bis zur Ordnung $p - 1$ usw. Das Verfahren der immer engeren Einschränkung des Gerüstes $\mathfrak{f}$ und der Gruppe G kommt notwendig nach einer endlichen Anzahl von Schritten zum Stillstand. — Eine geringfügige Komplikation tritt ein, wenn die Mg. M_λ nicht in einer festen Parametrisierung gegeben sind. So stellt der Autor das Problem. Zu der Willkür in der Wahl des Gerüstes $\mathfrak{f}$ tritt dann die Willkür in der Wahl der Parameter t_α. C. macht die letzteren abhängig von $\mathfrak{f}$ in einer Weise, die, in den Beispielen einleuchtend, mir allgemein nicht völlig klar geworden ist; vielleicht wäre es doch ratsam, beide Einflüsse nicht von Anfang an miteinander zu verschmelzen. *H. Weyl* (Princeton, N. J., USA.).

Analysis.

● **Courant, R.: Differential and integral calculus. Vol. 1. New edit.** Glasgow: Blackie & Son 1937. XIV, 615 pag. 20/—.

Gołąb, St.: Sur une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une différentielle totale. Ann. Soc. Polon. math. **16**, 31—40 (1938).

Die folgende Bedingung ist hinreichend und notwendig für die Existenz der totalen Ableitung der Funktion $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ in $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)$: Für beliebige Funktionen $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ mit $\varphi_i(0) = \zeta_i$ und $\varphi_i'(0) = \lambda_i$ soll die zusammengesetzte Funktion $F(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots \varphi_n(t))$ in $t = 0$ differentiierbar sein und die Ableitung

$$F'(0) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i$$

haben. Hierbei hängen die Konstanten a_i nicht von den φ_i ab. (Sie sind natürlich die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f.) [Vgl. für eine andere Bedingung W. Wilkosz, Fundam. Math. **2**, 140—144 (1920).] *Rogosinski* (Cambridge).

Popoff, Kyrille: Sur une extension de la notion de dérivée. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1440—1442 (1938).

Verf. empfiehlt für gewisse Zwecke die folgende Definition der Ableitung einer Funktion $y = f(x)$. $D(u, \alpha) = |u \cos\alpha + (f(x + u) - f(x)) \sin\alpha|$ bezeichne den Abstand des Punktes $(x + u, f(x + u))$ von der Geraden der Richtung α durch den Punkt $(x, f(x))$. Für festes $u \neq 0$ hat dann $S = \int_0^u D^2(u)\, du$ zwei Extreme α_1 und α_2, $\operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2 = -1$. Schließlich lasse man u gegen 0 gehen. Wenn $f'(x)$ existiert, streben dann $\operatorname{tg}\alpha_1$ und $\operatorname{tg}\alpha_2$ bzw. zu $f'(x)$ und $-\frac{1}{f'(x)}$. Aber diese Grenzwerte können auch ohne die Existenz von $f'(x)$ vorhanden sein. Beispiel: $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ für $x \neq 0$, $f(0) = 0$. $f'(0)$ existiert nicht, aber die obigen Grenzwerte sind 0 und ∞. *Rogosinski* (Cambridge).

Gorny, Ayzyk: Sur les maxima des modules d'une fonction et de ses dérivées. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1245—1247 (1938).

L'A. démontre le théorème intéressant que voici: Si $f(x)$ est définie sur tout l'axe réel et si $|f(x)| \leqq M_0$, $|f^{(n)}(x)| < M_n$, on a, pour $0 < k < n$, $|f^{(k)}(x)| < c^k M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$, où c est une constante numérique. Cette inégalité lui permet de tirer plusieurs conclusions: 1° Il donne une condition nécessaire et suffisante pour que deux classes $C_{\{m_n\}}$ et $C_{\{m_n'\}}$ de fonctions définies sur tout l'axe soient équivalentes. 2° Il démontre que le produit de deux fonctions d'une telle classe appartient encore à la classe. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Veen, S. C. van: Über Grenzwerte von uneigentlichen Integralen, die einen Parameter enthalten. Mathematica, Zutphen B **5**, 130—146; **6**, 4—13, 69—80 (1937); 154—164, **7**, 10—16 (1938) [Holländisch].

Losada y Puga, Cristobál de: Über die Einhüllenden einer von einem Parameter abhängenden Familie ebener Kurven und über die singulären Lösungen von Differentialgleichungen 1. Ordnung. Rev. Ci. Lima **40**, Nr 423, 31—60 (1938) [Spanisch].

Verf. bemängelt die Behandlung des Enveloppenproblems $F(x, y, c) = 0$ in den Lehrbüchern, bes. wenn F nicht eindeutige Funktion von x, y ist, und zeigt an dem Beispiel der Parabelschar $y + c = c\,x \pm \sqrt{x}$, daß auch hier sehr wohl eine Enveloppe existieren kann, nämlich die Gerade $y = 0$, die die Gebiete, durch die 2 Kurven der Schar gehen, von denen trennt, durch die keine geht. Auf diese Weise werden noch weitere Beispiele behandelt, in denen c bis zum 3. Grade oder in einfacher Weise transzendent auftritt, und bes. auf die hierdurch gegebene Gebietseinteilung der Ebene eingegangen. Eine ähnliche Behandlungsweise für das damit eng zusammenhängende Problem der singulären Lösungen der Differentialgleichung $F(x, y, p) = 0$ wird zum Schluß kurz berührt. *Burau* (Hamburg).

Fabian, W.: Lebesgue complex integration. Philos. Mag., VII. s. **25**, 318—320 (1938).

Fabian, W.: Lebesgue complex integration and generalized differentiation. Philos. Mag., VII. s. **25**, 807—810 (1938).

We shall establish here further theorems on this subject (see this Zbl. **15**, 108, 206; **17**, 301). *Auszug.*

Montel, Paul: Sur une équation fonctionnelle. Mathematica, Cluj **13**, 5—15 (1937).

Sierpiński, W.: Remarque sur une équation fonctionnelle. (Solution d'un problème de Paul Montel.) Mathematica, Cluj **13**, 270—271 (1937).

Montel deals with the determination of a function $f(x)$ such that

$$f(x) = f\left(\frac{x}{m}\right) + f\left(\frac{x+1}{m}\right) + \cdots + f\left(\frac{x+m-1}{m}\right) \tag{*}$$

holds for $m = 1, 2, 3, \ldots$. The only integrable solution for which $f(x+1) - f(x)$ is continuous at $x = 0$, is of the form

$$A \log |2 \sin \pi x| + B[x] + C(x - 1/2),$$

where A, B, C are constants. He considers also the problem of determining $f(x)$ such that (*) holds only for a certain sequence of m-values. — Sierpiński gives simple examples for non integrable and for non L-measurable solutions of (*). In the latter case the axiom of choice is used. *G. Szegö* (St. Louis, Mo.).

Barna, Béla: Zur elementaren Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels. J. reine angew. Math. **178**, 129—134 (1938).

The author gives a slightly more elementary approach to the main theorem on the arithmetic-geometric mean than David did [J. reine angew. Math. **159** (1928)]. He avoids the use of Legendre's differential equation and the theory of ϑ-series. *G. Szegö* (St. Louis, Mo.).

Azevedo do Amaral, Ignacio M.: Sur une classe d'équations itératives. Ann. Acad. Brasil. Sci. **9**, 331—391 (1937).

The paper considers (a) the iteration of functions $X_1, X_2 = X_1(X_1)$ and so on, and (b) the iteration of operations on function: $A_1(y)$; $A_2(y) = A_1(A_1(y))$ and so on and their combination giving rise to (1) iterative equations $F(x, X_1 \ldots X_p) = 0$, (2) operational equations $F(x, y, A_1(y) \ldots A_n(y)) = 0$, and (3) iterative operational equations $F(x, X_1 \ldots X_p, A_1 X_1 \ldots A_1 X_p \ldots A_k X_1 \ldots A_k X_p) = 0$. The considerations are purely formal. If for every p, $X_p = \varphi_0(x, X_1 \ldots X_{p-r})$ then for every $p > r$, X_p is expressible in terms of $x, X_1, \ldots X_{r-1}$. The special case $X_{1p} = \sum_{i=1}^{n} Y_i X_{p-i}$ is considered more in detail. In the operational situation, two operations A_1, B_1 distributive relative to addition and subtraction, commutative relative to each other and B_1 such that $B_1(XY) = XB_1Y + YB_1X$ are postulated. Formulas relating to $A_1X_p = X_p - B_1X_{p-1}$ are considered especially with B_1 the derivative. Considerable space is devoted to the operational equation $A_n y = \sum_{i=1}^{n} X_i A_{n-i} y + X_{n+1}$, based on the idea that such an equation defines A_p in terms of $A_1 \ldots A_{n-1}$ and consequently leads to a formal system of equations involving $A_1 \ldots A_{n-1}$ only. Applied to differential equations this gives well known cases in which formal solutions are possible.

