Werk

Titel: Geometrie (Topologie s. a. Mengenlehre und reelle Funktionen; Riemannsche Geometr...

Jahr: 1937

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0015|log74

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

mung bringen. Die Schmiegungsellipse hat gegenüber anderen Näherungskurven gleicher Güte (etwa gegenüber dem Taylorpolynom 3. Grades) den Vorteil, leicht konstruierbar zu sein. Verf. schlägt vor, Näherungslösungen von Differentialgleichungen aus Schmiegungsellipsen zusammenzustückeln. Bei der näherungsweisen Auflösung von gewöhnlichen Gleichungen führt die Verwendung der Schmiegungsellipse statt des Taylorpolynoms auf quadratische an Stelle von kubischen Gleichungen. Da die Ellipse auch kinematisch leicht erzeugbar ist, sind getriebetechnische Anwendungen möglich. *Theodor Zech* (Darmstadt).

Cranz, Hermann: Modellversuche zur Lösung von Aufgaben des ebenen Potentials. Ing.-Arch. **7**, 432—438 (1936).

Verf. benutzt zur modellmäßigen Lösung von Aufgaben der ebenen Potentialtheorie die bekannte Methode der Ausmessung elektrischer Stromfelder in einem Elektrolyten. Das Stromfeld wird mit Wechselstrom von 10 Volt erzeugt. Zwei Aufgaben der konformen Abbildung werden mit Hilfe des Apparates gelöst. Die erste Randwertaufgabe wird in einem Fall dadurch gelöst, daß die Greensche Funktion versuchsmäßig gewonnen wird und die Werte des Potentials mit Hilfe der Greenschen Formel durch Integration längs des Randes errechnet werden. *K. Hohenemser.*

Geometrie.

Gonzalez, Mario O.: Geometrische Darstellung der rationalen Zahlen und Versuch einer möglichen Rationalisierung der Geometrie. Bol. mat. **9**, 199—204 (1936) [Spanisch].

Musselman, J. R.: The triangle bordered with squares. Amer. Math. Monthly **43**, 539—548 (1936).

Thébault [Mathesis **47** (1933); **48** (1934)], has given many theorems concerning the figure of a triangle with squares constructed internally and externally upon its sides. The author shows how some of these results may be proved analytically, indicating the points of the plane by complex numbers. He obtains by this method many additional properties of the figure. *O. Bottema* (Deventer, Holl.).

Delens, Paul: Généralités sur le tétraèdre. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 1213—1215 (1936).

Soient A', B', C', D' les points-masses, constitués des sommets A, B, C, D du tétraèdre T, affectés de masses positives $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. On considère les points-masses $\varepsilon_A A' + \varepsilon_B B' + \varepsilon_C C' + \varepsilon_D D'$, les ε valant $+1, -1, 0$. Quand $\pm 2M_i = \varepsilon_A A' + \varepsilon_B B' + \varepsilon_A \varepsilon_B C' + D'$, $\pm 2M_j = \varepsilon_A A' + \varepsilon_B B' - \varepsilon_A \varepsilon_B C' + D'$, $(\varepsilon_A = \pm 1, \varepsilon_B = \pm 1, i = 0, 1, 2, 3)$, $(J) = A, B, C, D$, les 3 groupes de 8 points: (J) et (M_i), (J) et (M_j), (M_i) et (M_j) sont des groupes de points associés. Cas spéciaux: 1° $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont proportionels aux aires s_j des faces de T; les points M_i et M_j sont alors les centres des sphères inscrites et exinscrites. 2° $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont porportionnels aux quantités $R_j s_j$, R_j étant le rayon du cercle circonscrit du face; le tétraèdre M_i est maintenant le seul tétraèdre autopolaire à la fois pour les polarités relatives à T et à sa sphère circonscrite O; M_j est le seul tétraèdre M_j inscrit dans O. Des extensions (points et plan de Lemoine, droite et sphère de Brocard etc.) seront développées dans un autre Recueil. *Bottema.*

Thébault, V.: Sur la sphère de Longchamps du tétraèdre. Mathesis **50**, 359—361 (1936).

Bilo, J.: Note sur le tétraèdre. Mathesis **50**, 369—372 (1936).

Usai, Giuseppe: Inviluppi di cerchi soggetti a determinate condizioni. Atti Accad. Gioenia Catania, VI. s. **1**, mem. 14, 1—9 (1936).

Usai, Giuseppe: Inviluppi di cerchi che rappresentano podarie. Atti Soc. Sci. Lett. Genova **1**, 314—322 (1936).

Wenn man in einer Ebene einen gegebenen Punkt G mit allen Punkten P eines Kegelschnitts K verbindet und die Kreise konstruiert, die die Strecken GP als Durch-

messer besitzen, so besteht die Enveloppe dieser Kreise aus zwei Geraden durch G (die senkrecht auf den Verbindungsgeraden von G selbst mit den unendlichfernen Punkten von K stehen) und aus einer übrigen Kurve. Diese hat die Ordnung 4, wenn K eine Ellipse oder Hyperbel, und die Ordnung 3, wenn K eine Parabel ist; in jedem Falle ist sie gleichzeitig die Fußpunktkurve von G in bezug auf K. Verschiedene bekannte besondere Fälle. *E. G. Togliatti* (Genova).

Pascal, Mario: Sulla costruzione del centro di curvatura delle traiettorie dei punti di una figura piana di area costante e a deformate affini. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. **6**, 122—127 (1936).

L'A. donne la construction simple et intéressante du centre de courbure à la courbe décrite par un point d'une figure plane variable avec conservation d'aire. Dans le cas du mouvement d'une figure plane de forme invariable, on retrouve une construction connue (Poincaré, Cinématique et Mécanismes, Potentiel et Mécanique des fluides, 1899, p. 51). *N. Abramesco* (Cluj).

Ziegenbein, Paul: Einige neue Formeln und Sätze aus dem Gebiet der konvexen Bereiche. Kiel: Diss. 1934. 29 S. u. 15 Abb.

Es sei B ein ebener konvexer Bereich mit eindeutig bestimmtem Inkreis. Zu den zur Festlegung von B „notwendigen" Stützgeraden (es sind dies die extremen Stützgeraden von Minkowski) lege man die gleichsinnig parallelen Tangenten an den Einheitskreis. Diese Tangenten umhüllen einen neuen konvexen Bereich, den Verf. die Form $F(B)$ von B nennt. Neben B werden die durch „Parallelverkleinerung" aus B entstehenden Bereiche $B(t)$ betrachtet. $B(t)$, $0 \leqq t < T$, wo T den Inkreisradius bezeichnet, ist die Vereinigungsmenge aller der zu B gehörigen Punkte, die vom Rand von B mindestens den Abstand t haben. $B(t)$ ist wieder ein konvexer Bereich. Jede notwendige Stütze von $B(t)$ ist einer notwendigen Stütze von B gleichsinnig parallel. Hieraus folgt, daß die Form $F(B(t))$ von $B(t)$ mit t wächst. Durch die Schar der Formen $F(B(t))$, $0 \leqq t < T$ ist der Bereich B eindeutig bestimmt. Der Inhalt $f(t)$ von $F(B(t))$ ist eine nicht abnehmende Funktion, die als Formfunktion von B bezeichnet wird. Durch sie lassen sich Umfang U und Inhalt J von B einfach ausdrücken:

$$U = 2\int_0^T f(t)\,dt, \quad J = 2\int_0^T t f(t)\,dt.$$

Bereiche mit gleicher Formfunktion haben also gleiche Umfänge, Inhalte und Inkreisradien. Dies verwendet Verf., um zu einem gegebenen konvexen Bereich einen Bereich mit höchstens einer Ecke zu konstruieren, der mit dem ersten in den 3 genannten Größen übereinstimmt. — Die Begriffsbildungen lassen sich auf konvexe Körper übertragen, die Anwendungen z. T. nur auf Körper sehr spezieller Art. *W. Fenchel.*

Roy, S. N.: On the vector derivation of the invariants and centroid formulae for convex surfaces. Bull. Calcutta Math. Soc. **28**, 79—88 (1936).

