Werk

Titel: Algebra und Zahlentheorie

Jahr: 1937

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0016|log5

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

● **Freytag, Bruno Baron von, gen. Löringhoff: Die ontologischen Grundlagen der Mathematik. Eine Untersuchung über die „Mathematische Existenz“.** Halle a. d. S.: Max Niemeyer 1937. 49 S. RM. 1.50.

Rein philosophische Untersuchung über die Art der Existenz von mathematischen Gegenständen auf Grund der Ontologie von Günther Jacoby. *A. Heyting.*

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra, Polynome, Invariantentheorie:

Petterson, Erik L.: Über Reduzibilitätseigenschaften gewisser Polynome, die einen Parameter enthalten. Math. Ann. **114**, 74—78 (1937).

Als eine Verallgemeinerung des schon in dies. Zbl. **14**, 289 referierten Resultates beweist der Verf. folgenden Satz: Ein Polynom $f(x, E) = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(x) x E^\nu + g_0(x)$, wobei $g_\nu(x)$ teilerfremde ganzzahlige Polynome eines imaginär-quadratischen Körpers K sind und $g_0(0) \neq 0$, $g_n(0) \neq 0$ gilt, kann nur für endlich viele ganzzahlige Werte von E innerhalb K reduzibel sein. — Die Voraussetzung über K ist notwendig, um die Endlichdeutig der Faktorenzerlegungen zu sichern. — Die Irreduzibilität von $f(x,E)$ wird nicht vorausgesetzt, leuchtet aber unmittelbar ein, wenn man die Zerlegung von E nach steigenden gebrochenen Potenzen von x in Betracht zieht (ein Analogon des Eisensteinschen Irreduzibilitätssatzes). — Dieser Satz wird vom Verf. noch etwas verallgemeinert. *N. Tschebotarŏw* (Kasan).

Petterson, Erik L.: Einige aus den Größenbeziehungen der Wurzeln abgeleitete Irreduzibilitätskriterien. Math. Ann. **114**, 79—83 (1937).

Mit Hilfe des Perronschen Prinzips [J. reine angew. Math. **132**, 288 (1907)] und des Satzes von Rouché erhält der Verf. folgenden Satz: Ist $f(x) = g(x)\, x + M(x)$ ein normiertes Polynom, wobei $g(x)$, $M(x)$ ganzzahlige Polynome sind, und gibt es eine Zahl $\varrho > 0$ derart, daß 1. $g(x)$ keine Wurzeln innerhalb von $|x| = \varrho$ hat, 2. daß $|g(x)| > \frac{|M(x)|}{\varrho}$ auf $|x| = \varrho$ gilt, 3. daß $1 \leqq |M(0)| \leqq \varrho$ gilt, so ist $f(x)$ irreduzibel. — Dieser Satz findet eine unmittelbare Anwendung in den ganzzahligen Polynomen $f(x) = (x^m - a)\, x + (x^m - b)$, wobei $|a + b| > 2\,|b|^m$ gilt. — Weitere ähnliche Sätze erlauben, für Polynome vom Typ $f(x) = x \prod_\nu (x - b_\nu) + a$ ein Kriterium aufzustellen. *N. Tschebotarŏw* (Kasan).

Tihanyi, Nikolaus: Die Multiplikation der Webersehen Resolventen. Mat. természett. Értes **55**, 173—183 u. deutsch. Zusammenfassung 184—185 (1937) [Ungarisch].

Es sei $r = e^{\frac{2\pi i}{2^n}}$, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{2^{n-2}}}$, $((-1)^{h_1}, \omega^h, r) = \sum_{\mu=1}^{2^{n-1}} (-1)^{h_1 \alpha_1} \omega^{h\alpha} r^\mu$, $\mu \equiv (-1)^{\alpha_1} 5^\alpha \pmod{2^n}$.

Für diese Webersche Resolvente beweist Verf. die folgende Produktformel

$$((-1)^{h_1}, \omega^h, r)\,((-1)^{k_1}, \omega^k, r) = 2^a \sum_{l=1}^{2^{n-a}-1} (-1)^{h_1\alpha_1} \omega^{h\alpha}\,((-1)^{h_1+k_1}, \omega_a^m, r_a^l),$$

wenn nur $h + k = m \cdot 2^a$, $a < n - 2$, $(m, 2) = 1$, $\mu = l \cdot 2^a - 1 \equiv (-1)^{\alpha_1} 5^\alpha \pmod{2^n}$, $(l, 2) = 1$, $\omega_a = \omega^{2^a}$, $r_a = r^{2^a}$. Für die Methode des Beweises vgl. M. Tihanyi, dies. Zbl. **9**, 296—297. *Lubelski* (Warschau).

Ostrowski, Alexandre: Sur la détermination des bornes inférieures pour une classe des déterminants. Bull. Sci. math., II. s. **61**, 19—32 (1937).

I. Minkowski und Hadamard hatten bewiesen: Wenn alle Diagonalelemente $|a_{\nu\nu}| = 1$ und alle $h_\nu = 2 - \sum_{\mu=1}^{n} |a_{\mu\nu}| > 0$, so ist $D \neq 0$. Verf. gibt drei Verschärfungen dieses Satzes: 1. Mittels einer Modifikation der Hadamardschen Überlegung findet er $|D| \geqq h_1 h_2 \ldots h_n$. 2. Mittels des v. Kochschen Gedankenganges und Determinanten-