Hildebrandt (Ann Arbor).

Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

Delange, Hubert: Sur certaines catégories de séries de polynomes. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 641—642 (1938).

Let $\{P_n(z) = z^n + \cdots\}$ be a sequence of polynomials having their zeros in the interior of a curve C. The convergence domain of $\sum a_n P_n(z)$ is a curve Γ containing C which depends on the quantity $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. The set of all possible curves Γ (for all possible a_n) is a family of the form $F(x, y) = \text{const}$ if and only if $n^{-1} \log |P_n(z)|$ tends to a limit when z is in the exterior of C. The case in which all the zeros of $P_n(z)$ lie on a preassigned segment, is especially investigated. *G. Szegö* (St. Louis, Mo.).

Sidon, S.: Nachtrag zu meiner Arbeit „Über unvollständige Orthogonalsysteme", Compositio Mathematica 4 (1937), S. 373—379. Compositio Math. 5, 433—434 (1938).

Solution of a problem left open in the paper reviewed in this Zbl. **16**, 300.

A. Zygmund (Wilno).

Dieudonné, J.: Sur l'approximation en moyenne par les polynomes trigonométriques. J. Math. pures appl., IX. s. **17**, 203—211 (1938).

Soit μ une mesure de Radon définie pour une famille des sous ensembles d'ensemble E contenu dans l'espace numérique à n dimensions. Soit $L^p(E, \mu) (p > 1)$ l'espace de fonctions vérifiant la condition

$$\int_E |f|^p \, d\mu < \infty.$$

On appelle deux points congrus lorsqu'ils se déduisent l'un de l'autre par une translation dont les composants sont les entiers. L'auteur démontre le théorème suivant: pour que la famille des polynomes trigonométriques de la forme

$$\sum A \, e^{2\pi i (m_1 x_1, \, m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n)}$$

soit partout dense dans $L^p(E, \mu)$ il faut et il suffit que l'on ait

$$E = E_1 + E_2$$

où E_1 ne contienne aucun couple de points congrus et que $\mu E_2 = 0$. *Marcinkiewicz.*

Brun, Viggo: Eine aus der Simpsonschen Regel abgeleitete Summenformel. Norske Vid. Selsk., Forh. **11**, Nr 1, 1—3 (1938).

A slight modification of Simpson's rule furnishes

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \cong \tfrac{1}{2}\int_0^n f(x)\,dx + \tfrac{1}{2}\int_1^{n+1} f(x)\,dx + \tfrac{1}{6}\{f(1) - f(0) + f(n) - f(n+1)\}.$$

The question is raised to find bounds for the remainder. The error is calculated in certain numerical cases. *G. Szegö* (St. Louis, Mo.).

Leja, F.: Sur certaines propriétés de la formule d'interpolation de Lagrange. Ann. Soc. Polon. math. **16**, 112—125 (1938).

Soit $H(\lambda, x, \xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n) = \sum_{j=0}^{n} |L_n^{(j)}(x, \xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n) \, e^{n\lambda f(\xi_j)}|$ où $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$ désignent $n+1$ points différents d'un intervalle fixé (a, b), $L_n^{(j)}(x, \xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n)$ est un polynome d'ordre n égale à un pour $x = \xi_j$ et égale à zéro dans les autre point ξ_i,

λ est un nombre réel et $f(x)$ désigne une fonction continue. Posons

$$f_n(x, \lambda) = \frac{1}{n} \lg \min H(\lambda, x, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$$

où minimum est prise pour tous possibles points $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n \in (a, b)$. L'auteur démontre le suivant: I. La suite $f_n(x, \lambda)$ converge pour tout x et tout λ réel vers une fonction $\varphi(x, \lambda)$. $\varphi(x, 0)$ est égale à la fonction de Green du domaine infini extérieur au segment (a, b). II. $\varphi(x, \lambda) = O(\lambda)$ lorsque $\lambda \to 0$, $x \in (a, b)$. III. $\frac{1}{\lambda}\varphi(x, \lambda)$ tend vers une limite infinie lorsque x *non* $\varepsilon(a, b)$ et λ tend vers zéro par des valeurs d'un signe fixé. *Marcinkiewicz* (Wilno).

Spezielle Funktionen:

Lagrange, René: Sur une famille de polynômes et certains développements de la fonction $x^{-m} e^x$. Acta math. **69**, 1—19 (1938).

The following remarkable expansion into a factorial series is derived:

$$\Gamma(m+1)(xy)^{-m} e^{xy} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(xy)^\nu}{(m+1)(m+2)\ldots(m+\nu)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s!}{(y+1)(y+2)\ldots(y+s)} \frac{\sigma_s^m(x)}{x^m}.$$

The left side is closely related to the incomplete Euler function of the second kind. Here m is not a negative integer, $\Re x \geqq 0$, $\Re y > 0$, $|e^x - 1| > 1$. Moreover

$$\sigma_s^m(x) = \sigma_s^m(-\log t) = (-1)^{s+m} \frac{t^s}{s!}\left(\frac{d}{dt}\right)^s (\log t)^m.$$

G. Szegö (St. Louis, Mo.).

Szegö, Gábor: On the sum of ultraspherical polynomials. Mat. fiz. Lap. **45**, 36—38 (1938) [Ungarisch].

Fejér proved (see this Zbl. **3**, 352) the positivity of the sums

$$P_0^{(\lambda)}(x) + P_1^{(\lambda)}(x) + \cdots + P_n^{(\lambda)}(x),$$

provided $-1 < x < +1$ and $0 < \lambda < \frac{1}{2}$; here the ultraspherical polynomials $P_n^{(\lambda)}(x)$ are defined as the coefficients of the expansion of $(1 - 2xz + z^2)^{-\lambda}$. The present paper deals with the case $-1 < \lambda < 0$ with the result that the minimum of the sum in question in $-1 \leqq x \leqq +1$ is attained for $x = +1$; it is positive or negative, according to $-\frac{1}{2} < \lambda < 0$, or $-1 < \lambda < -\frac{1}{2}$. *Autoreferat.*

Gheorghiu, Gh. Th.: Sur les fonctions génératrices des polynomes de Laguerre généralisés. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest **8**, 176—178 (1937).

Let $\{L_n^{(\lambda)}(x)\}$ be Laguerre polynomials. For the general generating function

$$z(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n c_n L_n^{(\lambda)}(x)$$

where $\{c_n\}$ is an arbitrary sequence, a differential equation is derived, and the expansion in terms of x^n is discussed. The well-known generating functions as special cases are indicated. *G. Szegö* (St. Louis, Mo.).

Koschmieder, Lothar: Ein Ausdruck, der die Hermiteschen Polynome der Ebene und die zu ihnen biorthogonalen auf einmal erzeugt. Math. Z. **43**, 783—792 (1938).

The author investigated recently (Math. Z. **43**, 248; this Zbl. **17**, 350) certain series involving the Hermite polynomials $H_{mn}(x, y)$ in two dimensions and another system $G_{mn}(x, y)$ characterized by an orthogonality condition. In the present paper the series

$$\sum_{m, n = 0, 1, 2, \ldots} \frac{s^m}{m!} \frac{t^n}{n!} G_{mn}(x, y) H_{mn}(X, Y)$$

is calculated in terms of elementary functions; here s and t are real, and (s, t) is restricted to a domain containing the origine and bounded by four arcs of hyperbolas. Some integral formulas involving the polynomials $G_{mn}(x, y)$ and $H_{mn}(x, y)$ are also discussed. *G. Szegö* (St. Louis, Mo.).

Sharma, J. L.: An integral equation for Whittaker's confluent hypergeometric functions. J. London Math. Soc. **13**, 117—119 (1938).

Verf. leitet für die Funktion $z^{-1}W_{k,m}(z)$ die folgende Integralgleichung ab

$$z^{-1}W_{k,m}(z) = \frac{\Gamma(1-2k)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)\,\Gamma(\frac{1}{2}-m-k)}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(x+z)}\frac{(x+z)^{2k-1}}{(xz)^k}x^{-1}W_{k,m}(x)\,dx$$

$$(|\arg z| < \pi,\ \Re(\tfrac{1}{2}\pm m-k) > 0).$$

Dieses Resultat wird angewendet auf die parabolische Zylinderfunktion

$$D_n(z) = 2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}}z^{-\frac{1}{2}}W_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4},-\frac{1}{4}}(\tfrac{1}{2}z^2)$$

und auf die Batemansche Funktion

$$k_{2n}(z) = \frac{1}{\Gamma(1+n)}W_{n,\frac{1}{2}}(2z).$$

C. S. Meijer (Groningen).

Meijer, C. S.: Note über das Produkt $M_{k,m}(z)\,M_{-k,m}(z)$. Akad. Wetensch. Amsterd., Proc. **41**, 275—277 (1938).

