Werk

Titel: Analysis

Jahr: 1939

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0020|log17

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

verschiedene Sätze für die Scharen der I. und II. Art und insbesondere für die letztgenannte: a) Wenn T_t meßbar ist, dann ist jedes T_t für jede meßbare ω-Menge definiert; b) wenn T_t meßbar ist, dann existiert eine nicht negative (t, ω)-meßbare Funktion $\varphi(t, \omega)$, so daß, wenn Λ meßbar ist, $\mu(T_t \Lambda) = \int_{\Lambda} \varphi(t, \omega)\, d\omega$ für fast alle t ist; c) $\mu(T_t \Lambda \cdot M)$ ist eine stetige Funktion von t, wenn und nur wenn die Schar meßbar ist, und wenn für jedes gegebene M $\mu(T_t \Lambda \cdot M)$ gleichmäßig klein mit $\mu(\Lambda \cdot M)$ für jedes t eines endlichen Intervalls wird. Endlich beweist der Verf. einen Satz d), mit dem die wesentliche Äquivalenz der Mengenabbildungsscharen der II. Art und der Punktabbildungsscharen festgestellt wird. Dieses Theorem d) knüpft an ein Neumannsches über die maßgleichen Mengenabbildungen an. Für die meßbaren Scharen der I. und II. Art ist die t-Funktion $\mu(T_t \Lambda \cdot M)$ meßbar und approximativ stetig für fast alle t. Der Verf. gibt eine hinreichende Bedingung, damit diese Funktion nach unten halbstetig ist. *L. Cesari* (Pisa).

Analysis.

Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

Rosenblatt, Alfred: Sur les séries de fonctions continues d'une variable réelle qui convergent vers une fonction continue non uniformément. Rev. Ci., Lima **40**, 321—323 (1938).

Anknüpfend an eine frühere Note (dies. Zbl. **18**, 116) gibt Verf. einfache Beispiele von Reihen stetiger Funktionen, die in einem Intervall gegen 0 konvergieren, während für ihre Teilsummen $s_n(x)$ mit einer passenden Punktfolge (x_n) des Intervalls die Beziehung $|s_n(x_n)| \to \infty$ gilt, z. B.:

$$(x - x^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \{(n+1)(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}) - n(x^{2^{n-1}} - x^{2^n})\} = 0 \quad \text{in} \quad \langle 0, 1 \rangle,$$

$$s_n(x_n) = \frac{n+1}{4} \quad \text{für} \quad x_n^{2^n} = \frac{1}{2}.$$

F. Lösch (Rostock).

Fejes, L.: Two inequalities concerning trigonometric polynomials. J. London Math. Soc. **14**, 44—46 (1939).

Man kann die n-te Lebesguesche Konstante

$$L_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos nx \right| dx$$

in der Form $L_n = \frac{1}{2}\varrho_{n0} + \varrho_{n1} + \cdots + \varrho_{nn}$ entwickeln, wobei

$$\varrho_{nk} = \frac{8}{\pi^2}(2n+1) \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2(2\nu+1)^2 - 4k^2}$$

ist. Damit gewinnt man die erste Ungleichung für trigonometrische Polynome: Falls alle $a_k > 0$ sind $(k = 0, 1, \ldots n)$, so ist in scharfer Abschätzung

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx \right| dx \geqq \frac{1}{2} \varrho_{n0}\, a_0 + \varrho_{n1} a_1 + \cdots + \varrho_{nn} a_n \geqq L_n \cdot \min a_k.$$

Ohne Einschränkungen bezüglich des Vorzeichens gilt die zweite, ebenfalls scharfe Ungleichung

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| dx \geqq 4\sqrt{a_m^2 + b_m^2},$$

in der $m > \frac{n}{3}$ beliebig ist; für $m \leqq \frac{n}{3}$ kann diese Ungleichung falsch sein.

Harald Geppert (Gießen).

Shepherd, W. M.: On trigonometrical series with mixed conditions. Proc. London Math. Soc., II. s. **43**, 366—375 (1937).

To a given positive integer m the author determines a sequence $A_0, A_1, A_2, \ldots$, such that $\cos m\theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta$ for $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, and $-\sin m\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta$ for $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. The result is applied to two problems in electrostatics. *Otto Szász.*

Szász, Otto: Some extremum problems in the theory of Fourier series. Amer. J. Math. **61**, 165—177 (1939).

Sei $|f(x)| \leqq 1$, $-\pi \leqq x \leqq \pi$, eine reelle oder komplexe periodische Funktion; seien $c_\nu = \frac{1}{2}(a_\nu - ib_\nu)$ ihre Fourierkoeffizienten, $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m$ $m+1$ komplexe Zahlen, k eine ganze Zahl. Verf. bestimmt das Maximum der Summen $\left|\sum_{\nu=0}^{m} \mu_\nu c_{\nu+k}\right|$ und die entsprechende Extremalfunktion. Ist $f(x)$ reell und sind $\sigma_n(x)$, $\bar{\sigma}_n(x)$ die Cesároschen Mittel der Fourierreihe von $f(x)$ bzw. ihrer Konjugierten, so beweist Verf. unter Benutzung von erhaltenen Abschätzungen und des Fejèrschen Satzes, daß für $-\pi \leqq x \leqq \pi$, $n = 1, 2, \ldots$

$$|\sigma_{2n}(x) - \sigma_n(x)| \leqq \frac{2}{\pi}, \qquad |\bar{\sigma}_{2n}(x) - \bar{\sigma}_n(x)| \leqq \frac{2}{\pi}$$

gilt. Ist endlich $a_n \geqq 0$, $b_n \geqq 0$, so ist auch $\sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu \leqq 4n/\pi$, $\sum_{\nu=1}^{n} \nu b_\nu \leqq 4n/\pi$, $n = 1, 2, \ldots$. Diese letzten Abschätzungen sind schärfer als die früheren des Verf. (dies. Zbl. 18, 109). Die Ergebnisse werden auf fastperiodische Funktionen und Fouriersche Integrale ausgedehnt. *L. Cesari* (Pisa).

Szász, Otto: On Fourier series with restricted coefficients. Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 850—859 (1938).

Es seien a_n, b_n die Fourierkoeffizienten von $f(x)$, $-\pi \leqq x \leqq \pi$, und $s_k(x)$, $s_k'(x)$, $s_k''(x)$ die Teilsummen der Fourierreihe, ihres cos- bzw. sin-Anteils. Sei I. $\nu a_\nu \geqq -p$, $\nu b_\nu \geqq -p$, $\nu = 1, 2, \ldots, 2n-1$; $p > 0$ und II. $|f(x)| \leqq \mu$, $-\pi \leqq x \leqq \pi$; dann hat man für jedes $-\pi \leqq x \leqq \pi$, $k = 1, \ldots, n$

$$|s_k'(x)|,\ |s_k''(x)| < (1 + 8/\pi)\mu + 2p(2\log 2 + 1),\quad |s_k(x)| < (1 + 10/\pi)\mu + 2p(4\log 2 - 1),$$
$$|s_k'(x)|,\ |s_k''(x)| < (1 + 4/\pi)\mu + 4\sqrt{p\mu},\qquad\qquad |s_k(x)| < (1 + 8/\pi)\mu + 4\sqrt{2p\mu}.$$

Verf. erhält das unter Anwendung des Fejèrschen Satzes und einer neuen vom Verf. gefundenen Ungleichung [Amer. J. Math. **61**, 165—177 (1939); vgl. vorst. Ref.], die sich auf die Cesàroschen Mittel der Fourierreihe einer beschränkten Funktion bezieht, sowie endlich einiger elementarer Identitäten und Ungleichungen für die Teilsummen und Cesàroschen Mittel numerischer Reihen. Die vorliegenden Ergebnisse verdienen Beachtung, weil (I) nur für $\nu \leqq 2n - 1$ angenommen ist; sie sind stärker als die früheren Sätze dieser und anderer Verff. (Paley, dies. Zbl. **5**, 156; Szász, dies. Zbl. **8**, 10, **17**, 109; Fejèr, dies. Zbl. **9**, 251; Fekete, dies. Zbl. **11**, 157, **12**, 207). *L. Cesari* (Pisa).

Salem, Raphaël: Sur la convergence en moyenne des séries de Fourier. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 70—72 (1939).

Sei $f(x)$ periodisch mit der Periode 2π und L-integrabel, $S_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ die Teilsummen seiner Fourierreihe. Für $\omega(\delta) = \max_{0 \leqq h \leqq \delta} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|\, dx$ weiß man, daß $\omega(\delta)$ mit δ zugleich nach 0 strebt. Es sei $\varepsilon_n = 2\pi/n$. — Verf. beweist auf neuem Wege und unter Bedingungen, die vom Bekannten etwas abweichen, folgende Sätze: I. Es gelte a) $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \omega(\varepsilon_n) |\lg \omega(\varepsilon_n)| < \infty$, b) $\omega(\varepsilon_n) \lg n < k$; dann gilt auch für fast alle x

$$\lim_{n \to \infty} 1/n\,[|f - S_1| + |f - S_2| + \cdots + |f - S_n|] = 0.$$

II. Unter denselben Annahmen a) und b) gibt es für fast jedes x zwei komplementäre Folgen m_k, n_k derart, daß $S_{m_k} \to f$, $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k < \infty$ gelten (dazu auch Zygmund, dies. Zbl. 14, 14). III. Bleibt für m_k die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \omega(\varepsilon_{m_k}) |\lg \omega(\varepsilon_{m_k})| < \infty$, so strebt fast überall S_m gegen f. *L. Cesari* (Pisa).

Foà, Alberto: Il fenomeno di Riemann per la somma $|C, \alpha|$ di una serie di Fourier con $0 < \alpha \leq 1$. Ist. Lombardo, Rend., III. s. **71**, 359—366 (1938).

Bosanquet a prouvé que la sommabilité $|C, \alpha|$ de la série de Fourier de $f(x)$ au point $x = x_0$ ne depend pour $\alpha > 1$ que du comportement de la fonction developpée $f(x)$ au voisinage du point $x = x_0$. L'auteur a montré sur un exemple qu'au contraire pour $\alpha \leqq 1$ la sommabilité $|C, \alpha|$ en un point n'est pas un phénomène local: elle depend du comportement de $f(x)$ dans tout l'intervalle $(0, 2\pi)$. *E. Kogbetliantz.*

Faedo, Sandro: Ordine di grandezza dei coefficienti di Eulero-Fourier delle funzioni di due variabili. (*Firenze, 1.—3. IV. 1937.*) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 143—144 (1938).

If $c_0, c_1, c_2, \ldots$ are the Fourier coefficients of a function of bounded variation, then it is wellknown that $nc_n = O(1)$, $n \to \infty$. The analogue for double series is announced in this preliminary paper. *Otto Szász* (Cincinnati, Ohio).

Sakurai, Tokio: The application of operational methods to the theory of Laguerre's series. Tôhoku Math. J. **45**, 111—119 (1938).

If the function $g(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$ is analytic in the neighbourhood of infinity the existence of an expansion of type

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-hx} L_n(x) \int_0^{\infty} e^{(h-1)t} L_n(t) f(t)\, dt \right\}$$

is first investigated and the completeness of the system of Laguerre polynomials $L_n(x)$ is discussed with the aid of Cauchy's integral representation of $g(p)$. If the function $L_n^{(-\mu)}(x)$ is defined so that when $f(x) = e\, L(x)\, g(p) = (p-h)^n (p-h+1)^{-n-\mu-1}$ the property of completeness is extended to the set of functions $L_n^{(-\mu)}(x)$ and a theorem is given for the expansion of a function $F(x)$ in a series of such functions multiplied by e^{-hx}. If $f(x) = x^{-m} F(x)$ the function $g(p)$ corresponding to $f(x)$ is supposed to be analytic in the neighbourhood of infinity. *H. Bateman* (Pasadena).

Karamata, J.: Quelques théorèmes sur les intégrales de Laplace-Abel. (*2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.*) Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **40**, Nr 1/2, 107—108 (1938).

Sei (1) $A(u) \uparrow$ und $J(x) = \int_0^{\infty} A(u) \exp(u/x)\, du$. Es werden (ohne Beweis) folgende Sätze Tauberscher Art gegeben. Satz I. Aus $0 < me^x < J(x) < Me^x$ und (1) folgt (2) $\exp\left[2\sqrt{x} - \mu \sqrt[4]{x}\right] < \sqrt{x}\, A(x) < M \exp\left[2\sqrt{x}\right]$, $\mu > 4\sqrt{\lg 2\, \mu/m}$ [wo (2) nicht verbessert werden kann, wie durch ein Beispiel gezeigt wird] und Satz II. Aus $J(x) \sim e^x$ und (1) folgt $\exp\left[2\sqrt{x} - o\left(\sqrt[4]{x}\right)\right] \leqq \sqrt{x}\, A(x) \leqq o\left(\exp\left[2\sqrt{x}\right]\right)$. — Satz I ist elementar, während zum Beweis des Satzes II tiefliegende Mittel nötig sind. *Avakumović.*

Spezielle Funktionen:

● **Bowman, F.: Introduction to Bessel functions.** London, New York a. Toronto: Longmans, Green & Co. 1938. X, 135 pag. a, 21 fig. bound 10/6.

This book is intended for the non-mathematical specialist. It starts with the power series for Bessel's function of the first kind and of order zero and n. Differential, integral, asymptotic and recursion expressions are derived from the power series. Bessel's functions of the second kind are introduced and their differential, integral, asymptotic and recursion properties discussed. The discussion includes the roots of

these functions, Fourier-Bessel expansions and Dini expansions. The applications of chapter 2 include: vibrating circular and annular membranes, vibrations of a hanging chain, heat conduction in circular cylinders. Chapter 3 is devoted to functions of imaginary and complex arguments, which are again discussed in a similar way as the functions of real arguments, starting from the power series expressions. The applications include the flow of heat in a circular cylinder and the eddy currents in conductors of circular cross-section. The definite integrals of chapter 4 start with the integrals, obtained by the Fourier-expansion of the exponential function with sine argument and lead up to integrals involving Gamma- and Beta-functions. In chapter 5 the asymptotic expansions start from Hankel's definite integrals and include the simpler asymptotic formulas, omitting Debye's discussion of complex paths of integration. Chapter 6 is devoted to the properties of functions of any real order, whereas chapter 7 (applications) includes Bessel's classical solution of Kepler's problem. The text is elementary throughout and well illustrated by problems for the benefit of the reader. The proofs, though not rigorous throughout, may for the greater part be sufficient for non-mathematical students. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Koshliakov, N. S.: Note on certain integrals involving Bessel functions. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. Nr 4, 417—420 u. engl. Text 421—425 (1938) [Russisch].

Im folgenden bedeuten $L_\nu(x)$ und $M_\nu(x)$ die Hardyschen Funktionen:

$$L_\nu(x) = -\frac{2}{\pi} K_\nu(x) - Y_\nu(x), \qquad M_\nu(x) = \frac{2}{\pi} K_\nu(x) - Y_\nu(x).$$

Es wird u. a. gezeigt:

$$\int_0^\infty K_\nu(t)\left\{\cos\nu\pi \cdot M_{2\nu}\left(2\sqrt{xt}\right) - \sin\nu\pi\, J_{2\nu}\left(2\sqrt{xt}\right)\right\} dt = K_\nu(x), \qquad |\nu| < \tfrac{1}{2}.$$

$$\int_0^\infty t K_\nu(t)\left\{\sin\nu\pi \cdot J_{2\nu}\left(2\sqrt{xt}\right) - \cos\nu\pi\, L_{2\nu}\left(2\sqrt{xt}\right)\right\} dt = x K_\nu(x), \qquad |\nu| < \tfrac{1}{2}.$$

$$\int_0^\infty J_\nu(t)\left\{e^{\frac{\nu\pi i}{2}} K_{2\nu}\left(2e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{xt}\right) + e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} K_{2\nu}\left(2e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{xt}\right)\right\} dt = K_\nu(x), \qquad \nu > -\tfrac{1}{2}.$$

$$\int_0^\infty M_\nu(at)\left\{(z^2 + it^2)^\mu + (z^2 - it^2)^\mu\right\} t^{\nu+1} dt =$$

$$= \left(\frac{2}{a}\right)^{\mu+1} \frac{z^{\mu+\nu+1}}{\Gamma(-\mu)} \left\{e^{(\nu-\mu-1)\frac{i\pi}{4}} K_{\mu+\nu+1}\left(aze^{\frac{i\pi}{4}}\right) + e^{-(\nu-\mu-1)\frac{i\pi}{4}} K_{\mu+\nu+1}\left(aze^{-\frac{i\pi}{4}}\right)\right\},$$

$$\nu > -1; \qquad \mu < -\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}; \qquad \frac{a}{z} > 0.$$

$$\int_0^\infty \begin{matrix} M_\nu(at) \\ L_\nu(at) \end{matrix} \left\{\frac{K_\mu\left(a\sqrt{z^2+it^2}\right)}{(z^2+it^2)^{\frac{\mu}{2}}} + \frac{K_\mu\left(a\sqrt{z^2-it^2}\right)}{(z^2-it^2)^{\frac{\mu}{2}}}\right\} t^{\nu+1} dt =$$

$$= \frac{z^{1+\nu-\mu} a^\nu}{b^\mu} \left\{e^{-(\mu+\nu-1)\frac{i\pi}{4}} \frac{K_{1+\nu-\mu}\left(xe^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{a^2+ib^2}\right)}{(a^2+ib^2)^{\frac{1+\nu-\mu}{2}}} \mp \right.$$

$$\left. \mp e^{+(\mu+\nu-1)\frac{i\pi}{4}} \frac{K_{1+\nu-\mu}\left(xe^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{a^2-ib^2}\right)}{(a^2-ib^2)^{\frac{1+\nu-\mu}{2}}}\right\}, \qquad \nu > -1.$$

S. C. van Veen.

Schoblik, F.: Bemerkungen zu einem Lemma von G. N. Watson. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **48**, Abt. 1, 193—198 (1939).

Wenn 1. $F(\tau)=\sum_{m=1}^{\infty} a_m \tau^{\frac{m}{q}-1}$ für $|\tau| \leqq a$ konvergiert (möglicherweise mit Anschluß des Punktes $\tau=0$), 2. längs des geradlinigen Integrationsweges des Integrals

$$G(z)=\int_0^{\infty \cdot e^{iz}} e^{-z\tau} F(\tau)\, d\tau \tag{1}$$

gilt $$|F(\tau)|<K \cdot e^{b|\tau|} \quad \text{für} \quad |\tau| \geqq a \quad (K \text{ und } b>0), \tag{2}$$

so hat G. N. Watson gezeigt, daß die asymptotische Entwicklung gilt:

$$G(z)=\sum_{m=1}^{M-1} a_m \Gamma\left(\frac{m}{q}\right) \cdot z^{-\frac{m}{q}} + R_M,$$

wo für alle z mit $\Re(ze^{iz}-b)>0$

$$|R_M| = O\left(|z|^{-\frac{M}{q}}\right)$$

(Watson, Bessel-functions, S. 236). Die Erfüllung von (2) gewährleistet dabei zugleich die Konvergenz (sogar die absolute Konvergenz) des Integrals (1) für alle z mit $\Re(z \cdot e^{iz}-b)>0$. Der Verf. zeigt, daß die Bedingung (2) unwesentlich ist, daß vielmehr schon die Voraussetzung der bloßen Konvergenz von (1) für gewisse z-Bereiche völlig ausreicht, um die Aussage des Watsonschen Lemmas sicherzustellen. — Überdies werden dabei auch gewisse nichtgeradlinige Kurven $\mathfrak{C}$, welche die Punkte o und $\infty \cdot e^{iz}$ miteinander verbinden, als Integrationswege zugelassen. Diese Verallgemeinerung ist dann nichttrivial, wenn $F(\tau)$ so beschaffen ist, daß $\mathfrak{C}$ nicht ohne Überschreitung von singulären Punkten des Integranden oder überhaupt nicht in den geradlinigen Weg von 0 nach $\infty \cdot e^{iz}$ überführt werden kann. *S. C. van Veen.*

Giulotto, Virgilio: Funzioni metasferiche e ultrasferiche di Nielsen a due variabili. Ist. Lombardo, Rend., III. s. **71**, 229—251 (1938).