sätze von Schur und Frobenius findet er $|D| \geqq e^{\sigma^2/s}(1-s)^{\sigma^2/s^2} \geqq e^{b\,S/s}(1-s)^{b\,S/s^2}$, wo $\sigma^2 = \sum_{\nu,\mu} |a_{\nu\mu}|^2 - n$, $b = \max |a_{\mu\nu}|$ für $\mu \neq \nu$, $s = \max(1-h_\nu)$. Koch hatte nur die schwächere Ungleichung $|D| \geqq e^S(1-s)^{S/s}$, wo $S = \sum_\nu (1-h_\nu)$. 3. Im Falle $\sigma < 1$ findet Verf.: $|D| \geqq e^\sigma(1-\sigma)$. — Von diesen drei neuen Grenzen des Verf. ist keine prinzipiell schärfer als die andere. — II. Blumenthal hatte s. Z. eine obere Grenze für die Ungenauigkeit der Wurzeln von linearen Gleichungen, deren Koeffizienten nicht genau bekannt sind, gefunden. Verf. ersetzt diese Grenze durch eine i. allg. genauere, welche den Einfluß der Koeffizienten zu trennen gestattet von dem der konstanten Glieder. — III. Welche Veränderungen darf man an den Koeffizienten einer Determinante $|A| \neq 0$ anbringen, damit die neue Determinante $|A^*| = |A + D|$, wo $|D| = |\delta_{\mu\nu}|$, ebenfalls $\neq 0$ bleibt? Sei $\max|\delta_{\mu\nu}| = \delta$, $\sum_{\mu,\nu} |\delta_{\mu\nu}|^2 = \vartheta$, so findet Verf., damit $|A^*| \neq 0$, als hinreichende Bedingungen: 1. $\delta < 1 \Big/ \sum_{\mu,\nu} |\alpha_{\mu\nu}|$ bzw. 2. $\vartheta < 1 \Big/ \sum_{\mu,\nu} |\alpha_{\mu\nu}|^2$, je nachdem δ bzw. ϑ als Schwankungsgrenze genommen wird ($\alpha_{\mu\nu}$ sind die Glieder von A^{-1}). — IV. Schließlich gibt Verf. einen besonders einfachen Beweis für die Hadamardsche Ungleichung: $|D|^2 \leqq \prod_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} |a_{\mu\nu}|^2$. *Bodewig* (Basel).

Oldenburger, Rufus: Equivalence of multilinear forms singular on one index. Duke math. J. **2**, 671—680 (1936).

The author continues his study (this Zbl. **14**, 290) of n-th order p-way matrices of the type $A = \left(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha i_1} b_{\alpha i_2} \dots d_{\alpha i_p} \right)$ where $(a_{\alpha i_1})$ is singular of rank r, the other component matrices being non-singular. Necessary and sufficient conditions in terms of invariant factors are obtained for the equivalence of two such matrices having the same n, p, r. Some of the associated canonical forms are derived. For $p \geqq 3$, $n \geqq 4$ the number of such forms is infinite. *MacDuffee* (Madison).

Akeley, Edward S.: Tensors associated with a pair of quadratic differential forms. J. Franklin Inst. **223**, 199—214 (1937).

Ein Paar von quadratischen Differentialformen $G_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}$ bestimmt im allgemeinen in jedem Punkt des Raumes ein System von n orthogonalen Einheitsvektoren (eindeutig bis auf Permutationen und Multiplikation mit ± 1) und n zugehörige Invarianten λ_m, die Elementarteiler von $G_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta}$. Jeder Tensor, der rational und invariant von diesen n Vektoren und n Zahlen und ihren Ableitungen abhängt, ist auf Grund eines Satzes der Galoisschen Theorie auch rational durch die Tensoren $g_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ und ihren Ableitungen ausdrückbar. Es werden gewisse Fundamentalsysteme von Tensoren angegeben, durch welche alle rationalen Kovarianten von gegebener Differentiationsordnung rational ausgedrückt werden können. Es gibt keine rationalen Kovarianten von ungerader Ordnung. *van der Waerden* (Leipzig).

Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

Mori, Shinziro, und Takeo Dodo: Bedingungen für ganze Abgeschlossenheit in Integritätsbereichen. J. Sci. Hiroshima Univ. A **7**, 15—27 (1937).

Es werden Integritätsbereiche J betrachtet, in denen der Teilerkettensatz gilt. Zu jeder Primidealpotenz $\mathfrak{p}^r$ gehört eine einzige zu $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Primärkomponente, die nach Krull (vgl. dies. Zbl. **11**, 197) als symbolische Potenz $\mathfrak{p}^{(r)}$ bezeichnet wird. Es werden zwei Kriterien abgeleitet: 1. J ist dann und nur dann ganz abgeschlossen, wenn zwischen den symbolischen Potenzen $\mathfrak{p}^{(1)}$ und $\mathfrak{p}^{(2)}$ jedes zu einem Hauptideal gehörigen Primideals kein weiteres Primärideal liegt. 2. J ist dann und nur dann ganz abgeschlossen, wenn die symbolische Potenz $\mathfrak{p}^{(2)}$ jedes zu einem Hauptideal gehörigen Primideals irreduzibel ist. *G. Köthe* (Münster i. W.).

Wolf, Margarete C.: Symmetric functions of non-commutative elements. Duke math. J. **2**, 626—637 (1936).

The author proves an analogue of the fundamental theorem on symmetric functions of commutative indeterminates for elements $x_1, \ldots, x_n$ completely independent and completely non-commutative of order m i.e. no polynomial of degree $\leqq m$ in the x's vanishes unless all of its coefficients are 0. For each m and n the x's may be realized as elements of an associative algebra with a finite basis or by matrices. The number of polynomials in a fundamental set necessary to express uniquely all symmetric functions of degree m is finite and independent of the particular fundamental set. As $m \to \infty$ this number $\to \infty$ also. *Jacobson* (Chicago).

Vandiver, H. S.: Note on an associative distributive algebra in which the commutative law of addition does not hold. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 857—859 (1936).

Es wird eine Algebra konstruiert, in der Addition und Multiplikation assoziativ sind und beide distributiven Gesetze gelten, in der aber die Addition nicht kommutativ ist. *R. Brauer* (Toronto).

Glivenko, V.: Algèbre mendelienne. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **4**, 385—386 (1936).

The author shows that Mendel's laws of heredity define a hypercomplex algebra. The latter resembles Grassmann's extensional calculus, except that commutativity replaces skew-symmetry. The laws are useful in making theoretical predictions as to the result of a population mixture. *Garrett Birkhoff* (Cambridge, Mass.).

Zahl- und Funktionenkörper:

Mahler, Kurt: Über Pseudobewertungen. III. (Die Pseudobewertungen der Hauptordnung eines endlichen algebraischen Zahlkörpers.) Acta math. **67**, 283—328 (1936).