Vektoranalytische Herleitungen von teilweise geläufigen Darstellungen der folgenden Größen eines konvexen Körpers durch die Stützfunktion: Integral der mittleren Krümmung, Oberfläche, Volumen, Ortsvektoren der 4 von Bose und Verf. (vgl. dies. Zbl. **14**, 411) untersuchten Schwerpunkte. Hierbei wird auf möglichst weitgehende Verwendung des Nablakalküls Wert gelegt. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Haupt, Otto: Zur Differentialgeometrie k-dimensionaler Gebilde im R_n. J. reine angew. Math. **176**, 95—111 (1936).

Es sei F_k ein eindeutiges, stetiges Bild des k-dimensionalen Würfels im R_n ($1 \leqq k \leqq n-1$). Unter der Ordnung eines Punktes P von F_k wird verstanden die maximale Mächtigkeit des Durchschnittes einer hinreichend kleinen Umgebung von P in F_k mit den linearen $(n-k)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten L_{n-k} des R_n (wobei von einer gewissen, im Raume aller L_{n-k} nirgends dichten, abgeschlossenen Menge von L_{n-k} abgesehen werden darf). F_k heißt ordnungshomogen, wenn alle Punkte von F_k die gleiche Ordnung haben. Verf. behandelt die Frage nach allen möglichen

lokalen Ordnungen ordnungshomogener F_k mit gewissen Differenzierbarkeitsbedingungen. Zunächst gibt Verf. Beispiele von ordnungshomogenen F_k mit den lokalen Ordnungen $n-k+1, n-k+2, \ldots, k(n-k)+1$; diese Beispiele sind algebraisch, und ihre Punkte sind sogar von rationalem Charakter, d. h. ihre Koordinaten x_ν $(\nu > k)$ sind darstellbar als Polynome in den $x_1, \ldots, x_k$. Es wird weiter gezeigt, daß andere Ordnungen nicht auftreten können, wofern gewisse Differenzierbarkeitsbedingungen erfüllt sind, außer es genügt F_k einem explizit angegebenen System partieller Differentialgleichungen (diese Ausnahme-F_k kann man als Verallgemeinerung der geradlinigen F_2 im R_3 betrachten). Verf. vermutet, daß die genannten Ordnungen auch dann die einzigen sind, wenn F_k den genannten Differenzierbarkeitsbedingungen nicht genügt. Schließlich bringt Verf. Beispiele für lokale Ordnungen von Punkten nicht notwendig ordnungshomogener F_k, und zwar treten dabei die Ordnungen $(n-k+1), \ldots, 2(k(n-k)+1)-1$ und nur sie auf. Diese F_k sind wieder algebraisch und die Punkte wieder von rationalem Charakter. Läßt man auch Punkte nichtrationalen Charakters zu, so tritt auch die Ordnung $2(k(n-k)+1)$ auf. Verf. vermutet, daß in den Punkten jeder algebraischen F_k nur Ordnungen bis zu $2(k(n-k)+1)$ auftreten können.

Nöbeling (Erlangen).

Haupt, O.: Über Kontinua von endlicher Relativordnung. Berichtigung. J. reine angew. Math. **176,** 112 (1936).

Zu einer lediglich zusätzlichen Bemerkung in der gleichnamigen Arbeit des Verf. im J. reine angew. Math. **167,** 35 (1931) (dies. Zbl. **3,** 225) wird zur Richtigstellung eine Voraussetzung hinzugefügt. Da aus dieser Bemerkung keine Folgerungen gezogen werden, bleiben die übrigen Überlegungen und Ergebnisse der Arbeit hierdurch unberührt.

Nöbeling (Erlangen).

Algebraische Geometrie:

Mirguet, Jean: Sur une famille de surfaces à plan tangent définie par le paratingent second. C. R. Acad. Sci., Paris **203,** 1218—1220 (1936).

Cette note contient la démonstration de l'existence d'un plan tangent réparti continûment en tout point de certaines surfaces appartenant à une classe assez étendue: les surfaces en tout point desquelles le paratingent second est réduit à deux droites, l'angle de ces deux droites restant supérieur à un angle fixe. *E. Blanc* (Paris).

Feld, J. M.: Configurations inscriptible in a plane cubic curve. Amer. Math. Monthly **43,** 549—555 (1936).

In jeder nichtsingulären ebenen kubischen Kurve können ∞^2 Pascalsche Konfigurationen 9_3 beschrieben werden. Die Kurve sei gegeben durch die Parameterdarstellung $x=p(u)$, $y=p'(u)$. Dann sind 2 von den Wendepunkten verschiedene reelle Punkte der Kurve, wofür das Dreifache der Differenz ihrer Parameterwerte nicht $\equiv 0$ ist, Punkte einer reellen derartigen Konfiguration; die 7 übrigen Punkte sind dann eindeutig bestimmt. Die 9 reellen Punkte der Konfiguration zerfallen in 3 nichtkollineare Tripel. Wenn die Kurve zweiteilig ist, so liegen 2 oder keines dieser Tripel auf dem geraden Zweige. Seien B_1, B_2, B_3 die reellen Wendepunkte der Kurve und A_1, A_2, A_3 ihre reellen Schnittpunkte mit einer Geraden l. Dann sind die weiteren Schnittpunkte der Geraden A_iB_k mit der Kurve die 9 Punkte einer „aus l derivierten" Pascalschen Konfiguration. Wenn die Kurve zweiteilig ist, so sind die Punkte der aus einer reellen harmonischen Polaren derivierten Konfiguration die 9 reellen sextaktischen Punkte. Eine eingeschriebene Pascalsche Konfiguration und ihre Projektion aus einem reellen Wendepunkte auf die Kurve heißen konjugiert. Jede von zwei konjugierten Pascalschen Konfigurationen ist die derivierte Konfiguration jeder Geraden der anderen. Wenn zwei Punkte einer eingeschriebenen Pascalschen Konfiguration, die verschiedenen nichtkollinearen Tripeln angehören, Koinzidenzpunkte (das sind Punkte, worin die Kurve berührende nichtsinguläre kubische Kurven eine Berührung 8. Ordnung besitzen können) sind, so sind alle Punkte der Konfiguration Koinzidenzpunkte. Die Konjugierte einer Konfiguration von Koinzidenzpunkten ist auch eine Konfiguration

von Koinzidenzpunkten. In einer zweiteiligen kubischen Kurve kann eine Konfiguration $12_4, 16_3$ beschrieben werden, deren Punkte die 9 reellen sextaktischen Punkte und die 3 reellen Wendepunkte sind. Jede nichtsinguläre kubische Kurve besitzt eine eingeschriebene Konfiguration $36_7, 84_3$, deren Punkte die 27 sextaktischen Punkte und die 9 Wendepunkte sind. *G. Schaake* (Groningen).

Sapienza, Luigi: Sulla geometria delle quartiche piane. (Mem. II.) Atti Accad. Gioenia Catania, VI. s. **1**, mem. 12, 1—16 (1936).

Fortsetzung (dies. Zbl. **10**, 411) über die Darstellung der ebenen Enveloppen 4. Klasse auf die Punkte eines Raumes S_{14}. Hier werden das Bild V_{11}^{55} der Enveloppen 4. Klasse, die aus einem Strahlbüschel und einer Enveloppe 3. Klasse bestehen, und das Bild V_8^{141} der Gruppen von vier Strahlbüscheln untersucht. Als Einleitung eine Reihe von Anzahlbestimmungen über Gruppen von vier Strahlbüscheln, die zu gegebenen Kurven 4. Ordnung apolar sind. *E. G. Togliatti* (Genova).

Ghizzetti, Aldo: Sulle curve limiti di un sistema continuo ∞^1 di curve piane omografiche. Mem. Accad. Sci. Torino, II. s. **68**, 121—141 (1936).

