Werk

Titel: Geometrie

Jahr: 1938

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0018|log30

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

is equal to 0,1 and 2 and for x from 0,0 to 10,0 in steps of 0,1. A similar table is included for $a = 0{,}5$, 0,25 and 0,75. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

McDougall, J., and Edmund C. Stoner: The computation of Fermi-Dirac functions. Philos. Trans. Roy. Soc. London A **237**, 67—104 (1938).

In Rechnungen über statistische Systeme mit Fermi-Diracscher Statistik treten häufig Integrale der Form

$$F_k(\eta) = \int_0^\infty \frac{x^k\,dx}{e^{x-\eta}+1} \qquad k = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2} \cdots$$

auf. Die Verff. geben eine Tafel der Funktionen $\frac{2}{3}F_{3/2}$, $F_{1/2}$ und der drei ersten Ableitungen von $F_{1/2}$ zwischen $\eta = -4$ und $\eta = +20$ in Schritten 0,1; bei $\frac{2}{3}F_{3/2}$ und $F_{1/2}$ sind 6 bis 5 Stellen hinter den Einern angegeben. $F_{1/2}$ ist für die von $\eta = 8$ entfernter liegenden Werte mit Reihen berechnet, für die näher liegenden mit numerischer Integration (für $\eta < -4$ und $\eta > +20$ konvergieren dann die Reihen sehr gut). $\frac{2}{3}F_{3/2}$ ist dann durch numerische Integration $\left(\frac{d}{d\eta}\left(\frac{2}{3}F_{3/2}\right) = F_{1/2}\right)$, die übrigen Funktionen durch Differentiation gewonnen worden. *F. Hund* (Leipzig).

Wünsche, Günther: Grundzüge einer allgemeinen nomographischen Methode der Versicherungsmathematik. Ein Beitrag zur Frage der nomographischen Deutung versicherungsmathematischer Zusammenhänge. Bl. Versich.-Math. **4**, 209—220 (1938).

Behandelt wird eine sich bis zum Endalter z erstreckende Kapitalversicherung. Dem Eintrittsalter x entspreche ein Netto-Einmalbetrag $\mathfrak{A}(x, z)$. $V(w - x)$ sei das beim Alter w ermittelte Netto-Deckungskapital, P sei die bis zum Alter y in gleichbleibender Höhe zu entrichtende Netto-Jahresprämie, $a(w, y)$ der Barwert der vom Alter w bis zum Alter y laufenden vorschüssigen Leibrente vom jährlichen Betrage 1. Dann ist a) $V(w - x) = \mathfrak{A}(w, z) - Pa(w, y)$ für $x \leqq w \leqq y$, b) $V(w - x) = \mathfrak{A}(w, z)$ für $y \leqq w \leqq z$. Diese Beziehungen werden so umgeformt, daß eine nomographische Darstellung, die Verf. als die „Methode der Zustandspunkte" bezeichnet, möglich wird. Sie ist auch auf Versicherungen mehrerer verbundener Leben und vor allem auf die analogen Beziehungen der Invaliditäts- und Pensionsversicherung anwendbar.

Rehbock (Bonn).

Geometrie.

Irmer, Alfred: Axiomatische Untersuchungen über die Richtung und die Anordnung der Punkte auf der Geraden. Marburg: Diss. 1937. 68 S.

Als „Hauptsatz der linearen Anordnung" (der in 3 Fassungen gebracht wird) ist die Tatsache bezeichnet, daß die Punkte einer Geraden sich auf genau zwei (inverse) Weisen einer Ordnungsbeziehung $<$ unterwerfen lassen, wobei „$A < B < C$" mit „B zwischen A und C" äquivalent ist. In den neueren Auflagen von Hilberts „Grundlagen der Geometrie" ist nicht mehr eine lineare Axiomenteilgruppe abgesondert, die diesen Satz nach sich zieht. Irmer untersucht, welche Axiomensysteme, die aus den Hilbertschen linearen Anordnungsaxiomen (6. Aufl.) durch Zufügung von in bestimmter Weise ausgewählten Implikationsaussagen über die Zwischenlage von 4 Punkten entstehen, den Hauptsatz nach sich ziehen. (Über die einschlägigen Arbeiten von Huntington u. s. versch. Mitarbeitern geht diese Zielsetzung gemäß einer Bemerkung des Autors durch Einbeziehung des Hilbertschen Existenzaxioms der linearen Anordnung hinaus.) Es schälen sich fünf solcher in sich unabhängigen Axiomensysteme heraus. — Ein weiterer Teil der Arbeit ist der anschließenden Hilbertschen Aufgabe (a. a. O.) gewidmet, ein solches, mit dem System der Hilbertschen linearen und ebenen Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome äquivalentes „System von unabhängigen Axiomen aufzustellen, daß die auf die Anordnung der Punkte einer Geraden bezüglichen Axiome diese Anordnung vollständig beschreiben". Dabei wird in das lineare Teilsystem, dessen Existenzforderungen möglichst eingeschränkt sind, der Mooresche Vierpunkte-

satz einbezogen; die Unabhängigkeit der Axiome wird durch eine Aufspaltung des Pasch-Axioms in zwei geeignete Teile (deren einer an eine Existenzbedingung gebunden ist) erreicht. — Ein Anhang behandelt eine Erweiterung des Hauptsatzes der linearen Anordnung auf parallele Geraden. *Arnold Schmidt* (Marburg, Lahn).

Woude, W. van der: On certain linear constructions and a well-known configuration. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc., **41**, 117—119 (1938).

In der konstruktiven Geometrie werden häufig für lineare Probleme Lösungen gegeben, die sich konstruktiver Hilfsmittel zweiter Ordnung bedienen. Verf. gibt für zwei Fälle, die in den Grundlagen der Geometrie eine Rolle spielen (s. H. F. Baker, Principles of Geometry IV, Cambridge 1925), lineare Lösungen. — 1. Die erste Aufgabe bezieht sich auf die Konstruktion der Nullebene eines beliebigen Punktes in einem Nullsystem. — 2. Die zweite Aufgabe führt auf die Realisierung der Konfiguration $(15_3; 15_3)$ in einem R_3, während Baker dieselbe nur in einem R_4 vornehmen kann. Es seien $s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}$ Raumgeraden und N ein beliebiger Punkt. Die vier s_{ik} definieren eine lineare Kongruenz. Wie konstruiert man linear den Kongruenzstrahl durch N? *Steck* (München).

Cavallaro, Vincenzo G.: Sur l'emploi des côtés de polygones réguliers dans l'évaluation approchée des racines de certaines équations transcendantes. Mathesis **52**, 83—88 (1938).

Noguera, Rodrigo: Einiges über pythagoreische Dreiecke. Bol. mat. **10**, 58—62, 81—89, 105—115, 145—150 u. 179—187 (1937) [Spanisch].

Abason, Ernest: Propriétés des triangles au même centre de gravité. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 8, 97—105 (1937).

Egerváry, Eugen: Über ein Minimumproblem der Elementargeometrie. J. reine angew. Math. **178**, 174—186 (1938).

Verf. zeigt, daß mehrere Minimumsätze der Dreiecksgeometrie spezielle Fälle des folgenden Problems sind: Gegeben sind das Dreieck $A_1A_2A_3$ und die positiven Gewichte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; sind $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die Entfernungen eines Punktes P von den Ecken A_1, A_2, A_3, so ist derjenige Punkt P zu bestimmen, für welchen $\sqrt[n]{\lambda_1\varrho_1^n + \lambda_2\varrho_2^n + \lambda_3\varrho_3^n}$ ein Minimum wird. Hierbei ist n ein beliebiger positiver ganzzahliger Exponent; auch der Fall $n \to \infty$ wird betrachtet. Verf. zeigt, daß das Problem (und das entsprechende für den Raum) eine einzige Lösung hat, und weist darauf hin, daß die Einzigkeit dem Umstande zu verdanken ist, daß die zu einem Minimum zu machenden Funktionen konvex sind. Die Fälle $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$ werden ausführlich untersucht; in diesen Fällen wird P_M auch wirklich bestimmt. Durch die Beziehung zwischen den Zahlen ϱ_i und den Seiten des Fußpunktdreiecks von P ist der Verf. imstande, auch Minimumfragen für Indreiecke (bzw. Intetraeder) zu lösen. Er erhält dabei auch neue Resultate, bestimmt z. B. das Minimum der Quadratsumme der Seiten und das Minimum der größten Seite der Indreiecke, das Minimum der Kantenquadratsumme der Intetraeder usw. Von Bedeutung ist noch eine Bemerkung über den Punkt kleinster Entfernungssumme beim Tetraeder ($n = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$); dieser Punkt ist das isogonale Bild desjenigen Punktes, welcher ein gleichflächiges Fußpunktstetraeder hat, und kann — in Widerspruch zu einer Behauptung von R. Sturm — als Schnittpunkt von drei Flächen zweiter Ordnung bestimmt werden. *O. Bottema* (Deventer).

Zacharias, Max: Über den Zusammenhang des Morleyschen Satzes von den winkeldrittelnden Eckenlinien eines Dreiecks mit den trilinearen Verwandtschaften im Dreieck und mit einer Konfiguration $(12_4; 16_3)$ der Dreiecksgeometrie. Deutsche Math. **3**, 36—45 (1938).