Die Arbeit enthält den Beweis der vom Verf. in Teil I aufgestellten Vermutung, daß jede Pseudobewertung $W(\alpha)$ der Hauptordnung J eines endlichen algebraischen Zahlkörpers der direkten Summe einiger Absolutbetragbewertungen, einiger $\mathfrak{p}$-adischer Bewertungen und einer Restklassenbewertung äquivalent sei (dies. Zbl. **13**, 51). Der Beweis ist dem für die entsprechende Vollständigkeitseigenschaft der vollen Zahlkörper verwandt (dies. Zbl. **14**, 340), jedoch hält der Verf. das eine Ergebnis nicht für ohne weiteres aus dem anderen herleitbar. — Einer endlichen Primidealpotenz $\mathfrak{p}^f$ wird die Restklassenpseudobewertung

$$W_{\mathfrak{p}^f}(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^f) \\ 1, & \alpha \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^f), \end{cases}$$

einer (symbolischen) unendlichen Potenz $\mathfrak{p}^\infty$ die $\mathfrak{p}$-adische Bewertung $\Omega_{\mathfrak{p}}(\alpha)$ und einer unendlichen Primstelle $\mathfrak{p}_\infty^{(h)}$ die sie definierende Betragsbewertung $\Omega^{(h)}(\alpha)$ zugeordnet. Ein formales Potenzprodukt

$$\tilde{\mathfrak{a}} = \prod_{\mathfrak{p}_i \text{ endl.}} \mathfrak{p}_i^{f_i} \cdot \mathfrak{p}_{\infty, i_1} \cdots \mathfrak{p}_{\infty, i_s}, \qquad f_i > 0$$

heißt ein Pseudoideal. Es wird $\tilde{\mathfrak{a}} = 0$ gesetzt, wenn alle $\mathfrak{p}_{\infty, i}$ in $\mathfrak{a}$ vorkommen. Dem Pseudoideal $\tilde{\mathfrak{a}}$ wird die Pseudobewertung

$$W(\alpha \,|\, \tilde{\mathfrak{a}}) = \sum_{f_i \text{ endl.}} W_{\mathfrak{p}_i^{f_i}}(\alpha) + \sum_{f_i = \infty} \Omega_{\mathfrak{p}_i}(\alpha) + \sum_{\nu=1}^{s} \Omega^{(i_\nu)}(\alpha)$$

zugeordnet. Verschiedene Pseudoideale haben äquivalente Pseudobewertungen, gleiche äquivalente. Die Summendarstellung ist direkt, wenn $\tilde{\mathfrak{a}} \neq 0$ ist. Eine Bewertung $\Omega^{(h)}(\alpha)$ erweist sich als in der beliebig gegebenen Pseudobewertung $W(\alpha)$ enthalten, wenn es kein $\alpha \neq 0$ aus J mit $\Omega^{(h)}(\alpha) \geqq 1$, $W(\alpha) < 1$ gibt. Sind $\Omega^{(l_1)}(\alpha), \ldots, \Omega^{(l_s)}(\alpha)$ die $\Omega^{(h)}(\alpha)$ mit dieser Eigenschaft und wird $\max(\Omega^{(l_1)}(\alpha), \ldots, \Omega^{(l_s)}(\alpha)) = \Omega(\alpha)$ gesetzt, so gilt

$$W(\alpha) \leqq c \max(\Omega(\alpha), 1)$$

mit festem positivem c. — Eine Zahl $\gamma \neq 0$ aus J heißt W-Zahl, wenn es $\delta \neq 0$ aus J gibt, so daß

$$\lim_{j \to \infty} W(\gamma^j \delta) = 0$$

ist. Die Zahlen γ, für die eine Einheit η so gefunden werden kann, daß $\gamma\eta$ W-Zahl ist, bilden zusammen mit 0 ein quadratfreies Ideal $\mathfrak{c} \neq 0$ von J, den Hauptcharakter von W. Die Zahl $\delta \neq 0$ aus J heißt w-Zahl, wenn für jede W-Zahl γ $\lim_{j\to\infty} W(\gamma^j\delta) = 0$ ist. Die w-Zahlen bilden zusammen mit 0 ein Ideal $\mathfrak{d} \neq 0$ von J, den Nebencharakter von W. Setzt man jetzt $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{p}_{\infty,l_1} \cdots \mathfrak{p}_{\infty,l_s} \cdot \mathfrak{d} \cdot \mathfrak{c}^\infty$,

so ist $W(\alpha)$ zu $W(\alpha\,|\,\tilde{\mathfrak{a}})$ äquivalent, was nach der Definition von $W(\alpha\,|\,\tilde{\mathfrak{a}})$ die Behauptung darstellt. *Deuring* (Jena).

Gut, Max: Über Erweiterungen von unendlichen algebraischen Zahlkörpern. Comment. math. helv. **9**, 136—155 (1937).

Nach Stiemke kann ein unendlicher algebraischer Zahlkörper k durch eine abzählbare Folge von endlichen algebraischen Körpern

$$k_1 \subset k_2 \subset \cdots, \qquad \lim k_i = k$$

definiert werden. Die Primideale p von k werden entsprechend durch

$$p_0 \subset p_1 \subset \cdots, \qquad \lim p_i = p \tag{*}$$

definiert. Die Grad- und Ordnungszahlen f_i und e_i der Primideale (*) bilden nichtabnehmende Reihen. Der Verf. studiert nun die endlichen Erweiterungen K eines solchen unendlichen Körpers k, worin $\lim e_i = e$ und $\lim f_i = f$ existieren und endlich sind für alle Primideale p in k. Diese Theorie wird erheblich einfacher als die allgemeine Theorie von Deuring, Herbrand u. a., indem die meisten Resultate über endliche Erweiterungen von endlichen Körpern fast wörtlich erhalten bleiben. Der Verf. zeigt speziell, daß die Sätze einer Arbeit des Ref. (Math. Ann. **96**, **97**) über Primidealzerlegungen, Differente, Diskriminante, Lückensatz für Supplementzahlen und gemeinsame außerwesentliche Teiler auch für solche Körper k richtig sind. Zuletzt wird die Existenz von Körpern k von diesem Typus nachgewiesen, und zwar wird bewiesen, daß der Körper, der aus allen quadratischen Irrationalitäten besteht, und auch der Vereinigungskörper von allen zyklischen Körpern von einem festen Primzahlgrad die angegebene Eigenschaft haben. *Ore* (New Haven).

Scholz, Arnold: Konstruktion algebraischer Zahlkörper mit beliebiger Gruppe von Primzahlpotenzordnung. I. Math. Z. **42**, 161—188 (1937).