Die Untersuchung der Kurve C_0, die einer gegebenen algebraischen ebenen Kurve C' in einer ausgearteten ebenen Kollineation entspricht, bedarf vor allem einer Definition: als Kurve C_0 wird hier naturgemäß die Grenzform einer Kurve C_t erklärt, die der gegebenen Kurve C' in einer nichtausgearteten Kollineation Ω_t entspricht, wenn Ω_t sich einer ausgearteten Kollineation Ω_0 nähert; am einfachsten kann man voraussetzen, daß die Koeffizienten a_{ik} der Gleichungen von Ω_t: $x_i' = \sum a_{ik} x_k$ $(i, k = 1, 2, 3)$ gegebene Funktionen von t bedeuten, die für $t = 0$ der Bedingung $|a_{ik}(0)| = 0$ unterworfen sind und die sich in der Umgebung von $t = 0$ analytisch verhalten. Wenn dann, in der Gleichung $F(x_i') = 0$ der Kurve C', die x_i' durch die x_i und die $a_{ik}(t)$ durch ihre in der Umgebung von $t = 0$ gültigen Potenzreihenentwicklungen ersetzt werden, so erhält man durch den Grenzübergang $t \to 0$ die Gleichung der gesuchten Kurve C_0. Um die Rechnungen zu vereinfachen, kann man auch die Kurven C_t einer veränderlichen Kollineation $\bar{\Omega}_t$ unterwerfen, die von t analytisch abhängt und die für $t = 0$ nicht ausgeartet bleibt; die Kurve C_0 wird so kollinear geändert, so daß ihre projektiven Eigenschaften ungeändert bleiben. Man muß zwei Fälle unterscheiden, je nachdem Ω_0 eine ausgeartete Kollineation 1. Art oder 2. Art ist. Der erste Fall ist sehr leicht zu behandeln: wenn die Ebenen der Kurven C_0, C' mit π, π' bezeichnet werden, und wenn N die Ordnung von C' bedeutet, so besitzt Ω_0 in π einen singulären Punkt S und in π' eine singuläre Gerade s'; und C_0 besteht aus N durch S hindurchgehende Geraden, die den N Schnittpunkten von C' mit s' projektiv entsprechen. Im zweiten Falle besitzt Ω_0 in π eine singuläre Gerade s und in π' einen singulären Punkt S'; mit einer geeigneten Wahl der Hilfskollineation $\bar{\Omega}_t$ kann man immer erreichen, daß Ω_t dem Punkte S' einen festen Punkt S_0 entsprechen läßt; man muß dann zwei Unterfälle unterscheiden, je nachdem S_0 auf s liegt oder nicht; in jedem Falle muß man noch zwei Unterfälle unterscheiden, je nachdem die Grenzlage ω_0 der Projektivität ω_t, die von Ω_t zwischen den Strahlbüscheln S' und S_0 induziert wird, eine ausgeartete ist oder nicht; und wenn ω_0 ausgeartet ist, gibt es noch weitere Unterfälle zu betrachten, deren Beschreibung zu lang wäre. Man erhält so eine lange Diskussion, die sehr sorgfältig ausgeführt wird. Besonders schwierig ist der Fall, wo die gegebene Kurve C' durch S' hindurchgeht; in diesem Falle müssen die einzelnen von S' ausgehenden Zweige von C' getrennt behandelt werden. Als Ergebnis findet man, daß C_0 fast immer aus lauter Geraden besteht; nur in zwei Fällen, die von arithmetischen Eigenschaften der Ordnung und Klasse der obengenannten Zweige von C' abhängen, kann C_0 auch nicht geradlinige Bestandteile besitzen oder sogar irreduzibel sein; immer aber sind die einzelnen Bestandteile von C_0 W-Kurven von Klein und Lie. Verschiedene Beispiele einer irreduziblen C_0 werden angegeben. *E. G. Togliatti* (Genova).

Rangaswami, K.: On the pedal quarties of a quadric. J. Indian Math. Soc., N. s. **2**, 159—162 (1936).

Fortsetzung (dies. Zbl. **12**, 32) einer früheren Untersuchung desselben Verf. über konfokale Quadrikscharen. In einer Quadrikschar wird eine Quadrik Q ausgewählt und als Fundamentalquadrik einer Metrik ausgezeichnet. Man nennt Apollonische Quadrik den Ort aller Punkte, deren Polarebenen in bezug auf Q und auf einen linearen Strahlenkomplex C orthogonal sind. Bei veränderlichem C erhält man ∞^5 Apollonische Quadriken, die auf Q ein ∞^5 Linearsystem von Fußpunktkurven 4. Ordnung ausschneiden. Es werden hier erstens ihre ∞^2 apolaren Kurven 4. Ordnung bestimmt: sie sind die Schnitt-C^4 von Q mit den Quadriken, die in bezug auf Q konjugiert sind und das Fundamentaltetraeder der Schar als Polartetraeder besitzen. Zweitens werden diejenigen Fußpunkt-C^4 betrachtet, die in eine Erzeugende von Q und in eine C^3 zerfallen: es gibt zwei Netze solcher C^3; einige ihrer Eigenschaften werden untersucht. *E. G. Togliatti* (Genova).

Dor, Léopold: Un problème sur les quadriques. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **5**, 228—231 (1936).

Die Geraden, die eine Quadrik Q berühren und zwei feste Geraden r, s treffen, bilden eine Regelfläche Γ 4. Ordnung, die r, s als Doppelgeraden besitzt. Der Ort der Berührungspunkte jener Geraden mit Q ist eine Kurve Γ 4. Ordnung 1. Art; es werden zwei weitere Quadriken angegeben, die durch Γ hindurchgehen. Besonderer Fall, wo Q von r berührt wird; der Berührungspunkt rQ ist ein Doppelpunkt von Γ. Wenn Q auch von s berührt wird, zerfällt F in zwei Quadriken und Γ in zwei Kegelschnitte. *E. G. Togliatti* (Genova).

Nicotra, Francesco: La trasformazione determinata da due fasci di piani e da un fascio di quadriche e sua rappresentazione in un iperspazio. Atti Accad. Gioenia Catania, VI. s. **1**, mem. 2, 1—11 (1936).

Eine bekannte räumliche Cremonasche Verwandtschaft 5. Ordnung: Zwei entsprechende Punkte P, P' liegen gleichzeitig auf einer Geraden einer gegebenen linearen Strahlenkongruenz und auf einer Quadrik eines gegebenen Büschels (s. L. Berzolari, Encykl. d. math. Wissi, III C 11, Anm. 726 zu S. 2077). Die geordneten oder nichtgeordneten Punktepaare PP' werden dann auf höhere Mannigfaltigkeiten abgebildet. *E. G. Togliatti* (Genova).

Roth, Leonard: On the projective classification of surfaces. Proc. London Math. Soc., II. s. **42**, 142—170 (1936).

Die Untersuchungen einer Reihe früherer Abhandlungen desselben Verf. (dies. Zbl. **8**, 220—221; **9**, 323; **10**, 128; **11**, 415) werden hier zusammengestellt und neu bearbeitet. Es handelt sich zunächst, um die Regularität und weiter um die Werte der wichtigsten Charaktere einer algebraischen singularitätenfreien Fläche. Folgende Fragen werden zunächst diskutiert: Flächen, deren hyperebene Schnittkurven normal sind, insbesondere gewisse kanonische Flächen; Flächen, die auf gegebenen besonders einfachen V_3 liegen, wie z. B. Flächen, die auf einer Quadrik, auf einer kubischen Hyperfläche, auf einem rationalen normalen Kegel V_3 liegen, oder Flächen, die ein rationales Büschel ebener Kurven enthalten; Flächen, die ein rationales Kurvenbüschel oder ein Kurvennetz des Geschlechts 3 oder 4 enthalten. Es folgt als Hauptergebnis, daß, wenn die Dimension r des Raumes, in dem die Fläche liegt, gegeben ist, und wenn ihre Ordnung n und das Geschlecht π ihrer hyperebenen Schnittkurven groß genug sind, die Fläche regulär ist. Andere Eigenschaften, die über die Regularität der Fläche zu entscheiden gestatten, kommen aus der Betrachtung des vollständigen kontinuierlichen Systems $\{C\}$, das die hyperebenen Schnittkurven enthält. Schließlich die Anwendung auf die Klassifikation der Flächen der Ordnung $n \leqq 10$ eines vierdimensionalen Raumes; solche Flächen sind entweder regulär oder mit einer Regelfläche birational äquivalent, den Fall einer normalen Fläche mit $n = 10$,

$\pi = 6$ ausgeschlossen; die Klassifikation wird nach den Werten von n und auch nach den Werten von π ausgeführt. *E. G. Togliatti* (Genova).

