **20**, 373—374) die isoperimetrische Hauptungleichheit für die Kugel im Euklidischen E_n bewiesen. Jetzt stellt er sich die entsprechende Aufgabe für den hyperbolischen Raum H_n. In dem vorliegenden ersten Teil der Arbeit werden die Ebene H_2 und Drehkörper im H_n behandelt. Dabei wird von einem „Drehkörper" angenommen, daß er bei der Gruppe der Drehungen um eine Gerade in sich übergeht. Bemerkenswert ist, daß bei dieser Untersuchung wieder keine einschränkenden Annahmen über den Zusammenhang der zulässigen Körper gemacht werden, noch weniger wird Konvexität vorausgesetzt. Nur der Rand wird zweimal stetig differenzierbar angenommen. Zuerst (§ 1) der Fall der hyperbolischen Ebene H_2, die in der Halbebene $x > 0$ auf die Art von Poincaré mit dem hyperbolischen Bogenelement $dS^2 = \frac{ds^2}{x^2}$ verwirklicht wird! Es sei 2α der

kleinste Winkel, unter dem die Randlinie C des vorgegebenen Gebiets in $x > 0$ von den Punkten der y-Achse gesehen wird. $2\alpha'$ [$2\alpha''$] der entsprechende Winkel für eine Kreislinie gleichen (hyperbolischen) Umfangs [Flächeninhalts] wie C. Dann läßt sich durch einfachste Abschätzungen (ganz ähnlich wie für die E_2) zeigen

$$\cos\alpha'' \geqq \frac{\cos\alpha'}{\cos(\alpha - \alpha')}, \tag{1}$$

was eine Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichheit $\alpha'' \leqq \alpha'$ bedeutet. Diese Ungleichheit (1) wird weiter verschärft und in § 2 gezeigt, daß die Gleichheit in der durch die Verschärfung aus (1) entstandenen Formel nur für eine ganz bestimmte Randlinie C gilt. Das hier im Falle der H_2 angewandte Verfahren läßt sich nun überraschenderweise (§ 3) auf die Drehkörper im H_n übertragen. Diese Methode von E. Schmidt läßt sich als eine Durchführung und Weiterbildung des klassischen, von H. A. Schwarz (1884, Werke II, S. 327—340) angewandten Verfahrens ansehen. Eine Übertragung auf den Fall der sphärischen Geometrie ist in Aussicht gestellt.

Blaschke (Hamburg).

Takasu, Tsurusaburo: Über die Carlemansche Isoperimetrie auf den Minimalflächen. Jap. J. Math. **15**, 269—275 (1939).

Der Autor gibt einen Beweis des Carlemanschen Satzes über Isoperimetrie auf den Minimalflächen unter kombinierter Verwendung der Carlemanschen und Beckenbachschen Methode. Dabei benutzt Verf. eine bekannte Ungleichheit über analytische Funktionen, die mit dem Steinerschen Satz über Isoperimetrie äquivalent ist. *Kubota.*

Vázsonyi, André: Caractérisation topologique des continus plans d'ordre quatre. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 1775—1776 (1939).

Die gestaltliche Beschreibung reeller Gebilde einer vorgegebenen Ordnung wird hier auf eine neue Weise in Angriff genommen. Betrachtet werden als Gebilde die Kontinua K der Ebene; als Ordnung wird zugrunde gelegt die lineare (also die maximale Mächtigkeit n des Durchschnitts von K mit den Geraden). Verf. teilt hierüber folgenden Satz (ohne Beweis) mit: Für $n = 2, 3, 4$ ist ein Kontinuum K (der Ordnung n) homöomorph zu einer (echten oder unechten) Teilmenge eines (passenden) ebenen Kontinuums k dieser Ordnung n, welches Summe aus n Bogen der Ordnung 2 (Konvexbogen) ist. Für $n = 4$ gibt es genau drei verschiedene Typen solcher k. Bemerkt wird noch, daß K bei beliebigem n homöomorph ist zu einer Teilmenge eines Kontinuums, welches Summe aus n Konvexbogen, also höchstens von der Ordnung $2n$, ist. *Haupt.*

Topologie:

● **Morse, Marston: Functional topology and abstract variational theory.** Mém. Sci. math. Fasc. **92**, 79 pag. (1939).

Dieses Heft enthält einen knappen, aber inhaltsreichen Abriß der im wesentlichen vom Verf. stammenden functional topology, die inzwischen sehr weit bekannt geworden und in ihrer Bedeutung anerkannt ist. Von der etwas später erschienenen Darstellung von H. Seifert und W. Threlfall (dies. Zbl. **21**, 141) unterscheidet sich dieser Aufbau besonders durch die weiteren Voraussetzungen. Die Theorie gründet sich hier auf die Hypothese der F-accessibility, nach welcher für die zugrunde gelegte Funktion F in dem betrachteten metrischen Raum M jeder nicht berandende Zyklus, der modulo der Punktmenge p mit $F(p) \leqq c + \varepsilon$ für jedes positive ε nullhomolog ist, homolog einem Zyklus in der Menge $F(p) \leqq c$ ist. Dabei werden Vietoriszyklen zugrunde gelegt. Eine weitere Voraussetzung ist die upper-reducibility, welche zu dem Nachweis dient, daß jede obere oder untere Homologiegrenze in einem gewissen homotopic critical point angenommen wird. Die in den beiden ersten Kapiteln entwickelte Theorie wird im dritten Kapitel auf das Extremalproblem der Verbindungskurven zwischen zwei festen Punkten a und b eines metrischen Raumes Σ und den von den Verbindungskurven gebildeten Raum $\Omega(a, b)$ an Stelle von M angewandt. Historische Bemerkungen und eine Bibliographie vervollständigen das Heft. *Wolfgang Franz* (Gießen).