Verf. scheint sich die Aufgabe gestellt zu haben, die metasphärischen Funktionen N. Nielsens $K^{\nu,\varrho}(x)$ (ultrasphärisch für $\varrho \geqq 0$ ganz) von einer Veränderlichen x auf zwei, x, ω, zu übertragen derart, daß die $K^{\nu,\varrho}(x)$ als Sonderfälle neuer Funktionen erscheinen, ähnlich wie auch die Kugelfunktionen einer Veränderlichen (Legendresche Polynome) $X_n(x)$ aus den Laplaceschen Funktionen $Y_n(x, \omega)$ hervorgehen. Jedoch geht aus den wenig klaren formalen Entwicklungen des Verf. nicht hervor, daß die eingeführten Funktionen $Y^{\nu,\varrho}(x, \omega)$ diesem Ziel entsprechen. *E. Martinelli.*

Palamà, Giuseppe: Sui polinomi di Laguerre. Inst. Lombardo, Rend., III. s. **71**, 441—468 (1938).

On considère les polynomes donnés par la fonction génératrice

$$(1-az)^{-(\alpha+1)} \exp.\frac{-xz}{1-az} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n L_n^{(\alpha)}(x, a)$$

qui, pour $a=1$, se réduisent aux polynomes de Laguerre généralisés $L_n^{(\alpha)}(x)$. L'aut. donne d'abord une série de relations linéaires entre trois polynomes $L_n^{(\alpha)}$ pour certaines valeurs, différentes ou non, des indices supérieurs α et inférieurs n. Suivent un grand nombre de formules ayant, pour la plupart, le but de calculer certaines sommes où chaque terme est de la forme $cL_n^{(\alpha)}$ ou $cL_n^{(\alpha)} L_m^{(\beta)}$, les c étant des coefficients dépendant ou non de x. Citons, en particulier, la formule d'addition

$$L_m^{(\alpha+\beta+1)}(x+y, a) = \sum_{s=0}^{m} L_s^{(\alpha)}(x, a) L_{m-s}^{(\beta)}(y, a)$$

et la formule de duplication

$$L_p^{(2\gamma)}(2y) = \sum_{s=0}^{p} L_s^{(\gamma-s)}(y) L_{p-s}^{(\gamma+s)}(y).$$

En désignant par Δ l'opérateur de différence finie par rapport à α, l'aut. remarque que

$$\Delta\left[\frac{x^\alpha L_{n-1}^{(\alpha)}(x)}{\Gamma(\alpha+n)}\right] = \frac{-n x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x)}{\Gamma(\alpha+n+1)}.$$

et en déduit diverses autres relations. Signalons la suivante

$$L_p^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^p \Gamma(\alpha+p+1)}{p!\, x^\alpha} \Delta^p\left[\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right].$$

T. Popoviciu (Cernăuți).

Satô, Tunezô: A brief proof on the closure of the Hermite functions. Tôhoku Math. J. **45**, 120—123 (1938).

Es sei $\{g(x)\}^2$ summabel (L) in $(-\infty, +\infty)$. Das System

$$\psi_n(x) = \left(2^n n!\sqrt{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \varphi_n(x) = \left(2^n n!\sqrt{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

bildet bekanntlich ein normiertes Orthogonalsystem. Gesetzt, für alle ganzen n ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, \psi_n(x)\, dx = 0.$$

Der Verf. zeigt sehr einfach für alle endlichen Werte von λ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2} + 2\lambda y i + \lambda^2} g_1(y)\, dy = 0, \tag{1}$$

wo

$$g_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, e^{-ixy}\, dx; \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(y)\, e^{-ixy}\, dy. \tag{2}$$

(1) gilt auch für $\lambda \to \infty$ (Riemann-Lebesguescher Satz). Aus (1) folgt $g_1(y) = 0$ für fast alle Werte von y und aus (2) $g(x) = 0$ für fast alle Werte von x. Das System $\psi_n(x)$ ist folglich vollständig. *S. C. van Veen* (Dordrecht, Holl.).

M'Carthy, J. P.: A related Tschebyscheff polynomial. Math. Gaz. **23**, 68—76 (1939).

Die Entwicklung (1) $\log(1 - 2xt + t^2) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x) t^n$ führt zu den Polynomen $Q_n(x) = -\frac{2}{n}\cos(n \arccos x)$, die mit den Tschebyscheffschen Polynomen $T_n(x)$ durch die Gleichung $Q_n(x) = -\frac{2^n}{n} T_n(x)$ zusammenhängen. Ohne Kenntnis der letzteren kann man die interessanten Eigenschaften der $Q_n(x)$ wie Rekursionsformeln, Differentialgleichung, Orthogonalitätsbeziehungen, Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach ihnen nach bekanntem Muster aus (1) unmittelbar ableiten, wie es Verf. tut.

Harald Geppert (Gießen).

Meijer, C. S.: Über die Kummersche Funktion ${}_1F_1(a; b; z)$. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **41**, 1108—1114 (1938).

Für die Kummersche Funktion ${}_1F_1(a; b; z)$ wird die folgende sehr allgemeine Integraldarstellung abgeleitet:

$$ {}_1F_1(a; b; z) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(a+\lambda)\,\Gamma(\beta-\lambda)\,\Gamma(\gamma-\lambda)\,\Gamma(b)}{2\pi i\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)\,\Gamma(b+\lambda)\,\Gamma(\alpha-\lambda)\,\Gamma(a)} \int_{-\infty}^{(0+,\,z+)} {}_3F_3\left[\begin{matrix}1, \alpha, a+\lambda;\\ \beta, \gamma, b+\lambda;\end{matrix} u\right] \times$$

$$\times\, {}_2F_1\left[\begin{matrix}\beta-\lambda, \gamma-\lambda;\\ \alpha-\lambda;\end{matrix} \frac{z}{u}\right] u^{\lambda-1}\, du.$$

Hierin wird $\Re(a) > 0$ und $b \neq 0, -1, -2 \ldots$ vorausgesetzt; α, β, γ und λ sind beliebige Zahlen mit

$$\Re(\lambda) < 1; \quad \Re(\alpha - \lambda) > 0; \quad \alpha \neq 0, -1, -2, \ldots$$

$$a + \lambda \neq 0, -1, -2, \ldots; \quad \beta - \lambda \neq 0, -1, -2, \ldots; \quad \gamma - \lambda \neq 0, -1, -2, \ldots$$

Für $\lambda = 0, -1, -2, \ldots$ werden die folgenden Sonderfälle abgeleitet:

$$ {}_1F_1(a; b; z) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(a+\lambda)\,\Gamma(b)\,\Gamma(\beta+\gamma-\alpha-\lambda)}{2\pi i\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)\,\Gamma(b+\lambda)\,\Gamma(a)} z^{\lambda} \int_0^{(1+)} {}_3F_3\left[\begin{matrix}1, \alpha, a+\lambda;\\ \beta, \gamma, b+\lambda;\end{matrix} zu\right] \times $$

$$ \times\, {}_2F_1\left[\begin{matrix}1-\gamma+\lambda, \alpha-\gamma;\\ 1+\alpha-\beta-\gamma+\lambda;\end{matrix} 1-u\right] \times (u-1)^{\alpha-\beta-\gamma+\lambda} u^{\beta-1}\,du\,. $$

Für $\Re(1+\alpha-\beta-\gamma+\lambda) > 0$ findet man:

$$ {}_1F_1(a; b; z) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha+\lambda)\,\Gamma(b)\,z^{\lambda}}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)\,\Gamma(b+\lambda)\,\Gamma(a)\,\Gamma(1+\alpha-\beta-\gamma+\lambda)} \int_0^1 {}_3F_3\left[\begin{matrix}1, \alpha, a+\lambda;\\ \beta, \gamma, b+\lambda;\end{matrix} zu\right] \times $$

$$ \times\, {}_2F_1\left[\begin{matrix}1-\gamma+\lambda, \alpha-\gamma;\\ 1+\alpha-\beta-\gamma+\lambda;\end{matrix} 1-u\right] \times (1-u)^{\alpha-\beta-\gamma+\lambda} u^{\beta-1}\,du\,, $$

$b \neq 0, -1, -2, \ldots$; α, β, γ und λ sind beliebig mit $\lambda = 0, -1, -2, \ldots$; $\Re(\beta) > 0$; $\Re(\gamma) > 0$; $\Re(1+\alpha-\beta-\gamma+\lambda) > 0$; $\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots$; $a+\lambda \neq 0, -1, -2, \ldots$

S. C. van Veen (Dordrecht, Holl.).

Jaeger, J. C.: A continuation formula for Appell's function F_2. J. London Math. Soc. **13**, 254 (1938).

Verf. geht aus von der Definition der in der Quantenmechanik auftretenden Funktion F_2 durch die Gleichung

$$ A = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b')}{\Gamma(c')} F_2(a; b, b'; c, c'; x, y) $$

$$ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} F(a+t, b; c, x)\, \frac{\Gamma(a+t)\,\Gamma(b'+t)}{\Gamma(c'+t)}\, \Gamma(-t)(-y)^t\,dt, $$

wo der Integrationsweg so verläuft, daß die Pole von $\Gamma(-t)$ rechts und die von $\Gamma(a+t)$ und $\Gamma(b'+t)$ links liegen (Appell and Kampé de Fériet, Functions hypergéométriques, p. 40). Unter den Voraussetzungen $|y| > 1$, $|x| < 1$, $|1-x| < |y|$, $|\arg(-y)| < \pi$ leitet er für A folgende Entwicklung her:

$$ A = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b'-a)}{\Gamma(c'-a)} (-y)^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} F(-n, b; c; x)\, \frac{(a-c'+1, n)\,(a, n)}{n!\,(a-b'+1, n)}\, y^{-n} $$

$$ + \frac{\Gamma(b')\,\Gamma(a-b')}{\Gamma(c'-b')} (-y)^{-b'} \sum_{n=0}^{\infty} F(a-b'-n, b; c; x)\, \frac{(1+b'-c', n)\,(b', n)}{n!\,(1+b'-a, n)}\, y^{-n}, $$

wo $(a, n) = a(a+1)\ldots(a+n-1)$. *B. Schoeneberg* (Hamburg).

Shastri, N. A.: Integral relations between the k-function with non-integral index and confluent hypergeometric functions. J. Indian Math. Soc., N. s. **3**, 152—154 (1938).

If m is of the form $2r+\frac{1}{2}$ and C is the contour $(0+, \infty)$

$$ 2\pi i e^{\frac{1}{2}x} x^{m-\frac{1}{2}} k_{2n}(\tfrac{1}{2}x) $$

$$ = (-)^{n-m-\frac{1}{2}} (n-1)\, B(n-1, m+\tfrac{3}{2}) \int_C e^{-\frac{1}{2}s} s^{-n-1} ds\, (x+s)^{m+n-\frac{1}{2}} k_{2m+1}(s/2). $$

If $\omega_{a,c}(x)$ is the Pearson-Cunningham function and n is an integer

$$ 2\pi i\, e^{x} x^{n} \omega_{m,\frac{1}{2}}(x) $$

$$ = (-)^{2m-n} n(m+\tfrac{1}{2})\, B(n, m+\tfrac{1}{2}) \int_C e^{-\frac{1}{2}s} s^{-m-\frac{1}{2}} (x+s)^{m+n-\frac{1}{2}} k_{2n}(s/2)\, ds\, 2m+\tfrac{3}{2} $$

not being a positive integer. If $T_m^n(x)$ is the polynomial of Sonine

$$ 2\pi i\, x^m e^{\frac{1}{2}x} k_{2n}(\tfrac{1}{2}x) = (-)^{n-m-1} B(n, m+1)\, \Gamma(m+2) \int_C e^{-s} s^{-n} (x+s)^{m+n} T_1^m(s)\, ds $$

the paper ends with a contour integral for $k_{2n}(\frac{1}{2}x)$ involving the incomplete gamma function, $n+1$ not being a positive integer. *H. Bateman* (Pasadena).

Shastri, N. A.: Relations between some confluent hypergeometric functions. J. Indian Math. Soc., N. s. **3**, 155—163 (1938).

The following expressions for the Legendre polynomial $P_n(x)$ are first obtained:

$$\int_0^\infty e^{-t} D_x^n[\exp(\tfrac{1}{2}x^2 t)\, k_{2n}(\tfrac{1}{2}x^2 t)]\,dt = 2^n \Gamma(n+1) P_n(x) + 2^{n-1}\Gamma(n) P_n'(x)$$

$$\int_0^\infty e^{u} k_{2n}(u) D_x^{n-1}[2x^{-4}\exp(-2ux^{-2})]\,du = 2^{n-1}\Gamma(n) P_{n-1}(x) \qquad 0 < x^2 < 2$$

the equation $s^n \exp[x(s^{-1}-1)]k_{2n}(x/s) = k^2(1-s+k^2)^{n-1}$, in which k^{2m} is to be replaced by $k_{2m}(x)$ after the expansion of the binomial, is obtained for positive values of S. When $s=0$ the expression on the left is to be replaced by $2^n e^{-x} x^n/n!$ the paper ends with several formulae for special integrals of type $\int_0^x f(x-t)g(t)\,dt$ in many of which the parabolic cylinder function $D_n(z)$ occurs. Evaluations are also given for some integrals over the range $(0,\infty)$ in which Bessel functions and parabolic cylinder functions occur. *H. Bateman* (Pasadena).

Shabde, N. G.: On some results involving k_n-functions. J. Indian Math. Soc., N. s. **3**, 146—151 (1938).

The integral $\int_0^\infty e^{-pz} z^q \prod_{s=1}^n k_{2m_s}(a_s z)\,dz$ is expressed in terms of Lauricella's hypergeometric function of n variables of type $2a_s/(p+a_1+a_2+\cdots+a_n)$ and a transformation is found for a similar integral with an extra factor $J_\nu(2\sqrt{xz})z^{-\frac{1}{2}\nu}$. The integral $\int_0^x k_{2m}(x-t)k_{2n}(t)\,dt$ is expressed as a series of type $\sum_{r=0}^\infty c_r D_{2m+2n+2r-3}(2\sqrt{x})$ and a transformation is found for a similar integral with e^{-x} as extra factor. The integral without this factor is then expressed as a series of type $\sum a_s[k_{2n+2s}(x)+k_{2n+2s+2}(x)]$. The function $k_{2n}(x)$ is found to be a solution of the integro-differential equation

$$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{xs}) f(s)\,ds = (-)^{n-1} f'(x)$$

and it is also found that

$$n\pi \int_0^\infty k_{2m}(x) k_{2n}(x)\,dx/x = (-)^{m+1} B(m-n,\,1)\sin n\pi. \qquad R(n) < 1.$$

A number of formulae involving the k-function are finally derived as particular cases of formulae in two of Erdelyi's papers. In particular solutions are found of the integral equation $f(x) = (-)^n \int_0^\infty J_{n+2}(2\sqrt{xs}) f(s)\,ds$. *A. Bateman* (Pasadena).

Meijer, C. S.: Integraldarstellungen Whittakerscher Funktionen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **41**, 1096—1107 (1938).

Der Verf. leitet die folgende allgemeine Integraldarstellungen ab:

$$W_{k,m}(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha-\lambda-k)\, e^{-\frac{z}{2}} z^k}{\Gamma(\tfrac{1}{2}+2\alpha+m-k)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}-m-k)} \int_0^{\infty e^{i\tau}} e^{-\frac{u}{2}} W_{\lambda,m+\alpha}(u) \times$$

$$\times F\left[\begin{matrix}\tfrac{1}{2}+m-k,\,1+\alpha-\lambda-k;\\ \tfrac{1}{2}+2\alpha+m-k\end{matrix}\; -\frac{u}{z}\right] u^{\alpha-k-1}\,du.$$

Hierin ist: $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{3\pi}{2}$; $\mathrm{Max}\left(-\frac{\pi}{2}, -\pi+\arg z\right) < \tau < \mathrm{Min}\left(\frac{\pi}{2}, \pi+\arg z\right)$ $\Re(\frac{1}{2}-m-k) > 0$; α und λ beliebig mit $\Re(\frac{1}{2}+2\alpha+m-k) > 0$; $1+\alpha-\lambda-k$

$\neq 0, -1, -2 \ldots$ Spezialfall u. a. $\alpha = \tau = 0$; $|\arg z| < \pi$; $\lambda = k$ (Sharma, vgl. dies. Zbl. 18, 304).

$$W_{k,m}(z) = \frac{\Gamma(2\beta-\mu+\frac{1}{2})\,\Gamma(\mu+m-k)\,\Gamma(\mu-m-k)\,e^{-\frac{z}{2}}z^{k-\mu+\frac{1}{2}}}{\Gamma^2(2\beta)\,\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)\,\Gamma(\frac{1}{2}-m-k)} \times$$
$$\times \int_0^{\infty\cdot e^{i\tau}} e^{-\frac{u}{2}} M_{\beta-\mu+\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(u)\, F\left[\begin{matrix}\mu+m-k,\ \mu-m-k;\\ 2\beta\end{matrix}\ -\frac{u}{z}\right] u^{\beta-1}\,du$$

$\Re(\frac{1}{2} \pm m - k) > 0$, z und τ wie oben; β und μ beliebig mit $\Re(\beta) > 0$, $2\beta - \mu + \frac{1}{2} \neq 0, -1, -2, \ldots$; $\mu \pm m - k \neq 0, -1, -2, \ldots$

$$W_{k,m}(z) = \frac{\Gamma(1-2\alpha)\,\Gamma(\frac{1}{2}-m-\alpha+\lambda)\,e^{-\frac{z}{2}}z^{m+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-m-k)\,\Gamma(1-2m-2\alpha)\,\Gamma(\frac{1}{2}+m-\alpha+\lambda)} \int_0^{\infty\cdot e^{i\tau}} e^{-\frac{u}{2}} M_{\lambda,-m-\alpha}(u) \times$$
$$\times F\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}+m-k,\ 1-2\alpha;\\ \frac{1}{2}+m-\alpha+\lambda\end{matrix}\ -\frac{z}{u}\right] u^{\alpha-m-\frac{1}{2}}\,du.$$

$\Re(\frac{1}{2} - m - k) > 0$, z und τ wie oben; α und λ beliebig, mit $\Re(1 - 2m - 2\alpha) > 0$, $1 - 2\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots$ und $\frac{1}{2} - m - \alpha + \lambda \neq 0, -1, -2, \ldots$. Mehrere Spezialfälle. *S. C. van Veen* (Dordrecht).

Erdélyi, Artur: Integraldarstellungen für Produkte Whittakerscher Funktionen. Nieuw Arch. Wiskde **20**, 1—34 (1939).

Im Anschluß an die von C. S. Meijer herrührende Darstellung einer Whittakerschen Funktion durch ein unendliches Integral, dessen Integrand das Produkt einer Exponentialfunktion, einer Potenz und einer hypergeometrischen Funktion ist, stellt Verf. sich das Ziel, für ein Produkt beliebig vieler Whittakerscher Funktionen mit voneinander unabhängigen Argumenten und Parametern eine analoge Integraldarstellung zu erhalten. Als Sonderfälle gehen hieraus die bekannten Integraldarstellungen für Produkte Besselscher Funktionen, Hermitescher und Laguerrescher Funktionen hervor. Als Objektfunktionen bezeichnet Verf. jene Funktionen, welche im Integranden einer Laplaceschen Transformation auftreten. Es handelt sich um die Auffindung der Objektfunktionen, welche zu Produkten allgemeiner Whittakerscher Funktionen gehören. Verf. stellt zunächst eine Reihe von Formeln über hypergeometrische Reihen und Verallgemeinerungen dieser Reihen, welche von Appell und von Lauricella herrühren, zusammen. Hierauf schreibt er die von ihm gefundenen unendlichen Integraldarstellungen der Produkte allgemeiner Whittakerscher Funktionen an, wobei im Integranden des Integrals verallgemeinerte hypergeometrische Reihen der obengenannten Form auftreten, und beweist diese Formeln mit Hilfe der vorher angeschriebenen Ausdrücke für die Reihen. Als Sonderfall behandelt er die Formel für das Produkt zweier Whittakerscher Funktionen. Hieraus leitet er die bekannten Ausdrücke für Produkte Laguerrescher Funktionen und Besselscher Funktionen ab. Aus den gewonnenen Formeln leitet Verf. Gruppeneigenschaften von Produkten Whittakerscher Funktionen ab. Andererseits gelingt es, aus den gewonnenen Formeln Systeme partieller Differentialgleichungen herzuleiten für die Produkte der angegebenen Funktionen. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Erdélyi, A.: Integral representations for products of Whittaker functions. Philos. Mag., VII. s. **26**, 871—877 (1938).