In dem Dreieck $A_1A_2A_3$ sind x_i und y_i $(i = 1, 2, 3)$ die den Winkel A_i drittelnden Eckenlinien, $(y_2\, x_3) = B_1$ usw.; $(x_2\, y_3) = C_1$ usw. Den Morleyschen Satz („das Dreieck $B_1B_2B_3$ ist gleichseitig") kann man durch einfache Winkelberechnungen herleiten aus dem Hilfssatz: Die drei Geraden B_iC_i schneiden sich in einem Punkt O.

Chiocas hat bewiesen, daß dieser Hilfssatz nicht nur für die drittelnden Eckenlinien gilt, sondern auch für drei Paare isogonaler Eckenlinien. Verf. gibt nun einen sehr einfachen Beweis des Hilfssatzes; er zeigt außerdem, daß dieser gilt unter der noch allgemeineren Voraussetzung, daß die Eckenlinien zwei „reziproke Tripel" bilden, und ordnet so den Morleyschen Satz in die Theorie der trilinearen Verwandtschaften ein. [Vgl. Zacharias, Deutsche Math. **1**, 174—181 (1936); dies. Zbl. **13**, 410]. Ferner wird gezeigt, daß die Geraden A_iB_i durch einen Punkt O, A_iC_i durch einen Punkt Q gehen, daß O, P und Q in einer Geraden liegen und mit A_i, B_i und C_i eine Konfiguration $(12_4, 16_3)$ bilden. Untersucht wird, unter welchen Voraussetzungen über die Eckenlinien x_i, y_i das Sechseck $B_1C_3B_2C_1B_3C_2$ gewisse Eigenschaften hat. Zum Schluß werden zwei Umkehrungen des Morleyschen Satzes bewiesen. *O. Bottema.*

Rozet, O.: Sur les surfaces topographiques. Bull. Sci. math., II. s. **62**, 50—64 (1938).

Hauptsächlich im Anschluß an die Literatur von 1850—1880 werden die Definitionen und Bestimmungsgleichungen der topographisch bedeutsamen Flächenkurven durchdiskutiert: Kurven maximaler Steigung, Ort der extremen Krümmungen der Höhenlinien, Talwege, hydrodynamische Kurven. *W. Feller* (Stockholm).

Markič, Michel: Transformantes. Nouveau véhicule mathématique. Synthèse des triquaternions de Combebiac et du système géométrique de Grassmann. Calcul des quadriquaternions. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, IV. s. **1**, 201—248 (1937).

In Fortsetzung des ersten Teils derselben Arbeit (vgl. dies Zbl. **16**, 369) werden hier einige weitere Ausführungen über das vom Verf. dort eingeführte System der Quadriquaternionen gemacht. Es wird untersucht, in welcher Weise das System der Hamiltonschen Quaternionen und das der im Jahre 1902 von Combébiac eingeführten Triquaternionen darin enthalten ist. Die gleiche Untersuchung wird für das Grassmannsche System der Ausdehnungslehre gemacht. Der Kalkül wird dann zur Lösung einer Reihe einfacher geometrischer Aufgaben, wie Senkrechtenkonstruktion u. ä., verwandt. Zum Schluß findet sich ein Hinweis auf die weitgehende Brauchbarkeit der vom Verf. eingeführten „transformantes" auf anderen Gebieten, sogar der mathematischen Logik. *Burau* (Hamburg).

Analytische und algebraische Geometrie:

Goormaghtigh, R.: Sur les coniques osculatrices aux paraboles d'indice quelconque et à la spirale logarithmique. Mathesis **52**, 79—82 (1938).

Spyropoulos, Georg: Darstellungen N-dimensionaler projektiver Räume in $(2N+1)$ dimensionalen projektiven Räumen. Bull. Soc. Math. Grèce **18**, 50—62 (1938).

In Analogie zu der klassischen Untersuchung von Segre über die Geometrie der R_2 im R_5 wird hier eine Reihe von Sätzen über die gegenseitige Lage linear abhängiger R_n im R_{2n+1} oder bereits im R_{2n} oder R_{2n-1} hergeleitet. Linear abhängig heißen hierbei solche R_n, zwischen deren Grassmannkoordinaten eine lineare Beziehung besteht. Wesentlich ist hierbei stets der Satz, daß ein Raum, der $k-1$ von k linear abhängigen R_n schneidet, auch den letzten trifft. *Burau* (Hamburg).

Guareschi, Giacinto: Alcuni fondamenti di geometria analitica degli spazi lineari superiori. Atti Ist. Veneto Sci. etc. **95**, 369—402 (1936).

Die Arbeit beginnt mit einigen einfachen Betrachtungen über die Orientierung von linearen Räumen. Als Richtungskosinus zweier R_p wird dann der Quotient der Volumina des einen Raumes und seiner Orthogonalprojektion auf den andern eingeführt, beide in einer bestimmten Orientierung genommen. Mit Hilfe des Richtungskosinus eines R_p mit den $\binom{n}{p}$ Koordinaten-R_p wird dann eine Parameterdarstellung dieses R_p erhalten, die sich als Verallgemeinerung der bekannten Parameterdarstellung der Geraden erweist. Weiterhin befinden sich einige Betrachtungen über die Matrizen

aus diesen Richtungskosinus eines R_p mit allen Koordinaten-R_p sowie die Herleitung eines allgemeinen Ausdrucks für die Richtungskosinus zweier R_p, vermittels der Richtungskosinus mit den Koordinaten-R_p. *Burau* (Hamburg).

Strubecker, Karl: Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes. J. reine angew. Math. **178**, 135—173 (1938).

Zur Realisierung eines isotropen dreidimensionalen Raumes I_3 bevorzugt Verf. einen pseudoeuklidischen vierdimensionalen Raum R_4. Seine absolute Maßfläche Φ_2^2 trägt zwei Scharen reeller oder konjugiert-komplexer Erzeugender. Jeder Tangentialraum dieser Φ_2^2 stellt einen isotropen I_3 dar, dessen absoluter Kegelschnitt also aus einem Paar reeller oder konjugiert-komplexer Geraden (e_1, e_2) besteht. Der Schnittpunkt O von (e_1, e_2) heißt absoluter Punkt, Treffgeraden von $e_1(e_2)$ heißen isotrop von erster (zweiter) Art, Gerade durch O vollisotrop, dagegen Ebenen durch O isotrop, solche durch $e_1(e_2)$ vollisotrop von erster (zweiter) Art. — Die projektiven Automorphien des absoluten Geradenpaars bilden die achtgliedrige Hauptgruppe $\mathfrak{G}_8$, die sog. Ähnlichkeiten des I_3. Bemerkenswerte invariante Untergruppen von $\mathfrak{G}_8$ sind: G_7, die Grenzgruppe der Ähnlichkeiten des I_3 (sie läßt jeden uneigentlichen Strahl durch O fest); $\mathfrak{B}_7$, die volumstreuen Ähnlichkeiten; G_6, die volumstreuen Ähnlichkeiten der Grenzgruppe; $\mathfrak{B}_7$, die modularen (nichtvolumstreuen!) Bewegungen des isotropen Raumes; B_6, die modularen Bewegungen der Grenzgruppe; $\mathfrak{B}_6$, die volumstreuen Bewegungen; G_5, die volumstreuen Grenzbewegungen. — Zwei eigentliche Punkte des isotropen Raumes besitzen erst im Rahmen der Grenzgruppe G_5 eine Invariante. Die weitere Untersuchung beschränkt sich daher auf das Studium von G_5. Verf. bestimmt sämtliche Invarianten gegenüber G_5, wobei — begründet in der selbstdualen Struktur des absoluten Geradenpaars — eine bemerkenswerte Dualität der Metrik des isotropen Raumes in Erscheinung tritt. — Die Gruppe G_5 gestattet die folgenden beiden Darstellungen: $G_5 = D_3^r \cdot D_3^l = D_3^l \cdot D_3^r, \quad G_5 = S_3^r \cdot S_3^l = S_3^l \cdot S_3^r,$

