Werk

Titel: Analysis

Jahr: 1937

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0016|log74

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

morph, wenn sie eineindeutig und Vereinigung und Durchschnitt erhaltend aufeinander abgebildet werden können; handelt es sich um Strukturen aus Untergruppen, so kann überdies die Forderung gestellt werden, daß für Paare einander entsprechender Untergruppen $A_1 > B_1$ und $A_2 > B_2$ die Indexgleichheit $(A_1 : B_1) = (A_2 : B_2)$ gilt, man spricht dann von starker Strukturisomorphie. Wenn die Untergruppe A normal in der Vereinigungsgruppe $[A, B]$ ist, so gilt bekanntlich der Isomorphiesatz $[A, B]/A \cong B/(A, B)$. Was kann man aussagen, wenn A nicht in $[A, B]$ normal ist? Allgemein gilt die Indexrelation $([A, B] : A) \geqq (B : (A, B))$. Sind A und B vertauschbar, d. h. ist $AB = BA = [A, B]$, so können die Restklassen von $[A, B]$ nach A denen von B nach (A, B) umkehrbar eindeutig zugeordnet werden durch $b(A, B) \leftrightarrow bA$. Diese Zuordnung ist genau dann ein Strukturisomorphismus, wenn für $[A, B] \geqq \bar{A} \geqq A$ und $B \geqq \bar{B} \geqq (A, B)$ stets $\bar{A} = [A, (B, \bar{A})]$, $\bar{B} = (B, [A, \bar{B}])$ gilt; sie ist ein starker Strukturisomorphismus, wenn A mit allen Untergruppen von B vertauschbar ist. Wenn die Untergruppe A von G mit allen Untergruppen von G vertauschbar ist, so heißt sie quasinormal in G. Es gilt also dem Isomorphiesatz entsprechend: Ist A in $[A, B]$ quasinormal, so ist (A, B) in B quasinormal und $[A, B]/A$ ist mit $B/(A, B)$ stark strukturisomorph. Auch das Zassenhaussche Lemma kann für quasinormale Gruppen ausgesprochen werden. Das Quasizentrum einer Gruppe besteht aus allen zyklischen Gruppen, die mit allen Untergruppen vertauschbar sind, es umfaßt Zentrum und Kern. Die alternierende Gruppe von $n > 4$ Zeichen hat keine echten quasinormalen Untergruppen. Hat man zwei Untergruppenketten $A = B_0 > B_1 > \cdots > B_r = B$ und $A = C_0 > C_1 > \cdots > C_s = B$ in einer Gruppe G, so kann man Analoga des Schreierschen Verfeinerungssatzes beweisen: Ist jedes B_i mit allen (B_{i-1}, C_j), $j = 0, 1, \ldots, s$ und jedes C_j mit allen (C_{j-1}, B_i), $i = 0, 1, \ldots, r$ vertauschbar, so gibt es Verfeinerungen beider Ketten mit der gleichen Bedingung, so daß die neuen Quotienten B_i/B_{i+1} und C_j/C_{j+1} einander so umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können, daß entsprechende Quotienten gleiche Indizes haben. Das gleiche gilt, wenn man die schärfere Bedingung einführt, daß jedes B_i mit jedem C_j vertauschbar ist. Verlangt man aber, daß B_i quasinormal in B_{i-1} ist, so werden entsprechende Quotienten der beiden Verfeinerungen stark strukturisomorph. Schließlich werden für Normalteiler Sätze von der Art des Zassenhausschen Lemmas bewiesen. *Deuring* (Jena).

Analysis.

Seitz, George: Une remarque aux inégalités. Aktuár. Vědy **6**, 167—171 (1937).

Es sei (a_{ik}) eine rechteckige Matrix. Dann gilt mit 4 Variablenreihen x_i, y_i, z_k, u_k $(i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$ die Identität

$$\begin{vmatrix} \sum a_{ik} x_i z_k & \sum a_{ik} x_i u_k \\ \sum a_{ik} y_i z_k & \sum a_{ik} y_i u_k \end{vmatrix} = \sum \begin{vmatrix} x_\mu & x_\nu \\ y_\mu & y_\nu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{\mu\varrho} & a_{\mu\sigma} \\ a_{\nu\varrho} & a_{\nu\sigma} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_\varrho & u_\varrho \\ z_\sigma & u_\sigma \end{vmatrix}, \qquad \begin{matrix} 1 \leqq \mu < \nu \leqq m \\ 1 \leqq \varrho < \sigma \leqq n \end{matrix}$$

Ist für diese $\mu, \nu, \varrho, \sigma$ stets

$$\begin{vmatrix} x_\mu & x_\nu \\ y_\mu & y_\nu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_\varrho & u_\varrho \\ z_\sigma & u_\sigma \end{vmatrix} \geqq 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{\mu\varrho} & a_{\mu\sigma} \\ a_{\nu\varrho} & a_{\nu\sigma} \end{vmatrix} \geqq 0,$$

so folgt, daß die linke Seite $\geqq 0$ ist. Durch geeignete Spezialisierungen lassen sich hieraus mehrere bekannte Ungleichungen, u. a. die Tschebyscheffsche, gewinnen. (Sinnstörende Druckfehler bei den Indizes.) *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Beckenbach, E. F.: Generalized convex functions. Bull. Amer. Math. Soc. **43**, 363—371 (1937).

In $a < x < b$ sei eine zweiparametrische Schar $F(x; \alpha, \beta)$ von stetigen Funktionen mit der Eigenschaft gegeben, daß es zu x_1, x_2, y_1, y_2 mit $a < x_1 < x_2 < b$ genau eine dieser Funktionen gibt, für die

$$F(x_1; \alpha, \beta) = y_1, \qquad F(x_2; \alpha, \beta) = y_2$$

ist. Man kann dann den Begriff der konvexen Funktion folgendermaßen verallge-

meinern, was für spezielle $F(x; \alpha, \beta)$ schon mehrfach geschehen ist: Die Funktion $f(x)$ heiße konvex in bezug auf die Schar F, wenn sie in jedem Teilintervall von $a < x < b$ nicht größer als diejenige Funktion F ist, die mit ihr in den Endpunkten des Teilintervalls übereinstimmt. — Für solche Funktionen $f(x)$ werden die Analoga zu einigen einfachen Eigenschaften gewöhnlicher konvexer Funktionen, insbesondere ihre Stetigkeit, bewiesen. Der Haupthilfssatz bringt die stetige Abhängigkeit der im obigen Sinne durch x_1, x_2, y_1, y_2 bestimmten Funktion F von diesen Größen zum Ausdruck.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Malchair, Henri: Sur les suites non croissantes de fonctions sousharmoniques. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **6**, 163—167 (1937).

