Werk

Titel: Mengenlehre und reelle Funktionen

Jahr: 1938

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0018|log64

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

wobei A, B, C, D streckenweise konstante Funktionen von x sind. Z. B.:

$$\varkappa(x+1, \alpha) = \alpha\varkappa(x, \alpha) \quad \text{für alle} \quad x$$

(diese Transformation und ihre Potenzen sind die einzigen, für die A, B bzw. C, D nicht unendlich viele Sprungstellen haben) und

$$\varkappa(-x, \alpha) = -\alpha^{-k-2}(1-\alpha)^{-k-1}\varkappa(x, 1-\alpha) + (1-\alpha+\alpha^2)\,\alpha^{-k-2}$$
$$\text{für} \quad k \leqq x \leqq k+1 \qquad (k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots)$$

Um die Formeln (3) für eine gegebene Transformation zu bestimmen, genügt es, die Sprungstellen der Koeffizienten A, B bzw. C, D zu kennen, da sich in jedem Konstanzintervall diese Koeffizienten durch Einsetzen irgend zweier Werte für x ergeben. Verf. zeigt, daß diese Sprungstellen gerade gleich den sämtlichen Näherungsbrüchen einer verallgemeinerten Art von zweiseitig unendlichen Kettenbrüchen für die rationale Zahl $-q'/q$ sind; diese „kanonischen" Kettenbrüche sind auch an sich von Interesse und werden eingehend untersucht. — In der Einleitung erwähnt Verf., daß seine Untersuchungen in Zusammenhang mit der Theorie der automorphen Funktionen gebracht werden können. *Mahler* (Manchester).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Liapounoff, A.: Sur l'uniformisation des complémentaires analytiques. Rec. math. Moscou **3**, 219—222 u. franz. Zusammenfassung 223 (1938) [Russisch].

Bekanntlich ist nach S. Mazurkiewicz jede A-Menge Projektion einer uniformisierten (d. h. auf jeder Vertikalen höchstens einen Punkt besitzenden) CA-Menge. In Beantwortung eines von P. Novikoff in Zusammenhang mit seinem Auswahlverfahren (vgl. dies. Zbl. **12**, 344) dem Verf. gestellten Problem wird nun auch für die zweite projektive Klasse bewiesen, daß jede PCA-Menge Projektion einer uniformisierten $CPCA$-Menge ist. *B. Knaster* (Warszawa).

Tarski, Alfred: Über unerreichbare Kardinalzahlen. Fundam. Math. **30**, 68—89 (1938).

Der Verf. unterscheidet zunächst zwei Arten von unerreichbaren Kardinalzahlen (KZen.). Eine KZ. $\mathfrak{m} \neq 0$ heißt im weiteren Sinne unerreichbar (wSu.), wenn erstens m nicht als eine Summe von weniger als m KZen. $\mathfrak{n}_x$ mit $\mathfrak{n}_x < \mathfrak{m}$ darstellbar ist und es zweitens zu jedem $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ ein $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{n} < \mathfrak{p} < \mathfrak{m}$ gibt; $\mathfrak{m}$ heißt im engeren Sinne unerreichbar (eSu.), wenn $\mathfrak{m}$ der ersten dieser Bedingungen genügt und auch für $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$ immer $\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m}$ gilt. Es werden dann verschiedene mit der Unerreichbarkeit einer KZ. verwandte Bedingungen aufgestellt und auf ihre Beziehungen zueinander untersucht. Dabei wird das Auswahlprinzip sowie die anderen Axiome der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre zugrunde gelegt, aber nicht die Cantorsche Alephhypothese ($2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$). Beispiele der Sätze sind die folgenden: Eine KZ. $\mathfrak{m} \neq 0$ ist dann und nur dann wSu., wenn $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$, wo $\alpha = 0$ oder ω_α eine reguläre Anfangszahl mit Limeszahlindex ist; $\mathfrak{m} \neq 0$ ist dann und nur dann eSu., wenn $\mathfrak{m}$ nicht als Produkt von weniger als $\mathfrak{m}$ Faktoren $< \mathfrak{m}$ darstellbar ist; eine eSu. KZ. $\neq 2$ ist wSu. und, wenn die Alephhypothese gilt, auch umgekehrt; jede KZ. $\mathfrak{m} \neq 0$ derart, daß für jede KZ. $\mathfrak{p}$ mit $0 < \mathfrak{p} < \mathfrak{m}$ die Ungleichung $2^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m}$ und auch die Gleichung $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}$ gelten, ist eSu. (der umgekehrte Satz ist der Alephhypothese äquivalent). Im zweiten Teil der Arbeit stellt Verf. ein mengentheoretisches Axiom auf, das zu jeder Menge N die Existenz einer Menge M mit den folgenden Eigenschaften fordert: 1. $N \in M$; 2. ist $X \in M$ und $Y \subset X$, so ist $Y \in M$; 3. ist $X \in M$, so ist $\mathfrak{U}X \in M$ ($\mathfrak{U}X$ ist die Potenzmenge von X); 4. ist $X \subset M$ und $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{M}}$, so ist $X \in M$. Wenn man dieses Axiom zum Zermelo-Fraenkelschen Axiomensystem hinzufügt, so können einige Axiome, einschließlich der Axiome des Unendlichen und der Auswahl, fortgelassen werden, und im so erweiterten System wird die Existenz von unerreichbaren KZen. beweisbar. Zum Schluß behauptet Verf. ohne Beweis, daß die von Gödel