erstens als kommutatives Produkt der Gruppen D_3^r der Rechtsdrehungen bzw. D_3^l der Linksdrehungen (mit den vollisotropen Schiebungen als gemeinsame eingliedrige invariante Untergruppe), zweitens als kommutatives Produkt der Gruppen S_3^r der Rechtsschiebungen bzw. S_3^l der Linksschiebungen (mit derselben gemeinsamen eingliedrigen invarianten Untergruppe der vollisotropen Schiebungen). Weitere zahlreiche Ergebnisse fließen jetzt aus der Untersuchung eingliedriger Untergruppen von D_3^r, D_3^l, S_3^r, S_3^l, insbesondere eine dem Cliffordschen Parallelismus verwandte Theorie sog. Rechts- und Linksnetze. Durch einmalige Erweiterung von G_5 erkennt man die Bedeutung dieser Gruppe für die Geometrie der (regulären) Flächenelemente x, y, z, p, q, welche durch G_5 in einfach transitiver Weise transformiert werden. Die erweiterte G_5 gestattet die einfache hyperkomplexe Darstellung $x' = xa\,(G_5^r)$, der durch Übergang zur reziproken einfach transitiven Gruppe die Darstellung $x' = bx\,(G_5^l)$ zur Seite tritt. G_5^r und G_5^l erzeugen die neungliedrige Übergruppe $G_9(x' = bxa)$, welche die natürlichen Äquivalenzbegriffe der Studyschen Kinematik des isotropen Raumes zum Ausdruck bringt. Man verdankt S. Lie eine zweifache Deutung der Flächenelemente x, y, z, p, q als Punkte eines R_5. Durch Einführung kanonischer Parameter und Variablen gelingt es Verf., auch für die zweite der beiden Lieschen Abbildungen eine gruppentheoretische Basis zu finden. Bei dieser Abbildung werden alle Elementvereine $dx_3 = x_4\,dx_1 + x_5\,dx_2$ auf Kurven bzw. Flächen des R_5 abgebildet, deren Tangenten bzw. Tangentialebenen vollständig dem linearen Komplex $p_{03} + \frac{1}{2}(p_{14} + p_{25}) = 0$ dem sog. Hauptkomplex angehören (Zur Theorie der ersten dieser Lieschen Abbildungen; vgl. Strubecker, dies. Zbl. **13**, 220). Weiterhin werden alle möglichen Typen von Grenzbewegungen des I_3 mit Hilfe einer Klassifikation der eingliedrigen Untergruppen von G_5^r und G_5^l studiert. Schließlich gestattet die Entwicklung der Theorie der zweigliedrigen Untergruppen von G_5^r und G_5^l (bzw. S_5^r und S_5^l) gewisse räumliche Übertragungen einiger bekannter ebener Sätze von E. Kasner, E. Cesàro und G. Scheffers. *M. Pinl.*

Auluck, F. C.: On conics connected with four or more lines. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **7**, 5—7 (1938).

Analytischer Beweis zweier Sätze über das Vierseit, die aber von der Umkehrung des Clifford-Miquelschen Satzes nicht wesentlich verschieden sind. Ist nämlich Π_3 die dem Vierseit V_4 einbeschriebene Cliffordsche Parabel mit dem Brennpunkt in P, so bildet die Podare von P in bezug auf Π_3 einen Kegelschnitt Γ_P, dessen asymptotische Richtungen Δ', Δ'' auf denjenigen von Π_3 senkrecht stehen. Macht man P variabel, indem man Δ', Δ'' projektiv und involutorisch verbindet, so bleibt Π_3 nach der Umkehrung des Clifford-Miquelschen Satzes einem V_5 einbeschrieben. Der wesentliche Teil des Ortes (P) besteht nach dem direkten Satz entweder aus einer Geraden oder aus einem Kreis, je nachdem die Involution von antiparallelen Richtungen erzeugt ist oder nicht. — Die Sätze des Verf. sind durch besondere Spezialisierungen der Involution sogleich aus obiger Bemerkung zu gewinnen. *D. Barbilian.*

Narasinga Rao, A.: On the Miquel-Clifford configuration. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **7**, 68—74 (1938).

Noch einige Bemerkungen über die Miquel-Cliffordschen Konfigurationen von 2^{n-1} Kreisen und 2^{n-1} Punkten einer Ebene; insbesondere bestimmen $2t$ Geraden einer Ebene einen Miquelschen Punkt M und $2t+1$ Geraden einen Cliffordschen Kreis. Wenn die ersten $2t$ Geraden gegeben sind, entspricht jeder weiteren Geraden a ein Kreis a' durch M; die lineare Abbildung der Kreise der Ebene auf die Punkte des Raumes liefert dann eine entsprechende Cremonasche Verwandtschaft zwischen zwei Tangentialebenen einer Quadrik (dies. Zbl. **16**, 132). Daraus kann man leicht folgende Sätze schließen: Wenn der Kreis a' sich auf eine Gerade reduziert, so beschreibt a eine Enveloppe der Klasse $t+1$, die die unendlich ferne Gerade t-mal berührt; dasselbe, wenn a' einen gegebenen Kreis orthogonal durchschneidet; und wenn der Radius von a' konstant bleibt, so beschreibt a eine Enveloppe der Klasse $2t+2$. Von diesem Standpunkt aus ist auch die Winkeleigenschaft der Konfiguration (dies. Zbl. **17**, 417) leicht zu beweisen. *E. G. Togliatti* (Genova).

Lier, C. van: Projectivity of homographies and of pencils of quadrics. Nieuw Arch. Wiskde **19**, 129—150 (1938).

A proof of the reduction of the equations of a non-singular pencil of quadrics to canonical form, without making use of the theory of invariant factors. *J. A. Todd.*

Brown, L. M.: The intersection of certain quadrics. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. **5**, 125—150 (1938).

The family of quadrics in S_{2n} which pass through four S_{n-1}'s in general position has freedom n. In this paper the author examines the base of this system of quadrics, which is reducible; the relations of the various parts of the base to each other are investigated at length. *J. A. Todd* (Cambridge).

Lejeune, A.: Sur quelques congruences linéaires de cubiques gauches. II. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **7**, 15—26 (1938).

Verf. setzt die im ersten Teil (vgl. dies. Zbl. **17**, 372) begonnene Untersuchung von Kongruenzen kubischer Raumkurven fort, die durch Nullsetzen der 4-reihigen Determinanten der Matrix $\begin{pmatrix} A_1 & A_1' & a_1 & a_1' & a_1'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_4 & A_4' & a_4 & a_4' & a_4'' \end{pmatrix}$ definiert werden. Es wird eine Reihe von Möglichkeiten betrachtet, bei denen die Konstanten A und die Linearformen a hierbei von 3 homogenen Parametern oder nur einem Teil derselben linear und z. T. auch quadratisch abhängen. Dies führt auf verschiedene weitere Typen linearer C^3-Kongruenzen, die z. T. schon früher von Stuyvaert oder Godeaux beschrieben worden sind. *Burau* (Hamburg).

Ramamurti, B.: A theorem on binary quarties and its application to geometry. Math. Student **5**, 52—57 (1937).

Eine binäre Form 4. Grades a_x^4 und ihre Hessesche Form b_x^4 bestimmen ein Büschel

$a_x^4 + \lambda b_x^4$; wenn die Form c_x^4 zu jeder Form des Büschels apolar ist, so ist die Jacobische Form von c_x^4 und einer anderen beliebigen d_x^4 zur Jacobischen Form des Büschels $a_x^4 + \lambda b_x^4$ apolar und umgekehrt. Wählt man als Trägergebiete der binären Formen einen Kegelschnitt oder eine kubische Raumkurve oder eine rationale normale c^4, so erhält man einheitlich verschiedene größtenteils bekannte entsprechende geometrische Sätze.
E. G. Togliatti (Genova).

Dye, L. A.: A transformation associated with the trisecants of a rational twisted quintic curve. Bull. Amer. Math. Soc. **43**, 719—723 (1937).

Examination of an involutorial Cremona transformation of space, of order 43, defined as follows: consider a pencil of ruled cubic surfaces having a fixed double line l and meeting resudually in a rational quintic curve C_5. Through any point P of space there passes one surface F of the pencil. The plane joining p to the simple directrix of F touches the surface of trisecants of C_5 at a point Q of this directrix, and the line PQ meets F again in P'. The correspondence in question is that between P and P'. *J. A. Todd* (Cambridge).

Burkett, F. J. H.: Some properties of a sextic with a quadruple point. Tôhoku Math. J. **44**, 119—129 (1937).

By using an irrational parametric representation of the plane sextic with a quadruple point the author proves a number of theorems relating to residual sets of points on the curve. His method is based on a set of equations, here established directly, which however are simply the ordinary expressions given by Abel's theorem for the intersections of the sextic with other curves. *J. A. Todd* (Cambridge).

Roth, Leonard: Some threefolds of genera zero. Proc. London Math. Soc., II. s. **44**, 36—52 (1938).

Über denselben Gegenstand gibt es auch tiefere Untersuchungen von G. Fano (Atti Congr. Intern. Bologna **4**, 115; dies. Zbl. **16**, 133 u. **15**, 372). Die Anregung zur vorliegenden Abhandlung ist in der ersten der obengenannten Arbeiten von G. Fano zu finden. Es handelt sich um V_3 mit allen Geschlechtern gleich Null; die Ergebnisse sind größtenteils bekannt. Zunächst einige allgemeine Eigenschaften über die singularitätenfreien $V_3^{2\pi-2}$ des Raumes $S_{\pi+1}$, deren Schnittkurven kanonische Kurven des Geschlechts π sind: Quadriken durch V, Projektionen von V aus einer auf ihr liegenden Linie, Flächen, die auf V liegen (der Satz, daß jede solche Fläche die Schnittfläche von V selbst mit einer Hyperfläche ist, ist nur gültig, wenn für V sehr allgemeine Voraussetzungen erfüllt sind). Es folgen eine Reihe von Beispielen, die die allgemeinen $V_3^{2\pi-2}$ für $\pi = 3, 4, 5, 6$ betreffen. Die hier als allgemein bezeichnete V_3^{12} ist nur einer der möglichen Fälle, wie Verf. selbst in einer Fußnote bemerkt. Andere Beispiele für $\pi = 8, 9, 13$. Verschiedene Darstellungen der betrachteten V auf Hyperflächen des Raumes S_4 und auf Involutionen des Raumes S_3; verschiedene Beziehungen, die sie miteinander und mit der allgemeinen V_3^3 des Raumes S_4 aufweisen; Bemerkungen über ihre gesicherte oder vermutete Irrationalität. Schließlich noch etwas über die V, deren Schnittkurven eine g_3^1 enthalten, und über die V_3^n des Raumes S_4, die eine $(n-2)$-fache Gerade enthalten. *E. G. Togliatti* (Genova).