Soit dans un domaine D une suite non croissante de fcts. sousharmoniques $f_n(x, y)$ admettant des plus petites majorantes harmoniques $\alpha_n(x, y)$ et supposons la limite de f_n non partout infinie soit $f(x, y)$ (nécessairement s.h.). Alors $f(x, y)$ admet une plus petite maj. harm. au plus égale à la fonction $\lim \alpha_n$. L'auteur donne de cette fct. $\lim \alpha_n$ quelques propriétés de comparaison avec les $f_n(x, y)$. *Brelot* (Alger).

Malchair, Henri: Sur les meilleures majorantes harmoniques et les plus petites majorantes harmoniques des fonctions sousharmoniques. Mém. Soc. Roy. Sci. Liége, IV. s. **1**, 1—20 (1936).

L'auteur poursuit son étude (ce Zbl. **14**, 22) des suites u_n de fonctions sousharmoniques quant à l'allure des plus petites et meilleures majorantes harmoniques. Si $u_n \to u$ uniformément dans D, la meilleure maj. harm. $\bar{u}_n$ dans D' complètement intérieur converge (unif.) vers la meilleure maj. harm. $\bar{u}$. Si $u_n \nearrow u$ (s.h. et admettant une p.p. maj. harm. u^*), alors $u_n^* \nearrow u^*$. Le théor. IV (si $u_n \searrow u$, $u_n^* \searrow u^*$) est inexact car il entraînerait l'identité des meill. et p.p. maj. harm. dans un domaine D' quelconque. Si $u_n \searrow u$ et si D' est dom. de Dirichlet, $\bar{u}_n \searrow \bar{u}$ (la démonstration s'étend aussitôt à D' quelconque). Si $u_n \nearrow u$ s.h. et si D' est domaine de Dirichlet, $\bar{u}_n \nearrow \bar{u}$ (la dém. demande comme complément immédiat l'application de l'identité des meill. et p.p. maj. harm. pour un domaine D' de Dirichlet). *M. Brelot* (Alger).

Kantorovič, L.: On the moment problem for a finite interval. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **14**, 531—537 (1937).

In the first §§ 1—3 the author discusses necessary and sufficient conditions in order that the Hausdorff moment problem (*) $\int_0^1 x_k dg(x) = \mu_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ have a solution $g(x)$ which is (1) non-decreasing, (2) an integral of a bounded function, (3) an integral of a function εL_p. It should be observed that author's method in (1) (via Bernstein's polynomials) is not new; it was used by Hildebrandt (this Zbl. **4**, 207) for solutions of bounded variations, and the result follows from that of Hildebrandt. The method and result in (2) are those of Hausdorff [Math. Z. **16**, 237 (1923)]. Case (3) was treated also by Hausdorff and Boas (this Zbl. **13**, 256) by different methods with different (formally) final results. In § 4 the author proves that a linear positive functional defined over a linear manifold of the space M of bounded measurable functions, containing the element 1, can be extended to a positive linear functional over M, the proof being analogous to that of the classical theorem of Hahn-Banach. This extension theorem is applied in § 5 to the "finite moment problem" of Markoff [(*) with $k = 0, 1, 2, \ldots, n$] allowing a simplified treatment of two problems discussed by Achyeser and Krein (this Zbl. **12**, 293 and **13**, 109).

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

Jackson, Dunham: Polynomial approximation on a curve of the fourth degree. Bull. Amer. Math. Soc. **43**, 388—393 (1937).

Soit $P(x, y)$ un polynome de degré n. Si l'on a sur la courbe C ayant pour équation $x^4 + y^4 = 1$, $|P(x, y)| \leqq L$,

il existe une constante absolue A, telle que l'on a sur la même courbe

$$\left|\frac{d}{ds}P(x, y)\right| \leqq AnL,$$

où s désigne la longueur de la courbe à partir d'un point donné. Après avoir établi ce résultat, l'auteur en déduit que la suite des polynomes $P_n(x, y)$ rendant minimum l'intégrale

$$\int_c |f(s) - P_n(x, y)|^m ds \qquad (m > 1)$$

converge uniformément vers la fonction $f(s)$ sur C, sous la condition que $f(s)$ satisfait à la condition de Lipschitz. La méthode s'applique à des cas plus généraux.

Serge Bernstein (Leningrad).

Chlodovsky, I.: Sur le développement des fonctions définies dans un intervalle infini en séries de polynômes de M. S. Bernstein. Compositio Math. **4**, 380—393 (1937).

Soit une fonction $f(x)$ définie dans $0 \leqq x < \infty$ et soient $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ une suite croissante de nombres positifs et tels que $h_n \to \infty$. L'au. considère la suite de polynomes

$$B_n[f(x), h_n] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{h_n k}{n}\right)\left(\frac{x}{h_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{h_n}\right)^{n-k}$$

qui réprésente une modification convenable de la suite de polynomes de S. Bernstein et démontre des théorèmes pour l'approximation de la fonction $f(x)$ par les polynomes $B_n[f(x), h_n]$. Citons le résultat suivant: Supposons que l'expression $\mu(h_n)\, e^{-\alpha^2 n/h_n}$, où $\mu(h_n) = \max|f(x)|$ pour $0 \leqq x < h_n$, tende vers zéro pour chaque $\alpha \neq 0$ quand n croît indéfiniment. Si $f(x)$ est continue au point x, il existe pour cette valeur de x et pour chaque $\varepsilon > 0$ aussi petit qu'on veut un entier N tel que pour tous les $n > N$ on a l'inégalité $|f(x) - B_n[f, h_n]| < \varepsilon$. Il tire d'ici un théorème pour la convergence uniforme de ces polynomes dans l'intervalle $0 < a \leqq x \leqq b < \infty$, et étudie aussi le cas où $f(x)$ est une fonction entière d'ordre fini p et les nombres h_n vérifient les inégalités $h_n < n^{1/p+1+\varepsilon}$. Dans ce cas la convergence est uniforme vers $f(x)$ dans chaque cercle de rayon fini. La démonstration est basée sur les inégalités généralisées de Tchebycheff, qu'on utilise souvent dans la théorie des probabilités. *Obrechkoff.*

Koulik, S.: Les polynômes orthogonaux en connexion avec certains schèmes de distributions discrètes de probabilités. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr **1**, 89—134 u. franz. Zusammenfassung 135—136 (1937) [Ukrainisch].