Unter Anwendung der Laplacetransformation (u. a. dies. Zbl. **17**, 304) zeigt der Verf. u. a.:

$$W_{k,m}(x)\,W_{l,m}(y) =$$
$$= \Gamma(k+l)(xy)^{m+\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(x+y)} \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} e^u\,u^{-k-l}(x-u)^{-\frac{1}{2}+k-m}(y-u)^{-\frac{1}{2}+l-m} \times$$
$$\times\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}-k+m,\ \frac{1}{2}-l+m;\\ 1-k-l\end{matrix}\ \frac{-u(x+y-u)}{(x-u)(y-u)}\right] du$$

$k + l \neq 0, -1, -2, \ldots$; $x \neq 0$, $y \neq 0$, $|\arg x| < \pi$, $|\arg y| < \pi$.

$$D_\mu(x)\,D_\nu(y)=\frac{e^{-\frac{1}{4}(x^2+y^2)}}{4i\cos\frac{\pi}{2}(\mu+\nu)}\int_{-\infty}^{(0+)} e^{\frac{v}{2}}(x^2-v)^{-\frac{1}{4}(-\mu+\nu+1)}(y^2-v)^{-\frac{1}{4}(\mu-\nu+1)}\times$$

$$\times\left(\frac{x^2+y^2}{v}-1\right)^{\frac{1}{4}(\mu+\nu+1)} P^{\frac{1}{2}(\mu+\nu+1)}_{\frac{1}{2}(\mu-\nu-\frac{1}{2})}\left(\frac{xy}{\sqrt{(x^2-v)(y^2-v)}}\right)dv$$

$\frac{1}{2}(\mu+\nu+1)\neq 0,\ \pm1,\pm2,\ldots;\ x\neq 0,\ y\neq 0,\ |\arg x|<\frac{\pi}{2},\ |\arg y|<\frac{\pi}{2}.$

$$K_\nu(x)\,K_\nu(y)=\pi(xy)^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}}e^{-x-y}\int_0^\infty e^{-2v}\{(x+v)(y+v)\}^{-\frac{1}{4}\nu-\frac{1}{4}}P_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(2\left(1+\frac{v}{x}\right)\left(1+\frac{v}{y}\right)-1\right)dv$$

für alle Werte von ν und für $x\neq 0$, $y\neq 0$, $|\arg x|<\pi$, $|\arg y|<\pi$. Diese Integralbeziehungen liefern auch gewisse rekurrente Beziehungen, wie z. B.:

$$W_{k,m}(z)\cdot W_{l,m}(z)=\frac{\Gamma(1-k-l)\,\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)\,\Gamma(\frac{1}{2}-l-m)}z^{m+\frac{1}{2}}e^{-\frac{z}{2}}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m+r)\,\Gamma(\frac{1}{2}-l+m+r)\,\Gamma(1+2m)}{r!\,\Gamma(1+2m+r)\,\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\,\Gamma(\frac{1}{2}-l+m)}z^r\,W_{k+l-m-r-\frac{1}{2},\,r+m}(z)+$$

$$+\frac{\Gamma(1-k-l)\,\Gamma(2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\,\Gamma(\frac{1}{2}-l+m)}z^{-m+\frac{1}{2}}e^{-\frac{z}{2}}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-k-m+r)\,\Gamma(\frac{1}{2}-l-m+r)\,\Gamma(1-2m)}{r!\,\Gamma(1-2m+r)\,\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)\,\Gamma(\frac{1}{2}-l-m)}z^r\,W_{k+l+m-r-\frac{1}{2},\,r-m}(z).$$

$|\arg z|<\frac{\pi}{2};\ \Re(k+l)>0,\ k+l\neq 1,2,\ldots;\ 2m\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots$

S. C. van Veen (Dordrecht).

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Gonzalez, M. O.: Eine Verallgemeinerung der homogenen Differentialgleichung. Bol. mat. **11**, 206—209 (1938) [Spanisch].

$$\frac{y'}{(x\varphi-y)F}-\left[1+\frac{\varphi}{(x\varphi-y)F}\right]=0$$

ist eine exakte Differentialgleichung, wenn

$$\varphi=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),\qquad F=F\left(\log x-\int\frac{dv}{\varphi(v)-v}\right),\qquad v=\frac{y}{x}$$

ist. Daher hat z. B.

$$y'=y\left(\frac{2}{x}+\log\frac{x^2}{y}\right)\quad\text{die Lösungen}\quad x+\log\log\frac{x^2}{y}=C.$$

Kamke (Tübingen).

Mitrinovitch, Dragoslav S.: Théorème sur l'équation de Riccati. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 156—157 (1939).

La nota contiene un nuovo criterio di integrabilità dell'equazione di Riccati.

C. Miranda (Genova).

Lagrange, René: Quelques théorèmes d'intégrabilité par quadratures de l'équation de Riccati. Bull. Soc. math. France **66**, 155—163 (1938).

Es wird eine Reihe von Fällen angegeben, in denen die Differentialgleichung

$$y'=f(x)y^2+2g(x)y+h(x)$$

durch Quadraturen lösbar ist. Eines der einfacher zu formulierenden Kriterien besagt, daß die Lösbarkeit durch Quadraturen gesichert ist, wenn für zwei Konstante A, B $(|A|+|B|>0)$ $A^2f+ABf'+B^2(fg'-f'g+f^2h-fg^2)\equiv 0$ ist.

Kamke (Tübingen).

Pompeiu, D.: Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre. (*2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.*) Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **40**, Nr 1/2, 57—60 (1938).

Einfache Bemerkungen nebst Beispielen über einen besonderen Typus von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung, die sich durch Quadraturen integrieren lassen. *G. Cimmino* (Cagliari).

Mises, R. v.: Über den Verlauf der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung. Compositio Math. **6**, 203—220 (1938).

Negli studi di Poincaré, Bendixon, Perron, Forster (cfr. questi Zbl. **17**, 258) sul comportamento delle curve integrali nell'intorno di un punto singolare, l'equazione si assume nella forma

$$dy/dx = [a(x, y) + c(x, y)]/[b(x, y) + d(x, y)],$$

con $a(x, y)$, $b(x, y)$ polinomi omogenei in x, y dello stesso grado e $c(x, y)$, $d(x, y)$ funzioni infinitesime di ordine superiore nell'intorno degli zeri di $a(x, y)$ e $b(x, y)$. — L'A. osserva che si può effettuare lo studio di una più vasta classe di equazioni differenziali del primo ordine introducendo coordinate polari, e assumendo quindi l'equazione nella forma

$$\vartheta = f(\varphi) + g(r, \varphi) = F(r, \varphi), \quad \frac{dr}{d\varphi} = r \operatorname{cotg}(F - \varphi), \tag{*}$$

dove $r = r(\varphi)$ è l'equazione della curva integrale e ϑ è l'angolo che la tangente alla curva forma con l'asse polare. L'A. considera la così detta equazione omogenea relativa all'equazione data:

$$\vartheta = f(\varphi), \quad \frac{dr}{d\varphi} = r \operatorname{cotg}(F - \varphi) \tag{**}$$

della quale chiama raggi integrali le semirette uscenti dall'origine di anomalia φ_ν tale che $\varphi = \varphi_\nu = f(\varphi_\nu)$, oppure $\varphi = \varphi_\nu = f(\varphi_\nu) + \pi$, e con ipotesi poco restrittive su f e su g studia profondamente il comportamento degli integrali della (**) e successivamente quelli della equazione completa (*). *G. Sansone* (Firenze).

Hamilton, O. H.: Non-unique solutions of systems of first order ordinary differential equations. Ann. of Math., II. s. **39**, 786—793 (1938).

I. Die Differentialgleichungen (A): $y_i' = f_i(x; y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ seien definiert für alle Punkte des Gebiets R: $0 \leqq x \leqq 1$; $-\infty < y_i < \infty$. Sie seien für festes x stetige Funktionen von $y_1, \ldots y_n$. Für jeden Punkt von R seien alle durch ihn gehenden und in jedem begrenzten Teilgebiet von R überhaupt alle Cauchyschen Näherungskurven gleichmäßig stetig. — Ist M eine Punktmenge (oder ein Punkt) aus R, so ist $B(M)$ die Gesamtheit aller Punkte, die auf einer Integralkurve durch einen Punkt von M liegen. Ist M zusammenhängend, so ist auch der Schnitt zwischen $B(M)$ und $x = x_a$ $(0 \leqq x_a \leqq 1)$ zusammenhängend. — Die kleinste obere Grenze d der Durchmesser d_a aller möglichen Schnitte zwischen $x = x_a$ $(0 \leqq x_a \leqq 1)$ und $B(P_0)$ heißt Durchmesser von $B(P_0)$. Die Menge M_c aller Punkte P, für deren $B(P)$ $d \geqq c > 0$ ist, ist abgeschlossen. Die Punkte von R, durch die die Lösungen von (A) nicht eindeutig sind, lassen sich als „Grenzmenge" einer abzählbaren Folge von abgeschlossenen Punktmengen, z. B. von $M_1, M_{1/2}, \ldots M_{1/n} \ldots$, auffassen. — II. Für (A'): $y' = f(x; y)$ sollen die für (A) genannten Voraussetzungen erfüllt sein; außerdem soll es für jeden Punkt $(x_0; y_0)$ von R eine Zahl $K(x_0; y_0)$ geben, so daß $\lim_{x \to x_0} f(x; g(x)) = K(x_0; y_0)$ ist, wenn $\lim g(x) = y_0$. Daneben wird (B): $y' = f(x; y) + e$ betrachtet; e gehöre der reellen Zahlenmenge G an, für die $|e| < d$ und d beliebig positiv ist. — Die Menge B_n der Zahlen e, für die durch den Punkt P_n keine eindeutige Lösung von (B) geht, ist abzählbar. Ist $P_1, P_2 \ldots$ eine abzählbare Punktmenge K, so ist die Menge der e, für die durch alle Punkte von K nur eine Lösung von (B) geht, nicht abzählbar; sie ist nämlich $G - \sum B_n$. — Immer und nur wenn (A') durch jeden Punkt von R nach einer Seite hin eine eindeutige Lösung hat, gibt es eine überall dichte Menge M von Punkten, durch die die Lösung von (A') eindeutig ist. Aus beiden Sätzen folgt, daß

es eine nichtabzählbare Menge von Zahlen ε gibt, so daß durch jeden Punkt von R nach einer Seite die Lösung von (B) eindeutig ist. *H. Forster* (München).

Pierce, Jesse: Solutions of a differential equation of the first order and first degree in the vicinity of branch points of the solution. Duke math. J. 4, 650—655 (1938).

L'autore considera l'equazione differenziale singolare

$$2x\frac{dx}{dt} = \sum_{h=0}^{\infty} f_h(t)x^h, \qquad (f_0(t) \not\equiv 0), \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1,$$

dove le $f_h(t)$ sono funzioni R-integrabili i cui punti di discontinuità sono contenuti in un insieme di estensione nulla e dimostra che, se le f_h soddisfano a talune ulteriori ipotesi di carattere quantitativo, tale equazione ammette due integrali che si annullano per $t = t_0$. *C. Miranda* (Genova).

Dehousse, Louis: Sur une équation différentielle pour laquelle le point $x = y = 0$ est un foyer. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 323—325 (1939).

L'equazione

$$x\frac{dy}{dx} = -y\left[\frac{p}{q} + x^{pr}y^{qr}A(y)\right], \tag{*}$$

p, q, r interi positivi, $A(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$, ha nell'origine un fuoco di ordine r (Strudelpunkt) e ammette la soluzione formale:

$$x^{pr}y^{qr}/[K(x, y) - x^{pr}y^{qr}\lg x^{qr a_0}] = \text{Cost.}, \tag{**}$$

e $K(x, y)$ risulta olomorfa nell'intorno dell'origine soltanto nel caso $A(y) = a_0$. L'A. studia il caso di $A(y)$ olomorfa, applica la sommazione esponenziale di Borel a $K(x, y)$, ed enuncia delle limitazioni sotto le quali la (**) dà la soluzione della (*). *G. Sansone.*

Svartholm, N.: Die Lösung der Fuchsschen Differentialgleichung zweiter Ordnung durch hypergeometrische Polynome. Math. Ann. **116**, 413—421 (1939).

Unter den Lösungen der Differentialgleichung zweiter Ordnung vom Fuchsschen Typus verdienen diejenigen ein besonderes Interesse, die sich gleichzeitig in der Umgebung zweier Stellen der Bestimmtheit regulär verhalten. Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2w}{dx^2} + p(x)\frac{dw}{dx} + q(x)w = 0$$

wird durch geeignete Transformation in der abhängigen und unabhängigen Variablen auf die Form gebracht:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \sum_{r=1}^{n}\frac{1-\alpha_r}{z-a_r}\cdot\frac{du}{dz} + \frac{P_{n-2}(z)}{\prod_{r=1}^{n}(z-a_r)}u = 0.$$

Dabei sind von den $n+1$ Stellen der Bestimmtheit $a_1, a_2, \ldots; a_{n+1} = \infty$ die ersten beiden zu 0 und 1 und von den zugehörigen Exponenten der Fuchsschen Relation $\alpha + \beta + \sum_{r=1}^{n}(\alpha_r + \beta_r) = n - 1$ die β_r sämtlich zu Null normiert. — Verf. gibt für diesen Typ der Differentialgleichung Lösungen der oben gekennzeichneten Art als Entwicklung nach hypergeometrischen Polynomen an: $y_v = F(-v, v+1-\alpha_1-\alpha_2, 1-\alpha_1; z)$; $y = \sum_{v=0}^{\infty} c_v y_v$ mit $\lim_{v\to\infty} c_v = 0$, wobei letztere Bedingung mit einer gewissen Relation zwischen den akzessorischen Parametern [Koeffizienten des Polynoms $P_{n-2}(z)$] gleichwertig ist. — Liegt keine der Stellen a_v $(v = 3, \ldots, n)$ auf der reellen Achse, so ist diejenige Ellipse, die a_1 und a_2 zu Brennpunkten hat und durch die nächstgelegene singuläre Stelle geht, Konvergenzellipse der Entwicklung. *Möller* (Gießen).

Mambriani, Antonio: Sulla risoluzione delle equazioni differenziali lineari. (*Firenze, 1.—3. IV. 1937.*) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 231—237 (1938).

Verf. gibt zunächst eine Zerlegung des allgemeinen linearen homogenen Diffe-

rentialausdrucks (1) $\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(x) y^{(n-\nu)}$ mit stetigen Koeffizienten in symbolische (nichtkommutative) Linearfaktoren an, von der er anläßlich der Korrektur bemerkt, daß sie schon bei Frobenius zu finden sei [J. reine angew. Math. 77 (1874)], und die übrigens auch in Schlesingers Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen 1, 46—52 (1895) nachzulesen ist. Weiterhin überträgt er die bei Gleichungen mit festen Koeffizienten wohlbekannte formale Methode der symbolischen Division und Entwicklung nach Potenzen eines Operators auf Gleichungstypen wie

$$(2)\quad u_2 D u_1 D u_0 y + v_2 D^{\varepsilon_2} v_1 D^{\varepsilon_1} v_0 y = f(x) \quad \left(\varepsilon_k = 0 \text{ oder } 1;\ D = \frac{d}{dx}\right).$$

Andeutungen über die Rechtfertigung der Methode zur Gewinnung wirklicher Lösungen; Anwendung auf die Gaußsche hypergeometrische Gleichung, die sich auf mehrfache Weise in die Gestalt (2) bringen läßt. *Hermann Schmidt* (Jena).

Constantinesco, G. G.: Transformations genre Laplace. (*2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.*) Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **40**, Nr 1/2, 215—220 (1938).

Es werden formale Beziehungen zwischen $a_\nu(x)$, $w(x)$ und $w(x, y)$ gegeben, damit ein Integral der Differentialgleichung $y^{(n)}(x) + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(x) y^{(n-\nu)}(x) = 0$ durch $\int_\alpha^\beta v(z) e^{z w(x)} dz$ bzw. $\int_\alpha^\beta v(z) e^{w(x,z)} dz$ darstellbar ist. — Insofern die durch Druckfehler entstellte Arbeit dem Ref. verständlich ist, soll die unter (7) angeführte Formel durch $q_i(z) = (-1)^i \sum_{\nu=0}^{n} c_{i,\nu} (-z)^{n-\nu}$ ersetzt werden. *V. G. Avakumović* (Beograd).

Kamke, E.: Neue Herleitung der Oszillationssätze für die linearen selbstadjungierten Randwertaufgaben zweiter Ordnung. Math. Z. **44**, 635—658 (1939).

I sistemi differenziali autoaggiunti del secondo ordine hanno la forma canonica (*) $y'(x) = F(x, \lambda) z(x)$, $z'(x) = -G(x, \lambda) y(x)$, $F > 0$, con le condizioni ai limiti (**) $A y(a) = B z(a)$, $C y(b) = D z(b)$, $|A| + |B| > 0$, $|C| + |D| > 0$ (condizioni ai limiti di prima specie o di Sturm), oppure (***) $y(b) = A y(a) + B z(a)$, $z(b) = C y(a) + D z(a)$, $AD - BC = 1$ (condizioni ai limiti di seconda specie). L'A. si vale della rappresentazione delle funzioni incognite $y(x), z(x)$ in coordinate polari $y(x) = c\varrho(x) \operatorname{sen}\vartheta(x)$, $z(x) = c\varrho(x)\cos\vartheta(x)$ [rappresentazione già usata dal signor H. Prüfer per i problemi al contorno di prima specie, nel caso di $F, A, \ldots, D$ indipendenti da λ e $G = \lambda g(x)$; Math. Ann. **95**, 499—518 (1926)], e con opportuni accorgimenti dà rapidamente il teorema di oscillazione nel caso di condizioni ai limiti di prima specie. — Per i sistemi (*), (***), di seconda specie, l'A. dimostra che se: I. $F(x, \lambda)$, $G(x, \lambda)$ sono continue, e $F > 0$ per $a \leqq x \leqq b$, $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$; II. $F(x, \lambda)$, $G(x, \lambda)$ sono per ogni x non decrescenti con λ crescente, e per ogni coppia di valori $\lambda_1 < \lambda_2$ esiste un $x_0 = x_0(\lambda_1, \lambda_2)$ tale che $G(x_0, \lambda_1) < G(x_0, \lambda_2)$, oppure $F(x_0, \lambda_1) < F(x_0, \lambda_2)$ e $|G(x_0, \lambda_1)| + |G(x_0, \lambda_2)| > 0$; III. $\lim_{\lambda \to \Lambda_1} G(x, \lambda) = -\infty$, $\lim_{\lambda \to \Lambda_2} G(x, \lambda) = +\infty$; IV. A, B, C, D sono funzioni continue di λ per $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$; V. posto $\Delta A = A(\lambda + \varepsilon) - A(\lambda), \ldots, D \cdot \Delta C \geqq C \cdot \Delta D$, $\Delta A \cdot \Delta D \geqq \Delta B \cdot \Delta C$; VI. E' $B(\lambda) \equiv 0$, oppure $B(\lambda) \neq 0$ per $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$, allora esistono infiniti autovalori aventi per limite Λ_2. L'A. precisa poi il numero degli zeri delle autosoluzioni siano i corrispondenti autovalori semplici o doppi. *Giovanni Sansone* (Firenze).

Cinquini, Silvio: Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali (non lineari) del secondo ordine. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **8**, 1—22 (1939).

Verf. betrachtet die Randwertaufgabe $y'' = f(x, y, y')$, $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$. Die Funktion f ist in $a \leqq x \leqq b$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < y' < +\infty$ oder in $a \leqq x \leqq b$, $u(x) \leqq y \leqq v(x)$, $-\infty < y' < +\infty$ gegeben. Im 2. Falle ist z. B. die Aufgabe unter folgenden Voraussetzungen lösbar: $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$, $u(x_i) \leqq y_i \leqq v(x_i)$; f stetig und $|f(x, y, y')| \leqq \varphi(x) + \psi(x)|y'|$, mit $\varphi(x) \geqq 0$, $\psi(x) \geqq 0$ summierbar über $\langle a, b\rangle$

und $u(x)$, $v(x)$ Lösungen von $y'' = f$. Der Satz verallgemeinert einen Satz des Ref. (dies. Zbl. 2, 132; 12, 257). Im ersten und zweiten Falle kann f z. B. in der Form $f(x, y, y') = g(x, y, y') + \psi(x)$ darstellbar sein, wo $|g(x, y, y')| = \psi_0(y) y'^2 + \psi_1(x)$, g stetig, $\psi(x)$, $\psi_1(x) \geqq 0$, $\psi_0(y) \geqq 0$ über passende Intervalle summierbar sind. *G. Scorza Dragoni* (Padova).