Buzano, Piero: Curve canoniche del genere 4 contorni apparenti di superficie cubiche. Mem. Accad. Sci. Torino, II. s. **68**, 101—120 (1936).

Der Umriß einer doppelpunktfreien Fläche 3. Ordnung F von einem Punkte A allgemeiner Lage aus ist bekanntlich eine Raumkurve C_4^6 des Geschlechts 4; kann eine solche Kurve auch als Umriß einer anderen Fläche 3. Ordnung von einem geeigneten Punkt B aus erhalten werden? Und wievielmal höchstens kann das vorkommen? Eine einfache Rechnung lehrt vor allem, daß die Gerade AB einen Punkt C enthalten muß, dessen Polarquadrik F_C in bezug auf F in zwei Ebenen zerfallen muß, und daß eine von solchen zwei Ebenen die gemischte Polarebene F_{AB} von A und B in bezug auf F sein muß. Der erste Teil der Untersuchung gibt also zunächst ein Verzeichnis aller doppelpunktfreien Flächen F, die als Ausgangspunkt gewählt werden können; man findet 5 Arten von möglichen Flächen F; und in jedem Falle werden alle diejenigen Punkte des Raumes bestimmt, die eine zerfallende Polarquadrik in bezug auf F besitzen. Andererseits muß man zwei Fälle unterscheiden, je nachdem $C \equiv B$ oder $C \not\equiv B$ ist; wenn $C \equiv B$ kann F_B entweder ein Ebenenpaar sein, während B auf der Polarebene F_{AA} von A liegen muß, oder eine durch A nicht hindurchgehende Doppelebene sein; wenn hingegen $C \not\equiv B$, besteht immer F_C aus zwei getrennten Ebenen. Die Vereinigung der beiden Gesichtspunkte führt zu einer ziemlich langen Aufzählung von verschiedenen Fällen, die sehr sorgfältig diskutiert werden; die interessantesten von ihnen werden vollständig entwickelt und miteinander verglichen. Die höchstmögliche Anzahl von Lösungen ist 15; man erhält sie aus einer allgemeinen Fläche F 3. Ordnung, d. h. aus einer Fläche, die ein bestimmtes und nicht ausgeartetes Sylvester-Pentaeder besitzt, indem man ihren Umriß aus einem Punkt A betrachtet, dessen Polarebene F_{AA} mit einer Fläche des Pentaeders zusammenfällt; man findet in diesem Falle eine Konfiguration $(15_6, 15_6)$ von 15 Punkten und 15 Ebenen, die von L. Cremona schon betrachtet worden ist. — Verf. bemerkt noch, daß die von ihm betrachteten Kurven C_4^6 mit anderen, die A. Emch studiert hat (s. dies. Zbl. **10**, 35), in Beziehung stehen; alle zusammen besitzen sie die Eigenschaft, daß sechs von ihren Tangenten durch denselben Punkt hindurchgehen; eine solche Eigenschaft kann nur endlichvielmal vorkommen. *E. G. Togliatti* (Genova).

Godeaux, Lucien: Sur une involution de genres un appartenant à une surface de genre quatre. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **5**, 136—139 (1936).

In dieser Mitteilung betrachtet Verf. in einem Raume S_3 die zyklische Homographie 5. Ordnung $x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^2 x_4$, wo $\varepsilon^5 = 1$ und ε eine primitive Wurzel bedeutet; und gibt die Gleichung einer Fläche 5. Ordnung, die von jener Homographie in sich selbst transformiert wird, die also eine Involution I_5 enthält; für die Fläche F^5 ist $p_a = p_g = 4$, $p^{(1)} = 6$, während das Bild Φ der Involution I_5 eine reguläre Fläche mit einer kanonischen Kurve der Ordnung 0 ($p_a = P_4 = 1$) ist. Er gibt auch die Abbildung von I_5 auf einer Doppelebene mit einer Verzweigungskurve 6. Ordnung. — Dasselbe erhält man, wenn ε^2 durch ε^3 in den ursprünglichen Formeln ersetzt wird; wenn hingegen ε^2 durch ε^4 ersetzt wird, so enthält Φ ein Büschel kanonischer Kurven des Geschlechts 2 ($p_a = p_g = 2$, $p^{(1)} = 2$). *E. G. Togliatti.*

Godeaux, Lucien: Sur la construction d'une surface canonique. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **5**, 139—143 (1936).

Man betrachtet in einem Raume S_7 eine involutorische Homographie mit den Fundamentalräumen S_3 ($x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$) und S_3' ($x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$); die ∞^{19} Quadriken Q, die S_3, S_3' als Polarräume besitzen, werden dann auf die Hyperebenen eines S_{19} durch die Formeln $X_{ik} = x_i x_k$ ($i, k = 0, 1, 2, 3$ und $i, k = 4, 5, 6, 7$) abgebildet; diese Formeln liefern die parametrische Darstellung einer V_7^{64}, deren Punkte den Paaren homologer Punkte der gegebenen Homographie eineindeutig entsprechen; die V_7^{64} erscheint als die Schnitt-V_7 von zwei Kegeln, die zwei Veronesesche in zwei

windschiefen Räumen S_9, S_9' liegenden $V_3^8, V_3'^8$ aus S_9', S_9 bzw. projizieren. Die Schnitt-V_3 von vier Quadriken Q enthält eine Involution I_2, die auf der Schnitt-V_3^{64} der V_7^{64} mit einem Raume S_{15} abgebildet wird; andererseits sind die hyperebenen Schnittflächen jener V_3, als Schnittflächen von vier Quadriken eines Raumes S_6, kanonische Flächen; und daraus, als Anwendung einiger früheren Sätze desselben Verf., kann man schließen, daß auch die Schnittflächen der V_3^{64}, d. h. die Schnittflächen der V_7^{64} mit den Räumen S_{14}, kanonische Flächen sind; für sie ist $p_a = p_g = 15$, $p^{(1)} = 65$. — In einem Raume S_5 führt eine ähnliche Konstruktion zu Kurven C^{16} des Geschlechts 9 eines Raumes S_7, auf welchen die Hyperebenen des S_7 eine parakanonische Vollschar ausschneiden. *E. G. Togliatti* (Genova).

Segre, Beniamino: Un teorema sopra le superficie algebriche con due fasci unisecantisi, ed una relazione fra gli angoli sotto cui si incontrano due curve algebriche tracciate su di una sfera. Boll. Un. Mat. Ital. **15**, 169—173 (1936).

Sur une surface algébrique F contenant deux faisceaux $|A|$ et $|B|$ de courbes unisécantes, on considère deux courbes algébriques C et C' rencontrant les courbes A en α, α' points, les courbes B en β, β' points. On suppose que l'une au moins de ces courbes, C' par exemple, est à valence zéro et que les $\alpha\beta' + \alpha'\beta$ points U_r communs à C et C' sont distincts. Si c_r, c_r', a_r, b_r, désignent les tangentes à C, C', A et B en U_r, on a le théorème suivant: la somme des rapports anharmoniques (a_r, c_r, c_r', b_r) est égale à $\alpha'\beta$. Si F est une sphère, on en déduit que la somme des cotangentes des angles sous lesquels se coupent deux courbes algébriques quelconques de la sphère est un multiple entier de $\frac{i}{2}$. Cette somme est nulle si les deux courbes sont algébriquement indépendantes et seulement dans ce cas. *P. Dubreil* (Nancy).

Black, Amos: A series of involutorial cremona space transformations defined by a pencil of ruled cubic surfaces. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 754—760 (1936).

Calleri, Piera: Su alcune corrispondenze legate al contatto di due superficie. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **69**, 711—721 (1936).