L'au. s'occupe avec les polynomes orthogonaux $\varphi_m(x)$, vérifiant les conditions $\sum_{x=0}^{n} p(x)\, \varphi_k(x)\, \varphi_s(x) = \varepsilon_{ks}$, $\varepsilon_{ks} = 0$ pour $s \neq k$, $\varepsilon_{kx} = 1$, où $p(x) > 0$ est définie pour $x = 0, 1, 2, \ldots, n$. Il considère les cas, où $p(x)$ représente les lois connues tirées de la théorie des probabilités. Il trouve des formules de dépendances récurrentes entre trois polynomes, des équations linéaires aux différences finies, des répresentations au moyen de la fonction hypergéométrique. Citons par exemple les polynomes $\varphi_m(x)$ qui appartiennent à la fonction $p(x) = \binom{n}{x}(s-1)^{n-x}/s^n$. On a dans ce cas: $\varphi_m(x) = \left[\binom{n}{m}(s-1)^m\right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{m} (1-s)^i \binom{n-x}{m-i}\binom{x}{i}$. A la fin du travail est donnée la généralisation de tous les résultats précédents, en considérant les polynomes avec la fonction caractéristique

$$p(x) = \binom{n}{x} \frac{a(a+\varrho)\ldots(a+\overline{x-1}\,\varrho)\, b(b+\varrho)\ldots(b-\overline{n-x-1}\,\varrho)}{(a+b)(a+b+\varrho)\ldots(a+b+\overline{n-1}\,\varrho)},$$

qui est la loi de Pólya.

N. Obrechkoff (Sofia).

Reihen:

Hornich, Hans: Über gewisse bedingt konvergente Produkte und Reihen. Mh. Math. Phys. **45**, 351—357 (1937).

Etant données dans le plan E de la variable complexe deux suites $\{\alpha_i\}$ et $\{\beta_i\}$ de

nombres bornés en module par R, si l'on designe par M l'ensemble des points α_i et de leurs points d'accumulation, si l'on suppose que $\sum_i (\alpha_i^x - \beta_i^x)$ converge quel que soit x, et converge absolument à partir de la valeur $n-1$ de x (il suffit pour celà que la convergence absolue soit réalisée pour $x = n-1$ et $x = n$), alors: 1° le produit $\prod_i \frac{\vartheta - \beta_i}{\vartheta - \alpha_i}$ converge simplement en tout point de $E - M$ et y représente une fonction régulière; 2° pour $|\vartheta| > R$, on a $\prod_i \frac{\vartheta - \beta_i}{\vartheta - \alpha_i} = e^{\sum_x \frac{1}{\vartheta^x} \sum_i \frac{\alpha_i^x - \beta_i^x}{x}}$; 3° par interversion de l'ordre des facteurs, on obtient des fonctions différent entre elles par des facteurs de la forme $e^{\frac{a_1}{\vartheta} + \frac{a_2}{\vartheta^2} + \cdots + \frac{a_{n-2}}{\vartheta^{n-2}}}$. *E. Blanc* (Paris).

Hornich, Hans: Über Reihen, deren Glieder gegen Null konvergieren. Mh. Math. Phys. **45**, 432—434 (1937).

Si $a_j \to 0$ et si $\sum_j |a_j|$ diverge, on peut toujours trouver une suite d'entiers l_j, telle que la série $\sum_j a_j e^{\frac{2\pi i l_j}{n}}$ converge vers un nombre donné A absolument quelconque, n étant un entier donné $\geqq 3$. *E. Blanc* (Paris).

Ganapathy Iyer, V.: On summation-processes in general. J. Indian Math. Soc., N. s. **2**, 222—238 (1937).

It has been proved by R. P. Agnew (this Zbl. **3**, 55) that a non-convergent bounded sequence could be transformed into any given bounded sequence by a Toeplitz matrix; also that any unbounded sequence could be converted into any other sequence by such a matrix. It follows from these results that any given sequence could be converted into a convergent sequence by some summation-process. In this paper it is proved that any finite or enumerably infinite set of sequences could be transformed simultaneously into convergent sequences by a Toeplitz matrix. On the other hand it is shown that no such matrix can convert even a very restricted sub-class of bounded sequences into convergent sequences simultaneously. Not even an enumerably infinite number of such matrices can effect such a transformation. *Auszug.*

Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:

Heeke, E.: Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. II. Math. Ann. **114**, 316—351 (1937).

Teil I s. dies. Zbl. **15**, 402. In Teil II wird die Theorie für Modulfunktionen höherer Stufe entwickelt. Die Operatoren T_n für die Modulfunktionen der Dimension $-k$ und der Stufe Q (Fkt. $(-k, Q)$) werden für jede Stufe Q gesondert erklärt. Das geht ohne Schwierigkeiten für $(n, Q) = 1$. Für $(n, Q) > 1$ erweist es sich als notwendig, die lineare Schar der Fkt. $(-k, Q)$ in Teilscharen zu zerlegen, für die die T_n einzeln angesetzt werden. Eine Fkt. $(-k, Q)$ heißt vom Teiler t, wenn die in ihrer Potenzreihe vorkommenden Exponenten mit Q den größten gemeinsamen Teiler t haben. Die Fkt. vom Teiler t werden weiter unterschieden nach dem Verhalten bei den Modulsubstitutionen R_n, die durch $R_n \equiv \begin{pmatrix} n^{-1} & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\, Q)$ bis auf Faktoren aus der Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(Q)$ erklärt sind. Eine Fkt. vom Teiler t heißt normiert, wenn sie Eigenfunktion für alle R_n ist, $F|R_n = \varepsilon(n)F$, der Faktor $\varepsilon(n)$ heißt der Charakter von F. Für die Schar aller Fkt. $(-k, Q)$ vom Teiler t und vom Charakter ε können die Operatoren T_m^t mit $\left(m, \frac{Q}{t}\right) = 1$ folgendermaßen erklärt werden:

$$F(\tau)|T_m^t = m^{k-1} \sum_{\substack{a\,d = m \\ b \bmod d \\ d > 0}} \varepsilon(a) F\left(\frac{a\tau + \frac{bQ}{t}}{d}\right) d^{-k}.$$