Tonelli, Leonida: Sull'equazione differenziale $y'' = f(x, y, y')$. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 8, 75—88 (1939).

Existenzsätze für die Randwertaufgabe $y'' = f(x, y, y')$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$. Die Funktion f ist endlich und stetig in $a \leqq x \leqq b$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < y' < +\infty$. Als Beispiel geben wir hier einen Satz, der eine Verallgemeinerung eines Satzes des Ref. [Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 2, 177—215 (1938), vgl. bes. Nr 8, 9, 10; dies. Zbl. 19, 345] ist: Die Aufgabe ist lösbar, wenn man für willkürliche $\sigma > 0$ und $Y \geqq 0$ eine solche über $\langle a, b\rangle$ summierbare Funktion $\psi(x)$ finden kann, für die folgende Ungleichungen gelten: $|f(x, y, y')| < \sigma |y'| + \psi(x)$ für $|y| \leqq Y$; $f(x, y, y') > -\sigma(|y| + |y'|) - \psi(x)$ für $y > Y$; $f(x, y, y') < \sigma(|y| + |y'|) + \psi(x)$ für $y < -Y$. Die Beschränkungen, denen die Funktion f unterworfen ist, werden noch weiter verallgemeinert: z. B., man kann voraussetzen: $|f(x, y, y')| < \beta(x) |y'| + \psi(x)$ für $|y| \leqq Y$; $f(x, y, y') > -\alpha(x) |y| - \beta(x) |y'| - \psi(x)$ für $y > Y$; $f(x, y, y') < \alpha(x) |y| + \beta(x) |y'| + \psi(x)$ für $y < -Y$. Dabei soll $Y \geqq 0$ beliebig, $\alpha(x) \geqq 0$, $\beta(x) \geqq 0$, $\psi(x) \geqq 0$ (von Y abhängig und) über $\langle a, b\rangle$ summierbar sein, mit $\int_a^b \{(b - a)\alpha(x) + \beta(x)\} dx < 1$. (Damit enthält das Theorem auch einen Cinquinischen Satz; siehe vorst. Ref.). *G. Scorza Dragoni* (Padova).

Montaldo, Oscar: La determinazione effettiva degli invarianti lineari fondamentali di un'equazione differenziale lineare dell'ordine n. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 8, 205—212 (1938).

Petrovitch, Michel: Théorèmes généraux sur les équations différentielles algébriques. Publ. Math. Univ. Belgrade **6/7**, 290—325 (1938).

L'A. considera i sistemi canonici

$$du_i/dt = \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k^{(i)} e^{u_k}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ p = 1, 2, \ldots)$$

$\varepsilon_0^{(i)} = 0, 1$ e dà l'effettiva costruzione dei coefficienti degli integrali delle soluzioni olomorfe nell'intorno dell'origine. Con tali soluzioni forma la così detta successione canonica $\{u_n(t)\}$ e dimostra che se $f(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0$ è un'equazione differenziale algebrica, i suoi integrali hanno l'espressione $x = e^{\Phi_1(t)}$, $y = e^{\Phi_2(t)}$ ove $\Phi_1(t)$ e $\Phi_2(t)$ si rappresentano come combinazioni lineari a coefficienti interi di termini della forma $\int e^{u_k(t)} dt$, e le $u_k(t)$ appartengono alla successione canonica. — L'A. estende poi il suo teorema ai sistemi di equazioni differenziali algebriche di ordine qualunque. *Sansone.*

● **Trjitzinsky, W. J.: Analytic theory of non-linear singular differential equations.** Mém. Sci. math. Fasc. **90**, 81 pag. Paris (1938).

Es werden nichtlineare Differentialgleichungen

$$x^p y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

behandelt; dabei ist p eine natürliche Zahl,

$$f = \sum_{k_0, \ldots, k_{n-1}} a_{k_0, \ldots, k_{n-1}}(x) y^{k_0} y'^{k_1} \ldots y^{(n-1)k_{n-1}}$$

konvergent in einem Bereich

$$|x| \leqq r, \quad |y| \leqq \varrho, \ldots, \quad |y^{(n-1)}| \leqq \varrho,$$

$a_{0, \ldots, 0} = 0$, und die $a_{k_0, \ldots, k_{n-1}}(x)$ sind regulär für $|x| \leqq r$. Das Ziel ist die Aufstellung von asymptotischen Darstellungen von Lösungen bei Annäherung an $x = 0$. Die asymptotischen Darstellungen werden aus formalen Lösungen von (1) erhalten. Für die Festlegung des Gültigkeitsbereiches der asymptotischen Darstellungen wird die verkürzte Differentialgleichung herangezogen, die aus (1) entsteht, wenn in f nur

die linearen Glieder in den $y^{(r)}$ beibehalten werden. Der Fall $n = 1$ wird mit Rücksicht auf weitergehende Aussagen, die dann möglich sind, gesondert behandelt. Für die nicht ganz kurze Formulierung der Ergebnisse muß auf die Schrift selber verwiesen werden. *Kamke* (Tübingen).

Boos, Pierre: Une propriété de symétrie des intégrales d'équations différentielles d'ordre n. J. École polytechn., III. s. **145**, 37—54 (1939).

Untersuchungen über gewöhnliche Differentialgleichungen n-ter Ordnung $y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, \ldots, y', y, x)$ hinsichtlich der Eigenschaft, daß zu jeder durch einen Punkt A der Geraden Ox hindurchgehenden Integralkurve eine in bezug auf A oder auf die durch A zu Oy parallele Gerade symmetrische Integralkurve der Gleichung existiert. Im Fall $n \neq 2$ gibt es zu jeder durch A gehenden Integralkurve der Gleichung eine in bezug auf A (auf die durch A zu Oy parallele Gerade) symmetrische Integralkurve dann und nur dann, wenn n ungerade (gerade) ist, F von x nicht abhängt und in bezug auf $y^{(n-1)}, y^{(n-3)}, \ldots$ gerade ist. Im Fall $n = 2$ sind diese Bedingungen hinreichend, nicht aber notwendig, falls Ox ein Integral der Gleichung darstellt.

O. Borůvka (Brno).

Risselman, W. C.: Approximation to the solution of a normal system of ordinary linear differential equations. Duke math. J. **4**, 640—649 (1938).

L'autore considera il sistema di equazioni

$$x_i'(t) = \sum_{k=1}^{m} \theta_{ik}(t)\, x_k(t) + \theta_i(t), \qquad x_i(t_0) = \gamma_i \qquad (i = 1, \ldots, m;\ a \leqq t_0 \leqq b)$$

e dimostra, sotto opportune ipotesi per le θ_{ik} e θ_i, che, comunque si assegnino i numeri $r_i (> 1)$, $r_{m+i} (> 1)$, $a_i (> 0)$, n_i (interi) e un sistema di funzioni $\{\varphi_n(t)\}$ linearmente indipendenti in (a, b), posto $y_{in_i} = \sum_{k=1}^{n_i} c_{ik}\varphi_k$, restano univocamente determinate le costanti c_{ik}, che rendono minima la funzione

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \,|\, \gamma_i - y_{in_i}(t_0) \,|^{r_{m+i}} + \sum_{i=1}^{m} \int_a^b |\, y_{in_i}' - \sum_{k=1}^{m} \theta_{ik} y_{kn_k} - \theta_i \,|^{r_i} dt. \tag{3}$$

Se le φ_n sono dei polinomii, per tali valori delle c_{ik}, si ha $\lim_{n_i \to \infty} y_{in_i} = x_i$. Il caso in cui gli r_i, r_{m+i} non sono tutti maggiori di 1 è anche investigato ma con risultati meno significativi. *C. Miranda* (Genova).

Piaggio, H. T. H.: The incompleteness of „complete" primitives of differential equations. Math. Gaz. **23**, 49—57 (1939).

L'autore enuncia senza dimostrazione una condizione necessaria e sufficiente affinchè un integrale di un'equazione differenziale del primo ordine ordinaria o ai differenziali totali (nel caso di completa integrabilità) sia singolare, nel senso che esso non possa essere ottenuto dall'integrale generale assegnando alla costante arbitraria che vi figura un valore particolare finito o infinito. *C. Miranda* (Genova).

Germay, R.-H.-J.: L'intégration des systèmes différentiels normaux et les fonctions de Riemann associées aux parties linéaires de leurs seconds membres. Application aux équations aux dérivées partielles du premier ordre de forme résolue par rapport à $\frac{\partial x}{\partial x_1}$. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **7**, 595—600 (1938).

Anfangswertproblem für das Differentialgleichungssystem

$$y_j'(x) - \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x)\, y_k(x) = f_j(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

vorausgesetzt, daß die a_{jk}, f_j stetige Funktionen sind und die f_j eine Lipschitzsche Bedingung in bezug auf $y_1, y_2, \ldots, y_n$ erfüllen. Ersetzt man die $y_j(x)$ in der linken Seite durch $y_j^{(\mu)}(x)$, in der rechten Seite durch $y_j^{(\mu-1)}(x)$, so erhält man, für $\mu = 1, 2, \ldots$, eine gegen die gesuchte Lösung $y_j(x)$ konvergierende Folge $y_j^{(\mu)}(x)$. Anwendung

auf das der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$p_1 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n)$$

assoziierte charakteristische Differentialgleichungssystem. *G. Cimmino* (Cagliari).

Germay, R. H. J.: Fonctions associées aux fonctions de Riemann d'un système différentiel linéaire. — Application à l'intégration d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Sér. I 58, 162—165 (1938).

Vereinfacht und in Matrixschreibweise übertragen ist der Inhalt folgender: Es sei $Y(t, x)$ diejenige Integralmatrix des homogenen linearen Systems mit stetigen Koeffizienten $\mathfrak{y}' = \mathfrak{y} A$, die sich für $x = t$ auf die Einheitsmatrix E reduziert, also, wenn H eine beliebige Integralmatrix bedeutet,

$$Y(t, x) = \mathsf{H}^{-1}(t)\,\mathsf{H}(x). \tag{1}$$

Die Lösung des nichthomogenen Systems $\mathfrak{y}' = \mathfrak{y} A + \mathfrak{a}$ mit den Anfangswerten $\mathfrak{y}_0$ ist dann bekanntlich

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_0 Y(x_0, x) + \int_{x_0}^{x} \mathfrak{a}(t)\, Y(t, x)\, dt. \tag{2}$$

Hierin darf man nun $(x, \mathfrak{y})$ mit $(x_0, \mathfrak{y}_0)$ vertauschen:

$$\mathfrak{y}_0 = \mathfrak{y}\, Y(x, x_0) + \int_{x}^{x_0} \mathfrak{a}(t)\, Y(t, x_0)\, dt. \tag{3}$$

Vergleich von (2) (3) gibt Relationen, die auch vermöge der aus (1) fließenden, bekannten Beziehung $Y(t, x)Y(x, u) = Y(t, u)$ $(= E$ für $t = u)$ unmittelbar zu sehen sind. — Anwendung von (3) auf die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} + (\mathfrak{y} A + \mathfrak{a})\left(\frac{\partial z}{\partial y_j}\right) = 0. \qquad \textit{Hermann Schmidt} \text{ (Jena).}$$

Germay, R.-H.-J.: Les fonctions de Riemann et l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, de forme linéaire. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége 8, 8—12 (1939).

Ist die lineare homogene Differentialgleichung

$$p + \sum F_i(x, y_1, \ldots, y_n)\, p_i = 0 \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ p_i = \frac{\partial z}{\partial y_i}\right)$$

zu integrieren, so hat man das simultane System $dy_i : dx = F_i$ mit den Anfangsbedingungen $y_i = y_i^0$ für $x = x_0$ zu befriedigen und erhält zur Bestimmung der charakteristischen Streifen das simultane System:

$$\frac{dp_i}{dx} = -\sum_{\nu} \frac{\partial F_i}{\partial x_\nu} p_\nu = \sum_{\nu} A_{i\nu}(x, x_0, y_1^u, \ldots y_n^u)\, p_\nu.$$

Da die ∞^n Integralkurven von $dy_i : dx = F_i$ eine vollständige Lösung bilden, findet man die Verhältnisse von $p_1, \ldots, p_n$ ohne Integration und dann etwa p_n durch eine Quadratur. Der Verf. zieht es vor, sich erst die n^2 Riemannschen Funktionen $G_{ik}(x, \xi; \lambda; x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ bestimmt zu denken, die den linearen Ausdrücken $\sum A_{i\nu} p_\nu$ adjungiert sind, und findet dann $p_1, \ldots, p_n$ durch n Quadraturen. Er verrät aber nicht, welchen Nutzen dieser wirklich überraschende Umweg bringt. In derselben Weise behandelt er dann die allgemeine von z freie lineare Differentialgleichung $p + \sum F_i p_i = F_{n+1}$. *Engel* (Gießen).

Ghika, Al.: Sur certaines solutions particulières des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. (*2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.*) Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **40**, Nr 1/2, 81—84 (1938).

An operator G which is defined by its effect on e^{xu+yz} is said to be applicable to any function $g(u, v)$ when

$$G[f(z,t); g(u,v)] = -(1/4\pi^2) \iint_{c_1 c_2} f(z,t)\, dz\, dt \cdot z^{-1} t^{-1} e^{-a-b} g(a/z, b/t)\, da\, db$$

has a meaning for any function $f(z, t)$ holomorphic in the circles C_1 and C_2. — Let $\gamma(D_x, D_y)F(x, y) = 0$ be a linear partial differential equation with constant coefficients, where

$$\gamma(u, v) = \sum a_{\rho\sigma} u^\rho v^\sigma$$

is a polynomial which cannot be broken up into factors. — By a change of variables $x' = y - x$, $y' = x + y$ we can reduce the partial differential equation, if necessary, to one whose generating function is a polynomial of type $\gamma(u, v) = av^{m+n} + b(u, v)$ $(a \neq 0)$, where $b(u, v)$ is a polynomial of degree $< m + n$ with respect to u and v. Let $v = \Phi(u)$ be the algebraic function defined by $\gamma(u, v) = 0$ then

$$G[f(z); e^{xu + y\Phi(u)}\psi(u)]$$

is a particular integral of the partial differential equation provided that it has a meaning. The author has proved that there are $m + n$ entire functions of u of the form

$$\Phi_k(y, u) = \sum_{i=1}^{m+n} e^{y\Phi_i(u)}\psi_{ik}(u)$$

which are symmetrical with respect to the branches $\Phi_i(u)$ of the algebraic function $\Phi(u)$, are linearly independent and moreover satisfy the conditions

$$\left[\frac{\partial^n \Phi_k(y, u)}{\partial y^n}\right]_{y=0} = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

It follows that the expression $\sum_{i=1}^{m+n} G[f_i(z); e^{xu}\Phi(y, u)]$ is the general integral of Cauchy's problem.
H. Bateman (Pasadena).

Soboleff, S.: Sur le problème de Cauchy pour les équations quasi-linéaires hyperboliques. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **20**, 79—83 (1938).

Es handelt sich um die partielle Differentialgleichung vom hyperbolischen Typus

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F$$

$\left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}p_i p_j \text{ positiv-definit}\right)$ in einem Gebiete Ω, das von den Ebenen $t = 0$, $t = T$ und von einer Fläche begrenzt wird, für welche man voraussetzt, daß die äußere Normalenrichtung mit der t-Richtung stets einen spitzen Winkel bildet. Es sei zunächst die Gleichung linear (die A_{ij}, F nur von den x_i, t abhängend); wenn die A_{ij}, F quadratsummierbare Ableitungen nach den x_i bis zur Ordnung $\left[\frac{n}{2}\right] + 2$ in jedem Durchschnittsgebiet D_t von Ω mit einer Ebene $t = \text{konst.}$ besitzen und die Integrale der Quadrate dieser Ableitungen über D_t bei variierendem t beschränkt bleiben, dann sind für $t > 0$ alle Ableitungen von u bis zur Ordnung $\left[\frac{n}{2}\right] + 3$ in D_t quadratsummierbar, sobald das für $t = 0$ der Fall ist. Als Folgerung dieses Ergebnisses und einiger von ihm angegebenen Ungleichheiten schließt Verf. auf die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der gegebenen Gleichung, auch wenn sie nur halblinear ist (die A_{ij}, F von den x_i, t, u, u_{x_i}, u_t abhängend), mit den Anfangsbedingungen $[u]_{t=0} = u_0$, $[u_t]_{t=0} = u_1$, unter der Annahme der Stetigkeit der Ableitungen 1. und 2. Ordnung allein. Die Beweise dafür sind kaum skizziert. *G. Cimmino* (Cagliari).

Efimenko, W.: Calcul approché des valeurs caractéristiques des problèmes de limite des équations différentielles ordinaires linéaires du 4-me ordre avec les coefficients variables. Appl. Math. a. Mech., N. s. **1**, 155—175 u. franz. Zusammenfassung 176 (1937) [Russisch].

L'auteur reprend la méthode de Iglisch (par équations intégrales) (voir ce Zbl. 8, 353) qui concerne le calcul des valeurs caractéristiques des problèmes aux conditions limites homogènes pour un intervalle et l'équation $y'' + q(x)y = \lambda r(x)y$ où q et r sont analytiques (avec certains développements aux extrémités). Le mémoire concerne l'extension à l'équation $\frac{d^2}{dx^2}\left(p\frac{d^2y}{dx^2}\right) + qy = \lambda ry$. Indications pour le calcul pratique. Exemple de $y^{(4)} = \lambda y$ dans $(0, 1)$. *Brelot* (Bordeaux).

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Jaeger, J. C.: The solution of one-dimensional boundary value problems by the Laplace transformation. Math. Gaz. **23**, 62—67 (1939).

Die bekannte Lösungsmethode einer Anfangswertaufgabe

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = F(x)$; $y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$

bei konstantem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mit Hilfe der Laplacetransformation läßt sich mit Erfolg auch auf Randwertprobleme anwenden. Verf. gibt hierfür einige Beispiele aus der Theorie des eingespannten sowie frei aufliegenden Balkens unter verschiedenartigen Belastungsannahmen. *Schoblik* (Brünn).

Guigue, René: Sur un problème de géodésiques. Ist. Lombardo, Rend., III. s. **71**, 346—358 (1938).

Diese Arbeit kann als eine Ergänzung einer von demselben Autor verfaßten Arbeit (dies. Zbl. **14**, 115) angesehen werden. Auch hier wird (mittels einer anderen Methode als die, welche in der eben zitierten Arbeit verwendet wurde) der Zusammenhang des in der ersten Arbeit untersuchten Problems mit der Integration der Wärmegleichung diskutiert. *Hlavatý* (Praha).

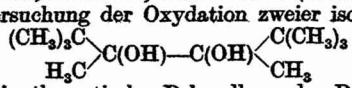
Popovici, C.: Sur les formes que doit avoir un vase qui, plongé dans l'eau, la partie immergée soit une fonction donnée $x_1(x)$ de la hauteur totale x du vase. Ann. Soc. Polon. math. **17**, 67—90 (1938).

Weinberg, Alvin M.: A case of biological periodicity. Growth **2**, 81—92 (1938).

In einer kugelförmigen Zelle seien zwei Substanzen der Konzentrationen $c_i(r, t)$ in Reaktion derart, daß die dadurch bedingte Änderungsgeschwindigkeit der c_i eine lineare Kombination $\sum A_{ik} c_k$ derselben ist; außerdem finde Diffusion statt, wobei die inneren Diffusionskonstanten $D_i > 0$ endlich, die äußeren unendlich seien, so daß im Äußeren der Zelle die c_i konstant $= c_{0i}$ ausfallen. Dann führen die Gleichgewichtsbedingungen auf ein gekoppeltes System von zwei linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in r, t für die c_i mit linearen Randbedingungen. Das zugehörige Eigenwertproblem wird in bekannter Weise gelöst; es zeigt sich, daß höchstens die erste Eigenlösung zeitlich ungedämpft ist; die entsprechende Periode wird in Abhängigkeit von Zellgröße und Temperatur untersucht, was zu biologisch plausiblen Ergebnissen führt. *Harald Geppert* (Gießen).

Corput, J. G. van der, und H. J. Backer: Reaktionsgeschwindigkeit von Gemischen. I. Bimolekulare Reaktion von zwei gemischten Substanzen mit einer dritten Substanz. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **41**, 1058—1073 (1938).

Verff. werden bei Untersuchung der Oxydation zweier isomerer Diole



mittels Bleitetrazetat auf die theoretische Behandlung der Reaktionsgeschwindigkeit einer bimolekularen Reaktion von zwei gemischten Substanzen mit einer dritten geführt: es ergibt sich ein lineares Differentialsystem erster Ordnung, dessen Lösungen durch Potenzreihenansatz gewonnen werden. *Möller* (Gießen).