Elsholz, L.: Die Änderung der Bettischen Zahlen der Niveauflächen einer stetigen Funktion, die auf einer Mannigfaltigkeit definiert ist. Rec. math. Moscou, N. s. **5**, 559—564 u. deutsch. Zusammenfassung 564 (1939) [Russisch].

Auf einer Mannigfaltigkeit M^n sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion f gegeben; c sei ein kritischer Wert, der einem nicht ausgearteten kritischen Punkt mit der typischen Zahl k entspricht; in der Strecke $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ liege nur der kritische Wert c. Bezeichnet p^r die r-te Bettische Zahl mod 2, so gilt für die Niveaufläche $N=(f=c-\varepsilon)$ bzw. $N'=(f=c+\varepsilon)$: 1) $p^k(N)=p^k(N')-1$ und $p^{n-k-1}(N)=p^{n-k-1}(N')-1$ oder 2) $p^{k-1}(N)=p^k(N')+1$ und $p^{n-k}(N)=p^{n-k}(N')+1$. Die Bettischen Zahlen anderer Dimensionen ändern sich nicht. Im Falle $2k=n$ kann noch eine Möglichkeit auftreten: 3) Alle Bettischen Zahlen der Niveauflächen stimmen überein. (Gekürzte deutsche Zusammenfassung.) *Nöbeling* (Erlangen).

Chogoshvili, G. S.: On level surfaces and domains of smaller values of a function defined on a bounded manifold. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **24**, 635—639 (1939).

Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit mit dem Rand B ist eine Funktion f definiert, die auf B die Funktion f_b induziert. Der Verf. untersucht die Änderung der Bettischen Zahlen der Niveauflächen $f=c$ bzw. der Gebiete $f\leqq c$ beim Durchgang durch einen kritischen Punkt von f_b. *E. Hölder* (Braunschweig).

Tucker, A. W.: The algebraic structure of complexes. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **25**, 643—647 (1939).

Es seien e und f zwei quadratische Matrizen mit Elementen aus einem beliebigen Ring mit folgenden Eigenschaften: $ee=1$, $ff=0$, $ef+fe=0$. Verf. bezeichnet die Elemente von e mit yEx, die von f mit yFx, wobei die Symbole y und x eine Menge von Unbestimmten durchlaufen, welche „Zellen" genannt werden (ohne daß ihnen eine Dimension und Inzidenzen aufgeprägt zu sein brauchen); auf diese Weise entsteht ein algebraisches System X, welches man formal als „Komplex" bezeichnen kann, weil man darin eine kombinatorische Topologie treiben kann. Beispielsweise ordnet Verf. jeder „Zelle" x bzw. y von X als Rand bzw. Corand zu: $Fx=y(yFx)$ bzw. $yF=(yFx)x$, wobei über y bzw. x summiert wird. Weiter entwickelt Verf. für die „Komplexe" X die Grundlagen der Theorie der Homologie, der Abbildungen algebraischer Komplexe (chain-mappings), der Produkte von Komplexen und der zugehörigen Co-Theorien. *Nöbeling* (Erlangen).

Markoff, A.: On the definition of a complex. Rec. math. Moscou, N. s. **5**, 545—550 (1939).

Im Anschluß an das Buch von P. Alexandroff und H. Hopf über Topologie (dies. Zbl. **13**, 79) wird unter leichter Modifizierung der Grundbegriffe auf eine neue, einfachere Definitionsmöglichkeit für den Begriff des euklidischen Komplexes hingewiesen: Ein Komplex K im n-dimensionalen euklidischen Raum E^n ist dann und nur dann ein euklidischer Komplex, wenn die konvexen Hüllen irgend zweier punktfremder Elemente von K selbst keine gemeinsamen Punkte haben. Anschließend wird ein Satz über ε-Transformationen euklidischer Komplexe bewiesen.

Wolfgang Franz (Gießen).

Kurosch, Alexander: Zur Theorie der teilweise geordneten Systeme von endlichen Mengen. Rec. math. Moscou, N. s. **5**, 343—345 u. deutsch. Zusammenfassung 345—346 (1939) [Russisch].

Endliche, z. B. offene Überdeckungen topologischer Räume können in bekannter Weise als Komplexe angesehen werden; $a<b$ möge aussagen, daß b „feiner" als a ist; a ist ein simpliziales Bild, sog. Projektion, von b. Entsprechendes erhält man für die zugehörigen Bettischen Gruppen usw. Sieht man von dem Grundraume ab, so entsteht eine Theorie teilweise geordneter Klassen endlicher Komplexe bzw. Gruppen. Verf. zeigt, daß man allgemeiner teilweise geordnete Klassen endlicher Mengen A_α betrachten kann: Gibt es für je zwei solche Mengen einen gemeinsamen Nachfolger und ist $A_\alpha<A_\beta$ immer eine „Projektion" von A_β: $A_\alpha=\pi_{\alpha\beta}A_\beta$ mit der Bedingung $\pi_{\gamma\alpha}=\pi_{\gamma\beta}\pi_{\beta\alpha}$ für die Projektionen, so ist jede Projektionsmenge in einer vollständigen enthalten. Dabei heißt eine Menge P von Elementen aus einigen A_α eine Pro-

jektionsmenge, wenn je zwei Elemente aus P Projektionen eines gemeinsamen Elementes von P sind. Sie heißt vollständig, falls sie aus jeder Menge A_α ein Element enthält. *Bedřich Pospíšil* (Brünn).

Flexner, William W.: The generality of finite abstract complexes. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **25**, 637—639 (1939).