Durch gliedweise Integration wird gezeigt

$$\frac{z\Gamma^2(1+2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m+k)\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}I_{2m}(z\operatorname{sech}t)e^{2kt}\operatorname{sech}t\,dt =$$

$$= z^{1+2m}{}_2F_3\left[\begin{matrix} & \frac{1}{2}+m+k, & \frac{1}{2}+m-k, \\ 1+2m, & \frac{1}{2}+m, & 1+m, \end{matrix}\ \tfrac{1}{4}z^2\right] = M_{k,m}(z)\,M_{-k,m}(z)$$

$$\Re(\tfrac{1}{2}+m\pm k) > 0.$$

Speziallfall: $k=0$

$$I_\nu^2(z) = \frac{1}{2^{1+4\nu}z\Gamma^2(1+\nu)}M_{0,\nu}^2(2z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}I_{2\nu}(2z\operatorname{sech}t)\operatorname{sech}t\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}I_{2\nu}(2z\cos\varphi)\,d\varphi.$$

$$\Re(\nu) > -\tfrac{1}{2}$$

[C. Neumann, Besselsche Funktionen S. 70 (1867)]. Weiter wird gezeigt:

$$\left\{D_n\left(ze^{\frac{\pi i}{2}}\right)+D_n\left(ze^{-\frac{\pi i}{2}}\right)\right\}\left\{D_{-n-1}\left(ze^{\frac{\pi i}{2}}\right)+D_{-n-1}\left(ze^{-\frac{\pi i}{2}}\right)\right\} =$$

$$= \frac{4\pi z^{-1}}{\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}M_{\frac{n}{2}+\frac{1}{4},-\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{2}\right)\cdot M_{-\frac{n}{2}-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{2}\right) =$$

$$= -\frac{2\sin n\pi}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cosh\left(\frac{z^2}{2}\operatorname{sech}t\right)e^{(n+\frac{1}{2})t}\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}t\,dt.$$

$$-1 < \Re(n) < 0$$

$$\left\{D_n\left(ze^{\frac{\pi i}{2}}\right)-D_n\left(ze^{-\frac{\pi i}{2}}\right)\right\}\left\{D_{-n-1}\left(ze^{\frac{\pi i}{2}}\right)-D_{-n-1}\left(ze^{-\frac{\pi i}{2}}\right)\right\} =$$

$$= -\frac{16\pi z^{-1}}{\Gamma\left(-\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)}\cdot M_{\frac{n}{2}+\frac{1}{4},\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{2}\right)\cdot M_{-\frac{n}{2}-\frac{1}{4},\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{2\sin n\pi}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sinh\left(\frac{z^2}{2}\operatorname{sech}t\right)e^{(n+\frac{1}{2})t}\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}t\,dt.$$

$$-2 < \Re(n) < 1.$$

S. C. van Veen (Dordrecht, Holl.).

Erdélyi, A.: The Hankel transform of a product of Whittaker's functions. J. London Math. Soc. **13**, 146—154 (1938).

It is proved that

$$e^{-x}x^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}L_n^{(\alpha)}(x)L_n^{(\beta)}(x) = \int\limits_0^\infty J_{\alpha+\beta}\{2\sqrt{xy}\}e^{-y}y^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}L_n^{(\alpha)}(y)L_n^{(\beta)}(y)\,dy$$

where $R(\alpha+\beta) > -1$. When $\beta=\alpha$, this reduces to a result given previously by

Watson (this Zbl. **15**, 161). The corresponding result for the product of two Laguerre polynomials of different degrees is also given. Further results of a similar nature are given, in which the integrand involves a product of Whittaker functions instead of a product of Laguerre polynomials. For example, it is shown that

$$\int_0^\infty J_{4c}\{2\sqrt{xy}\}\frac{W_{a+b,\,c+d}(y)\,M_{a-b,\,c-d}(y)}{y\Gamma(1+2c-2d)}\,dy = \frac{W_{a+d,\,c+b}(x)\,M_{a-d,\,c-b}(x)}{x\Gamma(1+2c-2b)}$$

where $R(b) < \frac{1}{8}$, $R(c) > -\frac{1}{4}$, $R(c-d) > -\frac{1}{2}$, and several particular cases are given. Further particular cases are noted in which the Whittaker functions are expressible in terms of parabolic cylinder functions or Bessel functions. *W. N. Bailey.*

Bailey, W. N.: Self-reciprocal functions involving confluent hypergeometric functions. J. London Math. Soc. **13**, 111—112 (1938).

Die Funktionen

$$x^{\nu+\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}x^2}D_{-2\nu-3}(x) \quad (\Re(\nu) > -1) \qquad \text{und} \qquad x^{\nu-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}x^2}D_{-2\nu}(x) \quad (\Re(\nu) > -\tfrac{1}{2})$$

sind nach Varma (dies. Zbl. **15**, 162) selbstreziprok für die Hankelsche Transformation der Ordnung ν [$D_n(z)$ bezeichnet die parabolische Zylinderfunktion]. Für ganze positive Werte von n ist die Funktion $x^{n-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4}x^2}D_{2n}(x)$ nach Mitra (dies. Zbl. **17**, 256) selbstreziprok oder schiefreziprok für die Hankelsche Transformation der Ordnung $n-1$, je nachdem n gerade oder ungerade ist; ferner $x^{n-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4}x^2}D_{2n-1}(x)$ selbstreziprok oder schiefreziprok für die Transformation der Ordnung n, je nachdem n ungerade oder gerade ist. — Verf. hat früher [J. London Math. Soc. **5**, 258—265 (1930)] bewiesen, daß

$$x^{-2m+\nu-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}x^2}W_{3m-\nu-\frac{1}{2},\,m}(\tfrac{1}{2}x^2) \tag{1}$$

($W_{k,m}(z)$ ist die Whittakersche Funktion) und

$$x^{\nu+\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4}x^2}{}_1F_1(-n;\ 1+\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}n;\ \tfrac{1}{2}x^2) \tag{2}$$

unter gewissen Voraussetzungen selbstreziproke oder schiefreziproke Funktionen sind. Er zeigt jetzt, daß die Varmaschen Funktionen Spezialfälle von (1), die Mitraschen hingegen Spezialfälle von (2) sind. *C. S. Meijer* (Groningen).

Rice, S. O.: Van Uven's theorem in probability theory and a self-reciprocal Hankel transform. Quart. J. Math., Oxford Ser. **9**, 1—4 (1938).

The author gives a slightly modified form of a theorem of van Uven on probabilities [Proc. Wetensch. Amsterdam **16**, 1124 (1914)]. Moreover he obtains the following formula suggested by dealing with the theorem mentioned:

$$\int_0^\infty J_{2\nu}(a\,t)\,e^{-bt^2}I_\nu(c\,t^2)\,t\,dt = a^{-1}f^{1/2}\,e^{-bf}\,I_\nu(c\,f).$$

Here $f = a^2/4(b^2-c^2)$, $R(b) > 0$, $R(b) > R(c)$, $R(\nu) > -1/2$. *G. Szegö.*

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Charpentier, Marie: Sur les points de Peano de certains systèmes d'équations différentielles. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1347—1349 (1938).

Wird über die rechten Seiten des Differentialgleichungssystems

$$y'(x) = f(x, y, z), \qquad z'(x) = g(x, y, z)$$

nur vorausgesetzt, daß sie stetig sind, so kann durch einen gegebenen Punkt P bekanntlich mehr als eine Integralkurve gehen. P bleibt weiterhin fest. Es sei H die Menge der durch P gehenden Integralkurven, T_ξ der Durchschnitt von H mit einer Ebene $x = \xi$, F_ξ der Rand von T_ξ. Nach H. Kneser ist jedes T_x ein Kontinuum. Verf. kündigt u. a. folgende weiteren Eigenschaften an: T_x hängt stetig von x ab. F_x ist nach rechts stetig; nach links halbstetig nach unten; sowie stetig überhaupt, abgesehen von höchstens abzählbar vielen Punkten x. Weiter wird eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß eine Integralkurve, von der ein Stück dem Rand von H angehört, sich nicht durch eine Randkurve fortsetzen läßt, und es werden Eigenschaften der Löcher, d. h. der von Integralkurven freien Gebiete angegeben. *Kamke.*

Hadamard, J.: Remarque sur l'intégration approchée des équations différentielles. Ann. Soc. Polon. math. **16**, 126 (1938).