S et S' étant deux surface tangentes en un point P et y présentant un contact du premier ordre, on fait correspondre à un point A de S un point A' de S' projection de A à partir d'un point fixe M du plan tangent en P. A tendant vers P suivant une courbe possédant une tangente r, A' tend vers P suivant une courbe possédant une tangente r': la correspondance entre r et r' est une correspondance [2,2], rationnelle et irréductible. Il en est de même pour la correspondance entre r et la position limite de l'intersection du plan tangent à S en A avec le plan tangent à S' en A'. Cas ou le contact est d'ordre >1. *P. Dubreil* (Nancy).

Baker, H. F.: Polarities for the nodes of a Segre cubic primal in space of four dimensions. Proc. Cambridge Philos. Soc. **32**, 507—520 (1936).

Die Eigenschaften der Konfiguration der 10 Doppelpunkte einer Segreschen V_3^3 in einem vierdimensionalen Raume, die eine so einfache analytische Behandlung gestatten, wenn man 6 überflüssige Koordinaten $x_1 x_2 \ldots x_6$ braucht (mit der Bedingung $\sum x_i = 0$) und wenn man der V_3^3 die wohlbekannte Gleichung $\sum x_i^3 = 0$ erteilt, gestalten sich auch sehr einfach, wenn man mit den 5 üblichen Koordinaten $x_1 x_2 \ldots x_5$ arbeitet, so daß die Gleichung der V_3^3 folgende Form annimmt: $\sum x_i^3 - (\sum x_i)^3 = 0$ $(i = 1, \ldots, 5)$. Eine geeignete Bezeichnung für die 10 Doppelpunkte gestattet zu beweisen, daß sie in zwei Pentaedern verteilt werden können, die polar in bezug auf der Quadrik $\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 = 0$ sind; die Schnittebenen der entsprechenden Flächenpaare der zwei Pentaeder liegen auf V_3^3 und sind 5 assoziierte Ebenen des Raumes S_4; jede Fläche eines jeden der beiden Pentaeder enthält eine bestimmte Kante des anderen Pentaeders. Es gibt 6 solche Pentaederpaare; durch harmonische Homologien kann man ein Pentaederpaar in eines der 5 anderen verwandeln. Wenn ein solches Pentaeder als Fundamentalpentaeder der Koordinaten gewählt wird, so nimmt die Gleichung der V_3^3 folgende Form an: $\xi_1\xi_2\xi_4 + \xi_2\xi_3\xi_5 + \xi_3\xi_4\xi_1 + \xi_4\xi_5\xi_2 + \xi_5\xi_1\xi_3 = 0$, wo die

Zahlentripel 124, 235, 341, 452, 513 aus den Seitenzahlen 12, 23, 34, 45, 51 und den gegenüberliegenden Eckenzahlen 4, 5, 1, 2, 3 eines einfachen Pentagons 12345 gebildet sind. Alles das führt Verf. zu einem Vergleich zwischen der Theorie von 5 assoziierten Geraden (oder Ebenen) eines Raumes S_4 und der Theorie einer Gruppe von 10 assoziierten Punkten, die aus den Ecken von zwei autopolaren Pentaedern einer Quadrik besteht: die 10 Doppelpunkte der V_3^3 bilden keine solche Gruppe von 10 assoziierten Punkten. *E. G. Togliatti* (Genova).

Eger, Max: Sur les systèmes canoniques d'une variété algébrique. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 92—94 (1937).

Man betrachtet auf einer algebraischen V_n $\lambda+1$ Hyperflächenbüschel; es gibt dann auf V_n, im allgemeinen, eine V_λ, Ort aller so beschaffenen Punkte P, daß die $\lambda+1$ durch P hindurchgehenden Hyperflächen jener Büschel einen gemeinsamen Tangential-$S_{n-\lambda}$ besitzen. Wenn V_n eine Flächenirregularität $q \geqq \lambda+1$ hat, und wenn die $\lambda+1$ Büschel aus den Niveaumannigfaltigkeiten von $\lambda+1$ Integralen 1. Gattung von V_n bestehen, so wird V_λ eine kanonische K_λ von V_n genannt. Es folgen zwei verschiedene Beweise, daß die K_λ ein Äquivalenzsystem bilden. Dieser Begriff ist eine Verallgemeinerung des üblichen kanonischen Systems, der Äquivalenzschar ψ von F. Severi, und anderer Äquivalenzsysteme, die von B. Segre eingeführt worden sind. *E. G. Togliatti* (Genova).

Plamitzer, A.: Über Örter von Treffgeraden homologer Strahlen einer Klasse Cremonascher Verwandtschaften n-ten Grades zwischen Strahlenbündeln. Prace mat.-fiz. **44**, 137—152 (1937).

Zwei Strahlenbündel w_1, w_2 sind kollinear; ein drittes Strahlenbündel w_0 befindet sich mit w_1, und daher auch mit w_2, in einer Cremonaschen Verwandtschaft n-ten Grades; die Treffgeraden sämtlicher Tripel homologer Strahlen von W_0, W_1, W_2 erzeugen einen Komplex $(2n+1)$-ten Grades. Es werden auch die Kongruenz, die Regelfläche und die Geradengruppe untersucht, die man ganz ähnlich erhält, wenn w_1, w_2 durch drei, vier oder fünf kollineare Bündel ersetzt werden. *E. G. Togliatti.*

Differentialgeometrie:

Bouligand, Georges: Sur les lignes asymptotiques. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **5**, 219—224 (1936).

Eine Reihe von Bemerkungen über einige differentialgeometrische Probleme ohne die üblichen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen. *W. Feller* (Stockholm).

Myller, Alexandre: La torsion moyenne d'une surface. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 1487—1488 (1936).

Für die von einem Flächenpunkt M ausgehenden Geodätischen ist der Mittelwert ihrer Torsionen in M gleich $\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$, wo R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien sind. Verf. nennt $\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}$ die mittlere Torsion der Fläche in M. Sie ergibt sich auch durch folgenden Grenzübergang: P sei ein Flächenpunkt im Abstand Δs von M. Die durch M gehende Normalebene in P schneidet die durch die beiden Hauptrichtungen von M gehenden Normalebenen in 2 Geraden, die den Winkel ε einschließen mögen. Dann strebt $\varepsilon/\Delta s$ für $\Delta s \to 0$ gegen die mittlere Torsion. *W. Fenchel.*

Mitrinovitch, Dragoslav S.: Remarque sur les surfaces de translation. Prakt. Akad. Athénon **11**, 356—359 (1936).

Auf einer Fläche werden durch die Gleichung $s = \varphi(x, y, z)$, wo s die Bogenlänge bezeichnet, zwei Kurvenscharen bestimmt. Verf. untersucht die Form von φ, die auf Flächen der Form $z = f(x) + g(y)$ Kurvenscharen liefern, deren Projektionen auf die x,y-Ebene orthogonale Scharen sind. *W. Feller* (Stockholm).

Delgleize, Augustin: Sur les transformations de Ribaucour. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 1216—1217 (1936).

Si S et Σ sont deux surfaces minima qui se correspondent dans une transformation

de Ribaucour dont $\gamma_1, \gamma_2, w, \varphi$ sont les fonctions caractéristiques, la surface des centres des sphères S_0 est une déformée du paraboloïde de révolution et compose avec une autre déformée du même paraboloïde une congruence W. La surface S' attachée à cette congruence et qui correspond à S_0 avec orthogonalité des éléments est déterminée par les équations $x' = \frac{1}{W}(\gamma_2 X_1 - \gamma_1 X_2), \ldots$ (*). L'auteur cherche les surfaces S, Σ (non minima) en correspondence de Ribaucour dont S_0 et S' [déterminée par (*)] se correspondent avec orthogonalité des éléments. Comme solutions particulières il obtient toutes les surfaces S parallèles à surfaces minima ou à surfaces à courbure constante. Si la courbure de S moyenne ou totale est constante, il y en a le même pour Σ. *S. Finikoff* (Moscou).