Die berühmte Frage nach der Existenz von algebraischen Zahlkörpern zu vorgegebenen Gruppen wird für beliebige Gruppen ungerader Primzahlpotenzordnung (l-Gruppen) gelöst. Nach früheren Ergebnissen von A. Scholz (S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. **1929**, Nr. 14) folgt daraus gleichzeitig die Existenz von Körpern zu beliebigen zweistufigen Gruppen ungerader Ordnung. Körper zu zweistufigen l-Gruppen mit 2 Erzeugenden hatte Scholz bereits früher konstruiert (dies. Zbl. **10**, 337). G_m sei eine l-Gruppe der Ordnung l^m. Die Konstruktion eines algebraischen Zahlkörpers mit G_m als Galoisgruppe in bezug auf den rationalen Zahlkörper wird durch Aufeinandertürmung von relativzyklischen Körpern vom Relativgrad l durchgeführt. Dazu wird G_m in eine Hauptreihe $J, G_1, \ldots, G_m$ entwickelt, wobei $G_{\mu-1}$ maximale echte Faktorgruppe von G_μ sei. Da G_m eine l-Gruppe ist, gilt $G_{\mu-1} = G_\mu/C_\mu$, wobei C_μ im Zentrum von G_μ liegt und die Ordnung l hat. Der Körper mit G_μ als Gruppe werde mit K_μ bezeichnet. K_1 ist als zyklischer Körper l-ten Grades natürlich konstruierbar. Die Gruppe G_μ ist eine zentrale Erweiterung (Aufspaltung) von $G_{\mu-1}$. Das Problem, von $K_{\mu-1}$ zu K_μ zu gelangen, ist ein sogenanntes Einbettungsproblem. Aus dem Richterschen Einbettungssatz (dies. Zbl. **13**, 147) folgt, daß die der Aufspaltung $G_{\mu-1} \to G_\mu$ entsprechende Einbettung unter der Voraussetzung, daß der Basiskörper K_0 die l-ten Einheitswurzeln enthält, durchgeführt werden kann, wenn für jede Primstelle ein entsprechendes Einbettungsproblem lösbar ist. Daraus wird der folgende „spezielle Einbettungssatz“ gefolgert: Alle zentralen Einbettungen eines Galoisschen Körpers K/K_0, in dem alle Diskriminantenteiler $\mathfrak{p}$ voll zerfallen (d. h. in Primideale vom 1. Relativgrad), sind möglich, wenn die Trägheitssubstitutionen in diesen Einbettungen höchstens die Ord-

nung l^h erreichen, wenn $N(\mathfrak{p}) \equiv 1 (l^h)$. Die Voraussetzung, daß K_0 die l-ten Einheitswurzeln enthält, wird später entbehrlich gemacht. Es wird ferner bewiesen (dies ist der wichtigste Punkt der Konstruktion), daß die Einbettung von $K_{\mu-1}$ in einen K_μ stets so vollzogen werden kann, daß sie fortsetzbar ist, nämlich daß die für die Gültigkeit des speziellen Einbettungssatzes hinreichenden Bedingungen wieder erfüllt sind, wenn sie in $K_{\mu-1}$ erfüllt waren. Dies geschieht mit Hilfe des „Durchkreuzungssatzes", welcher zeigt, wie aus einer Einbettung alle übrigen gewonnen werden können. Der Durchkreuzungssatz ist ein rein gruppentheoretischer Sachverhalt. Ist K'_μ eine Einbettung von $K_{\mu-1}$, so gelangt man zu einer anderen K''_μ, indem man K'_μ mit einem dazu fremden Körper K^0 durchkreuzt, d. h. aus dem Produkt $K'_\mu \times K^0$ eine andere Einbettung K''_μ von $K_{\mu-1}$ in einen Körper mit G_μ als Gruppe herausgreift. Es wird gezeigt, daß man durch abelsche Durchkreuzungen alle Einbettungen von $K_{\mu-1}$ erhält. Dazu ist wesentlich, daß $K_{\mu-1}$ zum Zentrum von G_μ gehört. Betrachtet man nicht notwendig direkte Produkte $K'_\mu K^0$, so gelangt man so zu Körpern mit „verwandten", aber nicht notwendig isomorphen Erweiterungen als Gruppen. — Über die Führer der relativ-zyklischen Einbettungen $K_\mu/K_{\mu-1}$ gilt: Die Konstruktion kann immer so geleistet werden, daß l nicht verzweigt ist; unter gewissen Umständen kann durch Kreiskörperdurchkreuzung erreicht werden, daß in $K_\mu/K_{\mu-1}$ nur in $K_{\mu-1}$ verzweigte Primideale wieder verzweigt werden. — Der Fall $l = 2$ wird nur diskutiert; daß die Konstruktion in diesem Fall auf größere Schwierigkeiten führt, liegt am quadratischen Reziprozitätsgesetz. — Schließlich wird die Struktur der l-Gruppen diskutiert. Es wird gezeigt, wie man von einer endlichen abelschen Gruppe ausgehend alle endlichen l-Gruppen mit n Erzeugenden einfangen kann. Dies geschieht durch Betrachtung der Magnusschen Dimensionsreihen (dies. Zbl. **11**, 152). Auch wird die Magnussche Vermutung, daß diese Dimensionsreihen mit den Gliedern der „lower central series" übereinstimmen, für die Faktorgruppen der freien Gruppen mod der 2. Kommutatorgruppe bewiesen. *Taussky* (Cambridge).