Es sei A ein abstrakter endlicher Komplex (vgl. Lefschetz, dies. Zbl. **16**, 419). Ein offener Teilkomplex C eines abstrakten Komplexes D ist eine Teilmenge von D derart, daß aus $x \in C$ und $y > x$ folgt $y \in C$. Verf. zeigt für jedes A die Existenz eines offenen Teilkomplexes B eines simplizialen Komplexes derart, daß für jedes q die Homologiegruppen $H^q(A)$ und $H^{q+\alpha}(B)$ isomorph sind; hierbei ist $\alpha = 0$, wenn A keine Elemente negativer Dimension und keine nulldimensionale Torsion hat; sonst ist $\alpha > 0$; die Koeffizientengruppe ist beliebig. Hiernach sind bezüglich der Homologietheorie im endlichen Fall simplizial realisierbare Komplexe genau so allgemein wie die abstrakten Komplexe. *Nöbeling* (Erlangen).

Wylie, S.: Duality and intersection in general complexes. Proc. London Math. Soc., II. s. **46**, 174—198 (1940).

Es sei $K = K_n$ ein homogen-n-dimensionaler, endlicher Komplex. L sei ein abgeschlossener Teilkomplex von K mit normaler Umgebung in K. Jedes n-Simplex σ_n von K sei orientiert; dann bilden die σ_n einen n-dimensionalen algebraischen Komplex; die im Rand desselben enthaltenen $(n-1)$-Simplexe σ_{n-1} und deren Seiten bilden einen abgeschlossenen Komplex, der mit J bezeichnet sei. Das Komplement K/σ_r eines σ_r von K ist das System aller Simplexe σ_s der abgeschlossenen Hülle von K, für welche $\sigma_r\sigma_s$ ein Simplex von K ist. $K \bmod L$ heißt r-regulär, wenn für jedes nicht in J enthaltene Simplex σ_q das Komplement K/σ_q dieselbe Bettische Zahl R_{n-r-1} und dieselben Torsionszahlen θ_{n-r-2} hat wie die $(n-q-1)$-Sphäre, während für jedes σ_q von J die genannten Zahlen dieselben sind wie für einen Punkt. Verf. beweist auf zwei Arten den Satz: Ist $K \bmod L$ p- und $(p-1)$-regulär, so besteht zwischen der $(n-p)$-ten Gruppe von $K \bmod L$ und der p-ten Gruppe von $K - L \bmod J$ die klassische Dualitätsrelation:

$$R_{n-p}(K \bmod L) = R_p(K - L \bmod J), \qquad \theta_{n-p-1}(K \bmod L) = \theta_p(K - L \bmod J)$$

(Koeffizienten sind ganze Zahlen). Dieser Satz enthält sowohl den allgemeinen Dualitätssatz in der Fassung von Lefschetz (Topology, Amer. Math. Soc. Koll. Publ., XIII, 1930), als auch den Dualitätssatz von Čech (Ann. of Math. (2) **37**, 681—697; dies. Zbl. **15**, 13), also alle bekannten allgemeinen Dualitätssätze für Komplexe. — Im 2. Teil der Arbeit wird gezeigt, wie weit die Definitionen und Sätze der Schnittheorie von den Mannigfaltigkeiten auf homogen-n-dimensionale Komplexe ausgedehnt werden können; es ergeben sich dabei verschiedene Typen von Schnitten. — Die Überlegungen der Arbeit sind bewußt geometrisch (im Sinne der kombinatorischen Topologie), im Gegensatz zu neueren Arbeiten über Dualität und Multiplikation von Zyklen, die meist algebraisch verfahren. — Es sei noch erwähnt, daß Verf. zum Studium der Dualität „Zyklen vom dualen Typ" einführt, d. h. Zyklen der ersten Ableitung K' von K, die homolog sind zu Zyklen von dualen Zellen. *Nöbeling* (Erlangen).

Flexner, William W.: Character group of a relative homology group. Ann. of Math., II. s. **41**, 207—214 (1940).

Es sei L ein Teilkomplex eines endlichen Komplexes K. Weiter sei ${}^p\mathfrak{H}^G(L, K)$ die Restklassengruppe der Gruppe aller in K berandenden p-dimensionalen Zyklen von L bezüglich der Untergruppe der in L berandenden Zyklen; der Koeffizientenbereich sei eine diskrete oder bikompakte abelsche Gruppe G. Schließlich sei ${}^p\mathfrak{H}_H(L, K)$ die Restklassengruppe der Gruppe aller p-dimensionalen Cozyklen von L bezüglich der Untergruppe aller derjenigen, welche die in L liegenden Teile von Cozyklen von K sind; hierbei ist der Koeffizientenbereich die bikompakte bzw. diskrete Charaktergruppe H von G. Verf. zeigt u. a.: ${}^p\mathfrak{H}_H(L, K)$ ist die Charaktergruppe von ${}^p\mathfrak{H}^G(L, K)$

(und umgekehrt); ${}^p\mathfrak{H}_H(L, K)$ ist isomorph zur Restklassengruppe der p-dimensionalen Cohomologiegruppe ${}^p\mathfrak{H}_H(L)$ (mit dem Koeffizientenbereich H) von L bezüglich der Untergruppe derjenigen Klassen (Cosets) von ${}^p\mathfrak{H}_H(L)$, welche die auf L liegenden Teile von Cozyklen von K enthalten. *Nöbeling* (Erlangen).

Eilenberg, Samuel: Cohomology and continuous mappings. Ann. of Math., II. s. **41**, 231—251 (1940).