Die F_m spannen einen kommutativen Operatorenring über dem Körper der komplexen Zahlen auf. Ist $F^1, \ldots, F^\varkappa$ eine Basis der Linearschar, $F^\varrho \mid T_m^t = \sum_\sigma \lambda_{\varrho\sigma}(n) F^\sigma$, und gelten die Entwicklungen $F^\varrho(\tau) = \sum_{m \geqq 0} a^\varrho(m)\, e^{\frac{2\pi i \tau}{Q} mt}$, so gibt es $\varkappa$ konstante Matrizen B^ν mit $\lambda(m) = (\lambda_{\varrho\sigma}(m)) = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} a^\nu(m)\, \mathsf{B}^\nu$, und die Matrix $\Phi(s) = \sum_\nu \varphi^{(\nu)}(s)\, \mathsf{B}^\nu$, die man aus den zugeordneten Dirichletreihen $\varphi^{(\nu)}(s) = \sum_{m \geqq 1} a^\nu(m)(mt)^{-s}$ bilden kann, hat die Produktentwicklung

$$\Phi(s) = \prod_p (\mathsf{E} - \lambda(p) p^{-s} + \varepsilon(p) p^{k-1-2s} \mathsf{E})^{-1}.$$

Die Eigenfunktionen des Operatorenrings geben Anlaß zu einzelnen Dirichletreihen mit Produktentwicklung, aber umgekehrt gilt auch, daß eine Modulform, deren zugeordnete Dirichletreihe ein Eulerprodukt hat, Eigenfunktion eines Operatorenrings mit passendem t ist. Die Schar der Fkt. $(-k, Q)$ vom Teiler t und vom Charakter ε zerfällt in zwei operatorinvariante Teilscharen: Spitzenformen $S(t, \varepsilon, Q)$ und Eisensteinreihen $E(t, \varepsilon, Q)$. Die Dirichletreihen zu den $E(t, \varepsilon, Q)$ sind linear äquivalent zu den Reihen $(t_1 t_2)^{-s} L(s, \chi_1) L(s-k+1, \chi_2)$, wo $t_i \mid Q, \chi_i$ Charakter mod Q/t_i, $\chi_1 \chi_2(-1) = (-1)^k$, $L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi(m) m^{-s}$ und für $k = 2$ nicht gleichzeitig $\chi_1 = 1$ und $Q = t_2$ ist. Die Reduktion der Matrix $\Phi(s)$ oder besser der zugeordneten Matrix $\mathsf{B}(\tau)$ von Modulformen kann mittels der Darstellungstheorie der Modulargruppe $\overline{\Gamma}(1)/\overline{\Gamma}(Q)$ noch weiter getrieben werden: Da nämlich die Fkt. $(-k, Q)$ durch beliebige Modulsubstitutionen unter sich linear transformiert werden, aber bei $\overline{\Gamma}(Q)$ invariant sind, so setzen sie sich bei der vollen Modulgruppe nach einer Darstellung der Modulargruppe modulo Q um, so daß die Schar der Fkt. $(-k, Q)$ nach irreduziblen Darstellungen der Modulgruppe zerlegt werden kann. Für Primzahlstufe Q wird die Theorie ins einzelne verfolgt. Die Fülle der Ergebnisse hier zu schildern, ist nicht möglich, es sei nur der folgende Satz angeführt: q sei eine Primzahl $\equiv 3 \pmod 4$. Die Zetafunktion des Körpers $K(\sqrt{-q})$ ist die Dirichletreihe derjenigen eindeutig bestimmten Modulform von der Art $(-1, Q)$, welche charakteristische Wurzel der Matrizen $\mathsf{B}(\tau)$ zu gewissen Darstellungen $\mathfrak{G}^{(1)}_{\frac{q+1}{2}} + \mathfrak{G}^{(2)}_{\frac{q+1}{2}}$ der Modulargruppe mod q ist und bei $\tau = \infty$ nicht verschwindet. *Deuring* (Jena).

Jessen, Børge: Über die Säkularkonstante einer fastperiodischen Funktion. Mat. Tidsskr. B **1937**, 45—48 [Dänisch].

Zu jeder der Null nicht beliebig nahekommenden fp. Funktion $f(t)$ gibt es eine „Säkularkonstante" c derart, daß die Differenz von $\arg f(t)$ und ct fp. ist. Dieser zuerst vom Ref. als Vermutung formulierte Bohrsche Satz kann dadurch ergänzt werden, daß c im Modul der Exponenten λ_n von $f(t)$ liegen muß (H. Bohr, dies. Zbl. **5**, 63). Der Verf. fügt hinzu, daß c zwischen der oberen und unteren Grenze aller λ_n liegt. Der Beweis erfordert unter Benutzung des verschärften Approximationssatzes eine elementar-kinematische Überlegung und kann derart gestaltet werden, daß im Falle einer der Null nicht beliebig nahekommenden analytischen fp. Funktion $f(s) = f(\sigma + it)$ sich $c = c(\sigma)$ als monoton nicht abnehmend erweist (vgl. dazu eine Arbeit des Verf., dies. Zbl. **7**, 156). *Wintner* (Baltimore).

Fenchel, Werner: Über Bewegungen, die bis auf orthogonale Transformationen fastperiodisch sind. Mat. Tidsskr. B **1937**, 75—80 [Dänisch].

Es sei $(x_1, \ldots, x_n) = x = x(t)$, $-\infty < t < +\infty$, eine stetige Vektorfunktion mit der Eigenschaft, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine relativ dichte Menge von Verschiebungszahlen τ gibt derart, daß der euklidische Abstand der beiden Punkte $x(t+\tau)$, $Dx(t)$ für eine passend gewählte Bewegung $D = D(\tau; \varepsilon)$ des n-dimensionalen Raumes und für alle t kleiner als ε ist (vgl. Verf. und Jessen, dies. Zbl. **11**, 346). Es wird gezeigt, daß es dann einen konstanten Vektor c gibt derart, daß die n Komponenten der Vektor-

funktion $x(t) - ct$ im Bohrschen Sinne fp. sind. Für $n = 1$ ist der Satz im wesentlichen mit einem Bohrschen identisch (vgl. das vorst. Ref.). *Wintner* (Baltimore).

Spezielle Funktionen:

McLachlan, N. W., and A. L. Meyers: Operational forms for Bessel and Struve functions. Philos. Mag. **23**, 918—925 (1937).

A table is given of 32 operational forms of Bessel functions of various types; a second table gives 19 Operational forms of Struve functions and functions associated with them. Contour integrals are then given for the Struve functions, a typical integral being (for $t > 0$)

$$H_0(t) = (1/\pi^2 i) \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(z - t^2/4z) \log[(2z + t)/(2z - t)]\, dz/z.$$

The paper ends with a table of 10 operational forms of integral Bessel functions.
H. Bateman (Pasadena).

