Werk

Titel: Mengenlehre und reelle Funktionen

Jahr: 1938

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0017|log21

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

formation on the numerical characters of the algebraic loci of the space of the transformation. For a "symmetric Cremona transformation" the linear transformation is of the form: $x_0' = \alpha x_0 - \sum_{j=1}^{r} \beta x_j$, $x_i' = \delta x_0 - \sum_{j=1}^{r} \varepsilon x_j + (\varepsilon - \gamma) x_i$. The present paper treats quite generally involutorial transformations of the above type and studies the properties of the group $G_\varrho(r, \varepsilon, e)$ (where $e = \alpha - r\varepsilon = \pm 1$, as a consequence of the involutorial condition), generated by the $\binom{\varrho}{r}$ such transformations obtained by letting the variables x_i, $i > 0$, coincide with any r of given $\varrho > r$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$, the remaining variables being unaltered (the coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ are fixed). We point out the following result. The group under consideration has an absolute quadratic invariant $Q = \delta x_0^2 - \beta(x_1^2 + \cdots + x_\varrho^2)$, and an absolute linear invariant $L = r\delta x_0 - (\alpha - 1)(x_1 + \cdots + x_\varrho)$. The group is finite or infinite according as the linear space $L = 0$ cuts the quadric $Q = 0$ in a quadric without or with real points. *Zariski.*

Mann, Heinrich: Über die Erzeugung von Darstellungen von Gruppen durch Darstellungen von Untergruppen. Mh. Math. Phys. **46**, 74—83 (1937).

Sei Δ eine Darstellung einer Untergruppe $\mathfrak{H}$ der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$. Δ heißt invariant in $\mathfrak{G}$, wenn unter $\mathfrak{G}$ konjugierte Elemente aus $\mathfrak{H}$ bei Δ den gleichen Charakter haben. Wenn Δ invariant, $\Gamma(\Delta)$ die von Δ erzeugte Darstellung von $\mathfrak{G}$ und $\Delta = \sum_v a_v \Delta^{(v)}$, $\Gamma(\Delta) = \sum_u k_u \Gamma^{(u)}$, $\{\Gamma(\Delta)\} = \sum_i b_i \Delta^{(i)}$ die Zerlegungen in irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{H}$ sind, so werden die Ungleichungen 1. $\sum_u k_u^2 > \sum_v a_v^2 \geqq 1$ und 2. $\left(\sum_u k_u^2\right)^2 \leqq \sum_i b_i^2 \sum_v a_v^2$ bewiesen. Das Gleichheitszeichen gilt in 2. nur dann, wenn entweder Δ rationales Vielfaches der regulären Darstellung von $\mathfrak{H}$ oder wenn $\mathfrak{H}$ einen Normalteiler $\neq 1$ von $\mathfrak{G}$ enthält. Setzt man $\Delta = \{\Gamma^{(v)}\}$, so ergibt sich eine Bedingung dafür, daß $\mathfrak{H}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist. — Enthält eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ keinen Normalteiler $\neq 1$ von $\mathfrak{G}$, dann erzeugt die irr. Darstellung größten Grades von $\mathfrak{H}$ eine reduzible Darstellung von $\mathfrak{G}$. *Zassenhaus* (Hamburg).

Racah, G.: Sopra i tensori isotropi che presentano particolari simmetrie. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **25**, 475—480 (1937).

Es wird eine Methode angegeben, eine Tensordarstellung der dreidimensionalen Drehungsgruppe in irreduzible Darstellungen $D^{(l)}$ zu zerlegen. Die Methode besteht darin, daß man untersucht, wie viele linearunabhängige Tensoren es in der betrachteten linearen Schar gibt, welche bei einer Drehung um die z-Achse um den Winkel ψ den Faktor $e^{im\psi}$ annehmen. Ist $N(m)$ diese Anzahl, so kommt die Darstellung $D^{(l)}$ genau

$$a(l) = N(l) - N(l-1)\text{-mal}$$

in der vorgelegten Darstellung D vor. *van der Waerden* (Leipzig).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Hausdorff, F.: Die schlichten stetigen Bilder des Nullraums. Fundam. Math. **29**, 151—158 (1937).

Als Ergänzung einiger Sätze von Kuratowski (Fundam. Math. **22**, 206—220; dies. Zbl. **9**, 132) wird bewiesen: Jede verdichtete Menge der Lebesgueschen Klasse $F^{\alpha+1}$, $(\alpha > 0)$ entsteht aus dem Nullraum durch eine Abbildung der Klasse $(0, \alpha)$. Insbesondere ist also jede verdichtete $F_{\sigma\delta}$-Menge ein (0, 1)-Bild des Nullraumes. Alle Mengen sind dabei als Punktmengen eines vollständigen metrischen Raumes mit abzählbarer Basis vorausgesetzt, und „verdichtet" bedeutet: nur aus Verdichtungspunkten bestehend. Außerdem wird bewiesen: „Die mit dem Nullraum homöomorphen Räume sind identisch mit topologisch-vollständigen nulldimensionalen metrisierbaren Räumen mit abzählbarer Basis, die keine nichtleere kompakte offene Menge enthalten." *P. Alexandroff* (Moskau).