Let K be a geometrical locally finite complex with oriented convex cells σ_i^n of dimension n; let $\partial_{ij} = 1, -1, 0$ according as σ_i^n is positively, negatively, or not at all on the boundary of σ_j^{n+1}. Then $\sum_j \partial_{ij}\sigma_j^{n+1}$ is called the coboundary of σ_i^n. A close analogy with usual cycles and homologies allows us to define the cohomology groups ${}^nH_G(K)$ of K of dimension n, etc. (G is the abelian group of the coefficients in the chains.) Denoting by K^n the closed subcomplex of K consisting of all its cells of dimension $\leqq n$, let f be a continuous mapping of $K' + K^n$ into Y, where K' is any closed subcomplex of K, Y simple in dimension n, e. g. a sphere of an arbitrary dimension. Let $c^{n+1}(f)$ be the chain in K with coefficients in the Hurewicz nth homotopy group π_n of Y such that the coefficient of σ_j^{n+1} is determined by the map under f of the boundary of σ_j^{n+1}. Author shows (p. 239) that $c^{n+1}(f)$ is a cocycle in $K - K'$, cohomologous to zero in $K - K'$ if and only if there is a continuous mapping of $K' + K^{n+1}$ into Y which coincides with f on $K' + K^{n-1}$. As a generalization of a theorem of Hopf and Whitney is then (p. 243) shown that, supposing ${}^iH_{\pi_i}(K) = {}^{i+1}H_{\pi_i}(K) = 0$ for $i > n$, the elements of ${}^nH_{\pi_n}(K)$ are in a one-to-one correspondence with the homotopy classes of the continuous mappings of K into Y. The paper contains finally several applications, e. g. (part V) a homology interpretation of the foregoing results.
Bedřich Pospíšil (Brünn).

Whitehead, J. H. C.: Simplicial spaces, nuclei and m-groups. Proc. London Math. Soc., II. s. **45**, 243—327 (1939).

In dieser Arbeit werden zwei neue, mit Hilfe dimensionsverändernder Prozesse definierte kombinatorisch-topologische Begriffe eingeführt und erörtert. 1. Von zwei Komplexen wird gesagt, sie haben denselben Nucleus, wenn sie durch Anwendung einer Operation „Kontraktion“ oder der inversen Operation oder einer Folge von solchen ineinander übergehen. Eine Kontraktion kann auf ein k-Simplex S^k und ein auf dem Rande von S^k gelegenes $(k-1)$-Simplex S^{k-1} angewandt werden, wenn S^k das einzige k-Simplex ist, das S^{k-1} auf dem Rande trägt; es werden dann S^k und S^{k-1} aus dem Komplex entfernt. Der Nucleus ist eine kombinatorische Invariante des Komplexes, ob er auch eine stetigkeitstopologische Invariante ist, steht dahin; das letztere wird nur für solche Komplexe gezeigt, deren Fundamentalgruppe einer gewissen sehr einschränkenden Bedingung genügt. (Anm. d. Ref.: Diese Bedingung ist schon unter allen zyklischen Gruppen nur für die mit 1, 2, 3, 4 und 6 Elementen erfüllt, wie die Einheitentheorie der Kreiskörper zeigt.) 2. Von zwei Komplexen wird gesagt, sie haben dieselbe m-Gruppe, wenn sie durch eine Operation „Ausbohrung“ mit einer Ordnung $> m$ oder durch die inverse Operation oder durch eine Folge von solchen Operationen oder solchen der unter 1. genannten Art ineinander übergehen. Eine Ausbohrung der Ordnung k entfernt aus dem Komplex ein k-Simplex. Die m-Gruppe stellt in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung des Begriffes der Fundamentalgruppe dar: Gleichheit der Fundamentalgruppen zweier Komplexe ist gleichwertig mit der Gleichheit der 2-Gruppen. Für zwei gegebene endliche Komplexe dürfte jedoch die Übereinstimmung der m-Gruppen für $m > 2$ ebenso wie die der Nuclei nicht in endlich vielen Schritten entscheidbar sein. Das Hauptresultat ist folgendes: Gehören zwei Komplexe zur gleichen Homotopieklasse (im Sinne von Hurewicz), so haben sie die gleichen m-Gruppen für alle m, die m-Gruppen sind also stetigkeitstopologische Invarianten; umgekehrt gehören endliche Komplexe von höchstens n Dimensionen mit gleicher $(n-1)$-Gruppe zur selben

Homotopieklasse. In den Beweisen spielen Neueinfügungen von Zellen in den Komplex, in ähnlicher Art wie sie von Aronszajn (dies. Zbl. **16**, 279) eingeführt sind, eine wichtige Rolle. Enge Beziehungen bestehen zu der Homotopietheorie von Hurewicz (dies. Zbl. **10**, 378; **11**, 371; **13**, 229; **13**, 283); die hier untersuchten durch die Fundamentalgruppe in den höherdimensionalen Homotopiegruppen induzierten Automorphismen dürften in der (bis jetzt leider noch ausstehenden) ausführlichen Begründung der Hurewiczschen Theorie ebenso wie in deren Weiterführung von Bedeutung sein. Auf die Verbindung zu den Reidemeisterschen Homotopieketten geht der Verf. in einer besonderen Veröffentlichung (vgl. nachstehendes Ref.) ein. — In einem Abschnitt über Mannigfaltigkeiten wird für einen m-dimensionalen Komplex K, der in eine Mannigfaltigkeit M eingebettet ist, eine „reguläre Nachbarschaft" konstruiert. Im Falle, daß M ein euklidischer Raum E^n mit hinreichend hoher Dimension ($n \geqq 2m + 5$) ist, gilt folgendes: Stimmen die Fundamentalgruppe und die Homologiegruppen von K mit denen eines k-Simplexes bzw. einer k-Sphäre überein, so ist eine reguläre Nachbarschaft von K ein n-Simplex bzw. das topologische Produkt aus k-Sphäre und $(n - k)$-Simplex. — In weiteren Abschnitten werden auch unendliche Komplexe, solche mit unendlich vielen Ecken und endlich-, jedoch nicht beschränktdimensionalen Simplizes betrachtet. Deren kombinatorische und stetigkeitstopologische Theorie wird entwickelt und die Ausdehnungsmöglichkeiten der Resultate auf diesen Fall werden untersucht. *Wolfgang Franz* (Gießen).

Whitehead, J. H. C.: On certain invariants introduced by Reidemeister. Quart. J. Math., Oxford Ser. **10**, 81—83 (1939).