Abramesco, Nicolas: Sur l'étude de la forme d'une courbe ou d'une surface dans le voisinage de l'un de ses points et une nouvelle interprétation de la cubique donnant les tangentes de Darboux et Segre. Mathematica, Cluj **12**, 217—226 (1936).

Soit M un point d'une courbe plane (M), MT sa tangente, MN sa normale, MM_1, MM_2 deux droites également inclinées sur MN, M_1, M_2 leurs points d'intersection avec (M). Le milieu M_a de $M_1 M_2$ décrit une courbe (M_a) diamètrale angulaire dont la tangente ME en M est la normale angulaire. Si C et C_1 sont les centres de courbure à (M) et à sa développée, la normale angulaire et la normale affine divisent $C C_1$ en trois parties égales. Le point caractéristique T_a est le point limite du point d'intersection de $M_1 M_2$ avec MT. La perpendiculaire de C sur la normale affine coupe MT en T'_a symétrique de T_a par rapport à M. La connaissance de T_a est équivalente à la connaissance de la conique osculatrice de (M) en M. Généralisations 1° pour une droite arbitraire MN qui fait avec MT, MM_1, MM_2 un faisceau harmonique 2° pour une courbe gauche, 3° pour une surface. Dans ce cas dernier T_a décrit dans le plan tangent une cubique. *S. Finikoff* (Moscou).

Behari, Ram: A note on Strazzeri's formula in rectilinear congruences. J. Indian Math. Soc., N. s. **2**, 163—164 (1936).

Si un plan variable p parallèle à un plan fixe p_0 coupe sous un angle droite un faisceau φ de rayons l d'une congruence C et M et P sont les points d'intersection de l avec p_0 et p, l'aire de la section $d\Sigma$ est une fonction quadratique de $t = MP$. Or $d\Sigma = 0$ si P est un foyer F_i de l. Donc $d\Sigma = K(t - t_1)(t - t_2)$ où $t_i = MF_i$. Or si $t \to \infty$, $d\Sigma \sim t^2 d\sigma$ où $d\sigma$ est l'élément d'aire de la représentation sphérique de C. Comme $d\Sigma = dS \cos\theta$ où dS est l'aire de la section de φ par une surface S au point M et θ — l'angle entre l et la normale de S, on obtient la formule de Strazzeri [Rend. Circ. mat. Palermo **51**, 138 (1927)] $\frac{dS}{d\sigma}\cos\theta = \varrho_1 \varrho_2$ où $\varrho_i = t - t_i$. *Finikoff.*

Thomas, T. Y.: On closed spaces of constant mean curvature. Amer. J. Math. **58**, 702—704 (1936).

The following theorem is proved: Any hypersurface S of class C^4 of constant mean curvature $\lambda > 0$ and dimensionality $n \geqq 4$ in a Euclidean space E of $n+1$ dimensions, the hypersurface S being closed but without boundary, is a space of constant curvature. — A hypersurface S is said to be of class C^4 when it is defined by functions $\varphi^i(x_\alpha)$, $i = 1, \ldots, n+1$ which are continuous and possess continuous partial derivatives to the fourth order. S is said to be of constant mean curvature (or Einstein space), if the contracted curvature tensor $B_{\alpha\beta}$ is proportional to the fundamental tensor, hence $B_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha^\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$. The hypersurface S has n dimensions. *Struik* (Cambridge, Mass.).

Thomas, T. Y.: Riemann spaces of class one and their characterization. Acta math. **67**, 169—211 (1936).

Das Hauptziel dieser Arbeit ist die rein algebraische Charakterisierung der Riemannschen Mannigfaltigkeiten V_n der Klasse 1. Nach einleitenden Sätzen über die (bekannten) notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß V_n von der

Klasse 1 sei, führt der Verf. zuerst den Begriff des Typus ein: V_n ist vom Typus τ, wenn der Rang der Determinante des zweiten Fundamentaltensors $b_{\lambda\mu}$ gleich τ ist. Die untersuchte V_n ist dann und nur dann vom Typus τ, wenn a) für $\tau = 1$ die Krümmungsgröße von V_n verschwindet (folgt sofort aus der Gaußschen Gleichung), b) für $\tau = 2, \ldots, n$, wenn die Matrix $\| B_{\omega\mu\lambda 1}, \ldots, B_{\omega\mu\lambda n} \|$ den Rang τ hat. (Dabei ist $B_{\omega\mu\lambda\nu}$ die Krümmungsgröße von V_n.) — Überraschend wirkt der Satz, daß für $\tau \geqq 4$ die Codazzischen Gleichungen eine Folge der Gaußschen Gleichungen sind. (Zum Beweise genügt es, die Gaußsche Gleichung kovariant zu derivieren und dann die Bianchi-Padovasche Identität anzuwenden!) Ist $n \geqq 3$, $\tau \geqq 3$, so hat die Gaußsche Gleichung (angesehen als Gleichung für Unbekannte $b_{\lambda\mu}$) dann und nur dann eine reelle Lösung, wenn

$$-\begin{vmatrix} B_{\alpha\beta\lambda\mu} & B_{\alpha\beta\mu\nu} & B_{\alpha\beta\nu\lambda} \\ B_{\beta\gamma\lambda\mu} & B_{\beta\gamma\mu\nu} & B_{\beta\gamma\nu\lambda} \\ B_{\gamma\alpha\lambda\mu} & B_{\gamma\alpha\mu\nu} & B_{\gamma\alpha\nu\lambda} \end{vmatrix} \geqq 0, \quad -\sum \begin{vmatrix} B_{\alpha\beta\lambda\mu} & B_{\alpha\beta\mu\nu} & B_{\alpha\beta\nu\lambda} \\ B_{\beta\gamma\lambda\mu} & B_{\beta\gamma\mu\nu} & B_{\beta\gamma\nu\lambda} \\ B_{\gamma\alpha\lambda\mu} & B_{\gamma\alpha\mu\nu} & B_{\gamma\alpha\nu\lambda} \end{vmatrix} > 0, \quad R(B) = 0.$$

Dabei bezieht sich das Summationszeichen auf alle Werte der in der Determinante auftretenden Indizes und $R(B)$ ist das Resultantensystem der Gleichungen

$$b_{\mu\nu} B_{\alpha\beta\gamma\delta} + b_{\mu\alpha} B_{\beta\nu\gamma\delta} + b_{\beta\gamma} B_{\mu\delta\nu\alpha} + b_{\beta\delta} B_{\mu\gamma\alpha\nu} = 0 \tag{1}$$

und der (homogenisierten) Gaußschen Gleichungen

$$B_{\alpha\beta\gamma\delta} t^2 = b_{\alpha\delta} b_{\beta\gamma} - b_{\alpha\gamma} b_{\beta\delta}. \tag{2}$$

Der springende Punkt des Beweises ist der, daß die rechte Seite von (2) als Kofaktoren der Elemente einer dreireihigen Determinante angesehen werden können. Weitere Probleme sollen nur aufgezählt werden: Explizite Bestimmung von $b_{\lambda\mu}$ aus der Gaußschen Gleichung, Stetigkeitseigenschaften von $b_{\lambda\mu}$, komplette algebraische Charakterisierung der Räume V_n der Klasse 1, deren Krümmungsgröße erste stetige Ableitungen haben. Es zeigt sich z. B., daß diese Räume (für $n \geqq 4$, $\tau \geqq 4$) dann und nur dann die Klasse 1 haben, wenn die oben aufgezählten Bedingungen erfüllt sind. — Die Arbeit endet mit der Anwendung auf topologische Räume. — Es soll ausdrücklich betont werden, daß dieses Referat gar nicht erschöpfend ist und die hier erwähnten Sätze ohne analytische Nebenbedingungen (welche der Verf. immer angibt) reproduziert worden sind. *Hlavatý* (Praha).

Land, F. W.: On certain properties of non-holonomic submanifolds of a non-Riemannian space and the effect of them of a general deformation. Proc. London Math. Soc., II. s. **41**, 497—516 (1936).