Godeaux, Lucien: Sur la construction de surfaces et de variétés algébriques de diviseur supérieur à l'unité. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **24**, 78—83 (1938).

L'A. donne la représentation analytique et une construction géométrique très simple pour certaines variétés algébriques, de dimension d arbitraire, ayant comme diviseur un entier $n > 1$ quelconque (c'est-à-dire telles que n résulte le nombre maximum des leurs systèmes de V_{d-1} distincts, admettant un même système de V_{d-1} comme multiple). La construction indiquée contient, comme cas particuliers, des résultats précédemment obtenus par l'A. [L. Godeaux, Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **23**, 830 (1937); voir ce Zbl. **18**, 38]. *Beniamino Segre* (Bologna).

Godeaux, Lucien: Sur les surfaces algébriques de genres un et de rang six. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **7**, 64—68 (1938).

In einer Ebene π erzeugen die zyklische Homographie $H = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ und die involutorische quadratische Transformation $T = \begin{pmatrix} x_2x_3 & x_3x_1 & x_1x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ eine endliche Gruppe G_6 und daher eine Involution 6. Ordnung I_6'. Wenn man in π eine geeignete Kurve C^6 (die von T, H in sich selbst verwandelt wird) als Verzweigungskurve betrachtet, so erhält man eine Doppelebene F mit $p_a = P_4 = 1$, welche eine Involution 6. Ordnung I_6 enthält; diese ist durch die von T erzeugte Involution I_2 zusammengesetzt. I_2 kann auf eine Doppelfläche F^3 abgebildet werden (s. L. Godeaux, Mathesis **1922**, 19—23), so daß der Kurve C^6 die Schnittkurve D von F^3 mit einer Quadrik entspricht; und diese F^3 kann ihrerseits als Doppelprojektion einer Fläche Ψ^6 des Raumes S_4, mit D als Verzweigungskurve, angesehen werden. Man erhält so auf Ψ^6, als Bild von I_6, eine Involution I_3': Jeder Gruppe von I_6 entspricht eine Gruppe von I_3' und umgekehrt. Die Involution I_3' kann auf Ψ^6 durch die Homographie $H' = \begin{pmatrix} y_0 & y_2 & y_3 & y_1 & y_4 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}$ erzeugt werden; diese besitzt u. a. zwei isolierte Doppelpunkte $P_1(0\ 1\ \varepsilon\ \varepsilon^2\ 0)$, $P_2(0\ 1\ \varepsilon^2\ \varepsilon\ 0)$, wobei $\varepsilon^3 = 1$ ist; jede Ebene durch P_1P_2 schneidet Ψ^6 in zwei Gruppen von I_3'; die Projektion von Ψ^6 von P_1P_2 aus auf einer Ebene Φ führt also schließlich zur Abbildung der ursprünglichen Involution I_6 auf der Doppelebene Φ, für welche ebenfalls $p_a = P_4 = 1$ ist. Die Verzweigungskurve Δ von Φ hat die Ordnung 6 und besitzt zwei Doppelpunkte, zwei Spitzen und zwei weitere Doppelpunkte, denen zwei Selbstberührungspunkte unendlich benachbart sind. Man hat so ein Beispiel einer Fläche, die Doppelebene Φ, mit $p_a = P_4 = 1$ und dem Range 6, die nicht hyperelliptisch ist. *E. G. Togliatti* (Genova).

Rozet, O.: Sur les points unis des involutions non cycliques d'ordre huit appartenant à une surface algébrique. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **7**, 8—15 (1938).

L'A. démontre que, sur une surface algébrique, une involution d'ordre huit n'ayant qu'un nombre fini de points unis et engendreable moyennant deux transformations birationnelles permutables, de période quatre, dont les carrés coïncident, ne possède que des points unis doubles ou quadruples. Une surface image d'une telle involution peut se ramener, par une transformation birationnelle, à une surface normale possédant à chacun des points de diramations une des singularités suivantes: a) point quadruple à cône tangent rationnel; b) point double biplanaire auquel est infiniment voisin un point double conique; c) point double conique. La recherche a plusieurs points de contact avec des travaux antérieurs de L. Godeaux (cfr. notamment L. Godeaux, Les involutions appartenant à une surface algébrique. Paris: Hermann 1935; ce Zbl. **13**, 413). *Beniamino Segre* (Bologna).

Lippert, J.: Sur les involutions abéliennes du quatrième ordre de l'espace. I. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **7**, 26—33 (1938).

Lippert, J.: Sur les involutions abéliennes du quatrième ordre de l'espace. II. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **7**, 82—87 (1938).

Il est bien connu que, dans l'espace ordinaire, il y a deux types de groupes trirectangles engendrés par des homographies biaxiales harmoniques; les axes des trois homographies sont, dans un cas, les trois couples de côtés opposés d'un tétraèdre et, dans l'autre, trois couples de génératrices du même mode d'une quadrique (se séparant harmoniquement deux à deux). Ici l'A. considère l'involution abelienne I_4, d'ordre quatre, engendrée par un groupe du 1er type (dans la première Note) ou du 2e type (dans la seconde Note), et il construit et étudie une V_3^{16} de S_{10} image de I_4. Dans le premier cas V_3^{16} possède six coniques doubles se rencontrant trois à trois en quatre points, et elle admet trois systèmes d'hyperquadriques (passant par quatre des coniques doubles) la touchant suivant des surface du 16me ordre; dans le deuxième cas V_3^{16}

possède trois quartiques gauches rationnelles doubles, appartenant à un même hyperplan. *Beniamino Segre* (Bologna).

Baudet, A.: Sur une transformation birationnelle de l'espace. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **7**, 76—82 (1938).

Discussion of the fundamental elements of the cubic Cremona transformation whose equations are $\frac{x_1}{y_1 y_3 y_4} = \frac{x_2}{y_1 y_2 y_3} = \frac{x_3}{y_3 y_4^2} = \frac{x_4}{y_2 y_4^2}$.

J. A. Todd (Cambridge).

Baudet, A.: Sur l'homographie cyclique de période cinq de l'espace et sur quelques transformations birationnelles qui s'en déduisent. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **23**, 927—933 (1937).

Given a collineation H of period five in ordinary space, determining an involution I_5 of sets of five points, there are five linear systems of cubic surfaces invariant under H. Each of these systems is of freedom three and degree five, three surfaces of a system meeting, outside the base, in one set of I_5. By referring the surfaces of two of the systems to planes in two spaces S, S' the author derives a cubic Cremona transformation of period four. *J. A. Todd* (Cambridge).

Babbage, D. W.: The resolution of monoidal Cremona transformations of three-dimensional space. Proc. Cambridge Philos. Soc. **34**, 22—26 (1938).

An M-transformation between two three-dimensional spaces S, S' is a bimonoidal Cremona transformation with the property that the lines and planes through the fixed vertex O of the monoids in S are transformed respectively into lines and planes through the fixed vertex O' of the monoids in S'. The author proves the theorem: Every monoidal Cremona transformation between S and S' can be expressed as the product of a finite number of M-transformations. *J. A. Todd* (Cambridge).

Differentialgeometrie:

Schilt, Heinz: Über die isolierten Nullstellen der Flächenkrümmung und einige Verbiegbarkeitssätze. Compositio Math. **5**, 239—283 (1937).

A regular point O of a surface in the neighborhood of which the Gaussian curvature K is negative is a saddle point in which a number of valleys and ridges of the surface originate: if K is negative in O, this number is two; if K is zero in O, it can happen that the number is greater than two. The order s of a saddle point is defined to be the number of valleys originating in O minus one. The author proves the equivalence of two other definitions of the number s: 1. The spherical image of a saddle point of order s has the appearance of the Riemann surface of the function $\sqrt[s]{z}$ in the neighborhood of the branch point $z = 0$. 2. In making a single circuit about 0, the directions of the two fields of directions of both the asymptotic lines and the lines of principal curvature turn through an angle $(1 - s)\,\pi$. These results follow from investigations similar to those of Bendixson [Acta math. **24**, 1—88 (1901)] on the nature of the integral curves of a differential equation in the neighborhood of a singularity. — The author proceeds next to show that the quantity s is an invariant under a continuous deformation which preserves the line element (stetige Verbiegung). However, and this is an especially important and noteworthy result of the paper, the quantity s is not determined by the line element alone: in other words, surfaces can be found which are isometric, but for which the number s is not the same, and which, therefore, can not be deformed into one another in a continuous manner. This last can not be accomplished even if a reflection in a plane be admitted in addition to a continuous deformation. The proof is obtained by a procedure due to Darboux (Theorie des Surfaces III, p. 254) in combination with an existence theorem for a partial differential equation which leads to the following result: If O is a saddle point (for which s may or may not equal one) of an analytic surface F, there exists an isometric surface F' such that the corresponding point O' is a saddle point of order s

equal to one. — The paper closes with a discussion of special examples of saddle surfaces. *Stoker* (New York).