In dieser Arbeit wird eine Beziehung zwischen der vom Verf. kürzlich aufgestellten Theorie der Nuclei und m-Gruppen (vgl. vorsteh. Ref.) und der vom Ref. entwickelten Theorie der Homotopiekettenringe hergestellt. Es wird gezeigt, daß die Invarianten des Homotopiekettenringes eines endlichen Simplizialkomplexes Invarianten der Homotopieklasse im Sinne von Hurewicz (dies. Zbl. **13**, 229) des Komplexes sind. Daraus folgt insbesondere, daß diese Invarianten auch im Sinne der Stetigkeitstopologie invariant sind. *K. Reidemeister* (Marburg a. d. L.).

Rham, Georges de: Sur les complexes avec automorphismes. Comment math. helv. **12**, 191—211 (1940).

Es sei ein topologischer Komplex C gegeben und eine abstrakte Gruppe G derart, daß jedem Element γ von G ein ihm homomorph zugeordneter Automorphismus $T(\gamma)$ von C entspricht. Ein solcher Komplex mit Automorphismen $[C, T(\gamma)]$ wird als isomorph mit einem anderen zur selben Gruppe G gehörigen Komplex $[C', T'(\gamma)]$ betrachtet, wenn ein Isomorphismus S von C und C' existiert, so daß $T'(\gamma) = S\,T(\gamma)S^{-1}$ gilt für jedes γ von G. Der wichtigste Sonderfall, in dem die Automorphismen $T(\gamma)$ fixelementfrei sind, d. h. keine Zelle des Komplexes C invariant lassen, insbesondere der Fall, daß die Automorphismengruppe sich aus der Deckbewegungsgruppe einer regulären Überlagerung von C ableiten läßt, ist in einer Reihe von Arbeiten von K. Reidemeister (s. z. B. dies. Zbl. **12**, 126 u. **14**, 137) und dem Ref. (dies. Zbl. **15**, 84) untersucht worden. Hier werden für den allgemeinen Fall die entsprechenden Begriffsbildungen eingeführt und weiter untersucht. Mit Hilfe des Gruppenringes von G ergeben sich Bedingungen für die kombinatorische Äquivalenz zweier Komplexe mit Automorphismen. Von besonderer Wichtigkeit ist der Übergang vom Gruppenring zu den Restklassen nach einem Ideal, insbesondere einem Primideal des Gruppenringes. Ist der Restklassenbereich ein kommutativer Körper, so wird für gewisse aus den verallgemeinerten Kettengruppen und den Bettischen Gruppen zusammengesetzte Gruppen eine Isomorphie bewiesen, welche nach Art der Euler-Poincaréschen Formel gebildet ist und im einfachsten Spezialfall diese Formel in Evidenz setzt, i. a. jedoch wesentlich mehr besagt. Ferner führt diese Isomorphie im fixelementfreien Falle zu einer als Determinante dargestellten Invariante für Komplexe mit Automorphismen, welche eine bis auf Elemente von G bestimmte Zahl des Restklassenbereiches ist. Im Falle, daß die universelle Überlage-

rung zugrunde gelegt wird und alle verallgemeinerten Bettischen Gruppen verschwinden, ist sie eine kombinatorische Invariante des Komplexes selbst und mit der vom Ref. eingeführten Torsion (dies. Zbl. **12**, 127) identisch. Diese Invariante kann auch für den nicht fixelementfreien Fall nutzbar gemacht werden. *Wolfgang Franz.*

Eilenberg, Samuel: Généralisation du théorème de M. H. Hopf sur les classes des transformations en surfaces sphériques. Compositio Math. **6**, 428—433 (1939).

π_i^m bezeichne die i-te Homotopiegruppe der m-Sphäre S^m, π_m^m also speziell die Gruppe der ganzen Zahlen; π_i^{*m} bezeichne die dazu orthogonale kompakte topologische Gruppe im Sinne von Pontrjagin, π_m^{*m} also speziell die Gruppe der reellen Zahlen mod 1. Ein bekanntes Resultat von H. Hopf läßt sich so aussprechen: Die Homotopieklassen der Abbildungen eines m-dimensionalen Polyeders P^m auf die m-Sphäre S^m entsprechen umkehrbar eindeutig den stetigen Charakteren der m-ten Bettischen Gruppe $B^m(P^m)$ mit Koeffizienten aus π_m^{*m} in der Gruppe π_m^{*m}. Hier wird folgende interessante Verallgemeinerung über die stetigen Abbildungen eines n-dimensionalen Polyeders P^n auf S^m bewiesen. Genügt P^n den Bedingungen: (1) $B^i(P^n)$ mit Koeffizienten aus π_i^{*m} verschwindet, (2) $B^{i+1}(P^n)$ mit Koeffizienten aus π_i^{*m} verschwindet $(i = m+1, m+2, \ldots)$, so entsprechen die Abbildungsklassen umkehrbar eindeutig den stetigen Charakteren von $B^m(P^n)$ mit Koeffizienten aus π_m^{*m} in der Gruppe π_m^{*m}. Bedingung (1) entscheidet über die Zugehörigkeit zweier Abbildungen zur gleichen Klasse, Bedingung (2) ergibt die Existenz einer Abbildung mit gegebenem Charakter. Als Spezialfall ergibt sich der Satz, daß ein Polyeder dann und nur dann in allen Dimensionen azyklisch ist, wenn jede stetige Abbildung auf eine Sphäre unwesentlich ist. (Vgl. K. Borsuk, dies. Zbl. **16**, 139, ferner die etwas später als die vorliegende Arbeit erschienene Note von A. Komatu und R. Sakata, dies. Zbl. **22**, 172.) Der Beweis beruht auf einer sehr einfachen Anwendung einer Arbeit des Verf. über Erweiterungen von Abbildungen (dies. Zbl. **19**, 332). *Wolfgang Franz* (Gießen).