Mayr, Karl: Über die Lösung algebraischer Gleichungssysteme durch hypergeometrische Funktionen. Mh. Math. Phys. **45**, 280—313 (1937).

Mayr, Karl: Berichtigung der Arbeit: „Über die Lösung algebraischer Gleichungssysteme durch hypergeometrische Funktionen". (Mh. f. Math. u. Phys., Bd. 45, S. 280—313.) Mh. Math. Phys. **45**, 435 (1937).

Im Gegensatz zu den bisher angewandten Methoden zur Lösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Funktionen, deren Veränderliche die Gleichungskoeffizienten sind, stellt der Verf. das System der Differentialgleichungen an die Spitze, dem die gesuchte Lösung genügt. Er kann es unmittelbar aus der algebraischen Gleichung gewinnen und konstruiert auf Grund dieses Systems die gesuchte Lösung der algebraischen Gleichung. Im Fall einer Gleichung mit einer Unbekannten

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n = 0$$

wird x auf die Form

$$x = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \varphi\left\{\frac{\lambda_2 \lambda_0}{\lambda_1^2}, \frac{\lambda_3 \lambda_0^2}{\lambda_1^3}, \cdots \frac{\lambda_n \lambda_0^{n-1}}{\lambda_1^n}\right\}$$

gebracht und für die von $(n - 1)$ Veränderlichen abhängige Funktion φ ein System von $(n - 1)$ Differentialgleichungen angegeben, aus denen sich φ, nach hypergeometrischen Funktionen entwickelt, bestimmen läßt. Der Vorteil dieser Methode beruht darin, daß sie unmittelbar auch auf Systeme algebraischer Gleichungen anwendbar ist und daß sie jede beliebige Wurzel liefert. Der Verf. gibt für einige algebraische Systeme die entsprechenden Differentialgleichungen an und zeigt die Methode, nach der man mit Hilfe dieser Systeme die durch bestimmte Bedingungen charakterisierten Wurzeln finden kann. *v. Koppenfels* (Hannover).

Erdélyi, Artur: Funktionalrelationen mit konfluenten hypergeometrischen Funktionen. II. Mitt. Reihenentwicklungen. Math. Z. **42**, 641—670 (1937).

The author gives a great number of expansions in series, whose terms are confluent hypergeometric functions and whose sum can be expressed in a closed form. They include as particular cases expansions in series of Bessel functions, parabolic-cylinder functions, and the polynomials of Laguerre and Bateman: some of them were already known, but the majority are new, and many of them are very striking and may prove to be important in those branches of mathematical physics (e.g. wave-mechanics) in which confluent hypergeometric functions are used. The series are of the three types

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r N_{k+r,m}(t), \quad \sum_{r=0}^{\infty} a_r N_{k,m+r}(t), \quad \sum_{r=0}^{\infty} a_r N_{k+\frac{r}{2},m+\frac{r}{2}}(t)$$

where the coefficients a_r are independent of t, and $N_{k,m}(t)$ is the confluent hypergeometric function

$$N_{k,m}(t) = \frac{t^{2m} e^{-\frac{1}{2}t}}{\Gamma(2m+1)}\left\{1 + \frac{m + \frac{1}{2} - k}{1!\,(2m+1)}\, t + \frac{(m + \frac{1}{2} - k)(m + \frac{3}{2} - k)}{2!\,(2m+1)(2m+2)}\, t^2 + \cdots\right\}.$$

The series of the first type converge, like trigonometric series, in a strip parallel to the real axis of the t-plane, while series of the second and third types converge like power-series. (I. see this Zbl. **15**, 211.) *Whittaker* (Edinburgh).

Krygowski, Zdislas: Remarques sur la formule de Kiepert dans la théorie des fonctions elliptiques. Bull. Sci. math., II. s. **61**, 110—114 (1937).

Die Weierstraßsche ganze Funktion $\sigma(u)$ gibt mit $k = 1, 2, \ldots$ den elliptischen Quotienten $[\sigma(u)]^{-k^2}\sigma(ku)$, dessen Darstellung als Polynom in $p'(u), \ldots, p^{(2k-3)}(u)$ durch Kiepert gefunden wurde. Des Verf. Beweis ist unabhängig vom Additionstheorem für $p(u)$; gebraucht wird die Darstellung von σ-Funktionen durch lineare Verbindungen ebensolcher mit vollständiger Induktion nach k. *Wilhelm Maier.*

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Kampen, E. R. van, and Aurel Wintner: On an absolute constant in the theory of variational stability. Amer. J. Math. **59**, 270—274 (1937).

The differential equation $x'' + p(t)\,x = 0$, $p(t)$ real, continuous, and periodic, $-\infty < t < +\infty$, is said to be of stable type if each solution is bounded, $-\infty < t < +\infty$. It is known that if $p(t) \geqq 0$ and positive for some t, a sufficient condition for stability is given by $T\int_0^T p(t)\,dt \leqq 4$, where T is the period of $p(t)$. This paper shows that under the same hypotheses [or even if $p(t)$ is analytic or if $p(t) > 0$], the stated condition is necessary. *Hedlund* (Bryn Mawr).

Mitrinovitch, Dragoslav S.: Sur une équation différentielle du premier ordre intervenant dans divers problèmes de géométrie. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 1706—1708 (1937).

L'auteur considère l'équation $y'^2 + a_2(x)\,y^2 + 2a_1(x)\,yy' + a_0(x) = 0$. La substitution $y' + \left(a_1 + \sqrt{a_1^2 - a_2}\right) y = \sqrt{z}$ la ramène à la forme d'Abel $(z + P)\frac{dz}{dx} = 2Mz^2 + 2Nz$. *S. Finikoff* (Moscou).

Piesch, H.: Über ein Verfahren der Integration homogener Differentialgleichungen. Elektr. Nachr.-Techn. **14**, 145—155 (1937).

Bei Schwingungsgleichungen der Form $v'' + f(v)v' - \omega^2 v = 0$, die wegen Fehlen der unabhängigen Veränderlichen in Differentialgleichungen erster Ordnung überführbar sind, können „Grenzzykel" (Grenzkurven, denen sich Integralkurven asymptotisch nähern) als stationäre Lösungen auftreten. Unter gewissen Voraussetzungen gehören die Punkte, in denen simultan die Gleichungen $\frac{d^2v'}{dv^2} = \frac{d^3v'}{dv^3} = 0$ erfüllt sind, dem Grenzzykel an, der dann von diesen Punkten aus durch Integration gefunden werden kann. Zahlenbeispiel. *Collatz* (Karlsruhe).