Ljuksehin, W.: Über die Verbiegung von Rotationsflächen negativer Krümmung mit einem singulären Punkte. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **17**, 339—341 (1937).

En poursuivant (voir ce Zbl. **17**, 421) l'étude de la déformation infiniment petite d'un morceau d'une surface de révolution à courbure négative l'auteur examine la déformation de la surface engendrée par la révolution autour de l'axe Z d'un segment d'une ligne OA qui coupe au point O l'axe Z sous un angle $\operatorname{arctg} a > 0$ et dont la tangente au point A lui est perpendiculaire. En déterminant la solution des équations de la déformation qui vérifie les conditions au point O ou bien celles au point A, l'auteur montre que pour un ensemble dénombrable des nombres $a = a^{(i)}$ on peut disposer des constantes arbitraires des deux solutions de façon à faire les coïncider. La surface qui correspond à un nombre $a^{(i)}$ admet une déformation infiniment petite au cours de laquelle le point O reste conique. *S. Finikoff* (Moscou).

Myller, A.: Propriétés des surfaces données en coordonnées semi-polaires par l'équation $r = \varphi(\omega) + \psi(z)$; leur génération, relation avec les surfaces moulures. Gaz. mat. **43**, 342—344 (1938) [Rumänisch].

Sasaki, Shigeo: Contributions to the affine and projective differential geometries of space curves. Jap. J. Math. **13**, 473—481 (1937).

Verf. dehnt seine früheren Untersuchungen (vgl. dies. Zbl. **16**, 223) auf die Raumkurven aus. Durch einen geeigneten Normierungsfaktor läßt sich die affine Normaldarstellung einer Kurve in die projektive Normaldarstellung überführen, wenn die Tangenten der Kurve keinem linearen Komplex angehören. Es werden die Kurven betrachtet, deren projektive und affine Haupt- und Binormale zusammenfallen. Der Schluß ist den W-Kurven gewidmet, die keinem linearen Komplex angehören. *W. Haack* (Karlsruhe).

Kanitani, Jôyô: Détermination d'une courbe au moyen des invariants fondamentaux. II. Mem. Ryojun Coll. Engrg **10**, 75—87 (1937).

(Comp. the papers by the same author, this Zbl. **14**, 278.) Let $\Gamma(t)$ be a curve referred to a canonical system of reference. Then the coefficients b, used in the papers mentioned above, may be expressed as polynomials in $\varphi\left(p, s, \frac{d}{dt}\right)\theta_p$, where φ are symbolic operators depending on integers p, s (and defined by recurrent formulas), while θ_p are the invariants of $\Gamma(t)$ introduced by author in the previous papers. *Hlavatý* (Princeton, U.S.A.).

Gore, G. D.: Transformations of a surface bearing a family of asymptotic curves. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 303—320 (1938).

Die Untersuchung ist ein Seitenstück zu den Ergebnissen von Levy (Eisenhart, Transformations of Surfaces, Princeton 1923). Sie bezieht sich auf den „parabolischen Fall", in welchem das konjugierte Netz auf einer Fläche im R_n durch eine (einzige) asymptotische Kurvenschar ersetzt wird. — Es sei $E(y) \equiv y_{uu} + a y_u + b y_v + c y = 0$, $b \neq 0$, eine parabolische Differentialgleichung und $S(y)$ eine zu $E(y)$ gehörige Fläche in R_n, unter (y) homogene Punktkoordinaten verstanden. Man zeigt, daß alle zu der Tangentenkongruenz von $v =$ konst. transversalen Flächen $\Sigma(x)$, auf denen $v =$ konst. wieder eine asymptotische Schar ist, aus der Darstellung $x = y R_u - y_u R$, $E(R) = 0$, zu gewinnen sind. — Man sagt, daß zwei zu denselben $S(y)$ gehörige $\Sigma_1(x), \Sigma_2(x)$ die Relation F' aufweisen. Die Aufstellung aller F'-Transformierten $S'(x)$ von $S(x)$ fordert zwei Lösungen zweier parabolischer Differentialgleichungen, von denen eine $E(x) = 0$ ist — und außerdem eine Quadratur. — Die Transformation F' gibt Anlaß zu einem Vertauschungssatz, der dem zur Ribaucourschen Transformation gehörigen Vertauschungssatz nachgebildet wird. — Wir erwähnen unter anderem noch die Sätze: 1. Die abbildende Geradenkongruenz (y, y_u) eines F'-Flächenpaares $\Sigma_1(x), \Sigma_2(x)$, wobei $\Sigma_1(x)$ auf einer M^2_{n-1} liegt, schneidet aus M^2_{n-1} eine weitere Fläche $\Sigma_3(x)$, die

zu den früheren in der Beziehung F' steht. 2. Der Schnitt jeder parabolischen Kongruenz (y, y_u) mit einem R_{n-1} ist eine Σ-Fläche, d. h. er trägt eine asymptotische Schar $v = \text{konst}$. *D. Barbilian* (Bucureşti).

Finikoff, S.: Surfaces dont les trièdres fondamentaux se coupent. Rec. math. Moscou, N. s. **2**, 627—662 u. franz. Zusammenfassung 663 (1937) [Russisch].

L'auteur envisage les propriétés des deux surfaces S et S' dont les lignes de courbure se correspondent et les tangentes aux lignes de courbure homologues se coupent. L'auteur étudie les cas possibles: 1. Les tangentes aux ligne de courbure et les normales se coupent. Les surfaces S et S' sont en transformation de Ribaucour. 2. Les normales ne se coupent pas. La droite F_1F_2 d'intersection de plans tangentes des surfaces S et S' en points correspondents engendre une congruence cyclique d'une infinité de manières, S et S' étant les surfaces orthogonales aux cycles de deux systèmes differents associés à la congruence (F_1F_2). *Nil Glagoleff* (Moscou).

Vincensini, Paul: Transformations de systèmes cycliques déduites de l'équation de Laplace. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **24**, 65—72 (1938).

Deux systèmes cycliques (C) et (C') sont transformés T l'un de l'autre si la figure de deux cercles homologues $[CC']$ a une forme invariable quel que soit le couple de cercles considéré. Exemples: 1° Les systèmes cycliques associés à deux surfaces pseudosphériques en transformation de Bäcklund. 2° Congruence cyclique normale et le système cyclique associé. 3° Les systèmes cycliques dont les cercles passent par un point fixe O et qui restent cycliques lorsqu'on fait tourner chaque cercle d'un angle constant autour de sa tangente en O [Ann. École norm. Sup. (3) **47**, 416 (1930)]. — L'auteur donne une autre solution du problème en déterminant tous les systèmes (C), (C') dont les cercles sont orthogonaux à un plan fixe p. Ce sont les systèmes de Darboux dont les deux points P, P_1 d'intersection de C avec p réalisent une correspondance conforme directe du plan. Si la figure $(P\,P_1\,P'\,P'_1)$ a une forme arbitraire mais invariante, les points $P'\,P'_1$ les cercles homologues C' du système transformé (C'). *S. Finikoff* (Moscou).

Pantazi, Al.: Sur la détermination du rang d'un tissu plan. C. R. Acad. Sci. Roum. **2**, 108—111 (1938).

Der Rang eines Gewebes aus n Kurvenscharen $u_i(x, y) = \text{const}$ ist die Dimension der linearen Schar der Relationen $\sum f_i(u_i) \equiv 0$. Es wird eine Methode angegeben, die die Bestimmung dieses Ranges lediglich durch Differentiieren und Auflösen linearer Gleichungen ermöglicht. Durch Integration eines vollständig integrierbaren Systems totaler Diff.-Gleichungen könnte auch eine Basis für die Schar der Relationen gefunden werden. Nebenbei ergibt sich wieder der Satz, daß der Rang $\leqq (n-1)(n-2)/2$ ist. *Lochs.*

Pinl, M.: Zur Existenztheorie und Klassifikation totalisotroper Flächen. Compositio Math. **5**, 208—238 (1937).

Be $\boldsymbol{x}(u^1, u^2)$ a surface immersed in an Euclidean n-dimensional space and $\boldsymbol{x}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r} \equiv \dfrac{\partial^r \boldsymbol{x}}{\partial u^{\alpha_1} \ldots \partial u^{\alpha_r}}$, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2)$. If $\boldsymbol{x}_\alpha \cdot \boldsymbol{x}_\beta = 0$ $g_{\alpha\beta\gamma\delta} = \boldsymbol{x}_{\alpha\beta} \cdot \boldsymbol{x}_{\gamma\delta} \neq 0$ then the surface is called (simply) total isotropic surface. According to seven projectively different canonical forms of $g_{\alpha\beta\gamma\delta}\, du^\alpha\, du^\beta\, du^\gamma\, du^\delta$ seven projectively different types, say $I, II, \ldots, VII$, of total isotropic surfaces may be distinguished. If ν is the dimensionality of the second osculating space (i.e. of the space defined by $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}_{\alpha\beta}$) then any corresponding total isotropic surface of kind $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} = I, \ldots, VII$), may be thought of as belonging to the "class" $(\mathfrak{a}, \nu, n)$, where obviously $3 \leqq \nu \leqq 5$. The author shows that for $n = 5, \ldots, 9$ the total amount of all classes is 33. Some of them were already discussed by the author himself in his previous papers. In this paper he finds concrete examples for the remaining classes. *Hlavatý* (Princeton, U. S. A.).