Picone, Mauro: Analisi quantitativa ed esistenziale nei problemi di propagazione. (*Firenze, 1.—3. IV. 1937.*) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 109—124 (1938).

Bericht über zwei im „Istituto per le Applicazioni del Calcolo" für die numerische Rechnung der Lösungen von Fortpflanzungsproblemen erfolgreich angewandte Methoden, nämlich die sogenannten „Variationalmethode" (dies. Zbl. **16**, 176) und „Methode der Integralgleichungen" (dies. Zbl. **18**, 257), welche in früheren Arbeiten (z. B. dies. Zbl. **14**, 261—262) des Verf. schon in vollständigerer Weise dargestellt worden sind. Verf. betrachtet hier insbesondere das Problem, eine Lösung $u(x, y, z, t)$ der partiellen Differentialgleichung

$$p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q \Delta_2 u = F(x, y, z, t)$$

mit Randwerten Null und vorgegebenen Anfangswerten $u(x, y, z, 0)$, $u_t(x, y, z, 0)$, im Raumgebiete $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$, $0 \leqq z \leqq c$, für Zeitwerte $t \geqq 0$, zu bestimmen. Ein Vergleich mit den klassischen Auflösungsverfahren (wobei p nur von x, y, z und q nur von t abhängt) zeigt die erheblichen Vorteile, die von den neuen Piconeschen Methoden (wobei die beiden Funktionen p, q von x, y, z, t abhängen können), besonders für das erstrebte Ziel der numerischen Rechnung, geleistet werden. Es wird auch auf die sehr weiten Anwendbarkeitsmöglichkeiten dieser Methoden bei den verschiedensten linearen Problemen kurz hingewiesen. *G. Cimmino* (Cagliari).

Gröbner, Wolfango: Risultati dell'applicazione del metodo variazionale in alcuni problemi di propagazione. (*Firenze, 1.—3. IV. 1937.*) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 222—225 (1938).

Die Piconesche „variationale" Approximationsmethode (vgl. vorsteh. Ref.) wird auf die Integrodifferentialgleichung

$$w(x,t) = \int_0^l C(x,\xi)\,\mu(\xi)\frac{\partial^2 w(\xi,t)}{\partial t^2}\,d\xi + C(x,vt)\cdot P$$

angewandt, um eine Lösung $w(x,t)$ unter den Nebenbedingungen: entweder $w(0,t) = w(l,t) = 0$ oder $w(0,t) = w_x(0,t) = 0$ zu ermitteln. Nach einer allgemeinen Bemerkung über einen Sonderfall, wo die genannte Methode die auch sonst durch ein klassisches Verfahren erhaltbare exakte Auflösungsformel liefert, gibt Verf. ein numerisches Beispiel, wo die mittels der ersten Approximation der Variationalmethode ausgerechneten Werte von $w(x,t)$ schon eine auffallende Genauigkeit mit den entsprechenden, aus der allgemeinen Auflösungsformel hergeleiteten Werten aufweisen.

G. Cimmino (Cagliari).

Graeser, Ernst: Potentialströmungen in Kanalsystemen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, N. F. **1**, 203—207 (1939).

Auszug aus der nachstehend besprochenen Arbeit. *F. Lösch* (Rostock).

Graeser, Ernst: Potentialströmungen in Kanalsystemen. J. reine angew. Math. **180**, 86—96 (1939).

Verf. behandelt ebene Potentialströmungen in Kanalsystemen, die in der folgenden Weise konstruiert sind: In der Strömungsebene zeichne man $2n$ ($n \geqq 2$) von einem Punkt ausgehende Halbgeraden $h_1, h_2, \ldots, h_{2n}$ in durchaus regelmäßiger Anordnung. Symmetrisch zu $h_1, h_3, \ldots, h_{2n-1}$ zeichne man aus dem Unendlichen kommende Parallelkanäle $K_1, K_3, \ldots, K_{2n-1}$ der Breite $2a$, symmetrisch zu $h_2, h_4, \ldots, h_{2n}$ aus dem Unendlichen kommende Parallelkanäle $K_2, K_4, \ldots, K_{2n}$ der Breite $2b$; die geradlinigen Begrenzungen der Kanäle werden bis zu den Schnittpunkten je zweier aufeinanderfolgender Kanalwände der beiden Kanalsorten durchgeführt. — Zunächst wird diejenige in dem Kanalsystem erfolgende reguläre Potentialströmung bestimmt, welche für jeden Kanal K_ν eine vorgegebene Geschwindigkeit v_ν aufweist, mit der die strömende Substanz in dem betreffenden Kanal aus dem Unendlichen zufließen bzw. ins Unendliche abfließen soll (wobei die v_ν so gewählt sein müssen, daß die Kontinuitätsbedingung erfüllt ist). Die Bestimmung gelingt mittels konformer Abbildung des Innern des Kanalsystems auf eine Halbebene. — In dem Spezialfall, in dem die strömende Substanz in den Kanälen der Breite $2a$ mit ein und derselben Geschwindigkeit v_a aus dem Unendlichen zufließt und in den Kanälen der Breite $2b$ mit ein und derselben Geschwindigkeit $v_b = -\frac{a}{b} v_a$ ins Unendliche abfließt, erfolgt die Strömung derart symmetrisch, daß sie sich aus $2n$ Teilströmungen zusammensetzt, die in den $2n$ von den Halbgeraden h_ν begrenzten Sektoren des Kanalsystems verlaufen. Es ergibt sich also nebenbei die Potentialströmung in einem derartigen Sektor mit dem Spitzenwinkel $\frac{\pi}{n}$, und dieses Ergebnis läßt sich ohne weiteres übertragen auf den Fall eines Sektors der in Rede stehenden Art mit beliebigem Spitzenwinkel. (Für den Fall, daß der Spitzenwinkel ein rationaler Teil von π ist, vgl. H. F. Rossbach, Zbl. Mech. **6**, 224.) — Schließlich wird gezeigt, wie sich an Hand der konformen Abbildung des Kanalsystems auf die Halbebene auch sofort Kanalströmungen ermitteln lassen, die im Bereichinnern vorgegebene Singularitäten (Wirbel, Dipole, Quellen, Senken) aufweisen.

F. Lösch (Rostock).

Reulos, René: Les équations de Maxwell et les séries de tourbillons. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 423—425 (1939).

Es handelt sich um eine Methode zur Integration der Maxwellschen Differential-

gleichungen, wobei als Integral eine Reihe angesetzt wird, von der jedes Glied proportional zur Rotation des nächsten Gliedes ist. Als erstes Glied der Reihe wird ein Potentialausdruck angesetzt. Die Proportionalitätskonstante dient als Parameter. Die Reihe stellt somit eine Reihenentwicklung nach Potenzen dieses Parameters dar. Bei der Anwendung dieses Gedankens auf die Maxwellschen Gleichungen wird der Parameter einem Differentialoperator nach der Zeit gleichgesetzt. Verf. zeigt, daß der von ihm angesetzte Ausdruck bei richtiger Wahl der Konstanten ein Integral der Maxwellschen Differentialgleichungen des freien Raumes darstellt. Die Anwendung auf ein geladenes Partikel zeigt, daß die klassische Lösung der Maxwellschen Gleichungen für diesen Fall als Sonderfall der neuen Lösung hervortritt. Als Vorteil der neuen Lösung wird genannt, daß sie unabhängig von jeder Hypothese über die Struktur des Elektrons ist und daß sie den Augenblickswert des Feldes um die Ladung herum darstellt (im Gegensatz zu den retardierten Potentialausdrücken der klassischen Theorie). Zum Schluß nennt Verf. einige mögliche Anwendungen seiner Lösung auf Probleme der Quantentheorie. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Morris, Rosa M.: The internal problems of two-dimensional potential theory. Math. Ann. **116**, 374—400 (1939).

Es werden die allgemeinen Transformationen der Potentialgleichung betrachtet, die durch die Gleichungen gegeben sind:

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{(n-1)i\zeta} \quad \text{für das äußere Problem}$$

und

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{ni\zeta} \quad \text{für das innere Problem}$$

($z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$) und für die so erhaltenen Bereiche Lösungen der ersten und zweiten Randwertaufgabe gesucht. Die dem inneren Problem eigentümlichen Schwierigkeiten rühren von dem Auftreten singulärer Punkte der verwendeten konformen Abbildungen her, können aber durch ähnliche Betrachtungen überwunden werden, wie sie Verf. früher für das äußere Problem angestellt hat. — Die zur Lösung gebrachten Probleme sind von zwei Typen: ein Typus gehört der Hydrodynamik, der andere der Elastizitätstheorie an. Der erste Typus betrifft Untersuchungen über die augenblickliche Bewegung einer idealen Flüssigkeit, die entweder innerhalb eines allgemeinen Zylinders oder zwischen zwei Niveauflächen (Äquipotentialflächen, Isothermen) eingeschlossen ist; der zweite Typus bezieht sich auf das Verdrehungsproblem gerader Stäbe in der von de Saint-Venant herrührenden Auffassung. Der Ansatz des hydrodynamischen Problems mit rotierender Berandung und des Verdrehungsproblems stellen sich als formal übereinstimmend heraus. — Von den Bereichen, die durch die obigen Ausdrücke erfaßt werden, sind zu nennen: Ellipse, Kreissektor, Kreisbogen, die Joukowskische Abbildung für Tragflügel, Polygone, die Kiel- und Ruderfläche von S. D. Daymond und L. Rosenhead [Proc. Cambridge Philos. Soc. **33**, 62—69 (1937)]. *Th. Pöschl* (Karlsruhe).

Viola, Tullio: Sulla possibilità di prolungare una funzione armonica, definita nell'interno di un angolo, al di là del vertice. (*Firenze, 1.—3. IV. 1937.*) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 213—214 (1938).

Einfache Bemerkung über die Fortsetzbarkeit einer ebenen Potentialfunktion über eine Ecke, und zwar eines Kreissektors, dessen Winkel ein rationales Vielfaches von π ist. *H. Hornich* (Wien).

Viola, Tullio: Formula risolutiva del problema di Dirichlet relativo ad un campo che si può decomporre nella somma di un numero finito di dominii rettangolari. (*Firenze, 1.—3. IV. 1937.*) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 207—212 (1938).

Nach einer Methode von M. Picone wird die numerische Lösung des Dirichletschen Problems für ein Gebiet, das sich in endlich viele Rechtecke zerlegen läßt, gegeben. *v. Koppenfels* (Würzburg).

Inoue, Masao: Sur un procédé pour construire la solution du problème de Dirichlet. Proc. Imp. Acad. Jap. **14**, 368—372 (1938).

En partant d'un résultat de F. Leja (voir ce Zbl. **14**, 302 et **19**, 261), l'auteur démontre en faisant usage d'un résultat établi antérieurement par lui (ce Zbl. **19**, 216) que la fonction harmonique: $\frac{1}{\lambda}\log\Phi(z, \lambda)$ introduite par Leja, converge uniformément, lorsque $\lambda \to 0$, vers la solution du problème de Dirichlet, pour tout domaine plan D, limité par une courbe de Jordan portant des données continues. *N. Cioranescu* (Bukarest).

Evans, G. C.: Modern methods of analysis in potential theory. Bull. Amer. Math. Soc. **43**, 481—502 (1937).

Referat über die neueren Entwicklungen in der Potentialtheorie; es werden behandelt: I. Dirichletsches und Neumannsches Problem. II. Vermischte Randwertaufgabe. III. Funktionen der Form $u(M) = \int_F r^{-\alpha} dm(e_P)$, $r = \overline{MP}$, $0 < \alpha < 3$, wo das Integral über eine beschränkte, abgeschlossene Menge F des Raumes erstreckt wird. *H. Hornich* (Wien).

La Vallée Poussin, Ch. de: Points irréguliers. Détermination des masses par les potentiels. II. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **24**, 672—689 (1938).

L'auteur poursuit d'abord (toujours dans l'espace ordinaire) son étude des points réguliers pour ensembles fermés, commencée dans la 1ère partie de cet article (ce Zbl. **19**, 216) et retrouve à partir de sa nouvelle définition le critère de Wiener sous une forme plus générale. Puis il définit pour un ensemble ouvert Ω une régularité nouvelle d'un point P hors Ω et en donne des critères. L'intérêt en est l'emploi dans l',,opération régularisante" qui consiste, étant données des masses sur la frontière bornée F de Ω, à les transporter (avec variation possible du total) sur l'ensemble des points de F réguliers pour Ω, d'une manière unique en conservant le potentiel dans Ω. Suivent applications et exemples. Je dois signaler, comme en augmentant l'intérêt, que les points de F réguliers pour Ω sont les points-frontière stables pour $C\Omega$ au sens (élargi) de Keldych-Lavrentieff. *Brelot* (Bordeaux).

Tsuji, Masatsugu: On the limits of indetermination of bounded harmonic functions. Jap. J. Math. **15**, 19—26 (1938).

Verallgemeinerung gewisser klassischer Konvexitätssätze über harmonische, beschränkte Funktionen auf Funktionen von drei Veränderlichen. *Rolf Nevanlinna.*

Tsuji, Masatsugu: On Fatou's theorems on Poisson integrals. Jap. J. Math. **15**, 13—18 (1938).

Es wird gezeigt, daß die Fatouschen Sätze über die Existenz von Winkelgrenzwerten beschränkter harmonischer Funktionen dahin erweitert werden können, daß die Grenzwerte fast überall am Rande auch dann existieren, wenn die Annäherung auf gewissen, von dem Stetigkeitsgrad der Randwerte abhängigen, den Rand berührenden Wegen stattfindet. Dieses Ergebnis scheint indes in dem klassischen Fatouschen Satz mitenthalten zu sein, da die Existenz von gewissen berührenden Zielwegen eine Folgerung der Tatsache ist, daß die Grenzwerte nach Fatou in beliebigen inneren Winkelräumen vorhanden sind. *Rolf Nevanlinna* (Helsinki).

Colucci, Antonio: Sopra una particolare rappresentazione delle funzioni iperarmoniche di due variabili. (*Firenze, 1.—3. IV. 1937.*) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 189—193 (1938).

Jede n-hyperharmonische Funktion $u(x, y) = u(P)$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiete A läßt sich bekanntlich nach der Almansischen Zerlegungsformel $u(P) = \sum_{k=1}^{n-1} \overline{OP}^{2k} u_k(O, P)$ darstellen, wobei O ein beliebig gewählter innerer Punkt von A ist und die $u_k(O, P)$ wohlbestimmte, harmonische Funktionen von P bedeuten. Nimmt man O außerhalb von A, so gilt noch eine derartige Zerlegungsformel; die $u_k(O, P)$

sind dann aber nicht eindeutig bestimmt. Verf. findet hier nämlich, daß sie von $n(n-1)$ willkürlichen Konstanten abhängen. *G. Cimmino* (Cagliari).

Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Monteiro, António: Sur l'additivité des noyaux de Fredholm. Portugaliae Math. **1**, 1—174 (1937).

L'objet principal du mémoire est l'étude des cas où le noyau résolvant $R(H+L,\lambda)$ relatif à la somme de deux noyaux, H et L, d'équations de Fredholm, est $R(H,\lambda)+R(L,\lambda)$. L'aut. trouve des conditions nécessaires et suffisantes pour que cela ait lieu; l'orthogonalité entre H et L est un cas particulier. Les conséquences de ces conditions sont étudiées systématiquement, et l'aut. en déduit notamment une nouvelle méthode pour parvenir à la notion de noyau principal, relatif à une équation de Fredholm, et pour établir les propriétés fondamentales de ces noyaux principaux. Un dernier chapitre est consacré aux noyaux réguliers, notion qui généralise celle de noyaux hermitiens: les noyaux du type $\sum_{n=1}^{p} U_n(M)\,V_n(P)$ sont dits réguliers si les fonctions $\overline{V}_n$ (conjuguées des V_n) sont des combinaisons linéaires distinctes des fonctions U_n (supposées linéairement indépendantes); dans le cas général, un noyau est dit régulier quand tous ses noyaux principaux sont réguliers. Pour tout noyau régulier et continu, l'aut. établit la convergence en moyenne de la série des noyaux principaux, et il en déduit une certaine représentation du noyau donné par une somme de deux autres, dont un n'a pas de constante polaire. Certains résultats de l'aut. restent valables même quand la théorie de Fredholm ne s'applique pas. *Georges Giraud* (Bonny-sur-Loire).

Ghermanescu, Michel: Sur une classe nouvelle de noyaux de Fredholm. (*2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.*) Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **40**, Nr 1/2, 141—152 (1938).

A detailed exposition of the results of the note abstracted in this Zbl. **17**, 440. It might be noted that some of the results of this paper are a special case of the general theory of E. H. Moore [Bull. Amer. Math. Soc. **18**, 361 (1912)] by assuming $Juv = \int uv\,dx - \int\int u(x)M(x,y)v(y)\,dx\,dy$. *Hildebrandt* (Ann Arbor).

Cooper, J. L. B.: An integral equation. Quart. J. Math., Oxford Ser. **9**, 263—273 (1938).

The integral equation is (A): $\int_x^\infty k(y-x)f(y)\,dy = 0$. Results are of the following type, obtained by the use of complex Fourier transforms: (1) if $e^{at}k(t)$, $e^{-bt}f(t)$ are $L^2(0,\infty)$ for some $a > b > 0$, and $e^{ct}f(t)$ is $L^2(-\infty, 0)$ for some real c, then $f(y)$ satisfying (A) has the form $\sum_\alpha R(y)e^{i\alpha y}$ where the sum ranges over the zeros of $K(w) = \int_0^\infty k(t)e^{iwt}dt$ for which $-c < I(\alpha) < b$, $R(y)$ being a polynomial of degree one less than the order of the zero; (2) if $k(t)$ is non-increasing in t and $k(t) > 0$, then (A) has no solution not identically zero such that $f(t) \to 0$ as $t \to \infty$ or $\int^\infty f(y)\,dy$ exists. The condition that $k(t)$ be non-increasing is essential in this case. *Hildebrandt.*

Gunther, N.: Sur la théorie des intégrales de Stieltjes-Radon et les équations intégrales. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **21**, 219—223 (1938).

L'aut. définit des fonctions complexes d'ensembles, $v(e)$, additives, à variations bornées et qui jouissent de certaines propriétés. Elles lui servent à définir l'expression $\int_{(\Omega)} v(\omega)f(x)\,d\omega$, ou intégrale de Stieltjes-Radon, dans laquelle $f(x)$ est une fonction complexe d'un point. Il introduit aussi d'autres expressions, dites intégrales de Hellinger. Les équations intégrales considérées sont du type $\varphi(x) = \lambda\int_{(\Omega)} k(\tau,x)\varphi(y)\,d\tau + F(x)$, où τ est un ensemble, et où le noyau $k(\tau, x)$ est hermitien, c'est-à-dire que la fonction com-

plexe $k(\tau, \omega) = \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} u(\omega)\, k(\tau, x)\, d\omega$, où u est une certaine fonction positive donnée, est conjuguée de $k(\omega, \tau)$; d'autres hypothèses sont faites sur ce noyau. Cette note suppose la connaissance des travaux antérieurs de l'auteur. *Georges Giraud.*

Tautz, Georg: Nichtlineare Integralgleichungen bei unendlichem Integrationsgebiet; Anwendung auf eine Randwertaufgabe. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **48**, Abt. 1, 175—192 (1939).

L'auteur reprend l'équation $\psi(x) + \int_B K(x, y) f(y, \psi(y))\, dy = 0$ étudiée par Hammerstein [Acta math. **54** (1930)] et comme cas particulier par Rothe [Compos. Math. **5** (1937/38)] et il en améliore les raisonnements. x, y sont des points de l'espace à n dim. où B est un domaine simplement connexe non nécessairement fini. Avec des hypothèses sur K et f, il existe une intégrale continue de carré sommable. Application dans le plan au problème de Dirichlet pour $\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$ après quelques lemmes sur les équations elliptiques et par usage de la fonction de Green. *Brelot* (Bordeaux).

Cassina, Ugo: Su di un'equazione integro-differenziale. (*Firenze, 1.—3. IV. 1937.*) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 238—241 (1938).

Auflösungsformel für die Integrodifferentialgleichung

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = \int_0^1 k(t, x, y) f(t, y)\, dy + h(t, x)$$

mit der Nebenbedingung $f(t_0, x) = \varphi(x)$. Dieses Problem läßt sich sonst auf die Auflösung einer speziellen, gewöhnlichen Integralgleichung 2. Art zurückführen, wie unmittelbar ersichtlich ist (Ref.). *G. Cimmino* (Cagliari).