Chen, Kien-Kwong: Transcendency of functions satisfying Riccati differential equations. II. J. Chin. Math. Soc. **2**, 84—97 (1937).

Seien $R(x) \not\equiv 0$, $S(x)$ und $T(x)$ drei rationale Funktionen. In seiner ersten gleichnamigen Arbeit (dies. Zbl. **15**, 154) untersuchte Verf. die Riccatigleichung

$$W' + \frac{R'}{R}\,W + S + TW^2 = 0. \tag{1}$$

Sein Beweis, daß dieselbe durch keine algebraische Funktion mindestens dritter Ordnung befriedigt wird, erwies sich nachträglich als unvollständig, und er gibt deshalb im vorliegenden 2. Teil hinreichende Bedingungen hierfür; es genügt anzunehmen, daß $\lim_{x\to\infty} xS(x)\,T(x) \neq 0$ ist oder daß $S(x)\,T(x)$ einen Pol mindestens dritter Ordnung hat oder daß $S(x)\,T(x)$ an einer Stelle α einen Pol zweiter Ordnung mit irrationalem Limes $\lim_{x\to\alpha}(x-\alpha)^2 S(x)\,T(x)$ besitzt usw. — Weiter gibt Verf. eine hinreichende Bedingung für die Funktionen R, S, T, so daß sogar jede Lösung von (1) transzendent ist; sind alle drei Funktionen reell für reelles x, so lassen sich hierfür noch einfachere Bedingungen finden, die eingehend untersucht werden. *Mahler* (Krefeld).

Lewis jr., D. C.: On line integrals and differential equations, especially those of dynamics. Bull. Amer. Math. Soc. **43**, 277—282 (1937).

The author develops a formula which gives the relation between the values of the line integral $\int \sum_{i=1}^{n} A_i dx_i$, A_i arbitrary of Class C'', taken over two closed curves lying on a tube of trajectories of a system of ordinary differential equations and such that each curve cuts a given trajectory the same number of times and in the same order. Application to the equations of dynamics yields results which include formulas due to Taylor (see this Zbl. **10**, 226). *Hedlund* (Bryn Mawr).

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Brillouin, Léon: Perturbation d'un problème de valeurs propres par déformation de la frontière. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 1863—1865 (1937).

Die wellenmechanische Störungstheorie behandelt das Problem, Eigenwerte und Eigenfunktionen für einen hermiteschen Operator $H_0 + \lambda H_1$ (mit kleinem λ) zu finden, wenn diejenigen von H_0 bereits bekannt sind. Für manche Aufgaben (Metalltheorie) ist aber die folgende Frage wichtig: Es seien bekannt die Eigenwerte und Eigenfunktionen eines Operators H unter der Voraussetzung, daß auf einer (im Endlichen gelegenen) geschlossenen Fläche $f_0(x, y, z) = 0$ eine lineare Randbedingung (etwa Eigenfunktion $= 0$) vorgeschrieben ist. Welche Änderungen treten ein, wenn statt dessen auf $f_0(x, y, z) = \lambda$ dieselbe Randbedingung zu erfüllen ist? Verf. zeigt, daß diese Frage durch einen einfachen Kunstgriff auf die obige, gewöhnliche Frage zurückgeführt werden kann. *P. Jordan* (Rostock).

McLachlan, N. W., and A. T. McKay: On a formula of Rayleigh for velocity potential. J. Franklin Inst. **223**, 501—509 (1937).

This paper discusses the validity of the application of a widely used formula (due to Rayleigh) in acoustics. The paper closes with a discussion by Ballantine who points out that whilst the formula is applicable (as shown by McLachlan and McKay) to the problem of a plane circular disc vibrating in an infinite baffle it is not applicable (in the modified form usually given) in general. *Murnaghan.*

Vecoua, I.: Randwertaufgabe der Schwingungen einer unendlichen Schicht. Trav. Inst. Math. Tbilissi **1**, 141—163 u. deutsch. Zusammenfassung 164 (1937) [Georgisch].

Verf. stellt und löst das Problem der elastischen Schwingungen einer unendlichen Schicht bei verschiedenen Anfangs- und Randbedingungen. Besonders eingehend wird der wichtige Fall behandelt, wenn auf den Grenzflächen Spannungen vorgegeben sind. Verf. geht aus vom Problem der elastischen Schwingungen des Halbraumes, unter dem Einfluß einer am Rande konzentrierten Kraft, und stellt ein Reflexionsgesetz für longitudinale und transversale Wellen an den Grenzflächen der Schicht auf. Für die ganze Arbeit ist die Idee der funktional-invarianten Lösungen der Wellengleichung grundlegend, wie sie von V. Smirnoff und S. Soboleff auf dynamische Elastizitätsprobleme angewandt worden ist. *V. Kupradze* (Tbilissi, USSR.).

Muschelišvili, N.: Über eine numerische Lösung des ebenen Elastizitätsproblems. Trav. Inst. Math. Tbilissi **1**, 83—87 u. russ. Zusammenfassung 87 (1937) [Georgisch].

In Arbeiten, die in den Mitt. Akad. Wiss. USSR. **3**, Nr. 1 u. 2 (1934) erschienen sind, führt Verf. die grundlegenden ebenen Randwertprobleme der Elastizitätstheorie auf ein System überaus einfacher Integralgleichungen zurück. Dies System besitzt die Eigenschaft, daß das zugehörige homogene System nichttriviale Lösungen zuläßt. In der vorliegenden Arbeit fügt Verf. dem Grundsystem noch eine Reihe von Integralformeln und endlichen Beziehungen bei, welche die gesuchten Funktionen vollkommen festlegen. Das auf diese Weise erhaltene System läßt sich, mit Hilfe von mechanischen Quadraturen, durch ein System linearer algebraischer Gleichungen annähern, das mit der Methode der kleinsten Quadrate gelöst werden kann. *V. Kupradze.*

Bock, Ph.: Die Temperaturverteilung in einem rechteckigen Querschnitt, wenn die Temperatur an der Berandung vorgegeben ist. Čas. mat. fys. **66**, 296—304 (1937) [Tschechisch].