Sierpiński, W.: Sur les fonctions continues qui prennent chacune de leurs valeurs au plus $\aleph_0$ fois. Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr **3**, 75—78 (1936).

It is shown that if $f(x)$ is a continuous function of a real variable which takes each of its values at most $\aleph_0$ times, every interval contains a subinterval in which the function $f(x)$ is monotone. Furthermore, the set of all points at which $f(x)$ does not have a finite derivative is the sum of two sets of which one is non-dense and the other is of measure null. The result follows from the more general theorem: If $f(x)$ has the property of Darboux [$f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ implies $f(x)$ attains every value between y_1 and y_2 in the interval (x_1, x_2)] and if each of sets $E_x = [f(x) = c]$ where c is a real number is clairsemé every interval contains a subinterval in which the function $f(x)$ is monotone. *E. W. Chittenden* (Iowa).

Sierpiński, W.: Sur un problème de la théorie générale des ensembles concernant les familles boreliennes d'ensembles. Fundam. Math. **29**, 206—208 (1937).

Sei F eine über eine Mengenklasse $\mathfrak{K}$ definierte Mengenfolgenfunktion, die also jeder Mengenfolge $\{M_i\}$ aus $\mathfrak{K}$ eine bestimmte Menge $F\{M_i\}$ — und dadurch, als eine Mengenklassenfunktion betrachtet, jeder Mengenklasse $\mathfrak{K}$ die Mengenklasse $F(\mathfrak{K})$ von Mengen $F\{M_i\}$ — zuordnet. Gibt es dabei eine Menge N von Folgen natürlicher Zahlen derart, daß F in der Gestalt $F\{M_i\} = \sum_{\{n_i\} \in N} \prod_{i=1}^{\infty} \{M_{n_i}\}$ darstellbar ist, so wird F eine Hausdorffsche Funktion genannt (vgl. F. Hausdorff, Mengenlehre, 1927, S. 89, δs-Funktionen). Sei schließlich B die Borelsche Mengenfunktion, d. h. die jeder Mengenklasse $\mathfrak{K}$ die kleinste Mengenklasse als $B(\mathfrak{K})$ zuordnet, welche alle Mengen aus $\mathfrak{K}$ und alle abzählbare Summen und Durchschnitte von Mengen aus $B(\mathfrak{K})$ als Elemente enthält. Es ist bekannt, und zwar vom Verf. in Fundam. Math. **10**, 427 (1927) bewiesen, daß keine Hausdorffsche Funktion von der Eigenschaft $F(\mathfrak{K}) = B(\mathfrak{K})$ für alle $\mathfrak{K}$ ist, nicht aber, ob es überhaupt Mengenfolgenfunktionen von dieser Eigenschaft gibt. Nun löst Verf. das Problem positiv durch Angabe einer solchen Funktion, nämlich der folgenden: $F\{M_i\} = A\{M_{2i-1}\}$ oder $= M_1$, je nachdem $A\{M_{2i-1}\}$ zur Mengenklasse $B(\mathfrak{M})$ gehört oder nicht, wo $\mathfrak{M}$ die Klasse der Mengen M_{2i} und A die spezielle, zur Bildung von analytischen Mengen benützte Hausdorffsche Funktion bezeichnet. *B. Knaster.*

Ridder, J.: Cesàro-Perron integration. C. R. Soc. Sci. Varsovie **29**, 126—152 (1937).

En généralisant la notion de dérivée de Cesàro introduite par J. C. Burkill [Proc. London Math. Soc. (2) **34**, 314—322 (1932); ce Zbl. **5**, 392], l'auteur définit la dérivés approximatifs de Cesàro, inférieur $\underline{\mathrm{CD}}_{\mathrm{ap}} f(x)$ et supérieur $\overline{\mathrm{CD}}_{\mathrm{ap}} f(x)$, d'une fonction f, comme les limites d'indétermination de l'expression

$$\frac{\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x)}{\frac{1}{2}h};$$

lorsque ces deux nombres sont égaux, leur valeur commune est dite dérivée approximative de Cesàro et désignée par $\mathrm{CD}_{\mathrm{ap}} f(x)$. L'intégrale $\int_x^{x+h}$ est ici entendue comme l'intégrale (β) de Ridder, correspondant aux notions de dérivée approximative et de primitive approximativement continue [J. Ridder, Fundam. Math. **21**, 1—10 (1933); **22**, 136—162 (1934); ce Zbl. 8, 109 et **9**, 57]. Ces définitions conduisent à leur tour à une généralisation des notions de fonctions majorantes et minorantes, et ensuite à une méthode d'intégration généralisant celle de Cesàro-Perron définie par Burkill (l. c.). L'auteur étudie cette intégrale, en discutant en même temps les propriétés fondamentales des dérivés approximatifs de Cesàro. Citons, à titre d'exemple, l'énoncé suivant: Si pour une fonction f finie et intégrable (β) les dérivés $\underline{\mathrm{CD}}_{\mathrm{ap}} f(x)$ et $\overline{\mathrm{CD}}_{\mathrm{ap}} f(x)$ sont finis dans chaque point d'un ensemble mesurable E, la dérivée