Verf. bemerkt, daß das erste Ergebnis von Zaremba (Bull. Acad. Polon., s. A **1936**, 528ff.; dies. Zbl. **16**, 254) über den Begriff „intégrale approchée à ε près de l'équation $y' = f(x, y)$" von van der Lijn sich auch aus einem Satz von Lusin herleiten läßt. *Kamke* (Tübingen).

Ważewski, T.: Sur l'appréciation des intégrales des systèmes d'équations différentielles ordinaires et de leur domaine d'existence dans le cas des variables complexes. Ann. Soc. Polon. math. **16**, 97—111 (1938).

Mit σ_ν, ω_ν bezeichnet Verf. Funktionen folgender Art: $\sigma_\nu(t, u_1, \ldots, u_n)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ sind stetig und $\geqq 0$ in dem Bereich

$$0 \leqq t < s, \quad u_\mu \geqq 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n);$$

jedes σ_ν ist eine monoton wachsende Funktion in bezug auf jede der Variablen $u_\mu \neq u_\nu$;

$$u_\nu = \omega_\nu(t, k_1, \ldots, k_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ist das Maximalintegral des Systems

$$u'_\nu(t) = \sigma_\nu(t, u_1, \ldots, u_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

mit den Anfangswerten $u_\nu = k_\nu$ an der Stelle $t = 0$, und dieses Integral soll für $0 \leqq t < s$ existieren. — Es seien nun die Funktionen $f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)$ der komplexen Variablen $x, y_1, \ldots, y_n$ regulär in dem Gebiet

$$|x - x^0| < a, \quad |y_\nu - y_\nu^0| < b \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

und für Funktionen σ_ν der obigen Art sei

$$f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \leqq \sigma_\nu(|x - x^0|, |y_1 - y_1^0|, \ldots, |y_n - y_n^0|).$$

Ist

$$y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x) \qquad (1)$$

eine Lösung des Systems

$$y'_\nu(x) = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

und ist für gewisse Konstante $k_1, \ldots, k_n$

$$|\varphi_\nu(x^0) - y_\nu^0| \leqq k_\nu < b_\nu,$$

so existiert die Lösung (1) und ist regulär in dem Kreis

$$|x - x^0| < \mathrm{Min}(a, s, t_1, \ldots, t_n),$$

wo s die am Anfang eingeführte Zahl und t_ν die kleinste positive Lösung der Gleichung

$$\omega_\nu(t, k_1, \ldots, k_n) = b_\nu$$

ist ($t_\nu = +\infty$, wenn es keine positive Lösung gibt). Weiter wird eine Abschätzung für φ_ν und für die Differenz der Lösungen von benachbarten Differentialgleichungen hergeleitet. *Kamke* (Tübingen).

Ważewski, T.: Sur les intégrales premières des équations différentielles ordinaires. Ann. Soc. Polon. math. **16**, 145—161 (1938).

In der offenen Menge Ω des $x_1, \ldots, x_n$-Raumes seien die $A_\nu(x_1, \ldots, x_n)$ mit stetigem partiellen Ableitungen erster Ordnung versehen. Für die partielle Differentialgleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \frac{\partial z}{\partial x_\nu} = 0 \qquad (1)$$

ist z. Z. die folgende Frage noch offen: Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Gleichung (1) bei einem einfach zusammenhängenden Ω in jeder offenen Teilmenge ω ein Hauptsystem von Integralen besitzt? Verf. berichtet über das, was man über diese Frage bisher weiß, fügt ein weiteres Beispiel zur Orientierung hinzu und leitet einige notwendige Bedingungen her. Er vermutet bei beschränktem Ω als notwendige und hinreichende Bedingung, daß für jede total in Ω enthaltene offene Menge ω jede Halbcharakteristik (relativ zu ω) an den Rand von ω herankommen muß. *Kamke* (Tübingen).

Pitcher, Everett, and W. E. Sewell: Existence theorems for solutions of differential equations of non-integral order. Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 100—107 (1938).

An existence theorem for the "differential equation" $D_x^\alpha y = \Phi(x, y)$ is obtained where D_x^α stands for the Riemann-Liouville generalized derivative of order α; the function Φ is bounded in a region R and as a function of y, it satisfies a Lipschitz condition of order α. Moreover $0 < \alpha < 1$. There is a unique solution $y = y(x)$ satisfying the condition $y(a) = b$ where (a, b) is given in R and x is restricted to a neighborhood of $x = a$. This theorem in the "small" is completed by a theorem in the "large" in the usual way. The case $\alpha > 1$ is also considered. *G. Szegö.*

Fischer, Helmut Joachim: Der Verlauf von Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines vorgegebenen Punktes. Gestaltliche Verhältnisse der Krümmungslinien in der Nachbarschaft eines Kreispunktes. Deutsche Math. **3**, 152—188 (1938).

Im ersten Teil entwickelt Verf. eine Methode zur Untersuchung des Verlaufs der Kurven $r = r(t)$, $v = v(t)$, die der Differentialgleichung

$$A r'^2 + B r r' v' + C r^2 v'^2 = 0$$

genügen. Dabei sind A, B, C gegebene stetige Funktionen von r und v für $0 \leqq r < R$, $-\infty < v < +\infty$, die in bezug auf v periodisch mit einer Periode 2π sind und für die

$$A(0, v) = -C(0, v), \quad B^2 - 4AC \geqq S > 0$$

gilt; $A(0, v)$ soll ferner eine Lipschitzbedingung erfüllen. r, v werden als Polarkoordinaten in einer r,v-Ebene gedeutet, und es handelt sich um den Verlauf der Integralkurven in der Nähe des Nullpunkts. Die Methode des Verf. beruht darauf, daß die obige Differentialgleichung durch die Näherungsgleichung

$$A_0 r'^2 + B_0 r r' v' + C_0 r^2 v'^2 = 0$$

ersetzt wird, in der $A_0 = A(0, v)$, $B_0 = B(0, v)$, $C_0 = C(0, v)$ und daher $A_0 = -C_0$ ist. Die Integralkurven dieser Differentialgleichung bilden ein Netz von Orthogonalkurven. Einige der für den zweiten Teil wichtigen Fälle werden erörtert. Im zweiten Teil werden diese Untersuchungen benutzt, um Aussagen über den Verlauf zu erhalten, den die Krümmungslinien einer Fläche in der Umgebung eines Kreispunktes haben können. Von den Ergebnissen sei erwähnt, daß die Krümmungslinien sich spiralig um den Kreispunkt herumwinden können, z. B. bei der in Zylinderkoordinaten gegebenen Fläche

$$z = r^4(24 + 8\cos 2v + 6\sin 4v).$$

Die Darstellung wirkt mehrfach etwas unbeholfen, z. B. etwa dort, wo die Differentialgleichung zweiten Grades in solche ersten Grades aufgespalten wird. *Kamke.*

● **Gentile, Giovanni: Sulla stabilità degli integrali delle equazioni differenziali.** Roma: R. Pioda 1937. 72 pag.

● **Fayet, Joseph: Invariants de quelques équations différentielles et réduction de celles-ci à des équations à coefficients constants.** Paris: Gauthier-Villars 1937. 34 pag. Frcs. 25.—.

Lee, Hwa-Chung: Sur les transformations des congruences hamiltoniennes. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1431—1433 (1938).

Soit $H(x^\alpha, t)$ une fonction arbitraire des variables x^α, t et désignons par $\varepsilon^{\alpha,\beta}$, $\varepsilon_{\alpha,\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, 2n)$ les éléments des deux matrices suivantes

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right)$$

0, 1 étant respectivement la matrice nulle et la matrice unité d'ordre n. La congruence d'Hamilton correspondante est alors définie par l'équation (1) $dx^\alpha/dt = \varepsilon^{\alpha\beta}\,\partial H/\partial x^\beta$. Si une transformation non singulière $x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\alpha, t)$ laisse la forme de l'équation (1) invariante, on a $\varepsilon_{\alpha'\beta'}\,\partial x^{\alpha'}/\partial x^\alpha \cdot \partial x^{\beta'}/\partial x^\beta = C\varepsilon_{\alpha\beta}$, C étant une constante arbitraire;

la quantité $\varepsilon_{\alpha\beta}$ (et aussi $\varepsilon^{\alpha\beta}$) se comporte, par conséquent, à un facteur constant arbitraire près, comme un tenseur. *O. Borůvka* (Brno).

Piaggio, H. T. H.: Sub-groups of integrals of linear differential equations. Tôhoku Math. J. **44**, 170—174 (1937).

General proof of a theorem given by Forsyth in his Theory of Differential Equations, v. 4, p. 66—72 (edition of 1902) for the case $n = 4$. *Janczewski.*

Gröbner, Wolfgang: Über das Macaulaysche inverse System und dessen Bedeutung für die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Abh. math. Semin. Hansische Univ. **12**, 127—132 (1938).