angegebenen, innerhalb des Zermelo-Fraenkelschen Systems unentscheidbaren Sätze entscheidbar werden, falls man das neue Axiom einschaltet. *H. B. Curry.*

Piccard, Sophie: Sur un problème de la théorie des relations. Mathematica, Cluj **13**, 55—58 (1937).

The paper relates to the following problem of Sierpiński: P. If E is a non-denumerable set, and R a binary relation for the elements of E such that for every fixed element x of E there are at most a finite number of elements of E satisfying $x\,R\,y$, does there always exist a subset E_1 of E of the same cardinal as E such that for no pair of distinct elements x and y of E_1 is $x\,R\,y$ valid? Sierpiński proved (Compositio math. **3**, 304) that the answer is affirmative if $\overline{\overline{E}} = 2^a$, where a is any infinite cardinal, or if $\overline{\overline{E}} = \aleph_{\alpha+1}$, where α is any ordinal (finite or transfinite). The purpose of the present note is to prove these results of Sierpiński by an entirely different argument, in the course of which the following lemma and theorem are proved. Lemma. If m is a cardinal $>\aleph_0$ which is not the sum of less than m cardinals each less than m, and R a binary relation for the elements of a set E of cardinal m such that for every fixed element x of E there are at most a finite number of elements of E satisfying $x\,R\,y$, then there exists a subset H of E of cardinal m such that for every element y of H the set of elements x of H for which $x\,R\,y$ is of cardinal $<m$. Theorem. The answer to P is affirmative for every set E of cardinal m, if $m>\aleph_0$ and not the sum of less than m cardinals each less than m. The results of Sierpiński are immediate consequences of this theorem. *Blumberg* (Columbus).

Sierpiński, W.: Sur une propriété additive d'ensembles. C. R. Soc. Sci. Varsovie **30**, 257—259 (1937).

λ bezeichnet nach Kuratowski (Topologie I, Monogr. Matem., S. 269, Warszawa 1933) die Eigenschaft einer Punktmenge M, daß die höchstens abzählbaren Teilmengen von M lauter G_δ-Mengen (in bezug auf M) sind. Ungelöst bleibt die Frage nach der abzählbaren Additivität der Eigenschaft λ. Verf. zeigt nun, daß hierfür bereits die endliche Additivität ausreicht, und zwar durch Einführung einer (vermutlich stärkeren) Hilfseigenschaft λ' in bezug auf den euklidischen n-dimensionalen, M enthaltenden Raum R^n, die darin besteht, daß für jede abzählbare, in R^n liegende Punktmenge A die Vereinigungsmenge $M+A$ die Eigenschaft λ aufweist (gleichwertig damit ist die Existenz in R^n einer G_δ-Menge G derart, daß $MG \subset A \subset G$). Es wird bewiesen, daß die Eigenschaft λ' erblich ist (d. h. wenn für M, so auch für sämtliche Teilmengen von M besteht), ferner daß wenn sie in bezug auf R^n, so auch in bezug auf R^{n+1} gilt, und schließlich daß sie abzählbar additiv ist, woraus sich die Implikation zwischen endlicher und abzählbarer Additivität von λ ergibt. Außerdem bemerkt Verf., daß unter Zugrundelegung der Kontinuumhypothese jede Teilmenge von R^1 eineindeutiges und stetiges Bild einer Menge von der Eigenschaft λ' in bezug auf R^2 ist. Unbekannt bleibt dagegen, ob λ' eine Homöomorphieinvariante ist (was für λ zutrifft). *Knaster.*

Sierpiński, Wacław: Sur l'équivalence des problèmes de M. Kolmogoroff et M. Mazurkiewicz. Fundam. Math. **30**, 65—67 (1938).

Proof of the equivalence of the following two problems M) and K), which are respective, special cases of unsolved problems of Mazurkiewicz and Kolmogoroff: M) Does a set of real numbers exist on which there exists a Baire function of class 3 but none of class 4. K) Does there exist a denumerable system Φ of sets, containing the sum and difference of every pair of its elements, such that $\Phi_{\sigma\delta\sigma} \neq \Phi_{\sigma\delta\sigma\delta} = \Phi_{\sigma\delta\sigma\delta\sigma}$? *Blumberg* (Columbus).