Die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung für ein Rechteck wird bei gewissen speziellen Randwerten mit Hilfe der Bernoullischen Methode der Partikularlösungen angegeben und weiterhin durch eine Fouriersche Doppelreihe bzw. durch Jacobische Thetafunktionen ausgedrückt. *E. Rothe* (Breslau).

Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Niemytzki, V.: Sur les équations intégrales non linéaires comparables aux équations linéaires. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **15**, 17—19 (1937).

The author considers the integral equation (*) $\psi(x) = \int K(x, s) f(s, \varphi) ds$ of Fredholm type where φ is the unknown function and the kernel $K(x, s)$ satisfies conditions (1) $\int K^2(x, s)\, ds \leqq B = \text{const}$; (2) $\int |K(x + h, s) - K(x, s)|\, ds < \varepsilon$ for $|h| < \delta = \delta(\varepsilon)$, uniformly in x. Let $f(s, u)$ be continuous in u and $|f(s, u)| \leqq C|u| + D$ where C and D are constants such that $C \sup_x |\int K(x, s) ds| < 1$. Then (*) admits of a solution. This solution is unique if, in addition $|f'_u(s, u)| < C$ and $C \sup_x \int |K(x, s)|\, ds < 1$. These results, which can be extended to the case of systems in any number of unknown functions, represent a generalization and simplification of results obtained previously by several other authors. The paper contains a considerable number of misprints. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Raff, Hermann: Über lineare Integraltransformationen. Mh. Math. Phys. **45**, 379—393 (1937).

Wie in einer früheren Arbeit [Math. Z. **41**, 605—629 (1936); dies. Zbl. **14**, 351] betrachtet Verf. lineare Integraltransformationen der Gestalt (1) $g(y) = \int_{\mathfrak{M}} \varphi(t, y) f(t)\, dt$ und leitet eine Reihe von Sätzen ab, die sowohl für den Riemannschen wie den Lebesgueschen Integralbegriff gelten. So ist z. B. (1) dann und nur dann konvergenzerzeugend, wenn 1. $\varphi(t, y)$ für jedes y einer Umgebung von η absolut integrierbar ist und ein $\mu > 0$ existiert, so daß in einer Umgebung von η $\int_{\mathfrak{M}} |\varphi(t, y)|\, dt \leqq \mu$ bleibt, und wenn 2. für jede meßbare Teilmenge $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{M}$ $\lim_{y \to \eta} \int_{\mathfrak{H}} \varphi(t, y)\, dt$ existiert. Analoge Kriterien dafür, wann (1) annullierend, konvergenzerhaltend und regulär ist. Vergleich mit den früher vom Verf. dafür abgeleiteten Kriterien. *G. Köthe.*

Plancherel, M., et G. Pólya: Fonctières entières et intégrales de Fourier multiples. Comment. math. helv. **9**, 224—248 (1937).

Let $z = (z_1, \ldots z_n)$ be point of a complex n-dimensional space, $x = (x_1, \ldots x_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_n)$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_n)$ "real" points of this space, and $\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 + 1$. Let $F(z)$ be an entire function of z of exponential type, i.e. $|F(z)| < A \exp\{a(|z_1| + \cdots + |z_n|)\}$ where A and a are positive constants. Let $h(\lambda) = \sup_\alpha \limsup_{r \to \infty} r^{-1} \log |F(\alpha - i\lambda r)|$. We say $F(x) \in L_2$ if $\int |F(x)|^2 dx < \infty$. The authors prove: A necessary and sufficient condition that a function $F(z)$ of exponential type would belong to L_2 is that the (n-dimensional) Fourier transform $\Phi(y)$ of $F(x)$ vanish almost everywhere outside a certain bounded domain. This is an extension to n dimensions of a classical theorem of Paley and Wiener [Amer. Math. Soc. Colloquium publ. **19**, 12—13 (1934)], but the proof given by the authors is entirely different and leads to the additional results $h(\lambda) = \chi(\lambda)$ where $\chi(\lambda)$ is the function of support (Stützfunktion) of the smallest convex domain $\mathfrak{R}$ outside of which $\Phi(y) = 0$. In the case $n = 1$, by using the method of Phragmén-Lindelöf, the authors obtain a more precise result: Let $F(z)$ be an entire function of exponential type such that

$$\limsup_{r \to \infty} r^{-1} \log |F(-ir)| = h, \quad \limsup_{r \to \infty} r^{-1} \log |F(ir)| = h', \quad \lim_{x \to \pm\infty} F(x) = 0.$$

Then $\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} F(x)e^{-ixy}dx = 0$ for $y > h$ and $y < -h'$. Various applications of these theorems are also given. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Funktionalanalysis, Funktionalräume:

Fortet, Robert: Sur l'itération de certaines substitutions linéaires. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 1392—1394 (1937).

The linear substitutions A are $y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k$, y_i and x_i of Hilbert space and $\sum_{ik}|a_{ik}|^2 < \infty$, so that the Fredholm theorems apply. It is announced that if A is minimal on the left (or right) in the sense that a_{ik} is such that $\sum_{ik}|a_{ik}|^2$ is minimal for all substitutions having the same characteristic function on the left (or right) then the iterated substitutions $A^{(n)}$ are expressible in the form $\sum_J Q_J(n)/\lambda_J^n$, λ_J characteristic values of A, $Q_J(n)$ polynomials in n and the series uniformly convergent. Further if the substitution is quasi-regular, i.e. the linear spaces Φ and Ψ determined by the characteristic functions on the left and right of A satisfy the condition $\Phi = \overline{\Psi}$, then the series of principal parts A_J converges uniformly if the angle between the variety Φ_J determined by the characteristic values with index at most J and that of the complementary set relative to Φ is bounded from zero in J, the case of regularity of Monteiro (this Zbl. **12**, 20) corresponding to the angle $\pi/2$. The results are applied to the difference equations: $x_i(n+1) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k(n)$. *Hildebrandt* (Ann Arbor).

Caccioppoli, R.: Sulle corrispondenze funzionali inverse diramate: teoria generale e applicazioni ad alcune equazioni funzionali non lineari e al problema di Plateau. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **24**, 258—263 (1936).