Schmid, Hermann Ludwig: Relationen zwischen verallgemeinerten Gaußschen Summen. J. reine angew. Math. **176**, 189—191 (1937).

k sei ein Galoisfeld mit $q = p^f$ Elementen. Ist $\chi(x)$ ein Charakter der Multiplikativgruppe von k, so heißt

$$\tau(\chi) = -\sum_{x \neq 0}{}' \chi(x) e^{\frac{2\pi i}{p} \mathfrak{S}(x)} \qquad (\mathfrak{S} \text{ absolute Spur})$$

eine verallgemeinerte Gaußsche Summe. Davenport und Hasse haben [dies. Zbl. **10**, 338, (1)] die folgende Relation bewiesen:

$$\tau^r(\chi_r) = \tau(\chi)^r. \tag{1}$$

Dabei ist χ_r der durch $\chi_r(y) = \chi(N_{k^{(r)}/k}\, y)$ definierte Charakter der Erweiterung r-ten Grades $k^{(r)}$ von k und $\tau^r(\chi_r)$ die mit χ_r gebildete Gaußsche Summe zum Körper $k^{(r)}$. Verf. gibt einen elementaren Beweis dieser Formel durch Induktion nach r. Wird (1) vorausgesetzt, so gilt

$$\tau(\chi)^{r+1} - \tau^{r+1}(\chi_{r+1}) = \sum_{u \text{ in } k}{}' \chi(u) \sum_{\nu \bmod p} e^{\frac{2\pi i \nu}{p}} [M(u, \nu) + N(u, \nu)],$$

wo $M(u, \nu)$ die Zahl der Lösungen $x \neq 0$ aus k, $y \neq 0$ aus $k^{(r)}$ von

$$\mathfrak{S}(x + S_{k^{(r)}/k}\, y) = \nu, \qquad x N_{k^{(r)}/k}\, y = u$$

und $N(u, \nu)$ die Zahl der Lösungen $z \neq 0$ aus $k^{(r+1)}$ von

$$\mathfrak{S}(S_{k^{(r+1)}/k}\, z) = \nu, \qquad N_{k^{(r+1)}/k}\, z = u$$

bedeutet. Mit einer rationalen Funktion

$$f_u(t) = \sum_{i=0}^{f-1} \left(t + t^q + \cdots + t^{q^{r-1}} + \frac{u}{t^{1+q+\cdots+q^{r-1}}} \right)^{p^i}$$

kann man $M(u, \nu)$ als Lösungszahl von $f_u(y) = \nu$, $y \neq 0$ aus $k^{(r)}$, $M(u, \nu)$ als Lösungszahl von $f_u(z) = \nu$, $N_{k^{(r+1)}/k}\, z = u$ mit $z \neq 0$ aus $k^{(r+1)}$ deuten. Der Grad g des Zählers

von $f_u(y)$, der von u unabhängig ist, gibt eine obere Schranke für die Lösungszahl von $f_u(t) = v$ im Körper $k^{(r(r+1))}$. Setzt man jetzt in $f_u(t)$ für t alle in Betracht kommenden Elemente y von $k^{(r)}$ und z von $k^{(r+1)}$ ein, so erhält man den Mittelwert der Lösungszahlsumme $M(u, v) + N(u, v)$ für festes u über alle v. Da dieser Mittelwert gleich g wird, so kann man, wenn noch die möglichen Doppelwurzeln gehörig berücksichtigt werden, schließen, daß $M(u, v) + N(u, v)$ von u und v unabhängig gleich g ist. (2) ergibt dann sofort die Behauptung (1) für $r + 1$ statt r. — Für die weitere Formel von Davenport und Hasse [loc. cit. (2)]

$$\psi(m^m)\prod_{\mu=0}^{m-1}\tau(\chi^\mu\psi) = \tau(\psi^m)\prod_{\mu=1}^{m-1}\tau(\chi^\mu) \qquad (m \text{ Grad des Charakters } \chi)$$

gibt der Verf. einen Ansatz für einen Beweis, der dem obigen Beweis für (1) ähnlich ist.

Deuring (Jena).

Rados, Gustav: Über die primitiven Wurzeln zusammengesetzter Zahlen im Gauß'schen Zahlkörper. Mat. természett. Értes **55**, 320—340 (1937) [Ungarisch].

In diesem Aufsatz wurde der Nachweis dafür geführt, daß im Gaußschen Zahlkörper nur die zu den Typen $(1 + i)^2$, $(1 + i)^3$, p^α, $(1 + i)\,p^\alpha$ (T) gehörigen zusammengesetzten Zahlen primitive Wurzeln besitzen, wobei p eine beliebige ungerade zweigliedrige Komplexprimzahl sein kann. Zugleich sind die zu den Typen (T) gehörigen zusammengesetzten komplexen Zahlen die alleinigen, für die der verallgemeinerte Wilsonsche Satz in Geltung bleibt und für die die Anzahl ihrer quadratischen Reste und Nichtreste übereinstimmt, wobei jedoch p hier eine beliebige ungerade Primzahl (also auch eingliedrige) sein kann. Die analogen Stützen im natürlichen Rationalitätsbereich gelten für alle zusammengesetzten Zahlen vom Typus 2^2, p^α, $2p^\alpha$, wo p eine beliebige ungerade reelle Primzahl sein kann. Bemerkenswert ist das abweichende Verhalten der obenerwähnten Tatsachen im Gaußschen Zahlkörper.

Autoreferat.

Ljunggren, Wilhelm: Einige Eigenschaften der Einheiten reeller quadratischer und rein-biquadratischer Zahlkörper mit Anwendung auf die Lösung einer Klasse unbestimmter Gleichungen vierten Grades. Skr. norske Vid.-Akad., Oslo **1936**, 1—73 (Nr 12).

Für den ersten Teil dieser Arbeit vgl. W. Ljunggren, Über die Lösung einiger unbestimmter Gleichungen vierten Grades. Avh. Norske Vid. Akad. Oslo **1935**, 1—35 (Nr. 14); dies Zbl. **11**, 147; Bemerkungen über die Lösung der unbestimmten Gleichung $x^2 - Dy^4 = 1$. Norsk mat. Tidsskr. **17**, 73—74 (1935); dies. Zbl. **12**, 246. Mittels der Methoden dieser Arbeiten gibt Verf. im zweiten Teile u. a. die folgende Verallgemeinerung eines Tartakowskischen Satzes: Die Gleichung $Ax^4 - By^4 = \pm C$ mit $C = 1$ oder $C = 2$ hat höchstens eine Lösung in ganzen positiven Zahlen x und y. Diese Lösung kann immer berechnet werden, wenn im quadratischen Zahlringe $R(\sqrt{AB})$ die Fundamentaleinheit bekannt ist. — Der Beweis dieses Satzes benutzt in weitgehender Weise den Tartakowskischen Satz: ($A = 1$, $B \neq 15$, $\pm C = 1$). Für diesen Satz, ohne die Beschränkung $B \neq 15$, gibt Verf. einen unabhängigen Beweis. Ref. betont, daß 1. den Fall $A = 1$, $B = 15$, $\pm C = 1$ S. Lubelski, dies. Zbl. **11**, 98—99, erledigt hat, 2. im genannten verallgemeinerten Tartakowskischen Satze auch A, B, $0 < A < B$, eindeutig bestimmt sind; vgl. den einfachen Beweis eines Petrschen Satzes, den S. Lubelski in der Arbeit: Zur Gaußschen Kompositionstheorie der binären quadratischen Formen, J. reine angew. Math. **176**, 59—60 (1936), dies. Zbl. **15**, 59, gegeben hat. *Lubelski.*

Hall, Marshall: Indices in cubic fields. Bull. Amer. Math. Soc. **43**, 104—108 (1937).