Hebroni, P.: Sur les matrices continuisées à deux termes et leur application aux équations intégro-différentielles linéaires. C. R. Acad. Sci., Paris **207**, 1371—1373 (1938).

Beiträge zur Theorie der vom Verf. eingeführten sogenannten „matrices continuisées à deux termes" [Mh. Math. Phys. **33**, 403—429 (1923)]. Es handelt sich um Matrizen 2. Ordnung, deren Elemente Funktionen zweier Variablen sind und für welche eine besondere Produktbildung erklärt wird. Die Kenntnis der genannten Arbeit des Verf. ist unentbehrlich für das Verständnis der vorliegenden. *G. Cimmino.*

Palamà, G.: Sulla trasformazione di Laplace e su alcuni sviluppi in serie di polinomi di Laguerre. Math. Z. **45**, 97—106 (1939).

Es werden mit Hilfe (einseitiger) Laplacetransformation verschiedene Gruppen spezieller Formeln hergeleitet: einmal handelt es sich um die Ausrechnung der Laplacetransformierten einzelner Funktionen, wie etwa die Darstellung von $\mathfrak{L}(t^\alpha (\lg t)^k)$ ($\alpha \geqq 0$, $k \geqq 0$ ganz) in der Form $s^{-\alpha-1} P_k(\lg s)$ (P_k Polynom k-ten Grades), dann um Identitäten im Oberbereich, die aus dem Faltungssatz dadurch erschlossen werden, daß es gelingt, das Produkt zweier Unterfunktionen (dessen Oberfunktion also die Faltung ist) direkt als Unterfunktion einer bekannten Funktion darzustellen; in dieser Weise wird z. B. für $t^\alpha J_\alpha(t)$ (J_α = Besselsche Funktion, $\alpha \geqq \frac{1}{2}$) eine Darstellung durch ein Faltungsintegral ermittelt. Der größte Teil der Arbeit beschäftigt sich aber mit der Übertragung von Reihenentwicklungen $\left(\text{nach Potenzen von } \frac{s-1}{s}\right)$ in den Oberbereich auf Grund des bekannten Ausdrucks für $\mathfrak{L}(t^\alpha L_n^{(\alpha)}(t))$, wo $L_n^{(\alpha)}$ in üblicher Weise ein Laguerresches Polynom bedeutet. So werden z. B. für $\lg t$, $e^{2t}\frac{\mathrm{ch}}{\mathrm{sh}}(\sqrt{2}t)$ Entwicklungen nach Laguerreschen Polynomen gegeben, ferner Reihen für Linearkombinationen Besselscher Funktionen, die in den Zusammenhang der Tricomischen [Rend. Accad. Naz. dei Lincei **6**, 21 (1935)] Erzeugung der Laguerreschen Polynome durch Entwicklung von $e^x (xt)^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha\left(2\sqrt{xt}\right)$ nach Potenzen von x gehören. Aus dieser werden

zum Schluß die öfters Tricomi (Comment. math. helv. 8 (1935/36) zugeschriebenen Entwicklungen von $\cos kx$, $\sin kx$ nach Hermiteschen Polynomen vereinfacht gewonnen, und es wird darauf hingewiesen, daß sie schon bei Dusl [Congr. Intern. dei Mat., Bologna III, 315 (1928)] stehen. Wir fügen hinzu, daß sie sogar schon bei Hermite zu finden sind [Sur un nouveau développement en série de fonctions (1864), Œuvres t. II, Paris 1908, 293—312, insbes. 296 unten] und sich übrigens unmittelbar aus der erzeugenden Funktion $e^{-\frac{t^2}{2}-xt}$ ergeben, wenn man darin ik für t schreibt.

Hermann Schmidt (Jena).

Boas jr., R. P., and D. V. Widder: The iterated Stieltjes transform. Trans. Amer. Math. Soc. **45**, 1—72 (1939).

If $\alpha(x)$ is a function, defined on $(0, \infty)$, of bounded variation on every interval (ε, R), $(0<\varepsilon<R<\infty)$, and normalized by the conditions: $\alpha(0)=0$, $\alpha(u)=\frac{1}{2}[\alpha(u^+)+\alpha(u^-)]$, then for $x>0$ the iterated Stieltjes transform is defined by $\int_{0^+}^{\infty}\frac{dt}{x+t}\int_{0^+}^{\infty}\frac{d\alpha(u)}{t+u}$, and the S_2 transform by $\int_{0^+}^{\infty}\frac{\log(x/t)}{x-t}\,d\alpha(t)$ $\left(\text{with } \frac{\log(x/t)}{x-t}=1/x \text{ for } t=x\right)$; an integral $\int_{0^+}^{\infty} f(t)\,d\alpha(t)$ must be understood to mean $\lim_{\substack{\varepsilon\to 0;\ R\to\infty\\ R>\varepsilon>0}}\int_{\varepsilon}^{R} f(t)\,d\alpha(t)$, where the integral over (ε, R) is a (Riemann-) Stieltjes integral. The existence of the S_2 transform implies the existence of the iterated Stieltjes transform, but not conversely. If the latter exists, then the first will exist if and only if $\alpha(t)-\alpha(0^+)=o(-1/\log t)$ with $t\to 0$, $\int_{t}^{\infty}u^{-1}d\alpha(u)$ $=o(1/\log t)$ with $t\to\infty$; the integrals are then also equal to one another. If for k an integer >1 the (linear) inversion operator $H_{k,t}[f]$ is defined by

$$H_{k,t}[f(t)]=\left[\frac{1}{k!\,(k-2)!}\right]^2\{t^{2k-1}[t^{2k-1}f^{(k-1)}(t)]^{(2k-1)}\}^{(k)},$$

then for an $\alpha(t)$, which is absolutely continuous on every finite interval (ε, R), $(0<\varepsilon<R<\infty)$, and has an iterated Stieltjes transform (or a S_2 transform) $f(x)$, the limit: $\lim_{k\to\infty}H_{k,t}(f(t)]$ exists and is equal to $\alpha'(t)$ for almost all positive values of t. If $\alpha(t)$ is only a normalized function, of bounded variation on every (ε, R), $(0<\varepsilon<R<\infty)$, then $\alpha(x)=\alpha(0^+)+\lim_{k\to\infty}\int_{0^+}^{\infty}H_{k,t}[f(t)]\,dt$. In the second half of the paper the authors give several theorems containing necessary and sufficient conditions for the representation of functions by iterated Stieltjes transforms or by S_2 transforms, with determining functions $\alpha(t)$ belonging on $(0, \infty)$, to one of the classes: A. non-decreasing; B. of bounded variation; C. integral of a function of L^p $(p>1)$; D. integral of a function of L; E. integral of a bounded function. As an example we mention this theorem: Necessary and sufficient for $f(x)$ to have, for $0<x<\infty$, the representation by an iterated Stieltjes transform and by a S_2 transform with $\alpha(t)$ (normalized and) non-decreasing; is: 1. $f(x)$ has derivatives of all orders on $(0, \infty)$, 2. $f(x)=o(1)$, $(x\to\infty)$; $f(x)=o(x^{-1})$, $(x\to 0)$; 3. for an infinite sequence of positive integers k, $H_{k,x}[f(x)]\geqq 0$, $(0<x<\infty)$.

J. Ridder (Groningen).

Funktionalanalysis, Funktionalräume:

Fichtenholz, Gr.: Sur une classe d'opérations fonctionnelles linéaires. Rec. math. Moscou, N. s. **4**, 215—225 (1938).

M sei der Raum aller meßbaren, beschränkten Funktionen $x(t)$ in $[a, b]$. M ist metrisch mit dem Betrag $\|x\|=\text{wahr.}\max_{a\leqq t\leqq b}|x(t)|$. Es werden in M zwei von der metrischen Konvergenz verschiedene Konvergenzbegriffe eingeführt: $x_n\xrightarrow{\beta}x$, wenn

$\|x_n\| \leqq K$ und $x_n(t)$ fast überall gegen $x(t)$ konvergiert, $x_n \overset{\beta^*}{\to} x$, wenn $\|x_n\| \leqq K$ und $x_n(t)$ asymptotisch (en mesure) gegen $x(t)$ konvergiert. $\mathfrak{U}_{\beta\beta}$ sei die Gesamtheit aller linearen Operationen $y = U(x)$ von M in sich, für die aus $x_n \overset{\beta}{\to} x$ stets $U(x_n) \overset{\beta}{\to} U(x)$ folgt. Entsprechend $\mathfrak{U}_{\beta^*\beta^*}$. Es wird $\mathfrak{U}_{\beta\beta} = \mathfrak{U}_{\beta^*\beta^*}$ bewiesen und daß jedes $U \in \mathfrak{U}_{\beta^*\beta^*}$ durch eine Beziehung $\int_a^v y(s)\,ds = \int_a^v U(x;s)\,ds = \int_a^b x(t)\varphi(t,v)\,dt$, $a \leqq v \leqq b$, charakterisiert ist, wobei 1. $\varphi(t,0) = 0$, 2. $\varphi(t,v)$ als Funktion von t in $[a,b]$ summierbar ist, 3. $\int_a^b |\varphi(t,v+\Delta v) - \varphi(t,v)|\,dt \leqq L \cdot \Delta v$ für alle $v, \Delta v > 0$ gilt, L Konstante. Umgekehrt erklärt jede solche Beziehung ein $U \in \mathfrak{U}_{\beta^*\beta^*}$. Schließlich gilt: Ist $U_n \in \mathfrak{U}_{\beta^*\beta^*}$ und ist $U_n(x) \overset{\beta^*}{\to} U(x)$ für jedes $x \in M$, so ist $U \in \mathfrak{U}_{\beta^*\beta^*}$. *G. Köthe* (Münster).

Fichtenholz, Gr.: Sur les fonctionnelles linéaires, continues au sens généralisé. Rec. math. Moscou, N. s. **4**, 193—213 (1938).

Ausführliche Darstellung der in zwei früheren Noten [C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **4**, 225—228, 255—258 (1936); dies. Zbl. **15**, 306, **16**, 30] angekündigten Ergebnisse. *G. Köthe* (Münster).

Kitagawa, Tosio: The characterisations of the fundamental operations by means of the operational equations. Proc. Imp. Acad. Jap. **14**, 205—210 (1938).

L^2 sei der lineare Raum aller komplexwertigen Funktionen $f(x)$, die in $(-\infty, +\infty)$ erklärt sind und in jedem endlichen Bereich quadratisch integrierbar sind. E durchlaufe alle beschränkten Mengen von reellen Zahlen mit positivem Maß. Es sei $\|f\|_E = \{\int_E |f(x)|^2\,dx\}^{\frac{1}{2}}$ für $f \in L^2$. Eine lineare Operation A von L^2 auf sich wird als beschränkt bezeichnet, wenn es 1. eine Abbildung σ_A der Mengen E gibt, so daß aus $E_1 \supset E_2$ $\sigma_A E_1 \supset \sigma_A E_2$ folgt und zu jedem E ein E_1 existiert mit $\sigma_A E_1 \supset E$, 2. zu jedem E eine Konstante C_E^A existiert, so daß $\|Af\|_E \leqq C_E^A \|f\|_{\sigma_A E}$ ist für alle $f \in L^2$, 3. zu jedem E und jedem $g \in L^2$ ein auf $\sigma_A E$ erklärtes quadratisch integrierbares $h(x)$ existiert, so daß für jedes $f \in L^2$ $(Af, g)_E = (f, h)_{\sigma_A E}$ ist. Beispiele beschränkter Operationen sind die Multiplikation $M_{\varphi(x)} f = \varphi(x) \cdot f$, die Translation $T_\alpha f = f(x+\alpha)$. Es wird weiter die Ableitung $A^{(1)} = AM_x - M_x A$ eingeführt und sämtliche beschränkten Operationen bestimmt, die den Gleichungen $A^{(1)} = 0$ und $A^{(1)} = \alpha A$ genügen, ferner werden beschränkte „translatable" Operationen untersucht und die Operatoren vom „Laplacetypus" $(M_x^n + A_{n-1}M_x^{n-1} + \cdots + A_0 M_x$, A_i beschränkt, translatabel) und gewisse lineare Differentialoperatoren n-ter Ordnung durch Funktionalgleichungen charakterisiert. Ohne Beweise. *G. Köthe* (Münster i. W.).

Sz. Nagy, Béla de: On semi-groups of selfadjoint transformations in Hilbert space. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **24**, 559—560 (1938).

Gives a proof of a theorem containing that of Hille on the representation of self-adjoint transformations in a Hilbert space forming a semi-group (this Zbl. **18**, 366) by using the method of a previous paper (this Zbl. **13**, 56). *Hildebrandt.*

Pinsker, A. G.: Sur l'extension des espaces semi-ordonnés. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **21**, 6—9 (1938).

Es wird für jeden linear halbgeordneten Raum Y im Sinne von L. Kantorovitch (dies. Zbl. **16**, 405) ein ebensolcher Ausdehnungsraum $\overline{Y}$ definiert, welcher Y enthält und für welchen gewisse Eigenschaften bestehen, die nicht jedem linear halbgeordneten Raum zukommen. Der Ausdehnungsraum von $\overline{Y}$ selbst ist immer mit $\overline{Y}$ isomorph. Die Ausdehnungsoperation beruht auf der Betrachtung der sog. Komplexe in Y, welche etwa die positiven Segmente von Y sind. Schließlich werden die Ausdehnungsräume einiger bekannten Räume Y angegeben. *S. Stoïlow* (Cernăuți).

Variationsrechnung:

Hölder, Ernst: Entwicklungssätze aus der Theorie der zweiten Variation. Allgemeine Randbedingungen. Acta math. **70**, 193—242 (1939).

Mit Hilfe der Analysis unendlich vieler Veränderlicher gibt der Verf. eine Theorie

der Entwicklung nach Lösungen eines Eigenwertproblems

$$\begin{cases} \dot{x}_i - b_{ji}x_j - c_{ij}y_j = 0 \\ \dot{y}_i + a_{ij}x_j + b_{ij}y_j + a_1 x_i + \tau\cdot(k_{ij} - a_1\delta_{ij})x_j = 0 \end{cases}$$

($a_{ij} = a_{ji}$; $c_{ij} = c_{ji}$; $k_{ij} = k_{ji}$; b_{ij} Funktionen von t; a_1 eine Konstante) mit den Randbedingungen

$$x_i^0 = x_i(t^0) = \gamma_{ik}^0 u_k; \qquad x_i^1 = x_i(t^1) = \gamma_{ik}^1 u_k; \qquad y_i^0\gamma_{ik}^0 - y_i^1\gamma_{ik}^1 = \beta_{hk}u_k;$$

und ähnlicher Probleme, die in der Theorie der 2. Variation bei allgemeinen Randbedingungen auftreten. Fortführung früherer Arbeiten [Prace mat. fiz. **43**, 307 (1935); dies. Zbl. **13**, 67], wo der Verf. den Fall fester Endpunkte behandelt hatte. *E. Lonn.*

Caccioppoli, Renato, e Giuseppe Scorza Dragoni: Necessità della condizione di Weierstrass per la semicontinuità di un integrale doppio sopra una data superficie. Mem. Accad. Ital. **9**, 251—268 (1938).

Il s'agit d'une question étudiée, il y a quelques années, par M. McShane et par le relateur. — Le nouveau résultat descend d'une propriété des fonctions $z(x, y)$ absolument continues (dans le sens de M. Tonelli), mise en evidence, tout récemment, par M. Radó (ce Zbl. **19**, 88), qui pourtant, n'est pas cité par les Aut.: cette propriété est appellée, dans le Memoire en question, différentiabilité asymptotique régulière. — Le théorème établi est le suivant: Soit $f(x, y, z, p, q)$ finie et continue avec f_p, f_q, et soit $z(x, y)$ absolument continue (dans le sens de M. Tonelli) et telle que l'intégrale $I_D[z] = \iint_D f\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\,dy$ soit fini; alors pour la semi-continuité inférieure de $I_D[z]$ sur une surface donnée $S(z = z_0(x, y))$, il faut que, presque partout sur S, et pour tous les $\tilde{p}, \tilde{q}$, soit $E\left(x, y, z_0(x, y); \frac{\partial z_0}{\partial x}, \frac{\partial z_0}{\partial y}; \tilde{p}, \tilde{q}\right) \geqq 0$. — La démonstration, à cause du résultat de M. Radó, se réduit à celle du relateur. *S. Cinquini.*

Tonelli, Leonida: Il calcolo delle variazioni secondo la scuola italiana ed i suoi più recenti risultati. (*Firenze, 1.—3. IV. 1937.*) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 26—39 (1938).

Verf. berichtet über die Entwicklung der auf der Halbstetigkeit der Integrale beruhenden direkten Methoden der Variationsrechnung und zählt die Fortschritte seit Erscheinen seiner „Fondamenti di calcolo delle variazioni" auf. *E. Lonn.*

Manià, Basilio: Alcuni teoremi di unicità nel calcolo delle variazioni. (*Firenze, 1.—3. IV. 1937.*) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 138—139 (1938).

Ankündigung einer Arbeit (vgl. dies. Zbl. **17**, 267), worin Verf. Einzigkeitssätze über die Extremalen von Lagrangeschen und Mayerschen Problemen beweist. *Lonn.*

Cinquini, Silvio: Un teorema di esistenza dell'estremo in campi illimitati. Ist. Lombardo, Rend., III. s. **71**, 211—218 (1938).

Es handelt sich um ein positiv-„quasireguläres" Variationsproblem

$$I_C = \int_C f(x, y, y', \ldots y^{(n)})\,dx$$

mit allgemeinen Randbedingungen in einem nichtbeschränkten Bereich. Verf. beweist die Existenz des absoluten Extrems, anknüpfend an seine früheren Arbeiten [Ann. Scuola norm. super. Pisa **5**, 169 (1936) u. **6**, 191 (1937); dies. Zbl. **15**, 28 u. **17**, 266], unter abgeänderten Voraussetzungen: Die früheren Annahmen über die zulässigen Vergleichskurven lassen sich teilweise oder ganz ersetzen durch Annahmen über das Unendlichwerden von f mit seinen Argumenten. *E. Lonn* (Walsrode).

Cinquini, Silvio: Nuovi teoremi di esistenza dell'estremo in campi illimitati per i problemi di calcolo delle variazioni di ordine n. (*Firenze, 1.—3. IV. 1937.*) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 133—137 (1938).

Ce travail est une communication preventive d'un mémoire qui a été déjà publié (ce Zbl. **17**, 266), dans laquelle l'A. étudie de nouveau le problème du minimum (absolu) de l'intégral

$$\int_a^b f\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \ldots, \frac{d^n y(x)}{dx^n}\right) dx,$$

[où $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ est une fonction définie pour tous les $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ d'un domaine $A^{[n]}$, et pour tous les $y^{(n)}$ de l'intervalle $(-\infty, +\infty)$] dans le cas que le domaine $A^{[n]}$ ne soit pas borné. — L'A. énonce des nouvelles propositions, dans lesquelles ne figure plus l'hypothèse suivante, qu'il y avait dans un précédent théorème (ce Zbl. **15**, 28): Pour chaque courbe $y = y(x)$ de la classe considérée il y a au moins un point $\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \ldots, \frac{dy^{n-1}(x)}{dx^{n-1}}\right)$, qui appartient à un ensemble donné, fermé et borné. — Un exemple, qui ne figure pas dans le mémoire déjà publié, éclaire le problème en question. *Autoreferat.*

Courant, R.: Remarks on Plateau's and Douglas' problem. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **24**, 519—523 (1938).

L'A. annonce une nouvelle solution du problème de Plateau dans sa forme généralisée par Douglas. Cette démonstration, qui est encore déduite par la considération du problème en question comme problème du Calcul des Variations relatif à un intégrale double de la forme paramétrique, sera développée en un travail qui va paraître. *S. Cinquini* (Pavia).

Funktionentheorie:

Cinquini, Silvio: Sopra una nuova estensione di una formula di Curtiss. (*26. riun., Venezia, 12.—18. IX. 1937.*) Atti Soc. ital. Progr. Sci. **1**, 15—16 (1938).