In an n-dimensional manifold X_n with coordinates $P(x^1, \ldots, x^n)$ and linear connection with parameters $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ the $n - m$ conditions

$$C^p_\alpha \, dx^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, n; \quad p = 1, \ldots, m - n$$

determine at every point P a "facet" of a non-holonomic submanifold. Facet components of vectors and vectors having no facet components (lying in the "span") are determined by the equations

$$v^i = B^i_\alpha v^\alpha, \quad B^i_\alpha v^\alpha = 0, \quad i = n + 1, \ldots, m.$$

— The different transformation equations of the connection parameters under transport along facet and span paths are given, and also the resulting curvature tensors. Then the result is given of different kinds of deformations on the connection parameters, on the torsion and curvature tensors with respect to facet and span manifolds. The deformations fall into local variations with and without displacement of the base point; the variation measures into natural, displaced and transported ones. *Struik.*

Hombu, Hitoshi: Zur Theorie der Affinorübertragung. Proc. Imp. Acad. Jap. **12**, 109—111 (1936).

Einen (nur) kovarianten bzw. (nur) kontravarianten Affinor kann man auch bequem als einen „Vektor" im Königschen Raume behandeln (vgl. Hlavatý, Espaces

abstraits courbes de König; dies. Zbl. 12, 318). Dann bekommt man auch die zugehörigen Übertragungsparameter dieser „Vektoren". Der Verf. zeigt, daß, ausgehend von solchen Übertragungsparametern für p-Vektoren bzw. symmetrische Affinoren p-ter Stufe, auch Übertragungsparameter für $(p-m)$-Vektoren bzw. symmetrische Affinoren $(p-m)$-ter Stufe konstruiert werden können, wobei im ersten Falle $p < n$ vorausgesetzt werden muß. *Hlavatý* (Praha).

Hombu, Hitoshi: Theorie der kugelgeometrischen Übertragung in der Mannigfaltigkeit von Hyperflächenelementen. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I Math. 4, 195—248 (1936).

In jedem Punkte einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n $(n \geqq 3)$ mit n Veränderlichen $z, x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}$ wird ein Hyperflächenelement $(z, x; p)$ durch z, die x und $n-1$ Koordinaten $p_1, \ldots, p_{n-1}$ festgelegt. Sodann wird jedem Element $(z, x; p)$ ein Möbiusscher Raum M_n zugeordnet. In jedem Raum M_n wird ein $(n+2)$-hypersphärisches Bezugssystem festgelegt. Es wird nun eine Übertragung durch die Gleichungen

$$dy_i = \sum \omega_{ik}\, y_k, \quad i = 0, 1, \ldots, n+1;\ k = 0, 1, \ldots, n+1$$

definiert, wobei die ω_{ik} Differentialformen in den Differentialen dz, dx^i, dp_i der Koordinaten des Elementes sind, welche nur der Bedingung genügen, daß die Übertragung die Gleichung

$$(yy) \equiv -y_0^2 + y_1^2 + \cdots + y_{n+1}^2 = 0$$

invariant läßt. Weitere Voraussetzungen sind, daß jedes Hyperflächenelement der X_n in dem ihm zugeordneten M_n enthalten ist und daß diese Beziehung in einer im Text angegebenen Weise bei der Übertragung erhalten bleibt. Es werden jetzt eine Reihe von Eigenschaften solcher Übertragungen studiert sowie die Beziehungen zu der Cartanschen Theorie der konformen und der Veblenschen Theorie der projektiven Übertragungen. Die Untersuchung schließt sich an einige neuere Arbeiten von A. Kawaguchi an [Mh. Math. Phys. 43 (1936), this Zbl. 14, 332; 44 (1936); Abh. Seminar Vektor- u. Tensoranal. Moskau 5 (1936)]. *D. J. Struik* (Cambridge).

Kawaguchi, Akitsugu: Some intrinsic derivations in a generalized space. Proc. Imp. Acad. Jap. 12, 149—151 (1936).

Kawaguchi, Akitsugu: Certain identities in a generalized space. Proc. Imp. Acad. Jap. 12, 152—155 (1936).

Anschließend an die Arbeit von J. L. Synge „Some intrinsic and derived vectors in a Kawaguchi space" (vgl. dies. Zbl. 12, 88, auch der Bezeichnung wegen) zeigt der Verf. erstens, daß

$$\overset{p-r}{D}_{\lambda\mu}(T)\, X^\mu \equiv \sum_{a=r}^{p} \binom{a}{r} T_{\lambda(a)\mu}\, X^{\mu(a-r)}, \tag{1}$$

ein kovarianter Vektor ist, wenn T_λ ein kov. Vektor p-ter Ordnung und X^ν ein beliebiger kontravarianter Vektor ist. Der Beweis wird durch die Ausrechnung der Transformationsformeln geliefert. Insbesondere ist also

$$\overset{2m-a-r}{D}_{\lambda\mu}\left(\overset{a}{E}\right) X^\mu \equiv \sum_{b=r}^{2m-a} \binom{b}{r} \overset{a}{E}_{\lambda(b)\mu}\, X^{\mu(b-r)} \tag{2}$$

ein kovarianter Vektor, wenn $\overset{a}{E}_\lambda$ der von Synge (s. o.) eingeführte Vektor der Ordnung $2m - a$ ist. Daraus kann die kovariante Ableitung

$$\overset{1}{\delta}\left(\overset{a}{E}\right) X^\nu = \frac{dX^\nu}{dt} + X^\mu \Gamma_\mu^\nu\left(\overset{a}{E}\right) \quad \text{mit} \quad \Gamma_\mu^\nu\left(\overset{a}{E}\right) \equiv g^{\nu\lambda}\left(F \overset{a}{E}_{\lambda(2m-a-1)\mu} + \overset{1}{E}_\lambda \overset{1}{E}_\mu^{(1)}\right) \tag{3}$$

gefolgert werden (wo $g^{\lambda\nu}$ weiter unten definiert wird), die in bekannter Weise zum Begriff des Parallelismus führt. Ist $\Phi^\nu = 0$ die Gleichung der verallgemeinerten

Autoparallelen (paths), $\Phi^\nu \equiv x^{\nu(p)} + \varphi^\nu(t, x^{(0)}, \ldots, x^{(p-1)})$, so folgt aus (1) die Gleichung

$$D^{p-r}_{\cdot\mu}(\Phi)\, X^\mu = \binom{p}{r} X^{\nu(p-r)} + \sum_{a=r}^{p-1} \binom{a}{r} \varphi^\nu_{\cdot(a)\mu}\, X^{\mu(a-r)}, \tag{4}$$

welche noch eine leichte Umgestaltung gestattet. (Dabei bezieht sich das Heraufziehen des Indexes auf $g^{\lambda\nu}$, wo $g^{\lambda\nu} g_{\lambda\mu} = \delta^\nu_\mu$ und $g_{\lambda\mu} = F F_{(m)\lambda(m)\mu} + \overset{1}{E}_\lambda \overset{1}{E}_\mu$.) Wenn $\int_{t_0}^{t} F\,dt$ invariant ist in bezug auf die Transformation von t (dazu vgl. H. V. Craig, dies. Zbl. **11**, 176 und **15**, 127) so gilt,

$$D^{2m-p-r}_{\lambda\mu}\left(\overset{p}{E}\right) x^{(1)\mu} = \delta^1_r \overset{p}{E}_\lambda - \sum_{l=1}^{m-p+1} \delta^l_p \binom{p+l-1}{l} \overset{p+l-1}{E}_\lambda, \tag{5}$$

woraus auch die Auswertung von $D^{2m-p-r}_{\cdot\mu}\left(\overset{a}{E}\right) x^{(1)\mu}$ gefolgert werden kann. *Hlavatý.*

Topologie:

Fröhlich, Walter: Eine Normalform für Viererzöpfe. Lotos **84**, 13—26 (1936).

Die Gruppe der Viererzöpfe besitzt drei Erzeugende a, b, c, welche den definierenden Relationen $a^4 = c$, $b^3 = c$, $a^2 b\, ab = ba\, ba^2$ genügen. In dieser Darstellung wird das Transformationsproblem der Gruppe gelöst, indem Typen von Normalformen der Worte aus a und b konstruiert werden. *K. Reidemeister* (Marburg a. d. L.).