Fox, Ralph H.: On homotopy and extension of mappings. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **26**, 26—28 (1940).

Verf. beweist vor allem folgenden Satz: Sei A ein Kompaktum und Y ein absoluter Umgebungsretrakt; damit eine Abbildung f aus Y^A homotop sei zu einer konstanten Abbildung (d. h. zu einer Abbildung auf einen Punkt), ist notwendig und hinreichend, daß f erweitert werden kann auf jeden regulären separablen Raum $\supset A$. Hieraus ergibt sich neuer Beweis für einen bekannten Satz von Borsuk [Fundam. Math. **19**, 229 (1932); dies. Zbl. **5**, 264] und eine neue Charakterisierung der Kategorie [im Sinne von Lusternik und Schnirelmann, vgl. Borsuk, Fundam. Math. **26**, 123 (1936); dies. Zbl. **13**, 422] für absolute Umgebungsretrakte des Hilbertschen Parallelotops. Weiter wird bewiesen: Damit f aus Y^A n-homotop sei zu einer konstanten Abbildung, ist hinreichend, daß f erweitert werden kann auf jedes höchstens $(n+1)$-dimensionale Kompaktum $\supset A$. Schließlich beweist Verf. notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß eine Teilmenge B eines separablen, regulären Raumes Y stetig deformiert werden kann in eine andere (vorgegebene) Menge B' von Y bzw. in (eine Teilmenge von) $Y - B$ bzw. einen Punkt von $Y - B$. *Nöbeling* (Erlangen).

Hall, Dick Wick: An example in the theory of pointwise periodic homeomorphisms. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 882—885 (1939).

Eine eindeutige, stetige Abbildung $T(M) = M$ einer Menge M auf sich heißt punktweise periodisch, wenn für jeden Punkt x von M ein natürliches $N = N(x)$ existiert derart, daß $T^N(x) = x$ gilt (ist N unabhängig von x wählbar, so heißt T periodisch; selbst wenn M ein lokal zusammenhängendes Kontinuum ist, braucht ein punktweise periodischer Homöomorphismus von M auf sich noch nicht periodisch zu sein, wie ein demnächst erscheinendes Beispiel von Phillips und Ayres zeigt); die kleinste Zahl $N(x)$ heißt die Periode von x; die Menge der Bilder $T(x), T^2(x), \ldots, T^N(x)$ heißt die Bahn von x. Verf. konstruiert im vierdimensionalen euklidischen Raum ein lokal zusammenhängendes Kontinuum M mit einem punktweise periodischen Homöo-

morphismus $T(M) = M$, welches eine konvergente Folge von Bahnen enthält, deren Limes L Punkte mit vorgegebenen Perioden $r_1, r_2, \ldots$ enthält [der Limes von Bahnen kann also Punkte mit verschiedenen Perioden enthalten; dafür ein erstes Beispiel, das jedoch kein lokal zusammenhängendes Kontinuum ist, bei Hall und Schweigert, Duke math. J. **4**, 723 (1938); dies. Zbl. **20**, 79]. *Nöbeling* (Erlangen).

Harrold jr., O. G.: The non-existence of a certain type of continuous transformation. Duke math. J. **5**, 789—793 (1939).

Es ist nicht möglich, einen Jordanbogen auf einen Raum B stetig so abzubilden, daß jedem Bildpunkt genau $k = 2$ Originalpunkte des Bogens entsprechen (für jedes andere k ist eine solche Abbildung aufweisbar, für $k > 2$ sogar unter der Annahme, daß B eine Jordankurve sei). *Furch* (Rostock).

Puckett jr., W. T.: On 0-regular surface transformations. Trans. Amer. Math. Soc. **47**, 95—113 (1940).

Die eindeutige, stetige Abbildung $T(M) = M'$ des kompakten metrischen Raumes M heißt 0-regulär, wenn für jede konvergente Punktfolge $x_i' \to x'$ aus M' die Urbildmengen $X_i = T^{-1}(x_i')$ 0-regulär gegen $X = T^{-1}(x')$ konvergieren, d. h. wenn $X = \lim X_i$ ist und für jedes $\varepsilon > 0$ ein natürliches i_0 und ein $\delta > 0$ existiert, so daß je 2 Punkte aus $X_i (i > i_0)$ mit einem Abstand $< \delta$ in einem Teilkontinuum von X_i mit einem Durchmesser $< \varepsilon$ liegen; gleichbedeutend hiermit ist: T bildet offene Mengen von M auf offene Mengen von M' ab, und die Urbildmengen der Punkte von M' sind gleichmäßig lokal zusammenhängend. Verf. betrachtet solche Abbildungen T für 2-dimensionale Pseudomannigfaltigkeiten M (dieselben gehen aus 2-dimensionalen berandeten oder geschlossenen Mannigfaltigkeiten hervor durch Identifikation endlich vieler Punkte). Ist T außerdem monoton (d. h. ist das Urbild jedes Punktes zusammenhängend), so ist T entweder topologisch oder M' ist ein Punkt, ein Bogen oder eine einfach geschlossene Kurve. Der Fall des Bogens ist nur möglich, wenn M eine Sphäre, eine 2-Zelle oder ein Kreisring ist; der Fall der einfach geschlossenen Kurve nur, wenn M ein Torus, ein Kleinscher Schlauch, ein Kreisring, ein Möbiussches Band, eine Sphäre mit 2 identifizierten Punkten oder eine 2-Zelle mit 2 identifizierten Randpunkten ist. *Nöbeling* (Erlangen).

Whyburn, G. T.: On irreducibility of transformations. Amer. J. Math. **61**, 820—822 (1939).