Sierpiński, Wacław: Sur une fonction semi-continue. Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math. **24**, 211—213 (1938).

Proof, without resort to the continuum hypothesis, of the existence of on upper-semi-continuous, real function $f(x)$ such that no decomposition of the continuum into $\aleph_0$ sets is possible on each of which f is continuous. On the basis of the continuum

hypothesis, this result, according to a remark of Braun, is readily obtainable from a former result of the author. For the definition of f, a construction of N. Lusin is utilized. *Blumberg* (Columbus).

Malchair, Henri: Sur les superpositions de fonctions. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, IV. s. **2**, 139—157 (1937).

Die Arbeit bringt eine Reihe von Ergänzungen zu der Arbeit vom Ref. und V. Knichal (dies. Zbl. **13**, 152) über die Superposition nichtabnehmender Funktionen. Z. B.: Es sei B die Menge aller für $0 \leqq x \leqq 1$ stetigen und wachsenden Funktionen $f(x)$ mit $0 \leqq f(x) \leqq 1$. Die Frage, ob sich alle Funktionen einer beliebig vorgegebenen unendlichen Folge $f_1(x), f_2(x), \ldots$ aus B durch Superpositionen von endlich vielen Funktionen aus B darstellen lassen, ist noch offen. Verf. zeigt, daß die Antwort bejahend ist, wenn entweder $\frac{1}{4} < f_n(x) < M\,(M < 1)$ oder $f_n(0) > f_{n+1}(1)$ ist. *Jarník.*

Torrance, E. M.: Superposition of functions on monotonic functions. Fundam. Math. **30**, 90—91 (1938).

If $g(x)$ is monotone, and $f(x)$ has the Baire property in the restricted sense, $f[g(x)]$ has the Baire property in the restricted sense. *Blumberg* (Columbus).

Kunugi, Kinjiro: Sur les fonctions jouissant de la propriété de Baire. Jap. J. Math. **13**, 431—433 (1937).

A metric space X will be said to have property (α) if for every family of sets E_ξ of X, where ξ ranges over all ordinals less than a given ordinal γ, such that E_ξ is of first category, no pair of E_ξ's have common points, and $\sum E_\xi$ is of second category, it is possible to separate this sum into 2 parts $\sum_{\xi'} E_{\xi'}$, $\sum_{\xi''} E_{\xi''}$ without common points such that both these parts are everywhere of second category in one and the some open set of X. With reference to property α), the following theorem is proved: If X is a metric space having property α), and $y = f(x)$ a function having the property of Baire defined on a set A of X such that the values of $f(x)$ belong to an arbitrarily given metric space, then $f(x)$ is continuous if sets of the first category are negligible. Additionally, the theorem is proved: If X is a metric space, and Y a metric space which is dense-in-itself, then the image of $y = f(x)$ is of first category in $X \times Y$ if $f(x)$ is continuous when sets of the first category are negligible; by image of $f(x)$ is here understood the set of points (x, y) in $X \times Y$ satisfying $y = f(x)$. *Blumberg.*

MacNeille, H. M.: Extensions of measure. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **24**, 188—193 (1938).

There are three standard ways of defining real numbers from the rationals: by cuts (Dedekind), by Cauchy sequences (Cantor-Meray), and by sequences of nested intervals. Now suppose the ring of rational numbers is replaced by the class of so-called elementary figures (finite sums of rectangles) in Cartesian n-space, boundaries being ignored — these form a "Boolean" ring in the sense of Stone. Suppose also we regard the area of an elementary figure as the analogue of absolute value. Then completion by Cauchy sequences gives abstractly the algebra of Borel sets modulo sets of measure zero, and Lebesgue measure; completion by nested sequences gives the algebra of Jordan measurable sets modulo sets of measure zero, and so-called content. MacNeille's construction is theoretically interesting, but it does not give as a corollary the correspondence between the ideal elements adjoined in the process of completion, and sets in n-space. *Garrett Birkhoff* (Cambridge, U. S. A.).

Jessen, Børge: Abstrakte Maß- und Integraltheorie. III. Mat. Tidsskr. B **1938**, 13—26 [Dänisch].

Fortsetzung der didaktischen Einführung in die Lebesguesche Theorie für abstrakte Mengen (vgl. dies. Zbl. **10**, 200 u. **12**, 252). Die vorliegende Mitteilung enthält die Aufspaltung additiver Mengenfunktionen in positive Bestandteile bzw. in den kontinuierlichen und den singulären Teil; den Begriff des unbestimmten Integrals sowie die Differentiation der Mengenfunktionen. *W. Feller* (Stockholm).