K sei ein algebraischer Zahlkörper über dem Körper der rationalen Zahlen mit der Diskriminante d. Für die Diskriminante jeder Erzeugenden Θ von K ist dann bekanntlich $d_\Theta = k_\Theta^2 d$. Für Körper dritten Grades wird hier gezeigt, daß der Wertevorrat von k_Θ identisch ist mit der Menge der ganzen rationalen Zahlen, die durch eine binäre kubische Form angenommen werden. Für $K(D^{1/3})$ wird diese Form ex-

plizit angegeben und gezeigt, daß es zu jedem N ein D gibt, so daß in diesem Körper das kleinste $|k_\Theta|$ größer als N ist. *Bruno Schoeneberg* (Hamburg).

Hofreiter, Nikolaus: Diophantische Approximationen in imaginär quadratischen Zahlkörpern. Mh. Math. Phys. **45**, 175—190 (1937).

Sei $K = k(\sqrt{-m})$ ein fester imaginär-quadratischer Zahlkörper und alsdann unter γ diejenige positive Körperkonstante verstanden, für die zwar für willkürliches komplexes α

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqq \frac{\gamma}{|q|^2}$$

stets unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen $p, q \neq 0$ aus K hat, dagegen für geeignete komplexe Zahlen β die Ungleichung

$$\left|\beta - \frac{p}{q}\right| \leqq \frac{\gamma - \varepsilon}{|q|^2}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ nur endlich viele solche Lösungen in ganzen Zahlen aus K besitzt. In der vorliegenden Arbeit wird an neuen Resultaten einerseits

$$\gamma \geqq \frac{1}{\sqrt{|4-m|}} \quad \text{für} \quad m \not\equiv 3\,(4) \qquad \text{und} \qquad \gamma \geqq \left\{\left(\frac{17-m}{4}\right)^2 + \frac{m}{4}\right\}^{-1/4} \quad \text{für} \quad m \equiv 3\,(4)$$

und andererseits

$$\gamma \leqq \frac{\sqrt{6m}}{\pi} \quad \text{für} \quad m \not\equiv 3\,(4) \qquad \text{und} \qquad \gamma \leqq \frac{\sqrt{6m}}{2\pi} \quad \text{für} \quad m \equiv 3\,(4)$$

bewiesen, ferner die exakte Schranke

$$\gamma = 8^{-1/4} \quad \text{für} \quad m = 7$$

abgeleitet. Der letztere Beweis beruht auf geometrischen Betrachtungen mittels der zum Körper $k(\sqrt{-7})$ gehörigen sog. Picardschen Gruppe. Wegen der bisherigen Ergebnisse zum gleichen Problem s. dies. Zbl. **13**, 149 (Hofreiter) und **4**, 245 (Perron), ferner Perron, vgl. dies. Zbl. **7**, 338 (hier weitere Literatur), und L. R. Ford, On the closeness of approach of complex rational fractions to a complex irrational number, Trans. Amer. Math. Soc. **27**, 146—154 (1925). *Mahler* (Krefeld).

Hofreiter, Nikolaus: Über die Endlichkeit der Klassenzahl von ganzzahligen hermiteschen Formen. Mh. Math. Phys. **45**, 201—206 (1937).

Im imaginär-quadratischen Zahlkörper $k(\sqrt{-m})$ gelte der Euklidische Algorithmus; es ist also $m = 1, 2, 3, 7$ oder 11. Verf. betrachtet Hermitesche Formen

$$h = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i \bar{x}_k \qquad (a_{ik} = \bar{a}_{ki}),$$

deren Koeffizienten a_{ik} ganze Zahlen aus $k(\sqrt{-m})$ sind und deren Determinante $d = |a_{ik}|$ nicht verschwindet, während die Veränderlichen x_i, $\bar{x}_i$ konjugierte Zahlen aus $k(\sqrt{-m})$ sind. Irgend zwei solche Formen mögen als äquivalent betrachtet werden, wenn sie auseinander durch eine Transformation

$$x_j = \sum_{l=1}^{n} \lambda_{jl} x_l, \qquad \bar{x}_j = \sum_{l=1}^{n} \bar{\lambda}_{jl} \bar{x}_l \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

wo die λ_{jl} ganze Zahlen aus $k(\sqrt{-m})$ mit Determinante 1 sind, hervorgehen. Dann wird bewiesen: „Es gibt nur endlich viele nichtäquivalente Hermitesche Formen mit gleichem d." — Im Falle $n = 2$ wurde dieses Resultat bereits von L. Bianchi, Sui gruppi di sostituzioni lineari con coefficienti appartenenti a corpi quadratici immaginari, Math. Ann. **40**, 332—412 (1892), bewiesen; der allgemeine Fall wird durch Schluß von $n - 1$ auf n erledigt. *Mahler* (Krefeld).

Zahlentheorie:

Brauer, Alfred: Über eine Erweiterung des kleinen Fermatschen Satzes. Math. Z. **42**, 255—262 (1937).