The author points out the connection between Macaulay's inverse system [Modern algebra and polynomial ideals (see this Zbl. 8, 291)] and the integral system of linear homogeneous differential equations with constant coefficients. *Raudenbush.*

Ritt, J. F.: On certain points in the theory of algebraic differential equations. Amer. J. Math. **60**, 1—43 (1938).

Particular applications and extensions of the theory of algebraic differential equations due to the author are given in this paper: 1. Every essential irreducible manifold of a single non-zero form in n unknows has $n - 1$ arbitrary unknowns (and not fewer as might be conjectured possible). 2. Let A and B be non-zero forms in $y_1, \ldots, y_n$ such that A has every solution of (i. e., holds) B. Then the form A_1 consisting of the sum of terms of A of lowest degree (considering A as a polynomial in the y_i and their derivatives) holds the form B_1 similarly obtained from B. A similar result holds for the terms of highest degree. 3. An essential manifold consisting of the single solution $y_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, exists for the system of n forms $y_i^{p_i} + F_i$, $i = 1, \ldots, n$, provided the F_i either are identically zero or consist of terms each of which is of higher total degree than p_i in the unknowns and their derivatives. 4. A stronger approximation theorem is given in which the roots of any preassigned positive integral index of the first $m + 1$ coefficients are less than a preassigned quantity. An application of this theorem is given. 5. After a general result on forms in several unknowns, a complete theory is given for single equations of first order in two unknowns. *Raudenbush.*

McEwen, W. H.: A note on an extension of Bernstein's theorem. Amer. J. Math. **60**, 309—319 (1938).

Compléments au mémoire cité ce Zbl. **16**, 255. Conditions supplémentaires pour que les résultats précédents soient valables dans tout l'intervalle (a, b). *Janczewski.*

Camp, Chester C.: On multiparameter expansions associated with a differential system and auxiliary conditions at several points in each variable. Amer. J. Math. **60**, 447—452 (1938).

Es handelt sich um Entwicklungen von Funktionen $f(x_1, \ldots, x_p)$ in Reihen, die nach Residuen von Greenschen Funktionen fortschreiten (oder um Darstellungen durch mehrfache Integrale über solche Residuen). Die Greenschen Funktionen sind dabei solche, die zu einem linearen Differentialgleichungssystem

$$X_j' + \left[\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{ji}(x_j)\right] X_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, p)$$

und Nebenbedingungen

$$X_j(a_j) + c_{j2} X_j(a_{2j}) + \cdots + c_{jk_j} X_j(b_j) = 0$$

$(j = 1, \ldots, p)$ gehören. Da die vorkommenden Bezeichnungen nicht genügend erklärt sind und vieles nur skizziert ist, ist für den Ref. manches dunkel geblieben. *Kamke.*

Erdélyi, Artur: Bemerkungen zur Integration der Mathieuschen Differentialgleichung durch Laplacesche Integrale. Compositio Math. **5**, 435—441 (1938).

Die Mathieusche Differentialgleichung wird durch Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen, welche eine Exponentialfunktion der ursprünglichen unabhängigen Veränderlichen ist, auf eine algebraische Form gebracht, wobei die Stellen 0 und ∞ Stellen der Unbestimmtheit vom Range 1 sind. Für die Lösung dieser Differentialgleichung wird nach Horn ein unendlicher Integralausdruck angesetzt, dessen

Integrand das Produkt einer Funktion V und einer Exponentialfunktion ist. Für die Funktion V gilt eine Volterrasche Integralgleichung. Die Lösung dieser Volterraschen Integralgleichung wird in der Umgebung der singulären Stelle in einer Potenzreihe entwickelt. Für die Koeffizienten dieser Potenzreihe wird eine Rekursionsformel angegeben. Der unendliche Integralausdruck wird für verschiedene Integrationswege in der komplexen Ebene diskutiert, wobei Integrale der Mathieuschen Differentialgleichung mit verschiedenen Eigenschaften entstehen. Insbesondere geht Verf. auf die Lösungen dritter Art dieser Gleichungen, welche ein Analogon zu den Hankelschen Funktionen bilden, ein. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Novikoff, P.: Sur le problème inverse du potentiel. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **18**, 165—168 (1938).

Das Umkehrproblem der Potentialtheorie läßt im allgemeinen keine eindeutige Lösung zu. In einem Theorem werden infolgedessen einige hinreichende Bedingungen zur eindeutigen Lösung des Problems zusammengefaßt. Ein ähnliches Theorem gilt für das ebene Problem, also das logarithmische Potential, wofür der Nachweis bei Voraussetzung einer homogenen Massenverteilung besonders einfach ist. *Hopfner.*

Nicolesco, Miron: Fonctions harmoniques bornées dans un demi-plan ou dans un angle. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **39**, 19—42 (1937).

Mit Hilfe eines Spiegelungsverfahrens konstruiert Verf. die (eindeutig bestimmte) harmonische Funktion, die im Innern eines mit π kommensurablen Winkelraumes beschränkt ist und auf den Schenkeln mit Ausnahme evtl. des Scheitelpunktes vorgegebene stetige Randwerte annimmt. — Unter dem Mittelwert von $f(x)$ auf der positiven Achse werde der (von x_0 unabhängige) Grenzwert von $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx/(X-x_0)$ für $X\to\infty$ verstanden, sofern er existiert. Es sei dann $u(x, y)$ entweder in $y>0$ oder in $x>0$, $y>0$ beschränkt und harmonisch und habe stetige Randwerte derart, daß die Mittelwerte über den begrenzenden Halbachsen existieren. Ist dann g eine im Definitionsbereich liegende Halbgerade, die mit der positiven x-Achse den Winkel φ bildet, so folgt aus der Lösungsformel unschwer, daß auch der Mittelwert von u über g existiert und eine lineare Funktion von φ ist (welche somit durch die Randwerte bestimmt wird). Im Falle der Halbebene existiert somit insbesondere der (übliche) Mittelwert über jede Parallele zur x-Achse und ist konstant. *W. Feller.*

Lowan, A. N.: On the operational determination of two dimensional Green's functions in the theory of heat conduction. Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 125—133 (1938).

To determine the Green's function for an infinite cylinder the author starts with the Fourier series for the Laplace transform of the solution for a line source. The coefficient is an integral of Hankel's type which is evaluated by a consideration of the integral from $-\infty$ to $+\infty$ of ada $J_n(ar)H_n^1(ar_0)/(a^2-q^2)$ and of a contour integral with the same integrand. — A supplementary solution is then found and the final expression for the Green's function takes the form of a Fourier series whose n-th coefficient is a series of Bessel functions summed over the roots of $qJ_n'(aq)+hJ_n(aq)=0$. — The case of a solid bounded internally by a cylinder is next considered and the solution is obtained in the form of a Fourier series in which the n-th coefficient is an integral involving the function $U_n(a\alpha)$ which is the value when $z=a\alpha$ of $\alpha(d/dz)H_n^1(z)+hJ_n(z)$. It is proved that there are no zeros of $U_n(a\alpha)$ in the interior of the contour C used in both parts of this paper. *H. Bateman* (Pasadena).

Pipes, Louis A.: Matrix-operational methods in mechanical vibrations. J. Franklin Inst. **225**, 343—349 (1938).

This paper explains in detail the application of the Laplace transformation to the problem of solving a system of ordinary, linear differential equations with constant coefficients. A numerical illustrative example is given. *Murnaghan* (Baltimore).

Sommerfeld, A., und H. Welker: Künstliche Grenzbedingungen beim Keplerproblem. Ann. Physik, V. F. **32**, 56—65 (1938).

Statt mit den natürlichen Randbedingungen von Schrödinger wird der Grundzustand des Wasserstoffatoms mit der künstlichen Randbedingung $\psi = 0$ für $r = r_0$ behandelt, die man sich durch einen an der Stelle $r = r_0$ gelegenen, unendlich hohen und unendlich steilen Potentialwall erzwungen denken kann. Die Eigenfunktion wird durch eine konfluente, nicht abbrechende hypergeometrische Reihe gegeben, die Energie wird als Funktion von r_0 dargestellt. Das Elektron ist an den Kern gebunden ($W < 0$) für $r_0 > 1{,}835\, a$ (a = Wasserstoffradius); für $r_0 < 1{,}835\, a$ ist die Kernbindung durch die Wirkung des Potentialwalles aufgehoben ($W > 0$). Für die Umgebung der Stelle $W = 0$ werden Eigenfunktion und Eigenwert durch Besselsche Funktionen approximiert. *Autoreferat.*

Halpern, O., R. Lueneburg and O. Clark: On multiple scattering of neutrons. I. Theory of the albedo of a plane boundary. Phys. Rev., II. s. **53**, 173—183 (1938).