Verf. beweist nichtlokale (nichteindeutige) Existenzsätze für stetig differenzierbare Transformationen (1) $y = T(x)$ in linearen metrischen und vollständigen Räumen vermittels der Diskussion der Verzweigungsgleichungen, was natürlich spezielle Annahmen über Transformationen (1) erfordert: a) das Differential $\delta y = D(x, \delta x)$ von (1) erschöpft in eineindeutiger Weise den δx- und den δy-Raum, wenn man von diesen Räumen je einen n-dimensionalen (n endlich und von x abhängig) Unterraum „wegläßt", b) kompakte y-Mengen besitzen kompakte Urbilder. Übrigens sind die Verzweigungsgleichungen in einem passenden ξ-Raume lokal der Form: $\xi + F(\xi)$ mit vollstetigem $F(\xi)$. Dies wird auf Randwertaufgaben im großen für nichtlineare elliptische Differentialgleichungen angewendet. Für nichtlokale Behandlung der Existenzsätze vermittels der Schmidtschen Verzweigungsgleichungen im Falle der Integralgleichungen (analytische, nichtanalytische) vgl. J. Leray (dies. Zbl. **6**, 167), vermittels der Theorie der Operatoren in abstrakten Räumen der Gestalt $x + F(x)$ mit vollstetigem $F(x)$ Leray-Schauder (dies. Zbl. **9**, 73, Kap. I—III, Operatoren anderer Gestalt Kap. V), für die diesbezüglichen Anwendungen auf elliptischen Differentialgleichungen die letztgenannte Arbeit, Kap. IV—V. *Schauder* (Lwów).

Caccioppoli, R.: Sulle corrispondenze funzionali inverse diramate: teoria generale e applicazioni ad alcune equazioni funzionali non lineari e al problema di Plateau. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **24**, 416—421 (1936).

1. Beispiel einer unbeschränkt lösbaren nichtlinearen Integralgleichung [vgl. J. Leray, dies. Zbl. **6**, 167, wo auch andere übrigens verallgemeinerungsfähige Integralgleichungen (z. B. das Carlemansche Problem auf beliebige lineare elliptische Differentialgleichungen, Systeme von Integralgleichungen usw.) behandelt werden]. 2. Verf. behauptet, daß die Sätze über abstrakte Transformationen aus Teil I (vgl. vorst. Ref.) auch dann bestehen bleiben, wenn es sich um krummlinige, unendlichdimensionale Mannigfaltigkeiten handelt, die regulär sind. 3. Anwendung auf die erste

Randwertaufgabe in Parameterform der invariant geschriebenen elliptischen Differentialgleichung; die Lösungsfläche soll regulär sein, d. h. es ist $EG - F^2 > 0$. 4. Nach Verf. lassen sich die Überlegungen beim Plateauschen Problem anwenden und liefern die Existenz von regulären Minimalflächen, die durch gegebene nichtverknotete und sich nicht durchkreuzende geschlossene Kurven hindurchgehen. Die Begründung der Definitionen sowie die Durchführung der fehlenden Beweise (2, 3, 4) ist noch notwendig. *Schauder* (Lwów).

Funktionentheorie:

Lammel, Ernst: Über eine Verallgemeinerung der Gleichverteilung und ihre Anwendung in der Funktionentheorie. Mh. Math. Phys. **45**, 366—378 (1937).

Für $\nu = 1, 2, \ldots$ sei $|a_\nu| = \varrho < 1$ und $|\beta_\nu| = 1$. — Es wird bewiesen: Notwendig und hinreichend dafür, daß jede für $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$ sich in eine Reihe $f(z) = A_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \prod_{\nu=1}^{\mu} \frac{z - a_\nu}{1 - \frac{z}{\beta_\nu}}$ entwickeln läßt, sind die Relationen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{\beta_\nu}\right)^\mu = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^\mu = 0$, $\mu = 1, 2, \ldots$ Für die durch $f(z)$ dann eindeutig bestimmten Koeffizienten A_μ, deren Integraldarstellung angegeben wird, gilt $\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|A_\mu|} \leqq 1$. — Die Bedingung für die a_ν ist notwendig und hinreichend dafür, daß für jede in $|z| < 1$ reguläre Funktion $g(z)$ die Relation $g(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} g(a_\nu)$ gilt, während die Bedingung für die β_ν die Gleichverteilung dieser Stellen auf $|z| = 1$ besagt [vgl. Weyl, Math. Ann. **77**, 313—352 (1916)]. *Rogosinski* (Berlin).

Minetti, Silvio: Sur quelques points de la théorie des fonctions et sur un nouveau critérium de normalité d'une famille de fonctions analytiques. J. Math. pures appl., IX. s. **16**, 155—178 (1937).

Le contenu du Mémoire ne justifie pas les qualificatifs qu'emploie l'A. dans son introduction pour caractériser ses propres résultats. Les résultats du chapitre II ne font que traduire la formule de Poisson écrite avec une variable complexe. Le critère de normalité donné par l'auteur n'est nullement „beaucoup plus général que le critérium fondamental de normalité, à savoir celui des deux valeurs exceptionnelles". Bien, au contraire ce critère est une conséquence de la normalité des familles dont les valeurs ne pénétrent pas dans un domaine donné. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Koteliansky, D. M.: Sur certaines applications des formes quadratiques au problème de Nevanlinna-Piek. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr **1**, 73—87 u. franz. Zusammenfassung 87—88 (1937) [Ukrainisch].

L'A. donne une condition portant sur une certaine forme d'Hermite, pour que le problème d'interpolation: $f(z_j) = \omega_j$ $(j = 1 \ldots n + m)$, $f'(z_j) = v_j$ $(j = 1, 2, \ldots n)$ [$z_1 \ldots z_n$, $\omega_1 \ldots \omega_n, v_1 \ldots v_n$ réels $Jf(z) > 0$ pour $Jz > 0$] soit possible. *Mandelbrojt.*

Chuang, Chi-Tai: On the distribution of the values of meromorphic functions of infinite order. J. Chin. Math. Soc. **2**, 21—39 (1937).

L'auteur démontre les résultats résumés dans une Note précédente (voir ce Zbl. **14**, 267), qui généralisent ceux de Hiong (voir ce Zbl. **12**, 264). Il étudie les zéros de l'ensemble des fonctions $f(z) - g(z)$, où $f(z)$ est une fonction méromorphe donnée d'ordre infini, $\varrho(r)$ un de ses ordres au sens de Hiong, et où $g(z)$ est une fonction méromorphe arbitraire dont l'ordre est inférieur à $\varrho(r)$ [$T(r, g)$ étant la fonction de Nevanlinna, on a $\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(r, g)}{\varrho(r) \log r} < 1$]. Pour toutes ces fonctions sauf deux au plus, le nombre $n(r, g)$ des zéros de $f - g$ pour $|z| < r$ est de l'ordre de $\varrho(r)$; on a