A étant un ensemble distancié compact, la transformation $T(A) = B$ s'appelle irréductible, s'il n'existe aucun vrai sous-ensemble fermé C de A tel que $T(C) = B$. Lorsque A est un continu, $T(A) = B$ s'appelle irréductible en sens strict, si l'on a $T(C) \neq B$ pour tout vrai sous-continu C de A. L'auteur démontre les théorèmes suivants: 1. La condition nécessaire et suffisante pour que $T(A) = B$ soit irréductible en sens strict est que l'ensemble D des points $x \in A$ pour lesquels $x = T^{-1}T(x)$, soit dense dans A. 2. A étant un continu localement semi-connexe (la définition de cette propriété v. Whyburn, ce Zbl. **21**, 359), la condition nécessaire et suffisante pour que $T(A) = B$ soit irréductible est que D soit dense dans l'ensemble N de tous les points $x \in A$ qui ne séparent pas A. 3. A étant un continu semi-localement connexe, la condition nécessaire et suffisante pour que toute transformation irréductible de A soit irréductible en sens strict est $\overline{N} = A$. 4. Si A est compact et $T(A) = B$ une transformation intérieure irréductible en sens strict, alors T est une homéomorphie. 5. Si A est un continu semi-localement connexe, les mots „en sens strict" peuvent être supprimés dans l'énoncé 4. *G. Alexits* (Budapest).

Radó, Tibor, and J. W. T. Youngs: On upper semicontinuous collections. Acta Litt. Sci. Szeged **9**, 239—243 (1940).

S_1 being an L-space such that a_n non $\to a$ implies that there is a subsequence $a_{n_j} \to b \neq a$, the paper gives the following condition necessary and sufficient for a mapping T of S_1 onto a set $S_2 = T(S_1)$ to be continuous with a suitable topology on S_2, which is then uniquely determined: $a_n \to a$, $b_n \to b$, and $T(a_n) = T(b_n)$

imply that $T(a) = T(b)$; whence there follows the equivalence of the notions of so-called upper semi-continuity introduced independently by Alexandroff, Kerékjártó, and Moore. *Bedřich Pospíšil* (Brünn).

Koutský, Karel: Sur quelques modifications d'une topologie donnée. Acad. Tchèque Sci., Bull. int. **39**, 111—115 (1939).

L'auteur donne quelques conditions d'existence de certaines topologies qu'on déduit en modifiant une topologie donnée et qui jouissent de propriétés préscrites. *Bedřich Pospíšil* (Brünn).

Elsholz, L.: Die Länge einer Mannigfaltigkeit und ihre Eigenschaften. Rec. math. Moscou, N. s. **5**, 565—570 u. deutsch. Zusammenfassung 571 (1939) [Russisch].

Über den Begriff der Länge $\log_M A$ einer abgeschlossenen Menge A in einer Mannigfaltigkeit M (vgl. S. Froloff und L. Elsholz, dies. Zbl. **13**, 270) werden unter anderem folgende Sätze bewiesen. 1. Ist N in M enthalten, so ist $\log_N A \geqq \log_M A$. 2. Es gilt $\log_M M \geqq R(M)$, wo $R(M)$ der Rang der Mannigfaltigkeit M ist. 3. $\log_M A \leqq k_M A - 1$, wo $k_M A$ die kombinatorische Kategorie der Mannigfaltigkeit M ist. 4. Die Bettischen Zahlen einer Mannigfaltigkeit bestimmen nicht ihre Länge. — Ferner werden Sätze über die Länge von Summen- und Produktmengen angegeben. *Wolfgang Franz.*

Friedgé, Hans: Verallgemeinerung der Dodekaederräume. Math. Z. **46**, 27—44 (1940).

Der sphärische Dodekaederraum (s. C. Weber und H. Seifert, dies. Zbl. **7**, 28) entsteht, wenn man an einem massiven Dodekaeder je zwei Gegenflächen, um $\frac{\pi}{5}$ gleichsinnig gegeneinander verschraubt, miteinander identifiziert. Hier wird dieser Prozeß zur Bildung von Mannigfaltigkeiten verallgemeinert. An Stelle des Dodekaeders wird ein Polyeder benutzt, das von zwei n-Ecken mit je einem Kranz von n anschließenden Fünfecken begrenzt wird. Durch eine entsprechende Identifizierung entstehen Mannigfaltigkeiten, welche je nach der Restklasse von n mod 6 verschiedenes Verhalten zeigen. Ihre numerischen Invarianten und ihre Fundamentalgruppen werden aufgestellt. Für $n \equiv \pm 1 \bmod 6$ ergeben sich Poincarésche Räume, deren Fundamentalgruppen isomorph sind zu den Fundamentalgruppen derjenigen Poincaréschen Räume, die man aus der Kleeblattschlinge ableiten kann. Sie erweisen sich sogar als homöomorph mit diesen Räumen, und zwar vermöge eines Satzes von H. Seifert über die Faserung von Poincaréschen Räumen, welche sich aus Torusknoten ableiten lassen (dies. Zbl. **6**, 83). Durch Modifizierung der Identifizierungsvorschrift ergeben sich weitere Mannigfaltigkeiten, deren numerische Invarianten und Fundamentalgruppen angegeben werden. Es wird gezeigt, daß sie mit den Linsenräumen trotz der Übereinstimmung in den numerischen Invarianten nicht homöomorph sind. *Wolfgang Franz* (Gießen).

Yamauti, Syôzô: Zwei Bemerkungen über den Produktraum. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. **21**, 609—614 (1939).

Verf. gibt erstens eine Ungleichung für die Urysohnschen Konstanten [im Sinne von Alexandroff, Fundam. Math. **20**, 141 (1933); dies. Zbl. **6**, 426] eines Produktraumes; zweitens wird bewiesen, daß die n-dimensionale Homotopiegruppe eines Produktes $R_1 \times R_2$ gleich ist der direkten Summe der n-dimensionalen Homotopiegruppen von R_1 und R_2. *Nöbeling* (Erlangen).