Andreoli, Giulio: Sulla topologia degli S_3 e la polidromia di intreccio. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. **5**, 35—39 (1935).

L'A. remarque que, dans une variété topologique V_3 à trois dimensions, une courbe C fermée et non nouée peut être parfois déformée avec continuité dans d'autres lignes fermées, différemment nouées ou enlacées avec C et donnant lieu — à ce point de vue — à un groupe qu'il dit de monodromie; ceci est mis en relation avec la classification topologique et la construction des V_3 qu'il développera ailleurs. L'exposition manque dans quelques endroits de précision et de clarté, et ne tient aucunement compte de la théorie connue des nombres d'enlacement (à ce sujet cfr., p. ex., H. Seifert-W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie, § 77. Leipzig: Teubner 1934; ce Zbl. **9**, 86). *Beniamino Segre* (Bologna).

Alexandroff, P. S.: Algebraische Methoden in der Topologie. (*Leningrad, Sitzg. v. 24.—30. VII. 1934.*) Arb. d. 2. math. Bundestag. Leningrad **1**, 89—108 (1935) [Russisch].

A very clear and condensed review of the main notions of combinatorial topology, with special emphasis on the Betti groups with respect to a preassigned field of coefficients. *O. Zariski* (Baltimore).

Hopf, Heinz: Freie Überdeckungen und freie Abbildungen. Fundam. Math. **28**, 33—57 (1937).

Eine Überdeckung $\mathfrak{A}$ eines topologischen Raumes R heißt frei, wenn es eine solche (eindeutige stetige) Abbildung f von R in sich derart gibt, daß jedes Element E von A zu seinem Bilde $f(E)$ fremd ist. Eine Abbildung f von R (in irgendeinen Raum) heißt frei, wenn die Überdeckung von R durch die zugehörigen Urbilder (der Punkte des Bildraumes bei der Abbildung f) frei ist. Im ersten Paragraphen der Arbeit wird mit ganz elementaren Hilfsmitteln (die lediglich in einer kombinatorischen Behandlung der Streckenkomplexe bestehen, die als Nerven endlicher Überdeckungen der Ordnung 2 auftreten) bewiesen: Ein unikohärenter topologischer Raum gestattet niemals eine freie Überdeckung der Ordnung 2 mit abgeschlossenen zusammenhängenden Mengen. Der Begriff „topologischer Raum" wird dabei außerordentlich allgemein gefaßt — wie in Alexandroff-Hopf, Topologie I. — Aus diesem Satz werden im § 2 folgende weitere Sätze gefolgert: 1. Ein unikohärentes lokal-zusammenhängendes

Kontinuum gestattet keine endliche freie Überdeckung mit abgeschlossenen Mengen sowie keine freie Abbildung in einen eindimensionalen Raum (die Existenz von freien endlichen abgeschlossenen Überdeckungen einer Ordnung $\leqq k+1$ ist übrigens gleichbedeutend — und zwar für beliebige Kompakta — mit der Existenz von freien Abbildungen in einen höchstens k-dimensionalen Raum). 2. Ein unikohärentes lokalzusammenhängendes Kontinuum gestattet keine freie Überdeckung mit drei abg. Mengen. Jede der drei Eigenschaften charakterisiert dabei die Unikohärenz (§ 3). Außerdem werden in § 2 bemerkenswerte Beziehungen zu den Urysohnschen Konstanten eines unikohärenten Kontinuums aufgestellt. Nämlich: Bei einer beliebigen stetigen Abbildung f eines lokal-zusammenh. unikoh. Kontinuums U in sich gibt es Punkte x mit $\varrho(x, fx) < d_2 U$ (dabei bedeutet allgemein $d_k F$ die k-te Urysohnsche Konstante des Kompaktums F, also das Infimum derjenigen ε, für die F eine endliche abg. Überdeckung einer Ordnung $\leqq k$ zuläßt). Hieraus folgt natürlich ohne weiteres der bekannte Fixpunktsatz für Raumkurven. Ferner: Für die n-dimensionale Sphäre S^n mit $n \geqq 2$ ist $d_2 S^n$ gleich dem Durchmesser $\delta(S^n)$ der Sphäre. Die S^n (immer $n \geqq 2$!) gestattet keine freie Überdeckung mit drei abg. Mengen. Im Anschluß daran werden im § 4 weitere Sätze über die S^n bewiesen. Und zwar: Es bezeichne $\sigma(n)$ die kleinste Zahl m, für welche eine freie Überdeckung der S^n mit m abg. Mengen existiert. Dann gilt für $n = 0, 1, 2$ die Aussage $\sigma(n) = n + 2$, während für $n \geqq 3$ gilt: $\sigma(n) \leqq n + 1$ und speziell $\sigma(3) = 4$. Genaueres ist über $\sigma(n)$ nicht bekannt. Aus den früheren Sätzen folgt sodann: Für jedes $n \geqq 3$, jedoch nicht für $n \leqq 2$ existieren freie Abbildungen der S^n, welche die Dimension erniedrigen; wie stark — bleibt wieder unbekannt. Und schließlich eine Anwendung auf die Antipodenpaare. Man bezeichne mit $\lambda(n)$ die kleinste Zahl λ von der Eigenschaft, daß S^n sich antipodenfrei auf eine λ-dimensionale Menge abbilden läßt. Dann ist $\lambda(n) = (n+1)/2$ für ungerades n, während für gerades n einstweilen nur behauptet werden kann, daß entweder $\lambda(n) = n/2$ oder $\lambda(n) = 1 + n/2$ ist. Hieran schließen die Formeln: $d_k(S^n) = \delta(S^n)$ für $k \leqq \lambda(n)$, $d_k(S^n) < \delta(S^n)$ für $k > \lambda(n)$. *P. Alexandroff* (Moskau).

Eilenberg, Samuel: Über ein Problem von H. Hopf. Fundam. Math. 28, 58—60 (1937).

Es sei F ein in der ersten Dimension azyklisches Kontinuum — d. h. es lasse F nur unwesentliche Abbildungen auf die Kreislinie zu. Dann besitzt F keine freie Überdeckung mit drei abgeschlossenen Mengen (vgl. vorsteh. Ref.). *P. Alexandroff.*

Eilenberg, Samuel: Sur un théorème topologique de M. L. Schnirelmann. Rec. math. Moscou, N. s. **1**, 557—559 (1936).

Elementarer Beweis des folgenden Satzes: Es sei M eine lokal-zusammenziehbare geschlossene Cantorsche Mannigfaltigkeit, welche das topologische Produkt von n mehrpunktigen Räumen ist. Dann ist die Kategorie von M (im Sinne von Lusternik-Schnirelmann) mindestens gleich $n + 1$. Dieser Satz (Verf. formuliert ihn sogar etwas allgemeiner) enthält natürlich als Spezialfall die entsprechende Behauptung für geschlossene Mannigfaltigkeiten M. Selbst für diese speziellere Behauptung war bis jetzt kein elementarer Beweis bekannt: sie wurde (von Schnirelmann) nur als Spezialfall eines viel tiefer liegenden Satzes mit den Methoden der allgemeinen Schnitttheorie in Mannigfaltigkeiten bewiesen. *P. Alexandroff* (Moskau).

Eilenberg, Samuel: Sur les espaces multicohérents I. Fundam. Math. **27**, 153 bis 190 (1936).

Soit donné un continu localement connexe X. L'auteur appell X n-cohérent, lorsque $n = \sup_{X=X_1+X_2} b_0(X_1 \cdot X_2)$, où sup s'étend sur toutes les décompositions $X = X_1 + X_2$ en deux continus; $b_0(X_1 \cdot X_2)$ = nombre de composantes de la partie commune $X_1 \cdot X_2$. Ce nombre $n(X)$ est complètement déterminé par le groupe fondamental de X (Chap. II, §2). En considérant la classe S_1^X de toutes les transformations continues de X en circonférence S_1 et envisageant S_1^X comme groupe abélien (sommation des arces), on peut démontrer que $n(x) = \sup_{X=X_1+X_2} p(X_1 X_2) + 1$,