Sun, Tseying: On the complete set of identities for metric space. Tôhoku Math. J. **44**, 32—38 (1937).

The author gives the relations, which express the components of the metric normal

tensors in the metric curvature tensor and its covariant derivatives. By means of these relations a complete set of identities for the components of the covariant derivatives of the metric curvature tensor is obtained from the complete set of identities for the metric normal tensors. The proof is given by mathematical induction.

J. Haantjes (Delft).

Nazim, Ahmet: Über Finslersche Räume. München: Diss. 1936. 55 S.

Haimovici, M.: Le parallélisme dans les espaces de Finsler et la différentiation invariante de M. Levi-Civita. Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math. **24**, 214—218 (1938).

The author shows that choosing conveniently the function Δ in Levi-Civita's device [Differenziales segundas que se comportan de modo invariantivo. Rev. Hisp. Amer. **5**, 165—176 (1923)], one gets differentials of the privileged element which define Finsler's parallelism. A slight modification of the device mentioned above leads to the Cartan parallelism in a Finsler space. *Hlavatý* (Princeton, U. S. A.).

Sasaki, Shigeo: Non-Euclidean geometry in general space. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. **26**, 313—322 (1937).

The author generalizes Veblen's projective differential geometry of curved spaces [Ergebn. d. Math. **2** (1933)] for Finsler space. The main points of this method may be described as follows: (1) Starting with the generalized Veblen's transformation

$$x^{a'} = x^{a'}(x^1, \ldots, x^n), \quad x^{0'} = x^0 + \log\varrho(x, \dot{x}) \quad (a, b, c = 1, \ldots, n)$$

one introduces first the parameter $\dot{x}^0$ which is supposed to transform in such a way that $\dot{x}^{\nu'} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\lambda}\dot{x}^\lambda$ $(\nu, \lambda, \mu = 0, \ldots, n)$. — (2) If $G_{\lambda\mu}(x, \dot{x})$ is the given metric projective tensor, then the symmetric projective connection $\Pi^\nu_{\lambda\mu}$ for which $V_\omega G_{\lambda\mu} = 0$ is uniquely expressed by means of a basic connection $\Delta^\nu_{\lambda\mu}$ in the following way

$$\Pi^\nu_{\lambda\mu} = \left\{\begin{matrix}\nu\\ \lambda\mu\end{matrix}\right\}_G - \frac{1}{2}G^{\nu\sigma}\dot{x}^\tau\left(\frac{\partial}{\partial\dot{x}^\varkappa}G_{\sigma\mu}\delta^\alpha_\lambda + \frac{\partial}{\partial\dot{x}^\varkappa}G_{\lambda\sigma}\delta^\alpha_\mu - \frac{\partial}{\partial\dot{x}^\varkappa}G_{\lambda\mu}\delta^\alpha_\sigma\right)\Delta^\varkappa_{\alpha\tau}.$$

(One gets this result by applying the usual procedure to Ricci's lemma. Ref.) — (3) The connection Δ already mentioned may be defined by the following relations

$$\Delta^a_{bc} = B^a_{bc}, \quad \Delta^0_{bc} = \varphi_{(b,c)}, \quad \Delta^\nu_{\lambda 0} = \Delta^\nu_{0\lambda} = 0$$

where B^a_{bc} is the Berwald connection of the Finsler geometry associated with the integral

$$\int\sqrt{\left(\frac{G_{ab}}{G_{00}} - \frac{G_{a0}G_{b0}}{G^2_{00}}\right)\dot{x}^a\dot{x}^b}\,dt,$$

$\varphi_\lambda = \frac{G_{\lambda 0}}{G_{00}}$ and $\varphi_{b,c}$ is the covariant derivative of φ_b with respect to B^a_{bc}. The proof follows from the transformation law. *Hlavatý* (Princeton, U. S. A.).

Allgemeine metrische Geometrie, Integralgeometrie, Konvexes und Verwandtes:

Lévy, Paul: Sur la variation du maximum d'une fonction. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 228—229 (1938).

In Verallgemeinerung einer Formel von R. von Mises (vgl. dies. Zbl. **17**, 426) zeigt Verf.: Es sei E eine kompakte abgeschlossene Menge und $f(A)$ eine Funktion des Elementes A von E, die noch von einem Parameter λ abhängt, und zwar derart, daß $\Delta f(A) = g(A)\,d\lambda + o(d\lambda)$. Das Maximum von $f(A)$ auf E werde mit $\varphi(\lambda)$ bezeichnet; es möge etwa auf der Teilmenge E' angenommen werden. Ist dann $g(A)$ nach oben (unten) halbstetig, so besitzt $\varphi(\lambda)$ eine rechtsseitige (linksseitige) Ableitung, die gleich ist dem Maximum (Minimum) von $g(A)$ auf E'. *W. Feller* (Stockholm).

Golab, Stanislas: Sur la fonction représentant la distance d'un point variable à un ensemble fixe. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 406—408 (1938).

L'aut. complète les résultats de R. de Misès (voir ce Zbl. **17**, 426) dont l'origine est dans un théorème de Mandelbrojt (voir ce Zbl. **16**, 308). Etant donné un en-

semble fermé E de points dans un espace euclidien à n dimensions, la distance $f(M)$ d'un point M à E est le minimum de la distance $\varrho(M, X)$ de M aux points X de E. Si $f(M) > 0$, l'aut. dit avec Bouligand (Introduction à la géométrie infinitésimale directe, p. 92; voir ce Zbl. **5**, 375) que M est point ordinaire si $\varrho(M, X) = f(M)$ pour un seul X, dans le cas contraire, M est un point de multifurcation. Il démontre que: I. La condition nécessaire et suffisante pour que $f(M)$ possède en M une différentielle au sens de Stolz-Fréchet, est que M soit point ordinaire. II. En tout point de multifurcation, $f(M)$ admet une différentielle au sens de Gâteaux. L'aut. esquisse la démonstration dans le cas du plan; il s'appuie sur ses résultats antérieurs relatifs à l'existence de la différentielle totale [Ann. Soc. Polon. math. **16**, 31—40 (1937)]. (Note du Réf. Dans ce cas du plan, la seconde partie de I [condition suffisante], qu'on peut mettre sous forme entièrement géométrique en introduisant le gradient, semble découler, sans plus, de la démonstration du théorème de Mandelbrojt donnée par le Réf.) *G. Valiron* (Paris).

Bouligand, Georges: Sur la distance d'un point variable à un ensemble fixe. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 552—554 (1938).

L'aut. montre que les considérations développées par R. de Misès (voir ce Zbl. **17**, 426) et par S. Golab (voir le réf. préc.) et concernant l'existence de la dérivée dans une direction ou du gradient de la fonction de point représentant la plus courte distance d'un point à un ensemble fermé, peuvent être présentées, poursuivies et généralisées en utilisant sa terminologie (semi-continuité supérieure d'inclusion, accumulatif, contingent) et ses travaux antérieurs [voir surtout, Mém. Sci. math. **71** (1935); ce Zbl. **10**, 373]. Il entre dans le détail des raisonnements dans le cas de l'espace à trois dimensions et retrouve les théorèmes de S. Golab. Il signale que ses raisonnements se généralisent au cas où la métrique euclidienne est remplacée par une métrique de Finsler. *G. Valiron* (Paris).

Dvoretzky, Aryeh: Sur la base géométrique du théorème de M. Mandelbrojt et de théorèmes analogues. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 806—808 (1938).

Comme complément à ses recherches (voir ce Zbl. **17**, 72, et lire dans l'expression de $L_k(0)$, $\sqrt[m]{\ }$ au lieu de $\sqrt{\ }$) et à celles de de Misés (voir ce Zbl. **17**, 426) sur la base géométrique du théorème de Mandelbrojt (voir ce Zbl. **16**, 308), l'aut. généralise au cas de l'espace à N dimensions les propositions dont il s'était servi. Voici l'une de ces généralisations. Soit S un ensemble fermé de l'espace à N dimensions; attachons à chaque point s de S un nombre p_s qui est infini si s est point d'accumulation, infini ou entier positif si s est isolé. P désigne la somme de tous les p_s; $R(M, n)$ est le rayon de la sphère $\Sigma(M, n)$ de centre M, de rayon minimum, pour laquelle la somme des p_s pour les points s appartenant à $\Sigma(M, n)$ est supérieure ou égale à n. Soit Q un point pris sur une demidroite donnée MX issue de M. Si $n \leqq P$ et si $R(M, n) \neq 0$, le quotient de $R(Q, n) - R(M, n)$ par $\overline{MQ}$ a une limite lorsque Q tend vers M; cette limite est $-\cos\omega_n$, ω_n désignant l'angle minimum pour lequel la somme des p_s, étendue aux s intérieurs à $\Sigma(M, n)$ et aux s situés sur la surface de $\Sigma(M, n)$ et tels que $s\widehat{MX} \leqq \omega_n$, est au moins égale à n. *G. Valiron* (Paris).

Busemann, Herbert: On translations in general plane geometries. Amer. J. Math. **60**, 227—256 (1938).