The present paper concerns a generalization of Fermat's theorem in a direction

indicated by Schur (this Zbl. **6**, 248). If $a_1, a_2, \ldots$ is any sequence and if $r \neq 0$, the first derivative of this sequence is another sequence: $b_1, b_2, \ldots$ in which the n-th term is defined by $b_n = (a_{n+1} - a_n)/r^n$. The second derivative is the derivative of the first derivative and so on. The theorem of Schur states that if a is not divisible by the prime p then the first, second, ... $(p-1)$-st derivatives of the sequence: $a, a^p, a^{p^2}, \ldots$ with respect to p are in each case sequences of integers. Fermat's theorem is equivalent to the statement that this property is true of the first derivative. By using a different method the author proves a slightly more general result in which the prime p is replaced by an integer k for $k-1$ divisible by the exponent to which a belongs modulo k. If q is the smallest prime factor of k all the first $q-1$ derivatives of the sequence $a, a^p, a^{p^2}, \ldots$ are sequences of integers. A second theorem of Schur is generalized but the results are too complicated to quote here. *D. H. Lehmer.*

Rao, N. Rama, and N. Basavaraju: An extension of Wilson's theorem. Bull. Calcutta Math. Soc. **28**, 235—238 (1936).

Verff. geben einen einfachen Beweis eines bekannten Satzes; vgl. L. Dickson, History of Numbers I, Washington 1919, S. 68 (F. Minding), S. 69 (W. Brennecke), S. 70 (A. L. Crelle), S. 72 (F. Arndt), S. 78 (M. Daniels), S. 81 (G. Miller).

Lubelski (Warschau).

Beeger, N. G. W. H.: Sur les nombres non-déficients primitifs et les nombres multiparfaits pour un indice de multiplicité > 2. Nieuw Arch. Wiskde **19**, 40—49 (1936).

If m is a fixed number called the index of multiplicity and if $\sigma(N)$ denotes the sum of all the divisors of N then N is called multiply perfect, abundant, or deficient according as $\sigma(N)$ is equal to, greater than, or less than mN. A non-deficient number which is not divisible by a non-deficient number is called primitive. Every multiply perfect number is a non-deficient primitive number, but not conversely. By extending the method of Dickson [Amer. J. Math. **35**, 413—426 (1913)] for $m = 2$ to the case $m > 2$ the author shows that there does not exist an infinite number of non-deficient primitive numbers prime to m and having a given number of distinct prime factors. Let f be a number all of whose prime factors divide m. Then there are only a finite number of non-deficient numbers which are multiples of f and have a given number n of distinct prime factors. If we restrict f to be a divisor of m the same conclusion cannot be inferred when $m = 3$, but is true when $m = n = 4$ and when $m = 5$ and $n = 8$. For a general m the question appears to be quite difficult. *D. H. Lehmer.*

Carmichael, R. D.: On numbers of the form $a^2 + \alpha b^2$. Amer. Math. Monthly **44**, 81—86 (1937).

α sei eine ganze Zahl, aber keine Quadratzahl, p eine nicht in α, aber in $m^2 + \alpha n^2$ aufgehende Primzahl, wobei m, n beide zu p teilerfremd vorausgesetzt sind. Verf. stellt die Frage nach der kleinsten positiven Zahl q, für die pq in der Gestalt $a^2 + \alpha b^2$ oder $-(a^2 + \alpha b^2)$ mit zu p teilerfremden a, b darstellbar ist. Auf Grund algebraischer Identitäten und eines Reduktionsschlusses beweist er im Fall $\alpha > 0$: „Aus $p > \sqrt{4\alpha/3}$ folgt $q \leqq \sqrt{4\alpha/3}$“, und im Fall $\alpha < 0$: „Aus $p > \sqrt{|\alpha|}$ folgt $q < \sqrt{|\alpha|}$.“ Sodann behandelt er besondere Werte von α, nämlich $\alpha = 1, 2, \ldots, 7, 13, 37, 43, 58, 67, 163$; $-3, -5, -10$ und schränkt für diese die durch die obigen Abschätzungen gelieferten Möglichkeiten für die Werte von q mittels der Theorie der quadratischen Reste weiter ein. Anwendungen auf bekannte Sätze über die Darstellbarkeit von Zahlen durch die Formen $a^2 + \alpha b^2$ für die genannten Werte von α und auf Formen, „die viele Primzahlen darstellen“, werden angeschlossen. Verf. beabsichtigt nicht, damit neue Resultate vorzutragen, hält aber wohl seine Beweismethode für besonders einfach und elegant. Ref. möchte hierzu bemerken: Erstens sind in den obigen Sätzen die Voraussetzungen $p > \sqrt{4\alpha/3}$ bzw. $p > \sqrt{|\alpha|}$ überflüssig. Zweitens erscheint ihm der Reduktionsschluß des Verf. durchaus nicht einfacher oder elementarer als die Schlüsse,

mit denen Lagrange [Œuvres **3**, 693—795 (1773 u. 1775)] die viel weiter tragende Reduktionstheorie der binären quadratischen Formen begründet hat und aus denen er ohne überflüssige Voraussetzungen und ohne Hinzuziehung der Theorie der quadratischen Reste sämtliche Resultate der hier referierten Arbeit (bis auf die Bemerkungen über „Formen, die viele Primzahlen darstellen") gefolgert hat. *Bessel-Hagen.*

Rados, Gustav: Ein Beitrag zur Theorie der binomischen Kongruenzen. Mat. természett. Értes **55**, 309—318 (1937) [Ungarisch].

In diesem Aufsatz wird der Nachweis für den folgenden Satz geführt. Die Kongruenz $x^n \equiv D \pmod p$ hat im Falle, daß D die Bedingung $D^{\frac{p-1}{n}} \equiv 1 \pmod p$ erfüllt und schließlich p eine Primzahl von der Gestalt $n(ne-1)+1$ (e eine ganze positive Zahl) ist, die Zahl $\xi \equiv D^{\frac{p-1+n}{p^2}} \pmod p$ zur Wurzel. — Im Falle $n=2$ ist $p \equiv 3 \pmod 4$; daher falls D quadratischer Rest von p ist, wird die Kongruenz $x^2 \equiv D \pmod p$ durch die Formel $x \equiv \pm D^{\frac{p+1}{4}} \pmod q$ gelöst. *Autoreferat.*

Chowla, Inder: On the number of solutions of some congruences in two variables. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **5**, 40—44 (1937).

Verf. beweist: Für die Anzahl N der Lösungen der Kongruenz

$$a x^m + b y^n + c \equiv 0 \bmod p^\theta$$

mit $a, b, c \not\equiv 0 \bmod p$ gilt die Abschätzung

$$|N - p^\theta| \leqq (m_1 - 1)(n_1 - 1)\, p^{\theta - \frac{1}{2}},$$

wo $\quad m_1 = (m, p-1), \quad n_1 = (n, p-1).$

Für $\theta = 1$ war das bekannt (L. J. Mordell, dies. Zbl. **7**, 5; H. Davenport-H. Hasse, dies. Zbl. **10**, 338. *H. Hasse* (Göttingen).