Soit $f(z)$ analytique et régulière au point α et $f'''(\alpha) \neq 0$. On peut trouver un $r > 0$ tel que si $|\alpha - z_i| < r$, $i = 0, 1, 2$ et si z_2 n'est pas à l'intérieur du cercle de diamètre $z_0 z_1$ on ait

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ z_0 & z_1 & 1 \\ f(z_0) & f(z_1) & f'(z_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ z_0 & z_1 & 1 \\ z_0^2 & z_1^2 & 2z_2 \end{vmatrix} \frac{f''(\xi)}{2!} \qquad (*)$$

pour un point ξ tel que $|\eta - \xi| < \max_{i=0,1,2}(|\eta - z_i|)$, où η est la valeur de ξ pour $f(z) = z^3$ dans (*). L'aut. a donné la démonstration dans un autre travail (ce Zbl. **18**, 116). *T. Popoviciu* (Cernăuţi, Rumänien).

● **Roberts, W. R. Westropp: Elliptic and hyperelliptic integrals and allied theory. With a foreword by R. R. Hartford.** Cambridge: Univ. press 1938. VIII, 311 pag. bound 12/6.

Des Verf. „studies in Mathematics", welche hauptsächlich der Invariantentheorie Cayleyscher Prägung im Zusammenhang mit der Integration algebraischer Funktionen galten, blieben unvollendet. Pietätvolle Freunde veröffentlichen nun diesen Nachlaß in unveränderter Form. Mit bemerkenswerter Zähigkeit münzt der Verf. das Erbe von Legendre, Abel und Jacobi in vielen Einzelfällen aus. Leider ist er methodisch über sie kaum hinausgegangen. *Wilhelm Maier* (Greifswald).

Littlewood, J. E., and A. C. Offord: On the number of real roots of a random algebraic equation. J. London Math. Soc. **13**, 288—295 (1938).

Die Verff. beschäftigen sich mit der Frage: Wenn die Koeffizienten eines Polynoms

$$f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \qquad (a_\nu \text{ reell})$$

willkürlich gewählt werden (entweder so, daß alle Wahlen gleichwahrscheinlich sind oder eine dem Gaußschen Fehlerintegral entsprechende Verteilung haben oder jedes $a_\nu = \pm 1$ ist), wieviel Polynome haben dann r reelle Nullstellen? Es werden ohne Beweis u. a. folgende Ergebnisse mitgeteilt: Alle

$$f_{p-2} = \sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) x^{\nu-1}$$

[p ungerade Primzahl, $\left(\frac{\nu}{p}\right)$ das Legendresche Symbol] haben für $p < 300$ im Intervall $0 < x < 1$ insgesamt 2 Nullstellen in 4, höchstens 2 in 3 und keine in den übrigen

54 Fällen. — Die Polynome

$$f_{n-1} = \sum_{\nu=1}^{n} \mu(\nu)\, x^{\nu-1} \qquad (\mu(n) = \text{Möbiussche Zahl})$$

haben mehr als $o(\log n)$ reelle Nullstellen. — Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $f_n(x)$ bei irgendeiner der obigen Verteilungen für die a_ν mehr als $25(\log n)^2$ reelle Nullstellen hat, ist für $n \geqq 2000$ höchstens $12n^{-1}\log n$. — Die Polynome

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu \frac{x^\nu}{(\nu!)^\nu} \qquad (\varepsilon_\nu = \pm 1)$$

haben nur reelle Nullstellen. — Für $0 < \varrho < \infty$ haben fast alle Polynome

$$1 + \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu x^\nu (\nu!)^{-\frac{1}{\varrho}}$$

höchstens $n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ reelle Nullstellen für alle hinreichend großen n. — Es seien

$$f(z,t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu(t) a_\nu z^\nu$$

ganze Funktionen der Ordnung ϱ, wo die r_ν Rademachers Funktionen $r_0(t) = \pm 1$, je nachdem $0 \leqq t < \frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{2} \leqq t < 1$, $r_0(t+1) = r_0(t)$, $r_\nu(t) = r_0(2^\nu t)$ sind; $S(R, \alpha)$ sei der Sektor $\quad |z| \leqq R, \quad |\arg z - \alpha| \leqq \pi R^{-\frac{1}{2}\varrho}$.

Fast alle Funktionen der genannten Klasse haben die Eigenschaft, daß für alle hinreichend großen R und beliebige α in dem Sektor S höchstens $O(R^{\frac{1}{2}\varrho+\varepsilon})$ Nullstellen von $f(z)$ liegen. *Kamke* (Tübingen).

Lipka, Stephan: Über die Nullstellen von Potenzreihen. II. Mat. természett. Értes. **57**, 955—966 u. deutsch. Zusammenfassung 967 (1938) [Ungarisch].

In der ersten Mitteilung dieser Arbeit (dies. Zbl. **18**, 397) hat der Verf. einen Satz von L. Onofri (Mem. R. Accad. Ital. **6**; dies. Zbl. **13**, 271) für eine im Einheitskreise konvergente Potenzreihe $f(z) = a_0 + az_1 + a_2 z^2 + \cdots$ mit reellen Koeffizienten bewiesen. In dieser zweiten Mitteilung beweist Verf. drei weitere Verschärfungen der Sätze von L. Onofri. Es gilt z. B. der Satz: Ist die Folge $b_n = a_{k+n} + a_{k-n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ zweifach monoton, d. h. $b_n \geqq 0$, $\Delta b_n = b_n - b_{n+1} \geqq 0$, $\Delta^2 b_n = \Delta b_n - \Delta b_{n+1} \geqq 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, und bestehen die Ungleichungen $\Delta^2 b_\mu > 0$ und $\Delta^2 b_\nu > 0$ für mindestens ein Indexpaar μ und ν, für welches $\mu+1$ und $\nu+1$ teilerfremd sind, so hat die Funktion $f(z)$ im Innern des Einheitskreises genau k Nullstellen. *Gy. (J.) v. Sz. Nagy.*

Obrechkoff, Nikola: Sur les zéros de quelques fonctions entières. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 74—76 (1939).

The function $f(z) = \sum c_n \exp(a_n z)$ defined by a finite sum of exponentials has all its zeros enclosed in certain half strips $[|I(ze^{i\theta})| < a,\ R(ze^{i\theta}) > b]$ and the number in each of these of modulus less than r is of the form $Ar + O(1)$. This is a more precise result than that of Polya [S.-B. Bayer Akad. Wiss. **1920**, 285—290, see also Regensburger, Math. Ann. **111**, 505—540 (1935); this Zbl. **12**, 262] and is obtained by extremely simple methods. *Macintyre* (Aberdeen).

Germay, R. H.: Applications d'un théorème de M. E. Picard, relatif au développement, en produit indéfini de facteurs primaires, de certaines fonctions analytiques uniformes. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **7**, 458—469 (1938).

By means of infinite products the author constructs analytic functions having prescribed and isolated zeros in a circular (or a more general) domain. As the author himself remarks, more general results are wellknown. [Cf. Pringsheim, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre **2**, 980—981 (1932); this Zbl. **5**, 199.] Applications are given. *Otto Szász* (Cincinnati, Ohio).

Morant, J.: Quelques applications d'une formule de Laurent à certains développements de fonctions holomorphes. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **7**, 470—476 (1938).

Ist $f(z)$ eine in dem Kreis C mit Mittelpunkt a analytische Funktion und ist

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ mit $a_n \to a$ eine Folge verschiedener Punkte aus dem Innern von C, so läßt sich nach Laurent $f(z)$ in C durch die Reihe

$$f(z) = f(a_1) + \Phi_1(z)\left[\frac{f(a_1)}{\Phi_2'(a_1)} + \frac{f(a_2)}{\Phi_2'(a_2)}\right] + \cdots + \Phi_{n-1}(z)\left[\frac{f(a_1)}{\Phi_n'(a_1)} + \cdots + \frac{f(a_n)}{\Phi_n'(a_n)}\right] + \cdots$$

mit $\Phi_n(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n)$

darstellen. Verf. hat kürzlich (dies. Zbl. 18, 260) eine Anwendung dieser Formel gegeben. Sie gewinnt aus ihr jetzt durch passende Transformation eine Reihenentwicklung einer in einem Streifen $-a < J(z) < +a$ analytischen Funktion, ferner eine Reihenentwicklung einer in einem beliebigen Streifen analytischen und längs dieses Streifens periodischen Funktion. Im letzteren Falle folgt hieraus noch eine Produktentwicklung der Funktion, falls die Funktion in dem Streifen nicht verschwindet.

F. Lösch (Rostock).

Ketchum, P. W.: Infinite systems of linear equations and expansions of analytic functions. Duke math. J. 4, 668—677 (1938).

$f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ et $F_m(x) = \sum_0^\infty b_{m,n} x^n$ ayant leurs rayons de convergence positifs, supposons que $f(x)$ puisse s'exprimer en une série de fonctions $F_m(x)$; $f(x) = \sum_0^\infty c_m F_m(x)$ (*). Ceci entraînera dans certains cas que le système d'équations à une infinité d'inconnues c_m, $\sum_{m=0}^\infty c_m b_{m,n} = a_n$, $n = 0, 1, \ldots$ a une solution. L'auteur précise les conditions pour qu'il en soit ainsi. Par exemple, il suffit que (*) ait lieu dans un voisinage de l'origine où $f(x)$ et les $F_m(x)$ sont holomorphes. Moyennant une condition supplémentaire on peut affirmer que $|c_m|^{1/m}$ a une borne supérieure déterminée. L'aut. donne une proposition inverse; il applique aussi un théorème de Birkhoff [C. R. Acad. Sci., Paris **164**, 942 (1917)] permettant d'affirmer la convergence de (*). Il se limite ensuite au cas où le système en c_m a la forme $c_i + c_{i-1}\beta_{i-1,i} + \cdots + \beta_{0,i}c_0 = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ et déduit des propriétés asymptotiques des c_m de propriétés analogues des a_n et $\beta_{i,j}$ (majorations analogues à celles des coefficients d'une série entière). Il étend un théorème de Takenada (voir ce Zbl. 2, 196) et en déduit une proposition d'après laquelle une fonction $f(x)$ qui est développable en série de Newton, peut être développée, sous certaines conditions, en séries d'une forme voisine.

G. Valiron (Paris).

Lefebvre, Éloi: Sur les fonctions d'une variable complexe définies par une relation linéaire entre la variable et le logarithme de la fonction, les coefficients étant des polynomes par rapport à la fonction. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 79—81 (1939).

L'auteur a repris l'étude de la fonction $z(x)$ définie par

$$z - \log z = x, \quad z = \varrho e^{i\theta}, \quad x = l e^{it} \qquad (*)$$

qui avait été considérée par Boutroux (Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles, p. 85, Paris 1908). Il indique sans démonstration les résultats obtenus et les étend à d'autres types d'équations. Il n'existe qu'une valeur z_k pour laquelle $2(k-1)\pi < \theta_k < 2k\pi$; la variation de θ_k lorsque $l \to \infty$, $t = \text{const}$, diffère suivant les branches, elle peut rester finie ou croître indéfiniment. La première propriété subsiste lorsque $z(x)$ est définie par $z \log z = x$ (**), la seconde est remplacée par une proposition relative à la permutation des branches lorsque x est voisin de 0 et tourne autour de l'origine. L'auteur passe ensuite à l'équation générale $P \log z + Q = xR$, où P, Q, R sont des polynomes en z. L'étude des branches $z(x)$ peut être faite par des suites d'approximation dont les valeurs initiales sont fournies par des équations qui se ramènent aux types (*) et (**). Le nombre des valeurs z_k est le plus grand des degrés de P, Q, R. La croissance des branches z_k lorsque $l \to \infty$, $t = \text{const}$, est examinée dans les divers cas possibles. Cette étude met principalement en évidence un procédé de numérotage des branches d'après les valeurs de l'argument, et, dans le cas général, le rôle que peuvent jouer des fonctions asymptotiques du type (*) et (**).

G. Valiron (Paris).

Valiron, Georges: Sur une équation fonctionnelle et certaines suites de facteurs. J. Math. pures appl., IX. s. **17**, 405—423 (1938).

Ähnlich wie man eine Potenzreihe, $1+\sum c_\nu z^\nu$, die im Einheitskreise konvergiert, durch Hinzufügen „zufälliger Faktoren" ± 1 in eine nichtfortsetzbare verwandeln kann, läßt sich bei einer ganzen Transzendenten durch Hinzufügen solcher zufälligen Faktoren vom Betrage 1 erreichen, daß jede Richtung eine Borelsche wird. Verf. will von der Zufälligkeit loskommen und eine gesetzmäßig gebildete Folge mit der gewünschten Wirkung finden; dazu genügt σ^{n^p} für $|\sigma|=1$, p ganz $\geqq 2$, $n=1,2,\ldots$, wenn $\arg\sigma$ und π inkommensurabel sind. — Um dieses Hauptproblem rankt sich eine größere Zahl von Fragen, auf die der Verf. im Zusammenhang damit gestoßen ist, so: 1. Das Studium der Differential-Funktionalgleichungen $f'(z)=f(\sigma z)$ bzw. etwas allgemeiner $f'(z)=\sigma f(\sigma^2 z)$ und einer Klasse $E(z,\sigma)=\sum_0^\infty \frac{1}{\nu!}\sigma^{\nu^2}z^\nu$ ganzer Transzendenten, die $e^z=E(z,1)$ verallgemeinern und bei deren Lösung auftreten. — 2. Verf. bestimmt die Funktionen, bei denen die Maximalmoduln $M(r,f)$ für Funktionen und Ableitungen identisch sind: Es sind im wesentlichen nur jene $E(az,\sigma)$, $|a|=1$, sowie $\cosh bz+B\sinh bz$, $|b|=|B|=1$. — 3. Für die allgemeineren Funktionalgleichungen

$$f'(z)=P(z)\,f(\sigma,z)+Q(z) \qquad (P,Q \text{ Polynome})$$

gelingen Aussagen für $\log M(r,f)$ ihrer ganzen transzendenten Lösungen und deren Lindelöfsche Indikatrix. — 4. Satz: Es habe $\sum a_n z^n$ $|z|=1$ als Konvergenzkreis und natürliche Grenze. Es sei $\lim\sqrt[n]{|g_n|}=1$, und die Lindelöfsche Indikatrix der Funktion $\sum g_n z^n : \Gamma(1+\gamma n)$ $(\gamma>0)$ erreiche ihr Maximum nur für ein $\arg z=\varphi$. Dann ist die Lindelöfsche Indikatrix für alle Funktionen $\sum a_n z^n : g_n\Gamma(1+\delta n)$ konstant $(\delta>0)$. — 5. Ein Konvergenzsatz für verallgemeinerte Dirichletreihen in bezug auf eine ganze Transzendente $\Phi(z)$ mit $\lim\log M(r,\Phi) : Ar^\varrho = 1$. Die Reihe $\sum b_n\Phi(\lambda_n z)$ für reelle oder komplexe λ_n mit wachsenden (nicht abnehmenden) Beträgen und $\lim\log n : \lambda_n = 0$ konvergiert nur (in keinem Gebiet als) im Kreise $|z|<R$ mit $-AR^\varrho = \overline{\lim}\log|b_n| : |\lambda_n|^\varrho$. Solche Reihen ergeben sich bei der Lösung von Differential-Funktionalgleichungen

$$f(z)+a_1 f'(\sigma z)+a_2 f''(\sigma^2 z)+\cdots=0$$

von unendlich hoher Ordnung. *Ullrich* (Gießen).

Chuang, Chi-Tai: Sur les fonctions holomorphes dans le cercle unité. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 76—78 (1939).

Chuang, Chi-Tai: Sur les fonctions holomorphes dans le cercle unité. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 160—161 (1939).

Without proof but with reference to the methods of Valiron (this Zbl. **19**, 419) and reviewer (this Zbl. **19**, 419) is given a form of Bloch's theorem too elaborate to be reproduced. From it are deduced (second paper) a number of results relating to q-valent functions, Picard functions etc. Most of these are known [M. L. Cartwright, this Zbl. **10**, 362; H. Frazer, this Zbl. **11**, 342; J. E. Littlewood, Proc. London Math. Soc. (2) **23**, 481—519 (1925)] so we quote the last, which is new. — If $f(z)$ is holomorphic and never zero for $|z|<1$ and if $|f^{(k)}(z)|<L$ at all points at which $f(z)=1$ then the power series for $\log f(z)$ is dominated by

$$A_k\{1+L^{1/k}+|\lg f(0)|\}\{1+\sum n^{\tau\nu^2}z^n\}. \qquad \textit{Macintyre.}$$

Dinghas, Alexander: Über Ausnahmegebiete meromorpher Funktionen. Math. Z. **45**, 20—24 (1939).

Dinghas, Alexander: Zur Invarianz der Shimizu-Ahlforsschen Charakteristik. Math. Z. **45**, 25—28 (1939).

In Analogie zu einem bekannten Satz von Collingwood wird der folgende Satz bewiesen: Wenn eine regulär ausschöpfbare Überlagerungsfläche über ein Gebiet D

lauter Inseln besitzt, und zwar von beschränkter Blätteranzahl, dann ist der Ahlforssche Defekt jedes ganz in D enthaltenen Gebiets gleich Null. Der Satz wird mit expliziten funktionentheoretischen Methoden bewiesen. — In der zweiten Arbeit fragt der Verf. nach der Veränderung, welche die Fundamentalgröße $S(r, w)$ (Flächeninhalt auf der Kugel) erfährt, wenn man von w zu einer linearen Transformation Uw übergeht. Die Gleichung $S(r, Uw) = S(r, w) + O(L(r))$ wird bewiesen. *Ahlfors.*

Radojčić, M.: Über einen Satz von Herrn Ahlfors. Publ. Math. Univ. Belgrade **6/7**, 77—83 (1938).

Es handelt sich um das erste Typenkriterium, welches Ahlfors (dies Zbl. **2**, 35) für Riemannsche Flächen angegeben hat, die im Endlichen nur algebraische Windungspunkte haben. Verf. kann mit der nämlichen Schlußweise eine erhebliche Verschärfung in dem Sonderfall erzielen, wo diese Windungspunkte alle über einen festen Kreis $|w| < \delta$ liegen. Ist $n(\varrho)$ die Verzweigtheit des Flächenstücks R_ϱ, das von einem festen Anfangspunkt v über $w = 0$ durch Wege der Höchstlänge ϱ erreichbar ist, so ist statt der Divergenz des Integrals

$$\int^{\infty} \frac{d\varrho}{\varrho n(\varrho)} \text{ (Ahlfors)} \quad \text{die von} \quad \int^{\infty} \frac{d\varrho}{n(\varrho) - n(\varrho - \delta)} \sim \int^{\infty} \frac{\varrho d\varrho}{n(\varrho)}$$

für das Eintreten des Grenzpunktfalles hinreichend; die letzte Integraläquivalenz ergibt sich aus einem Reihensatz nach Knopp. — Ein entsprechender Satz wird unter Zugrundelegung von Kugelmetrik bewiesen. Hierzu auch Ahlfors, dies. Zbl. **15**, 360.

Ullrich (Gießen).

Rogosinski, Werner: On subordinate functions. Proc. Cambridge Philos. Soc. **35**, 1—26 (1939).

Die Arbeit schließt sich zwei früheren Untersuchungen des Verf. an (dies. Zbl. **2**, 272 u. **7**, 167). Es seien $f(z)$ und $F(z)$ für $|z| < 1$ meromorphe Funktionen, $f(0) = F(0)$, $F'(z) \neq 0$ und die Pole von $F(z)$ einfach. $F(z)$ bildet dann den Kreis $|z| < 1$ auf ein Riemannsches Flächenstück $G(F)$ ab. Wenn $F(z)$ eine Majorante von $f(z)$ ist, d. h. wenn die Werte von $f(z)$ in $G(F)$ fallen, so liegt der Wert $f(z)$ für $|z| \leqq r$ nach dem Lindelöfschen Prinzip in demjenigen Teil von $G(F)$, auf welchen $F(z)$ den Kreis $|z| \leqq r$ abbildet. In der vorliegenden Arbeit setzt Verf. auch $f'(z) \neq 0$ für $|z| < 1$ voraus und erhält dann einige verschärfte Aussagen über den Wertevorrat von $f(z)$. Aus den Resultaten leitet er mehrere Folgerungen für schlichte Funktionen ab, indem er für die Majorante $F(z)$ spezielle Funktionen nimmt. *V. Paatero* (Helsinki).

Hibbert, Lucien: Univalence et automorphie pour les polynomes et les fonctions entières. Bull. Soc. Math. France **66**, 81—113 et 115—154 (1938).