Die Arbeit enthält eine strenge Lösung des folgenden Problems: Auf die plane Oberfläche eines plattenförmigen Körpers (Paraffin) fallen Neutronen mit einheitlicher Geschwindigkeit v_0 aber beliebiger Richtungsverteilung, die im Körper mit den Wahrscheinlichkeiten Γ und Ω gestreut bzw. absorbiert werden. Die Streuung wird dabei als elastisch und im festen Koordinatensystem als kugelsymmetrisch vorausgesetzt (gebundene Protonen). Berechnet soll werden erstens die Richtungsverteilung der Rückkehrneutronen und zweitens das Verhältnis zwischen ihrer Anzahl und der Anzahl einfallender Neutronen (Albedo). Beides hängt bei unendlicher Schichtdicke nur von der Richtungsverteilung der einfallenden Neutronen und dem Verhältnis $N = \Gamma/\Omega$ zwischen den Wirkungsquerschnitten für Streuung und Absorption ab. — Im Abstand x von der Oberfläche sei die Dichte der Neutronen, die senkrecht zur Oberfläche die Geschwindigkeitskomponente $v_0 z$, $-1 < z < 1$, haben, mit $w(x, z)$ bezeichnet. In einem stationären Zustand läßt sich die Änderung dieser Größe mit x und z durch die Integro-Differentialgleichung

$$v_0 z \frac{\partial w}{\partial x} + (\Gamma + \Omega) w = \frac{1}{2} \Gamma \int_{-1}^{+1} w(x, z)\, dz$$

definieren. Vorgegeben ist nun $w(0, z)$, $z > 0$, und zu bestimmen $u(z) = w(0, z)$, $z < 0$. Bei unendlicher Schichtdicke läßt sich für $u(z)$ folgende Integralgleichung ableiten:

$$u(z)\left[1 + \sigma z \int_{-1}^{1} \frac{d\zeta}{\zeta - z}\right] - \sigma \int_{-1}^{0} \frac{\zeta\, u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sigma \int_{0}^{1} \frac{\zeta w(0, \zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

wobei $2\sigma = N/(N+1)$. Mit Ausnahme der speziellen Lösung $u(z) = 1/(a - z)$, $z < 0$, für $w(0, z) = 1/(a - z)$, $z > 0$, wenn $\sigma a \log \frac{a+1}{a-1} = 1$, gibt es keine elementare Lösungen. Für $w(0, z) = \delta(z - z_0)$ wird die exakte $u(z) = \sigma z_0 e^{z_0 \varphi(z_0) - z\varphi(z)}/(z_0 - z)$ abgeleitet, wobei

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \log\left(1 - 2\sigma t \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{t}\right) \frac{dt}{z^2 + t^2}.$$

— Das Albedo ist bei dieser einheitlichen Einfallsrichtung z_0 der Neutronen durch $\beta = -\int_{-1}^{0} z u(z)\, dz = z_0 (1 - N^{-\frac{1}{2}} e^{z_0 \varphi(z_0)})$ gegeben. Bei senkrechter Einfallsrichtung, $z_0 = 1$, ergibt sich für β ein Minimum $\beta = 1 - 2{,}91 N^{-\frac{1}{2}}$, bei gleichmäßiger Richtungsverteilung dagegen nach Mittelwertbildung $\beta = 1 - 2{,}31\, N^{-\frac{1}{2}}$, und endlich beim Kosinusgesetz $\beta = 1 - 2{,}48\, N^{-\frac{1}{2}}$. Diese Werte sind mit dem von Fermi [Amaldi und Fermi, Physic. Rev. **50**, 899 (1936)] auf anderem Wege abgeleiteten Wert $\beta = 1 - 2 N^{-\frac{1}{2}}$ zu vergleichen. Die Heranziehung des von Amaldi und Fermi (ibid.) experimentell gemessenen Albedowertes $\beta = 0{,}82$ bei unbekannter Richtungsverteilung der einfallenden Neutronen liefert, wenn man die drei obigen Richtungsverteilungen zugrunde legt, $w(0, z) = \delta(z - 1)$, 1, z bzw. die Werte $N = 261, 164, 189$. Andererseits ist N, wenn man die resultierende Strahlung beim Einfangen eines Neutrons durch ein Proton als magnetische Dipolstrahlung voraussetzt, durch die kerntheoretische Formel $N = Cv_0/(\mu_p - \mu_n)^2(\varepsilon^{\frac{1}{2}} \mp \varepsilon'^{\frac{1}{2}})^2$ gegeben (Bethe und Bacher, vgl. dies. Zbl. **14**, 184). Der Faktor C ist ohne besonderes Interesse und bei gebundenen Protonen mit rund 3 zu multiplizieren gegenüber freien Protonen (Bethe, vgl. dies. Zbl. **17**, 140). $\mu_p = 2{,}9$ und $\mu_n = -2$ sind die magnetischen Momente des Protons und des Neutrons, ε und ε' die Bindungsenergien des Deuterons im Singulett- und Triplettzustand. Die beiden Vorzeichen gelten bzw. für reelle und virtuelle Bindungsenergie des Singulettzustandes. Man erhält in den beiden Fällen bzw. $N = 565$ und $N = 230$. Übereinstimmung mit dem aus den Albedomessungen errechneten Werte ist daher nur bei der Annahme eines virtuellen Singulettzustandes des Deuterons zu erhalten, und zwar bei einer Richtungsverteilung zwischen dem Kosinusgesetz und senkrechtem Einfall. — Gewisse Schwierigkeiten bereiten noch die Unsicherheit der magnetischen Momente des Protons und des Neutrons [Estermann, Simpson, Stern, Physic. Rev. **51**, 1004 (1937)] sowie Experimente von Whitaker [ibid. **52**, 389 (1937)], die es zweifelhaft erscheinen lassen, ob die Geschwindigkeiten der Neutronen auf thermische Werte herabgesunken sind. Beides bedingt eine Erhöhung des kerntheoretischen Wertes von N und könnte somit die jetzige Erklärung der Deuteronbildung gefährden. *E. A. Hylleraas* (Oslo).

● **Ertel, H.: Methoden und Probleme der dynamischen Meteorologie. (Erg. d. Math. u. ihrer Grenzgeb. Hrsg. v. d. Schriftleitung d. Zbl. f. Math. Bd. 5, H. 3.)** Berlin: Julius Springer 1938. 122 S. u. 14 Fig. RM. 14.—.

In the parts of this book in which the general equations of hydrodynamics are treated use is made of the modern method of omitting the sign of summation over suffixes. Thus the circulation theorem of Bjerknes is written in the form

$$\frac{d}{dt}\oint v_j\,dx_j + 2\omega\,dS/dt = N(p, \alpha).$$

The variational principle of atmospherical dynamics given by the author in 1933 is a novel feature for a book on meteorology and might perhaps have been given in a more general form consistent with the ideas of Bjerknes by using the ideas of Clebsch. The essential change to be made in the equation at the bottom of p. 43 is that Ψ in Ertel's expression $E_{\text{kin}} + \omega D_\omega - (\Phi + \Psi)$ should be regarded as a function of 4 quantities $\theta, \varrho, \sigma, \tau$ and E_{kin} should be replaced by $d\theta/dt + \sigma d\tau/dt - E_{\text{kin}}$. The quantities $\theta, \varrho, \sigma, \tau, v_j$ can then be varied independently giving rise to a set of equations equivalent to the equations of hydrodynamics if the pressure p is defined by the equation $p = -\varrho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \varrho}$, ϱ being the density of the fluid. — The author's discussion of atmospheric energetics is useful and up to date. He not only directs attention to the criticism of the theory that the potential energy of the vertical mass distribution is the chief source of the energy of storms but gives an account of the various schemes for classifying the forms of energy in the atmosphere. The book contains a good account of the theory of turbulent friction, the problem of stationary wind fields being treated in some detail. Fjeldstadt's work, which leads to an integral equation is simplified by taking the density and pressure gradient to be constant but the exchane coefficient η is taken to be arbitrary function of the altitude such that $1/\eta(z)$ is integrable to $F(z)$, the kernel of the symetric integral equation is then $K(z, \varrho) = K(\varrho, z) = F(z)$ when $z \leqq \varrho$. — The treatment of stationary discontinuities in the atmosphere is of mathematical interest. The conditions of equilibrium in a vertical plane perpendicular to the Isohypse gives are derived and from them the special equations obtained by Bjerknes and Palmén are derived. — The book closes with a section dealing with the atmospheric perturbation equations followed by one on non stationary motions. — The accounts of the thermodynamics of the atmosphere and of matters relating to the stabilitv of the atmosphere are sufficiently complete to make the book a useful book of reference. *H. Bateman* (Pasadena).

Funktionalanalysis, Funktionalräume:

Köthe, Gottfried: Lösbarkeitsbedingungen für Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. J. reine angew. Math. **178**, 193—213 (1938).