Gupta, Hansraj: On a conjecture of Ramanujan. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **4**, 625—629 (1936).

In order to test a conjecture of Ramanujan, Lehmer has recently computed the number of unrestricted partitions of 599 and 721 (this Zbl. **14**, 342). These values were found by using the Hardy-Ramanujan asymptotic formula for $p(n)$, which, at that time, was only known to give the right answer for sufficiently large values of n. Thus it could not then be asserted that the values obtained for $n = 599$ and 721 were definitely correct. The author announces an extension of his table of $p(n)$ to $n = 600$ and states that Lehmer's value for $p(599)$ is correct. As to $p(721)$, the author submits two tables (4 pages in extent) of $p(n)$ modulo s for $s = 13$ and 19 and for all n up to 721. Thus we find that $p(721)$ is congruent to 3 modulo 13 and 18 modulo 19. These facts are in accord with Lehmer's value of $p(721)$. *D. H. Lehmer.*

Gloden, A.: Sur la représentation des nombres premiers de la forme $4r+1$ et de leurs puissances par une somme de deux carrés. Tôhoku Math. J. **42**, 357—361 (1936).

Zerlegungen der 2-ten, 3-ten, . . . 10-ten Potenz der Form $m^2 + n^2$ in eine Summe von 2 Quadraten. *N. G. W. H. Beeger* (Amsterdam).

Bang, A. S.: Über Zahlen, die auf zwei Weisen als Summen von fünften Potenzen geschrieben werden können. Math.-fys. Medd., Danske Vid. Selsk. **14**, Nr 8, 1—31 (1937) [Dänisch].

The author obtains the identity

$$(x^5 + 75y^5)^5 = (75y^5 - x^5)^5 + (x^5 + 25y^5)^5 + (x^5 - 25y^5)^5 + (10x^3y^2)^5 + (50xy^4)^5$$

obtained also by S. Sastry [J. London Math. Soc. **9**, 243 (1934); this Zbl. **10**, 103]. From this it can be deduced that there is an infinity of fifth powers each the sum of five fifth powers. The author obtains similar identities involving 7, 8 and 9 fifth powers. *Wright* (Aberdeen).

Chowla, Inder: On Waring's problem for cubes. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **5**, 1—17 (1937).

The well-known hypothesis K of Hardy and Littlewood has been proved

false for cubes. The author proves that almost all numbers are expressible as sums of four non-negative integral cubes provided that

$$\sum_{N=1}^{x} r_3^2(N) = O(x^{\frac{1}{2}-\varepsilon})$$

for some positive ε, where $r_3(N)$ is the number of ways in which N is a sum of 3 non-negative cubes. *Wright* (Aberdeen).

Sugar, Alvin: Ideal Waring theorem for the polynomial $m(x^3-x)/6-m(x^2-x)/2+x$. Amer. J. Math. **59**, 43—49 (1937).

Proof that every positive integer is a sum of $\left[\frac{m+1}{2}\right]+3$, $m+3$ or 9 values of the polynomial for non-negative integers x according as $m \geqq 36$, $35 \geqq m \geqq 16$, or $6 \geqq m \geqq 1$. *Wright* (Aberdeen).

Ward, Morgan: Note on divisibility sequences. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 843 bis 845 (1936).

A sequence of rational integers $u_1 u_2 u_3 \ldots$ is called a divisibility sequence in case u_r divides u_s whenever r divides s. It is not assumed that the sequence is a recurring series. It is shown that if for every pair of integers a, b whose greatest common divisor is c, the greatest common divisor of u_a and u_b is u_c, then the sequence is such that if p is a prime, u_r is divisible by p^α when and only when r is divisible by the suffix of the first term of the sequence which is divisible by p^α, and conversely. It is further shown that if the sequence possesses one of these properties (and hence the other) then the product of the first k terms divide the product of any k consecutive terms of the sequence. *D. H. Lehmer* (Bethlehem, Pa.).

Chowla, S.: A theorem of Erdös. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **5**, 37—39 (1937).

The theorem in question (see this Zbl. **15**, 5) required for its proof a theorem of Titchmarsh, the enunciation of which was subsequently corrected by Titchmarsh in Rend. Circ. mat. Palermo **57**, 1—2 (1933). This requires a slight modification in Erdös's argument, which is carried out here, though not in the simplest possible way. *Davenport* (Cambridge).

Erdös, Paul: On the density of some sequences of numbers. II. J. London Math. Soc. **12**, 7—11 (1937).

In a previous paper with the same title (see this Zbl. **12**, 10) the author proved that if $f(m)$ is a non-negative arithmetical function for which

$$f(m_1 m_2) = f(m_1) + f(m_2) \quad \text{if} \quad (m_1, m_2) = 1, \tag{1}$$

and for which

$$f(p_1) \neq f(p_2) \tag{2}$$

for any two different primes p_1, p_2, then $f(m)$ has a density-distribution, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{\substack{m \leqq n \\ f(m) \geqq c}} 1$$

exists and is a continuous function of c. In this paper the author proves that this result also holds when (2) is not assumed. First it is shown that it may be supposed without loss of generality that $f(p^\alpha) = f(p)$, $\sum f(p)/p$ converges, $\sum_{f(p)\neq 0} 1/p$ diverges. The difficulty then lies in proving Lemma I of the previous paper without making use of (2). This is done by an ingenious but complicated argument, which it is impossible to sketch here. One of the arguments used is very similar to one used by Behrend (see this Zbl. **12**, 52). *Davenport* (Cambridge).

Siegel, Carl Ludwig: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen. III. Ann. of Math., II. s. **38**, 212—291 (1937).

In diesem dritten Teil (I. dies. Zbl. **12**, 197; II. ebd. **14**, 8) werden die früher gefundenen Sätze auf ganze quadratische Formen über einem algebraischen Zahlkörper K vom Grade h übertragen. Dabei sind die Beweise für die Hilfssätze mühsamer zu führen, weil die Elementarteilertheorie nun komplizierter ist. Besonders