Es wird ein zweidimensionaler Geradenraum Σ zugrunde gelegt (vgl. über diesen Begriff dies Zbl. **3**, 316). Unter einer Translation von Σ längs einer Geraden g wird eine isometrische (von selbst fixpunktfreie) Abbildung von Σ auf sich verstanden, die jede der beiden durch g bestimmten „Halbebenen" in sich überführt. Gegenstand der Arbeit ist die Frage, wieweit die Metrik durch die Forderung der Existenz von mehr und mehr Translationen eingeschränkt wird. Insbesondere werden hierbei die Beziehungen zum Desargueschen Satz und zum Parallelenaxiom erörtert. Auf diese Weise gelangt der Verf. u. a. zu einer neuen axiomatischen Charakterisierung

der Minkowskischen und der hyperbolischen Geometrie. — Eine wesentliche Rolle spielt hierbei der Begriff der Asymptote einer orientierten Geraden $\vec{g}$ durch einen Punkt P außerhalb g. Darunter wird die Grenzlage der Geraden PQ verstanden, wenn Q auf g im Sinne der Orientierung gegen ∞ strebt. Ob der Asymptotenbegriff im allgemeinen Fall symmetrisch ist, bleibt unentschieden. Fallen die beiden Asymptoten einer Geraden g durch P in dieselbe Gerade h, so heißt h die Parallele zu g durch P. — Zunächst wird die Annahme verfolgt, daß es „alle" Translationen längs einer Geraden g gibt, d. h. daß es zu jedem Punktepaar A, B auf g eine (und, wie leicht zu sehen, nur eine) Translation längs g gibt, die A in B überführt. Die Geometrien mit dieser Eigenschaft sind noch recht allgemein. Z. B. kann es vorkommen, daß die Linien konstanten Abstands r von g, deren jede, wie Verf. zeigt, mit g einen konvexen Bereich begrenzt, für ein $r_0 > 0$ und damit für alle $r < r_0$ Geraden, für $r > r_0$ aber keine Geraden sind. — Existieren alle Translationen längs zweier Geraden g und h und ist keine der Geraden g und h eine Asymptote (oder parallel) der anderen, so gilt der Desarguessche Satz und die Geometrie ist Minkowskisch oder hyperbolisch. Ist dagegen h Asymptote von g und, was hier folgt, g Asymptote von h, so braucht der Desarguessche Satz nicht zu gelten, nicht einmal wenn man außerdem das Parallelenaxiom in der euklidischen oder der hyperbolischen Form postuliert. Diese und eine Reihe ähnlicher negativer Aussagen werden durch explizite Angabe von Beispielen nachgewiesen. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Pauc, Chr.: L'inégalité triangulaire dans les espaces de Minkowski généralisés. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **26**, 369—374 (1937).

Im Anschluß an Alt (dies. Zbl. **16**, 374) diskutiert Verf. die Beziehungen zwischen der Gestalt des Eichkörpers (Konvexität im weiteren oder strengen Sinne) und der Gültigkeit des Gleichheitszeichens in der Dreiecksungleichung für nichtkollineare Punktetripel. Es läuft dies auf die Untersuchung der Linearitätsrichtungen der Distanzfunktion hinaus (vgl. Bonnesen-Fenchel, Theorie der konvexen Körper, S. 20). Für zweimal stetig differenzierbare Distanzfunktionen werden die betreffenden Bedingungen analytisch formuliert. Anwendung auf den Integranden eines Variationsproblems in Parameterdarstellung ergibt die Bedingung von Legendre-Clebsch für Quasiregularität bzw. Regularität auch bei nichtdefinitem Problem. *W. Fenchel.*

Aronszajn, N.: Sur quelques problèmes concernant les espaces de Minkowski et les espaces vectoriels généraux. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **26**, 374—376 (1937).

Ergebnisse von Alt und Pauc (vgl. vorst. Ref.) über verallgemeinerte Minkowskische Räume werden etwas anders begründet und auf Vektorräume unendlicher Dimension übertragen. Es handelt sich dann also um Banachsche Räume mit indefiniter Norm. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Lewy, Hans: On differential geometry in the large. I. (Minkowski's problem.) Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 258—270 (1938).

Es handelt sich um die Bestimmung einer geschlossenen konvexen Fläche B, für welche die Gaußsche Krümmung $K = K(n)$ als Funktion der inneren Normalenrichtung vorgeschrieben ist; dabei muß vorausgesetzt werden, daß $K(n)$ drei trivialerweise notwendige Integralrelationen erfüllt. Abgesehen von einem Eindeutigkeitssatz ist bisher nur bekannt, daß es eine Fläche B' gibt, für welche $K(n)$ die Krümmungsfunktion in einem verallgemeinerten Sinne ist, welche jedoch an sich nur dann mit der Gaußschen zusammenzufallen braucht, wenn B' hinreichend oft differenzierbar ist, worüber aber nichts bekannt ist. Verf. liefert einen Beweis für die Existenz einer analytischen Fläche B im Falle eines analytischen $K(n)$. Die Beweismethode ist völlig neu und beruht wesentlich auf einem Satz des Verf. über Differentialgleichungen vom Monge-Ampèreschen Typus (dies. Zbl. **17**, 211). Ist nämlich $Z = F(X, Y)$ die Cartesische Gleichung von B und wird $x = Z_X$, $y = Z_Y$ und $H(x, y) = -Z + xX + yY$

gesetzt, so genügt H der Differentialgleichung $H_{xx}H_{yy} - H_{xy}^2 = K^{-1}\{1 + x^2 + y^2\}^{-2}$. Es wird sodann gezeigt, daß wenn K analytisch von einem Parameter t abhängt und eine Lösung des Problems für $t = 0$ existiert, so auch für alle hinreichend kleinen $|t|$. — Verf. liefert auch einen eleganten neuen Eindeutigkeitsbeweis, der nach dem Vorgehen von Cohn-Vossen (Göttinger Nachr. **1927**) die Aufgabe auf die Bestimmung des Index eines Vektorfeldes zurückführt. *W. Feller* (Stockholm).

Vincensini, P.: Su una classe di funzioni convesse. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **26**, 366—368 (1937).

Verf. spricht das Resultat einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. **16**, 374; **18**, 42) für die Stützfunktionen der Körper aus (vgl. hierzu das zweitgenannte Referat). *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Behrend, Felix: Über die kleinste umbeschriebene und die größte einbeschriebene Ellipse eines konvexen Bereichs. Math. Ann. **115**, 379—411 (1938).

Weitgehende Untersuchung der umbeschriebenen Ellipse minimalen und der einbeschriebenen Ellipse maximalen Flächeninhalts (kurz: Umellipse und Inellipse) eines ebenen konvexen Bereichs. Entsprechende Ergebnisse für Bereiche mit Mittelpunkt hat der Verf. schon in einer früheren Arbeit erhalten (vgl. dies. Zbl. **15**, 367). Von den Resultaten seien die folgenden genannt: Die Umellipse und (im Gegensatz zum Inkreis) auch die Inellipse sind eindeutig bestimmt. Unter allen Bereichen gegebenen Inhalts hat das Dreieck und nur dieses die (dem Inhalt nach) größte Umellipse und die kleinste Inellipse. Ferner gelangt der Verf. zu einer Charakterisierung der Um- und Inellipse eines gegebenen Bereichs durch den Kontakt, d. h. die Gesamtheit der gemeinsamen Randpunkte und Sützgeraden von Ellipse und Bereich, sowie zu einem vollständigen Überblick über diejenigen Bereiche, für welche eine gegebene Ellipse Um- oder Inellipse ist. Die Beweise sind z. T. nicht kurz, verwenden aber nur elementare Hilfsmittel. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Robinson, R. M.: Note on convex regions on the sphere. Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 115—116 (1938).

Es sei G ein sphärisch-konvexer Bereich auf der Einheitskugel Ω (also speziell in einer Halbkugel enthalten) und G' der zu G diametrale Bereich; ferner sei G_1 der Bereich $\Omega - G - G'$. Dann enthält G oder G_1 einen Kreis vom sphärischen Radius $\operatorname{arctg}(\sqrt{3}/2)$, und diese Zahl kann durch keine größere Konstante ersetzt werden. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Auerbach, H.: Sur un problème de M. Ulam concernant l'équilibre des corps flottants. Studia Math. **7**, 121—142 (1938).