Verf. untersucht die Lösbarkeitsbedingungen unendlicher linearer Gleichungssysteme $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = c_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ abgekürzt: $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$. Die lineare Transformation $\mathfrak{A}$ vermittelt also eine Abbildung einer Stelle $\mathfrak{x}$ eines linearen Raumes λ in eine Stelle eines linearen Raumes μ. Es wird durchweg vorausgesetzt, daß λ und μ vollkommen (hier und für folgende Begriffsbildungen s. dies. Zbl. **9**, 257 u. **16**, 117) sind. Während bisher (Banach, Théorie des opérations linéaires 1932) für den Raum λ noch die einschränkenden Voraussetzungen gemacht wurden, daß λ linear metrisch und daß der zu λ duale Raum λ^* stark separabel ist — das letztere ist gleichbedeutend mit der Voraussetzung, daß in λ der Grenzstellensatz gilt —, befreit sich Verf. von diesen einschränkenden Voraussetzungen. Es werden für beliebiges vollkommenes λ zwei Topologien (schwache bzw. starke) aufgestellt, die die schwache bzw. starke Konvergenz liefern. Mit Hilfe dieser Topologien wird nun folgender Satz bewiesen: Jede Linearfunktion, die auf einem Teilraum von λ erklärt ist und dort im Sinne der starken bzw. schwachen Topologie stetig ist, läßt sich auf ganz λ stetig fortsetzen. Im Fall der schwachen Topologie und im allgemeinen auch nur dann, ist eine solche Linearfunktion durch eine Stelle des dualen Raumes λ^* erzeugbar. Durch den ersten Umkehrsatz zeigt Verf., daß die starke Separabilität von λ notwendig und hinreichend dafür ist, daß jede stark topologische stetige Linearfunktion durch eine Stelle aus λ^* erzeugt werden kann. Hieraus ergibt sich als Lösbarkeitsbedingung des obigen Gleichungssystems: Die schwache topologische Stetigkeit der Linearfunktion $x(\mathfrak{u}\mathfrak{A}) = \mathfrak{u}\mathfrak{c}$ ($\mathfrak{u}$ irgendeine Stelle des zu λ dualen Raumes) ist notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit. Wenn in λ der Grenzstellensatz gilt und auch nur dann, kann an Stelle der schwach topologischen Stetigkeit die stark topologische Stetigkeit treten. Das Problem der Typeneinteilung der linearen Gleichungssysteme wird hiermit noch nicht erledigt, aber es werden in Form der mit den beiden Topologien verbundenen Stetigkeitsbegriffe neue Invarianten aufgestellt. *Ulm* (Münster i. W.).

● **Julia, Gaston: Introduction mathématique aux théories quantiques. Pt. 2. Leçons rédig. par R. Marrot. (Cahiers sci. Publiés par Gaston Julia. Fasc. 19.)** Paris: Gauthier-Villars 1938. VI, 218 pag. Frcs. 85.—.

Der vorliegende 2. Teil behandelt im ersten Abschnitt den Hilbertschen Raum. Dieser wird der historischen Entwicklung entsprechend zuerst als metrischer Raum mit abzählbar vielen Koordinaten eingeführt. Kap. 1 bringt in der seit E. Schmidt üblichen geometrischen Ausdrucksweise die wichtigsten Eigenschaften (starke und schwache Konvergenz, Vollständigkeit, Separabilität, Orthogonalisierungsverfahren, abgeschlossene Teilräume, Komplementärraum usw.). In Kap. 2 wird bewiesen, daß der Raum der im Lebesgueschen Sinn quadratisch integrierbaren Funktionen ebenfalls ein Hilbertscher Raum ist. Erst Kap. 3 bringt die axiomatische, auf J. v. Neumann zurückgehende Begründung. Im Abschnitt 2 werden die geometrischen Eigenschaften der linearen Transformationen des Hilbertschen Raumes untersucht. Kap. 4 betrachtet die elementaren Eigenschaften (Beschränktheit, Stetigkeit usw.), ferner ausführlich die Projektionsoperatoren und die Darstellung der beschränkten Operatoren durch unendliche Matrizen (Hilbertsche Faltungssätze, Satz von Hellinger-Toeplitz). Kap. 5 ist dem Problem der inversen Transformation und der Auflösung von Gleichungen mit unendlich vielen Variablen gewidmet. Die Darstellung folgt hier im wesentlichen Arbeiten von E. Schmidt und eigenen Untersuchungen des Verf. (vgl. dies. Zbl. **18**, 71). *G. Köthe* (Münster).

Maeda, Fumitomo: Logical structures of orthogonal systems in Hilbert space. J. Sci. Hirosima Univ. A 8, 15—28 (1938).

It is known that subsets of the spectrum of a self-adjoint linear operator on Hilbert space $\mathfrak{H}$, can be regarded as "set indices" of certain closed linear manifolds of $\mathfrak{H}$. Moreover this correspondence carries set-theoratical sums, products and complements, into closed linear sums, intersections, and orthogonal complements, respectively. The author obtains necessary and sufficient lattice-theoretical conditions that families of closed linear subspaces should give rise to abstract "orthogonal systems" with set indices. He does the same for families of orthogonal elements (using notation of Nagy), and also treats the case corresponding to set indices in generalized Boolean a algebra (in the sense of Stone). *Garrett Birkhoff* (Cambridge, U. S. A.).

Goldstine, H. H.: Weakly complete Banach spaces. Duke math. J. **4**, 125—131 (1938).

Der Verf. beweist zwei allgemeine Sätze über die Darstellbarkeit der linearen Funktionale von Funktionalen einer linearen Klasse mittels Stieltjesscher Integrale. Dann spezialisiert er die Untersuchungen auf die Klasse der linearen Funktionale (auf den konjugierten Raum) und auf den konjugierten Raum des konjugierten Raumes. Der Begriff der schwachen Vollständigkeit wird in dem Sinne verallgemeinert, daß die natürliche Zahlenfolge, welcher die Elementenfolge zugeordnet wird, durch eine allgemeinere Klasse und die Relation „größer als" durch eine allgemeinere Relation ersetzt wird. Dieser allgemeine Begriff gestattet einfache Sätze über Funktionale im konjugierten Raume aufzustellen und insbesondere das Hauptresultat zu erreichen: die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein vollständiger Raum mit dem konjugierten seines konjugierten äquivalent sei, besteht in der schwachen Vollständigkeit. Für separable vollständige Räume fällt die verallgemeinerte schwache Vollständigkeit mit der klassischen zusammen. *Kerner* (Warszawa).

Kantorovitch, Léonidas: Sur la continuité et sur le prolongement des opérations linéaires. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 879—881 (1938).

Continuing his researches on partially ordered function spaces, the author proves that in order for a linear operator from such a space to a "regular" such space to be "(o)-continuous", it is sufficient that it operate continuously on sequences descending to 0. It is well-known that if a sequence of continuous functions $x_n(t)$ is bounded and converges pointwise to a continuous limit $x(t)$, then $\lim_n \int x_n(t)\,dg(t) = \int x(t)\,dg(t)$. The author notes that his theorem reduces this to the case that the $x_n(t)$ decrease to 0. He states without proof a generalization of his theorem. *Garrett Birkhoff.*

Kantorovitch, L., et B. Vulich: Sur un théorème de M. N. Dunford. Compositio Math. **5**, 430—432 (1938).

Es handelt sich um die Darstellung der linearen Operationen, die den Raum L in den Raum L^p transformieren. Die Verff. zeigen, daß sich die Darstellung von Dunford (dies. Zbl. **15**, 305) aus der der Verff. (dies. Zbl. **17**, 215, Satz 12) ableiten läßt. *Kerner* (Warszawa).

Taylor, A. E.: Biharmonic functions in abstract spaces. Amer. J. Math. **60**, 416—422 (1938).

Der Gegenstand der Arbeit ist die Verallgemeinerung des Begriffes der biharmonischen Funktionen auf den abstrakten Banachschen Raum. Nachdem die Cauchy-Riemannschen Relationen für die analytischen Funktionen, welche Elemente eines Banachschen Raumes auf die eines anderen abbilden, bestimmt worden sind, stellt der Verf. die Gleichungen für den „reellen Teil" auf. Eine Funktion, die diese Gleichungen erfüllt, heißt biharmonisch. Für eine gegebene biharmonische Funktion kann man (im wesentlichen genau eine) analytische Funktion bestimmen, deren reeller Teil der gegebenen Funktion gleich ist. Als ein Sonderfall werden die numerischen Funktionen (Funktionale) im Hilbertschen Raume betrachtet und die Cauchy-Riemannschen Relationen wie auch die Bedingungen der Biharmonizität aufgestellt. *Kerner.*

Variationsrechnung:

Rosenblatt, Alfred: Über den Fundamentalsatz der Variationsrechnung für einfache Integrale. Rev. Ci., Lima **39**, Nr 421, 57—65 (1937) [Spanisch].