A detailed study of the curves $|f(z)| = \text{const}$ and $\arg f(z) = \text{const}$ for polynomials and to some extent for integral functions. The z-plane is divided by the curves $\arg f(z) = 0$, 2π into regions of univalence of $f(z)$. In the case of a polynomial such a region is the image in the z-plane of one sheet k of the Riemann surface of the inverse function in the shape of a Mittag-Leffler star. Such a region of univalence is called a "pinceau montant". The points corresponding to the vertices of this star give rise to "cassures". If the star is formed by radii to the origin instead of to infinity we get a "pinceau descendent". The theory extends to integral functions to some extent especially if there are no paths on which the function is bounded. The passage from one sheet of the Riemann surface of the inverse function to another gives rise to a transformation in the z-plane and for this transformation the local properties are considered.

Macintyre (Aberdeen).

Knöll, Ludwig: Krümmungsverhältnisse von Niveaulinien in der Kreisabbildung einfach-zusammenhängender schlichter Gebiete. Gießen: Diss. u. Mitt. math. Semin. Gießen H. **27**, 1—54 (1937).

Ein einfach zusammenhängendes Gebiet G_w der w-Ebene sei durch $w = f(z)$ auf den Einheitskreis G_z abgebildet; die den Kreisen $|z| = r$ bzw. ihren Radien ent-

sprechenden Niveau- und Stromlinien mit dem Aufpunkt $f(0)$ werden auf ihre Krümmungsverhältnisse hin untersucht. Ein Scheitel einer Niveaulinie ist zugleich ein solcher der durchgehenden Stromlinie. Die Bildkurve des Ortes dieser Scheitel in G_z lautet $J(z^2 f_s(z)) = 0$, wo f_s die Schwarzsche Ableitung von f ist. Hat f_s im Nullpunkt eine n-fache Nullstelle, so haben die nächsten Niveaukurven um den Aufpunkt $2n+4$ Scheitel von abwechselndem Typus. Die Scheitelbildkurve wird nun für konvexe n-Ecke bei beliebiger Lage des Aufpunktes näher untersucht; sie besitzt bei innerem Aufpunkt höchstens $n-1$ Doppelpunkte (und minstens einen) im Inneren von G_z. Die Niveaukurven in Randnähe haben $2n$ Scheitel. Es folgen die genauen Scheitelanzahlbestimmungen für Zweieck, Dreieck und reguläre und halbreguläre Polygone. Bemerkenswert ist, daß es bei jedem konvexen Dreieck im Innern genau einen Aufpunkt gibt, so daß alle zugehörigen Niveaukurven sechs Scheitel tragen, während bei allgemeinem Aufpunkt die nächstliegenden Niveaulinien vier, die entfernteren sechs Scheitel aufweisen. *Harald Geppert* (Gießen).

Robertson, M. S.: Piecemeal univalency of analytic functions. Ann. of Math., II. s. **40**, 120—128 (1939).

Als Verallgemeinerungen der schlichten oder einwertigen Funktionen im Einheitskreise kennt man die p-wertigen Funktionen. Für sie sind Seitenstücke der klassischen Abschätzungen bei schlichter Abbildung (Verzerrungssatz, Mittelwert, Koeffizienten) angegeben worden, die freilich erheblich unschärfer sind (s. Cartwright, dies. Zbl. **10**, 362; Biernacki, dies. Zbl. **14**, 319). Verf. hebt eine Sonderklasse unter den mehrwertigen Funktionen heraus, indem er fordert, daß jeder Sektor des Kreises $|z|<R<1$ von der Öffnung $\alpha\pi < 2\pi$ noch schlicht abgebildet werde: Er spricht dann von stückweiser Schlichtheit der Ordnung $\alpha(R)$; es kann $\alpha(R) \to 0$ für $R \to 1$ eintreten; es wird deshalb jene Klasse betrachtet, wo $\alpha = \alpha(1) > 0$ ist. Unter Benutzung der elementaren Hilfsabbildung eines solchen Sektors in den Einheitskreis kann nun der Anschluß an die Schätzungen bei schlichter Abbildung vollzogen und ein schärferes Ergebnis als bei allgemeinen p-wertigen Funktionen erzielt werden. Es gilt (mit $k = 2:\alpha$, $A(\alpha) = \text{const}$ von α abhängig)

$$|f(re^{i\varphi})| < A(\alpha)\frac{r^k}{(1-r)^2}, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|\,d\varphi < \frac{2}{\alpha}A(\alpha)\frac{r^k}{1-r}, \qquad \left|\frac{a_n}{n}\right| < e\cdot\frac{2}{\alpha}A(\alpha).$$

Ullrich (Gießen).

Rosenblatt, Alfred: Über die regulären schlichten Funktionen im Einheitskreis. Rev. Ci., Lima **40**, 165—176 (1938) [Spanisch].

Rosenblatt, Alfred: Über die Koeffizienten der schlichten Reihen im Einheitskreis. Rev. Ci., Lima **40**, 177—179 (1938) [Spanisch].

Rosenblatt, Alfred: Bemerkung zur vorstehenden Note. Rev. Ci., Lima **40**, 181—182 (1938) [Spanisch].

Rosenblatt, Alfred: Zusatz zu meinen Noten über die schlichten Funktionen. Rev. Ci., Lima **40**, 183—184 (1938) [Spanisch].

Rosenblatt, A.: Sulle funzioni univalenti dispari nel cerchio unitario. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **28**, 144—146 (1938).

Diese Noten zielen auf numerische Schätzung der ersten Koeffizienten einer allgemeinen schlichten Potenzreihe $\varphi(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$ im Einheitskreis. Dieser Reihe werden, was bekannt ist, die Reihen $f(z) = \sqrt{\varphi(z^2)} = z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \cdots$ und weiter $g(z) = 1:\sqrt{f(z^{-2})} = z + b_3 z^{-3} + b_7 z^{-7} + \cdots$ zugeordnet; indem die Bieberbachsche Ungleichung, hier $\sum_{\nu=1}^{\infty}(4\nu-1)|b_{4\nu-1}|^2 \leqq 1$, für die letzte Funktion angesetzt wird, gelingt eine etwas wirkungsvollere Ausnutzung für die a und die c. Insbesondere folgt auf diesem elementaren Wege in den Noten I, III und V $|a_7| < 1{,}15$ und $|a_9| < 1{,}315$ sowie in I und IV $|c_4| < 4{,}3182$, $|c_5| < 6{,}177$, $|c_6| < 8{,}582$ und $|c_7| < 11{,}74$.

Ullrich (Gießen).

Kobori, Akira: Sur la multivalence d'une famille des fonctions analytiques. Proc. Imp. Acad. Jap. **14**, 157—159 (1938).

Elementarer Beweis (Argumentprinzip) für den Satz: Ist $k > 0$ ganz, $f(0) \neq 0$, und $\Re \frac{zf'(z)}{f(z)} > -k$ in $|z| < R$, so ist $z^k f(z)$ dort k-wertig. Anwendung: Ein Polynom n-ten Grades mit p-facher Nullstelle im Ursprung ist im Kreise $|z| < \frac{p}{n}|z_0|$ p-wertig, wobei $z_0 \neq 0$ seine ursprungsnächste Nullstelle ist — ein Ergebnis von Biernacki. *Ullrich.*

Golusin, G.: Die Kontinuitätsmethode in der Theorie der konformen Abbildungen mehrfachzusammenhängender Bereiche. Rec. math. Moscou, N. s. **4**, 3—7 u. deutsch. Zusammenfassung 8 (1938) [Russisch].

Kryloff, V.: Une application des équations intégrales à la démonstration de certains théorèmes de la théorie des représentations conformes. Rec. math. Moscou, N. s. **4**, 9—30 u. franz. Zusammenfassung 30 (1938) [Russisch].

The first paper gives a proof of Koebe's theorem that any "schlicht" domain B of connectivity n containing the point at infinity can be conformally represented and in one way only by a function $w = z + a_1/z + \cdots$ on a domain B' so that the various boundary components of B correspond to rectilinear slits in the w-plane having prescribed directions. The proof follows the method of Koebe [Math. Z. **2**, 198—236 (1918)] but the function theory considerations are simplified. Taking the theory of parallel slit representation [Koebe, Acta math. **41**, 305—344 (1918); Grötzsch, this Zbl. **5**, 68] for granted B may be assumed to have its boundary components all slits parallel to the real axis and it is known that to every B' corresponds one and only one B. The uniqueness of the B' if any, corresponding to a given B is obtained by considering that if w_1 and w_2 are two such representations then the range of values of $w_1 - w_2$ as z moves on a boundary component of B is a straight line. The argument principle applied to $w_1 - w_2 - \alpha$ where α is not on any of these lines, combined with the behaviour of w_1 and w_2 at infinity is sufficient to show that they are identically equal. That B varies continuously with B' is deduced from the simple and essentially well known lemma: If the boundary of B lies in $|z| < r$ then that of B' lies in $|z| < 2r$, Vitali's theorem and the uniqueness. The domains B and B' can be represented by points in $3n$ dimensional space which fill open sets. By Brouwer's theorem (e.g. Stoilow, this Zbl. **17**, 378) the B corresponding to all B' fill an open set. We immediately get a contradiction by supposing this set to have a frontier point which is a point of the set of all B. — The second paper deals with the same problem and also the others of Koebe's paper (loc. cit.) by the method of integral equations. The further problems are the representations of the schlicht domain B of connectivity n on: (a) the w-plane, cut along logarithmic spirals of prescribed angles, with invariance of the points ∞ and 0 (which is inside B for this problem) by a function $w = z + c_0 + c_1/z + \cdots$, (b) the w-plane cut along logarithmic spirals of prescribed angles, a circle $|z| < r$ being excluded, by a function $w = z + c_0 + c_1/z + \cdots$, (c) an annulus $r < |w| < R$ cut by arcs of logarithmic spirals of prescribed angles by a function $w = 1 + c_1/z + c_2/z^2 + \cdots$ — The uniqueness of such representations is established by methods very similar to that described above except that $\log w_2 - \log w_1$ needs to be considered instead of $w_2 - w_1$. — The actual representations are then obtained in terms of the solutions of a system of simultaneous integral equations on the assumption that the boundaries of B are closed analytic curves. — If $w = f(z)$ is a solution of the first problem, the boundary components L_k corresponding to slits of directions θ_k, then

$$f(z) - z = \frac{1}{2\pi i} \sum \int_{\lambda_k} \frac{f(t_k)\, dt_k}{z - t_k},$$

and since for z on L_m we have $f(z) = \exp(i\theta_m)[u_m(z) + ic_m]$ with $u_m(z)$ real, the u_m satisfy the system of equations (for z on L_m)

$$\frac{1}{2} u_m(z) = \Re\{z e^{-i\theta_m} + e^{-i\theta_m} \sum(z)\}, \quad \sum(z) = \sum_k \frac{1}{2\pi i} e^{i\theta_k} \int_{\lambda_k} \frac{u_k(t_k)}{z - t_k}\, dt_k.$$

[In the following we continue to use this abbreviation $\sum(z)$.] Conversely if these equations are satisfied then $f(z) = z + \sum(z)$ gives the required conformal representation. It is only necessary to show on the L_k the imaginary part of $\exp(-i\theta_k)f(z)$ is constant. Since the $u_k(z)$ are analytic this follows by observing that $\exp(-i\theta_k)f(z)$ and $u_k(z)$ have the same real part on L_k and hence their imaginary parts differ by a constant. To establish the existence of the solutions it is necessary to show that the corresponding homogeneous equations have no solutions other than $u_m(z) \equiv 0$. This follows by observing that if the u_m are solutions of the homogeneous equations then $f(z) = \sum(z)$ will be identically zero from the same kind of considerations as were used to prove uniqueness. — The problems (a), (b), (c) likewise lead to integral equations, and the following expressions for the representative functions

$$f(z) = z \exp \sum(z), \qquad f(z) = (z - t_1^*) \exp \sum(z), \qquad f(z) = \frac{z - t_1^*}{z - t_n^*} \exp \sum(z).$$

(t_1^* is inside any point inside L_1 and t_n^* is any point inside L_n. L_1 is the boundary component which is to correspond to $|z| = r$ and L_n is that which is to correspond to $|z| = R$.)

Macintyre (Aberdeen).

Lavrentieff, M.: Sur quelques propriétés des courants discontinus d'un fluide. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **20**, 235—237 (1938).

L'aut. complète les résultats de sa note (C. R. Acad. Sci. URSS **18**, 225; ce Zbl. **19**, 71). Soit γ une courbe simple jordanienne fermée, partiellement unie, située dans le plan fermé de la variable complexe z (sphère de Riemann) et passant par le point $z = \infty$. Désignons par $D(\gamma)$ l'un des domaines bornés par γ et par $w = f(z, \gamma)$, $f(\infty, \gamma) = \infty$, la fonction réalisant la réprésentation conforme du domaine $D(\gamma)$ sur le demi-plan inférieur $v < 0$ du plan $w = u + iv$. Désignons par $V(s)$ les valeurs de $|f'(z, \gamma)|$ aux points de γ considérés en fonction de l'arc s de la courbe γ; la direction doit être choisie de telle manière que s croisse avec u. Les théorèmes suivants sont énoncés: 1. Supposons que la tangente T à γ passant par l'un de ses points s_0 divise γ en deux parties situées de côtés opposés de T et que d'ailleurs au voisinage du point s_0 la ligne γ possède une courbure vérifiant la condition de Hölder. Dans ces conditions on a: $V'(s_0) > 0$ ou bien $V'(s_0) < 0$ suivant que le rayon de la tangente T, issu de s_0 et dirigé du côté où s croît, est situé dans le domaine $D(\gamma)$ ou bien hors de ce domaine. 2. Soit γ une courbe simple fermée; supposons qu'au voisinage de l'un de ses points s_0 la courbure est continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres. Dans ces conditions, si le cercle de courbure pour le point s_0 est situé à l'intérieur de $D(\gamma)$, on a $\frac{d^2}{ds^2} \log V(s_0) > \frac{1}{4r^2}$, tandis que dans le cas où ce cercle est hors de $D(\gamma)$ on a: $\frac{d^2}{ds^2} \log V(s_0) < -\frac{C(k)}{r^2}$, où r est le rayon de courbure de γ au point s_0 et $C(k)$ est une constante positive qui ne dépend que d'un nombre k, dépendant de γ et s_0 et dont la définition est assez longe pour être donnée ici. L'aut. donne ensuite quelques applications d'un caractère délicat dans la théorie des sillages.

N. Obrechkoff (Sofia).

Lavrentieff, M.: Sur la théorie des sillages. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **20**, 239—240 (1938).

L'aut. généralise les résultats de ses deux notes (ce Zbl. **19**, 71 et le réf. prec.) pour le cas des fonctions réalisant la représentation conforme d'un domaine sur une bande et donne quelques applications hydrodynamiques. *N. Obrechkoff* (Sofia).

Caccioppoli, Renato: Sulla distribuzione delle singolarità delle funzioni di due variabili complesse. (*Firenze, 1.—3. IV. 1937.*) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 183—186 (1938).

Verf. weist unter gewissen Voraussetzungen nach, daß die Singularitätenmannigfaltigkeit einer eindeutigen analytischen Funktion $f(w, z)$ im projektiv abgeschlossenen Raum ein Kontinuum bildet. — Gleiches gilt bekanntlich nicht, wenn man die komplexe w- und die komplexe z-Mannigfaltigkeit getrennt abschließt. (Über diese Abschließung s. etwa Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1, § 17.) *Behnke.*

Segre, Beniamino: Sull'estensione della formula integrale di Cauchy e sui residui degli integrali n-pli, nella teoria delle funzioni di n variabili complesse. (*Firenze, 1.—3. IV. 1937.*) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 174—180 (1938).

Verf. gibt einige topologische Betrachtungen im reellen euklidischen Raum $S_{2n}(x_1', x_1'', \ldots, x_n', x_n'')$ der n komplexen Veränderlichen $x_\nu = x_\nu' + x_\nu'' i$ $(\nu = 1, \ldots, n)$

und beweist insbesondere, daß es für jeden orientierten n-Zykel Z_n der topol. Mannigfaltigkeit $U_{2n} = S_{2n} - T_{2n-2}$ (T_{2n-2} ist die Gesamtheit der n charakteristischen Räume $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$) ein ganzes $N\left(\gtrless 0\right)$ gibt, so daß $Z_n \sim N \cdot W_n$ in U_{2n} ist; W_n bezeichnet das topol. Produkt von n Kreisen in den Ebenen (x_ν', x_ν'') mit den Zentren im Ursprung. Die Zahl N, die als Verschlingungszahl („indice di allacciamento") von Z_n mit T_{2n-2} bezeichnet wird, ergibt sich aus $N = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} [K_n Z_n]$, wo K_n der n-Zykel von S_{2n} mod T_{2n-2} ist, erklärt aus den Beziehungen $x_\nu' \gtrless 0$, $x_\nu'' = 0$, und $[K_n Z_n]$ der Kroneckersche Index von K_n und Z_n in U_{2n}. — Verf. verschärft und vervollständigt auf dieser Grundlage die Erweiterung der Cauchyschen Integralformel bei n komplexen Veränderlichen, die vom Ref. für $n = 2$ schon teilweise gewonnen worden war (dies. Zbl. **17**, 174), und erzielt folgendes Ergebnis: Ist $f(x_1, \ldots, x_n)$ regulär analytisch in einem Gebiet Γ_{2n}, das den Ursprung O enthält, und ist Z_n ein orientierter n-Zykel in Γ_{2n}, welcher T_{2n-2} nicht trifft und in $(\Gamma_{2n} - T_{2n-2}) + O$ homolog Null ist, so gilt mit N wie oben

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{Z_n} \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{x_1 x_2 \ldots x_n} dx_1 \ldots dx_n = N f(0, \ldots, 0).$$

Daraus kann eine allgemeinere Beziehung abgeleitet werden

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{Z_n} \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n} dx_1 \ldots dx_n = N \frac{f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{J(x_1^0, \ldots, x_n^0)}, \tag{1}$$

dabei sind $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ analytische Funktionen der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ und regulär in einer $2n$-dimensionalen Umgebung des Punktes $O(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, in dem die Funktionaldeterminante $J = \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ nicht verschwindet; die φ_ν verschwinden sämtlich in O; Z_n ist hier ein orientierter n-Zykel dieser Umgebung, der die (reduzible) charakteristische Mannigfaltigkeit $\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_n = 0$ nicht trifft und mit ihr in O die Verschlingungszahl N hat (ähnlich wie oben erklärt). Für $N = 1$ wird die rechte Seite von (1) als „Residuum" der Funktion $f(x_1, \ldots, x_n) : \varphi_1 \ldots \varphi_n$ in O erklärt. — Schließlich gewinnt der Verf. aus (1) einen Satz „im großen" unter der Annahme, daß sich die charakteristischen Mannigfaltigkeiten $\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_n = 0$ in endlich vielen Punkten $O_1, \ldots, O_s$ eines Gebiets Γ_{2n} von S_{2n} einfach schneiden, wo f und die φ regulär sind. Dieser Satz erweist sich als besonders bedeutungsvoll für $f = J$. *E. Martinelli.*

Bochner, S.: Functions of integrable square in several complex variables. Duke math. J. **4**, 635—639 (1938).

Verf. verallgemeinert seinen Satz (s. Ann. of Math., II. s. **39**; dies. Zbl. **18**, 153): „Eine Funktion $f(z_1, \ldots z_n)$, die analytisch und quadratintegrierbar in einer offenen ‚Tube' T ist, ist beides gleichfalls in der im elementargeometrischen Sinne konvexen Hülle von T" auf nicht mehr notwendig offene Tuben. Zur Definition der Tube s. dies. Zbl. 18, 153. *Behnke* (Münster i. W.).

Bloch, A.: Über eine Verallgemeinerung der analytischen Transformation von zwei Variablen. Bol. Mat. **11**, 141—143 (1938) [Spanisch].

Verf. beabsichtigt, Transformationen des 4dim. Raumes aufzustellen, die zugleich in ihrer Mannigfaltigkeit und in ihren geometrischen Eigenschaften „analog" zu den konformen Abbildungen der Ebene sind. (Es muß dann über die analytischen Transformationen hinausgegangen werden, weil durch sie topologisch äquivalente Bereiche im allgemeinen nicht mehr aufeinander abgebildet werden können.) So kommt er dazu, diejenigen Abbildungen des 4dim. Raumes einzuführen, bei denen der „Inhalt" $\frac{d\omega}{2} = dw\,\partial z - dz\,\partial w$ des infinitesimalen Bereichs $(0; dw, dz; \partial w, \partial z)$ bis auf einen nur vom Ort abhängigen Faktor invariant bleibt. Eigenschaften dieser Gruppe von Transformationen werden noch nicht angegeben. *Behnke* (Münster).