Ulam hat die Aufgabe gestellt zu entscheiden, ob es einen nichtkugelförmigen homogenen Körper mit gegebenem spezifischem Gewicht μ gibt, der in Wasser in jeder mit dem archimedischen Prinzip verträglichen Lage im Gleichgewicht schwimmt. Es läuft dies darauf hinaus, die homogenen Körper zu finden, bei denen die zu μ gehörige Auftriebsfläche eine Kugel mit dem Schwerpunkt als Mittelpunkt ist. Verf. behandelt das analoge ebene Problem, den Querschnitt eines homogenen Zylinders so zu bestimmen, daß der Zylinder in allen mit dem archimedischen Prinzip verträglichen Lagen, bei denen die Erzeugenden der Wasseroberfläche parallel sind, im Gleichgewicht schwimmt. Beschränkt man sich wie der Verf. auf konvexe Zylinder, so kann die Aufgabe auch so formuliert werden: Es sei μ mit $0 < \mu < 1$ gegeben. Man soll die ebenen konvexen Bereiche mit der folgenden Eigenschaft bestimmen: Ist F der Inhalt eines Bereichs, und schneidet man auf alle möglichen Weisen durch Sehnen Bereiche vom Inhalt μF ab, so soll der Ort der Schwerpunkte dieser abgeschnittenen Bereiche ein Kreis um den Schwerpunkt des ursprünglichen Bereichs sein. Verf. zeigt, daß die Randkurven dieser „Bereiche indifferenten Gleichgewichts" differenzierbar sind, daß die genannten Sehnen konstante Länge haben und von der Kurve Bögen konstanter Länge abschneiden, ferner daß eine solche Sehne mit den beiden Tangenten in ihren Endpunkten gleiche Winkel einschließt. Umgekehrt gilt: Hat eine konvexe

Kurve die Eigenschaft, daß die Sehnen einer gegebenen konstanten Länge Bögen konstanter Länge abschneiden, so ist sie eine Kurve indifferenten Gleichgewichts. Damit ist die Aufgabe auf eine schon früher (wenn auch noch nicht abschließend) behandelte zurückgeführt (vgl. insbes. Salkowski, dies. Zbl. **10**, 77, ferner Gericke, dies. Zbl. **12**, 119). Erschöpfend wird hier der Fall $\mu = \frac{1}{2}$ behandelt. Es handelt sich dann um die schon von Zindler [Mh. Math. Phys **31**, 25—57 (1921)] untersuchten, vom Verf. Z-Kurven genannten Kurven, bei denen alle den Inhalt halbierenden Sehnen auch den Umfang halbieren. Insbesondere hat Zindler schon die Existenz nichtkreisförmiger Z-Kurven nachgewiesen. Verf. bestimmt nun alle Z-Kurven auf folgende Weise: Es seien u der Winkel, den die variable, den Inhalt halbierende Sehne mit einer festen Richtung bildet, und $\vartheta(u)$ der Winkel zwischen dieser Sehne und der Tangente in einem ihrer Endpunkte. Dann werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, daß die Funktion $\vartheta(u)$ in der angegebenen Weise zu einer Z-Kurve gehört. Der Beweis operiert mit der Fourierentwicklung von $\vartheta(u)$. Schließlich wird ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen den Z-Kurven und den Kurven konstanter Breite nachgewiesen: Bewegt sich ein Quadrat so in seiner Ebene, daß die eine Diagonale stets inhaltshalbierende Sehne einer Z-Kurve ist, so fällt die andere Diagonale stets mit der Doppelnormalen einer Kurve konstanter Breite zusammen. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Santaló Sors, Luis A.: Integralgeometrie 7. Neue Anwendungen des Begriffs des kinematischen Maßes in der Ebene und im Raume. Rev. Acad. Ci. exact. Madrid **33**, 3—50 (1936) [Spanisch].

Es wird die Integralgeometrie in der ursprünglichen, von Crofton eingeschlagenen Richtung weitergeführt, d. h. es werden Einzelprobleme insbesondere über geometrische Wahrscheinlichkeiten gelöst. Während Crofton nur Punkt-, Geraden- und Ebenendichte verwendet hatte, zieht Verf. wie schon in früheren Arbeiten (vgl. dies. Zbl. **14**, 125) in erster Linie die kinematische Dichte heran. Dadurch wird es möglich, Mengen kongruenter Figuren, die weniger einfach sind als die von Crofton betrachteten, zu messen: z. B. Strecken derselben Länge, Winkel derselben Größe, Parallelstreifen derselben Breite usw. Insbesondere handelt es sich um die Mengen derjenigen Lagen einer solchen Figur, in denen sie eine gegebene (meistens, jedoch nicht immer als konvex vorausgesetzte) Kurve oder Fläche trifft. Man wird so auf Integralrelationen geführt, die die Maße der Figurenmengen mit den Invarianten der Kurven oder Flächen verknüpfen. Die zahlreichen, größtenteils neuen Ergebnisse können hier nicht im einzelnen wiedergegeben werden. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Topologie:

Bol, G.: Über eine kombinatorische Frage. Abh. math. Semin. Hansische Univ. **12**, 242—245 (1938).

Another proof is given of the fact that there are exactly n^{n-2} trees joining n given vertices. *Whitney* (Cambridge, Mass.).

Choquet, Gustave: Étude de certains réseaux de routes. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 310—313 (1938).

Given n towns in the plane, highway systems of minimum possible length joining them are considered, and some elementary properties are given. *Whitney.*

Fröhlich, W.: Beiträge zur Theorie der Zöpfe. I. Über eine besondere Klasse von Zöpfen. Math. Ann. **115**, 412—434 (1938).

Es werden dieselben speziellen Zöpfe wie in der dies. Zbl. **14**, 280 referierten Arbeit betrachtet und mit ähnlichen geometrischen Methoden wieder das Transformationsproblem für diese Zöpfe behandelt. Es ergibt sich, daß bei den ausgewählten Erzeugenden sich die Exponenten der Potenzprodukte bei Transformationen nur um ± 1 ändern können. *K. Reidemeister* (Marburg a. d. L.).

Terasaka, Hidetaka: Topologische Abbildungen und Kurvensysteme in R_n. Jap. J. Math. **14**, 1—13 (1937).

Theorems: A euclidean R^n can not be filled with a regular family [Whitney, Ann. of Math. **34** (1933); this Zbl. **6**, 371) of simple closed curves; R^n can however, when $n \geqq 3$, be filled with a family of simple closed curves such that just one curve passes thru each point. For $n \geqq 3$, R^n can be filled with a regular family of curves each of which is a simple closed curve or a bounded topological image of a euclidean line. For $n \geqq 3$ there exist bounded topological transformations of R_n into itself without fixed points. — Let t be an orientation preserving topological transformation of R^2 into itself such that the segment AB is never parallel to $tA\,tB$. The angle $(AB, tA\,tB)$ measured relative to a suitable positive direction is always between 0 and π. It there is an $\varepsilon > 0$ such that $\varepsilon < (AB, tA\,tB)$ for every A, B, then there is at least one fixed point. — R^3 can be filled with a family F of straight lines such that exactly one line passes thru each point, and no two are parallel. For every such F there is a plane which meets each line in a single point. *Smith* (New York).

Hall, D. W., and G. E. Schweigert: Non-n-alternating transformations. Duke math. J. **3**, 623—626 (1937).

A continuous transformation $T(A) = B$ is called non-n-alternating provided that for any two points x and y of B, there does not exist a set of at most n points in $A - T^{-1}(x)$ which separates two points of $T^{-1}(y)$ in $A - T^{-1}(x)$. For $n = 0$ this is the non-alternating transformation studied by the reviewer [see Amer. J. Math. **56**, 294—302 (1934); this Zbl. **9**, 88]. If A and B are compact, it is shown that T is non-n-alternating if and only if it is non-alternating on the complement of every subset of A containing at most n points. Furthermore, if A is separated between any pair of its points by some set of at most $n + 1$ points, B is non-degenerate and $T(A) = B$ is non-n-alternating ($n > 1$), then T is necessarily a homeomorphism. An example is given of a regular curve mapping under a non-alternating transformation into a curve which is not regular-indeed, not even hereditarily locally connected.

G. T. Whyburn (Virginia).

Lefschetz, S.: On the fixed point formula. Ann. of Math., II. s. **38**, 819—822 (1937).

An elementary proof of the author's theorem that a continuous single-valued transformation T of a compact metric locally connected space into itself leaves fixed at least one point if $\theta = \Sigma(-1)^p$ trace $y_p \neq 0$, where y_p is the transformation matrix for a p-dimensional homology basis with the rational numbers as a coefficient field. The situation is referred to an approximating simplicial complex Φ in which T induces a transformation carrying simplexes into simplexes; θ can then be replaced by a similar expression involving the transformation matrices for the simplexes of Φ.

P. A. Smith (New York).

Zaremba, Stanislas Christian: Sur l'indice de Kronecker. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 476—477 (1938).

Hinweis auf die Möglichkeit, die Kroneckersche Charakteristik i eines Vektorfeldes C, das auf der im R^{n+1} gelegenen Sphäre S^n angebracht ist und dort keine Singularität besitzt, folgendermaßen zu bestimmen: Man projiziere C normal auf S^n; es entsteht ein Tangentenfeld T von S^n, das Singularitäten an den Stellen hat, an denen C normal auf S^n steht; q sei die Summe der Indizes derjenigen Singularitäten von T, die von inneren Normalen der S^n herrühren; dann ist $i = 1 - q$. *H. Hopf.*

Freudenthal, Hans: Über die Klassen der Sphärenabbildungen. I. Große Dimensionen. Compositio Math. **5**, 299—314 (1937).

Let S^d be a d-sphere and let (d^e) denote the homotopy group $\pi_e(S^d)$ [Hurewicz, Proc. Akad. Amsterdam **38**, 112—119 (1935); this Zbl. **10**, 378]. The elements of (d^e) are essentially the classes of continuous representations of S^e on S^d. A homomorphic mapping $\mathfrak{E}$ of (d^e) into a subgroup of $(d + 1^{e+1})$ is defined as follows: if $f \in (d^e)$ so that $f(S^e) \subset S^d$, then, regarding S^e, S^d as equatorial spheres of S^{e+1}, S^{d+1}, let f be