Sirvint, G.: Zur Geometrie linearer Räume. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **26**, 119—122 (1940).

Verf. formuliert ohne Beweise elf Sätze, in denen der Begriff der Umkreisung eine Rolle spielt; dabei heißt eine Menge U (eines linearen Raumes) eine Umkreisung eines Punktes x, wenn U mit jeder durch x gehenden Geraden ein x im Innern enthaltendes Intervall gemein hat. Einer dieser Sätze lautet: Damit ein linearer Raum 2. Kategorie normierbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß in ihm eine konvexe, beschränkte Umkreisung vorhanden sei (Verschärfung eines Satzes von Kolmogoroff unter Verengung des Gültigkeitsbereiches). *Nöbeling* (Erlangen).

Rothe, Erich: The theory of topological order in some linear topological spaces. Iowa State Coll. J. Sci. **13**, 373—390 (1939).

The space E considered is 1. topological ("accessible", in the sense of Fréchet), 2. linear, with continuous operations, and such that 3. the zero point 0 has at least one convex neighborhood U which is "bounded", that is has the property that for every sequence $\{\alpha_n\}$ of real numbers converging to zero and an arbitrary sequence $\{x_n\}$ of points of U $\lim_{n\to\infty} \alpha_n x_n = 0$. V is a closed convex bounded set in E containing at least one interior point and S its boundary. The order $u(f, S, y_0)$ of a point $y_0 \subset E$, not lying on the image $f(S)$ of S, where $f(x) = \lambda(x) \cdot x + F(x)$ [$\lambda(x)$ a continuous function for $x \subset S$, with $0 < m \leqq \lambda(x) \leqq M$, and $F(x)$ a completely continuous representation of S], is defined (for that purpose E is normed, and it is shown that the order is independent of the special norm which has been introduced). A number of properties of the order, well known for n-dimensional spaces, are proved in E. The author also considers a space E, which is normed and "strictly convex" (in this case, for two elements $x \neq 0$, $y \neq 0$, $|x + y| = |x| + |y|$ then and only then, when, for a suitable positive c, $x = cy$). In this case the equality of the two orders of a point y_0 with respect to two representations $f(x)$ of S is not only necessary but also sufficient for the homotopy of the two representations in $E - y_0$. Also the homotopy of two representations of an S into an S_1 is considered, and a necessary and sufficient condition is derived. Cf. Rothe, Compositio Math. **5**; this Zbl. **18**, 133. *J. Ridder* (Groningen).

Alexandroff, P.: Bikompakte Erweiterungen topologischer Räume. Rec. math. Moscou, N. s. **5**, 403—420 u. deutsch. Zusammenfassung 420—423 (1939) [Russisch].

Nach Čech besitzt jeder vollständig reguläre Raum R eine bikompakte Erweiterung βR (d. h. βR ist ein bikompakter Hausdorffscher Raum, welcher R als dichte Teilmenge enthält), die wie folgt gekennzeichnet werden kann: βR kann auf jede bikompakte Erweiterung von R unter Festhaltung sämtlicher Punkte von R abgebildet werden. Verf. untersucht die Beziehungen von βR zu anderen wichtigen bikompakten Erweiterungen von R. Z. B. sei ωR der Wallmannsche Raum aller maximalen Klassen $\mathfrak{E}$ abgeschlossener Mengen in R mit nicht leeren Durchschnitten zu je endlich vielen. Eine offene Basis besteht aus allen $\omega R - F'$, wo F' aus allen $\mathfrak{E} \in \omega R$ mit $F \in \mathfrak{E}$ (F abgeschlossen in R) besteht. Man identifiziere noch $x \in R$ mit der Klasse aller abgeschl. F in R mit $x \in F$. Ist nun R normal, so ist ωR eine bikompakte Erweiterung von R und mit βR gleichwertig. Allgemeiner ist βR die feinste Hausdorffsche Zerlegung von ωR. Verf. gibt schließlich eine H-Abgeschlossenheitsbedingung an und bemerkt, daß βR die größte Mächtigkeit und das größte Gewicht von allen bikompakten Erweiterungen von R besitzt. *Bedřich Pospíšil* (Brünn).

Katětov, Miroslav: Über H-abgeschlossene und bikompakte Räume. Čas. mat. fys. **69**, 36—49 (1940).

Es sei R ein allgemein-topologischer Raum (Alexandroff-Hopf, Topologie I, S. 25; dies. Zbl. **13**, 79). Verf. schreibt uM statt $\overline{M}$. Ist vM eine zweite, von u verschiedene topologische Zuordnung und stets $uM \subset vM$, so heißt die Zuordnung v stärker als u. Eine Hausdorffsche Topologie u heißt maximal, wenn es keine stärkere Hausdorffsche Topologie in R gibt. Verf. beweist u. a. folgende Sätze: 1. Für die Bikompaktheit eines Hausdorffschen Raumes R (kurz H-Raum) ist jede der beiden folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend: a) je 2 verschiedene Punkte aus R besitzen disjunkte abgeschlossene Umgebungen, und die Topologie von R ist maximal; b) jede abgeschlossene Teilmenge A von R ist H-abgeschlossen, d. h. abgeschlossen in jedem A als Teilraum enthaltenden H-Raum [zu b) vgl. M. H. Stone, Trans. Amer. Math. Soc. **41**, 375 (1937); dies. Zbl. **17**, 135]. 2. Zu jedem H-Raum existiert eine H-abgeschlossene Hülle, d. h. ein H-Raum S mit folgenden drei Eigenschaften: a) R ist Teilraum von S und $\overline{R} = S$; b) S ist H-abgeschlossen; c) ist f eine eindeutige stetige Abbildung von R in einen H-Raum Q mit $f(R) = Q$, so gibt es eine Menge M