If the integral
$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) M(x)\,dx$$

vanishes for all functions $\eta(x)$ of class C' which vanish at x_1 and x_2, then $M \equiv 0$; if this holds when η is replaced by η' in the integrand, $M = \text{const}$. The author shows that both results remain valid if $\eta(x)$ is restricted to be a polynomial vanishing at x_1 and at x_2, and in the first case points out that for fixed m, p, k the $\eta(x)$ can even be restricted to be of the form

$$(x - x_1)^m (x - x_2)^p P(x^k),$$

$P(z)$ a polynomial in z. *McShane* (Virginia).

McShane, E. J.: Some existence theorems for problems in the calculus of variations. Duke math. J. **4**, 132—156 (1938).

Dans un précédent mémoire (cf. ce Zbl. **16**, 31) l'A. a élargi les conditions pour la semicontinuité des intégrales du calcul des variations. Ici il généralise les conditions pour l'existence du minimum absolu. Il s'occupe principalement des intégrales sous la forme ordinaire (*) $I(y) = \int_a^b f(x, y, \dot{y})\,dx$ dans l'espaceà $n+1$ dimensions, et les intégrales sous la forme paramétrique sont considérées surtout comme des intégrales auxiliaires transformées des intégrales sous la forme ordinaire. — La condition principale pour l'existence du minimum de l'intégrale (*) est (**) $f(x, y, \dot{y})/|\dot{y}| \to \infty$ lorsque $|\dot{y}| \to \infty$. Ici l'A. étudie les cas dans lesquels la condition (**) n'est pas vérifiée partout dans le domaine A de points (x, y) pour lesquel $f(x, y, y')$ est définie, et il donne deux théorèmes. Dans le premier on suppose que la condition (**) ne soit pas vérifiée dans les points d'un ensemble distribué progressivement (progressively distributed set) mais l'intégrale (*) soit toujours quasi-régulière seminormale; dans l'autre théorème et dans des lemmes successifs il suppose que dans les points d'un ensemble N dont la projection orthogonale sur l'axe des x a mésure nulle ne soit vérifiée ni la condition (**) ni la condition que l'intégrale (*) soit quasi-régulière seminormale, mais il admet une condition qu'il nomme x-transform condition. — L'A. considère aussi les intégrales qui contiennent des dérivées d'ordre superieur au premier et démontre un théorème qui généralise un théorème de Cinquini (cf. ce Zbl. **17**, 266). — Il faut aussi remarquer que l'A. se pose dans des conditions très générales quant à la continuité de la fonction $f(x, y, \dot{y})$. *Basilio Manià* (Pavia).

Radó, Tibor: On the derivative of the Lebesgue area of continuous surfaces. Fundam. Math. **30**, 34—39 (1938).

Let S be a continuous surface defined by equations $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, (u, v) in the unit square Q_0: $0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq 1$. We assume that S has finite Lebesgue area. For each square $q \subset Q_0$ denote by $L(q)$ the Lebesgue area of the part of the surface corresponding to q. This function of squares has almost everywhere a derivative $L'(u, v)$, and

$$\iint_{Q_0} L'\,du\,dv \leqq L(Q_0).$$

If the functions $x(u, v)$, etc., have first partial derivatives almost everywhere in Q_0, let X, Y, Z be the three jacobians and let $W = (X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}$. From, those very thin hypotheses the author establishes the remarkable conclusion $W(u, v) \leqq L'(u, v)$. As a corollary, W is summable over Q_0 and (*) $\iint_{Q_0} W\,du\,dv \leqq L(Q_0) = \text{area of } S$. The principal tool in the proof is a modification of Stepanoff's theorem on the existence of an approximate differential, together with the theory of the area of rectifiable surfaces. An immediate application is that if surfaces S_n exist converging to S and having areas converging to the left member of (*), then equality holds in (*). This simple remark generalizes earlier results on areas of surfaces (McShane, Ann. of Math. **34**, 815; Morrey, Amer. J. Math. **55**, 683; Radó, Amer. J. Math. **58**, 598; this Zbl. **8**, 72 and **14**, 297). *McShane* (Virginia).

Funktionentheorie:

Noshiro, Kiyoshi: On the theory of the cluster sets of analytic functions. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I, Math. **6**, 217—231 (1938).

A unified account in a generalised form of a number of theorems from various sources (F. Iversen, These Helsingfors 1914; W. Seidel, this Zbl. **8**, 363; J. L. Doob, this Zbl. **5**, 250; M. L. Cartwright, this Zbl. **15**, 165) using arguments of a topological nature, Nevanlinna's theory of harmonic measure and some related theorems of Beurling (These Upsal 1933; this Zbl. **8**, 318). $f(z)$ being meromorphic in a domain D whose frontier C is composed of essential singularities, the results are expressed in terms of (I) the set R_{z_0} of values taken infinitely often in the neighbourhood of the frontier point z_0, (II) the set $S_{z_0}^{(D)}$ of limiting values of $f(z)$ as z tends to z_0 in D, (III) the set $S_{z_0}^{(C)}$ of limiting values of $S_{z_0}^{(D)}$ as z tends to z_0 along C, (IV) the set Γ_{z_0} of asymptotic values of $f(z)$ as z tends to z_0 along a continuous curve. Typical statements are: A point of $S_{z_0}^{(D)} - S_{z_0}^{(C)}$ is either a point of R_{z_0} or of Γ_{z_0}: If $f(z)$ is meromorphic in a domain D except for a set E of essential singularities of zero harmonic measure then (z_0 a point of E) any value not in R_{z_0} is an asymptotic value either at z_0 or at a sequence of singularities tending to z_0: If Δ is a connex component of the complementary set to $S_{z_0}^{(C)}$ then Δ is either contained in $S_{z_0}^{(D)}$ or contains no point of this set, provided z_0 is a regular point in Dirichlet's problem. *Macintyre* (Aberdeen).

Milloux, Henri: Sur les fonctions holomorphes et leurs dérivées dans le cercle unité. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1080—1082 (1938).

L'A. démontre le théorème suivant: Si $f(z)$ est holomorphe dans $|z| < 1$; si f prend n fois au plus la valeur 0, et f' p fois au plus la valeur un, si $|f(z)| < M$ en des points intérieurs au cercle $|z| = \frac{1}{2}$, points qui ne peuvent être enfermés dans des cercles dont la somme des pseudo-rayons n'excède pas $2e/100$ [la pseudo-distance des points x et y est la quantité $|(x-y)/(1-x\bar{y})|$], alors on a l'inégalité:

$$(1-r)\log|f(re^{i\omega})| < K\Big(1 + n + p + \overset{+}{\log} M + \log\frac{1}{1-r}\Big),$$

où K est une constante numérique. Si la dernière hypothèse est remplacée par celle-ci: $|f(z)| < M$ en $n+1$ points P, intérieurs au cercle $|z| < 1$, on a l'inégalité:

$$(1-r)(1-\nu)\log|f(re^{i\omega})| < K\Big[1 + n + p + \log M + \log\frac{1}{1-r} + \log\frac{1}{h(1-\nu)}\Big],$$

où K est une constante numérique, ν la distance maximum de O aux points P, et h la moitié de la pseudo-distance minimum de ces points pris deux à deux. *Mandelbrojt.*

Ghika, Alexandre: Sur la détermination des fonctions analytiques. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1349—1352 (1938).

Soient D un domain ouvert simplement connexe, de frontière rectifiable C, E un ensemble de C de la mesure positive, $f(z)$ une fonction définie et de carré sommable sur E, $\{P_n(z)\}$ un système complet des polynomes orthogonaux et normaux sur E et $\{Q_n(z)\}$ le système analogue sur le complement de E par rapport à C. — L'auteur donne (sans démonstration) le résultat suivant. — Pour qu'il existe une fonction $F(z)$ définie et de carré sommable sur C étant une fonction frontière d'une fonction $f(z)$ holomorphe dans D et telle que l'on ait $f(z) = F(z)$ pour $z \in E$ et $F(z)$ soit de carré sommable sur C il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_0^\infty \Big|\int_E f(z)\, Q_n(z)\, dz\Big|^2 < \infty.$$

Un théorème analogue subsiste aussi en terme des polynômes P_n. *Marcinkiewicz.*

Robertson, M. S.: Multivalent functions of order p. Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 282—285 (1938).

En généralisant un théorème de M. Biernacki [C. R. Acad. Sci. **203**, 449—451 (1936); ce Zbl. **14**, 319], l'auteur démontre que si, m étant un entier positif, on a