Zahlenkörper zur Gewinnung von Modulformen ausgenutzt hat, werden hier Systeme verallgemeinerter Quaternionen herangezogen, wobei Verf. vielfach von den Resultaten der Hamburger Dissertation (1929) von Frl. Hey, „Analytische Zahlentheorie in Systemen hyperkomplexer Zahlen", Gebrauch macht. Ein System verallgemeinerter Quaternionen ist bestimmt durch vier Basiselemente $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, die folgende Multiplikationstafel haben:

$$\varepsilon_0 = 1\,, \quad \varepsilon_0 \varepsilon_i = \varepsilon_i \varepsilon_0 = \varepsilon_i\,, \quad \varepsilon_i^2 = -\lambda_{i+1} \lambda_{i+2}\,, \quad \varepsilon_{i+1} \varepsilon_{i+2} = -\varepsilon_{i+2} \varepsilon_{i+1} = \lambda_i \varepsilon_i;$$

darin durchläuft i die Indizes 1, 2, 3 (mod 3), und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bedeuten bestimmte ganze rationale von Null verschiedene Zahlen, die noch einer zusätzlichen Bedingung genügen, damit das System nullteilerfrei wird. Das System $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ besteht dann aus allen „Zahlen" $x_0\varepsilon_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3$ mit rationalen x. Sei I eine Maximalordnung aus $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{d}$ die Differente von I, $\mathfrak{a}$ ein Rechtsideal aus I, ϱ eine Zahl aus $\mathfrak{a}$, Q eine positive ganze rationale Zahl, s eine komplexe Variable. Dann wird für $\Re(s) > 1$ definiert

$$\zeta(s, \mathfrak{a}Q\mathfrak{d}, \varrho) = N(\mathfrak{a}Q\mathfrak{d})^s \sum{}' \frac{1}{|N\mu|^s};$$

hierin soll μ in der Restklasse $\mu \equiv \varrho \pmod{\mathfrak{a}Q\mathfrak{d}}$ ein vollständiges System von Null verschiedener Zahlen durchlaufen, von denen keine zwei sich um eine Einheit $\eta_1 \equiv 1$ $(\mathrm{mod}\,\mathfrak{a}Q\mathfrak{d})$ aus I' als linksseitigem Faktor unterscheiden; dabei ist I' die Maximalordnung, in der $\mathfrak{a}$ Linksideal ist. Für das System dieser ζ stellt Verf. eine Funktionalgleichung auf. Durch die Mellinsche Formel sind diesen ζ-Funktionen gewisse ϑ-Funktionen

$$\vartheta(\tau; \varrho, \mathfrak{a}, Q\mathfrak{d})$$

zugeordnet. Die entsprechende Funktionalgleichung drückt ein solches ϑ für das Argument $-1/\tau$ durch ein lineares Aggregat solcher ϑ für das Argument τ aus. Da das Verhalten der ϑ bei Ersetzung von τ durch $\tau + 1$ unmittelbar ersichtlich ist, läßt sich ihr Verhalten bei beliebigen Modulsubstitutionen bestimmen. Das Ergebnis ist: „Die $\vartheta(\tau; \varrho, \mathfrak{a}, Q\mathfrak{d})$ sind ganze Modulformen der Dimension -2 und der Stufe QD"; hierin ist D eine positive Zahl, für die $(D) = \mathfrak{d}^2$ ist. Die Arbeit schließt mit knappen Bemerkungen über einige Beispiele. *Bessel-Hagen* (Bonn).

Analysis.

● **Kommerell, K.: Das Grenzgebiet der elementaren und höheren Mathematik in ausgewählten Kapiteln dargestellt.** Leipzig: K. F. Koehler 1936. VIII, 249 S. u. 110 Fig. RM. 14.—.

A survey of various important and attractive problems from the boundary of elementary and non-elementary mathematics, so far as this distinction is justified at all. The three chapters of the book deal with the conception of limit, with geometric transformations, and with Vector Calculus and Algebra. *G. Szegö.*

Aumann, Georg: Vollkommene Funktionalmittel und gewisse Kegelschnitteigenschaften. J. reine angew. Math. **176**, 49—55 (1936).

In einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. **12**, 252) hat Verf. gezeigt, daß jedes vollkommene analytische Mittel quasiarithmetisch ist. Bei reellen Mitteln trifft dies im allgemeinen nicht zu, jedoch, wie hier gezeigt wird, für eine spezielle Klasse reeller Mittel, die Funktionalmittel $m(x_1, x_2)$, die mittels einer Funktion $f(x)$ mit streng monotoner Ableitung durch $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f'(m)$ definiert sind. Die Behauptung läuft darauf hinaus, daß $y = f(x)$ ein Kegelschnittbogen ist. Aus der die Vollkommenheit zum Ausdruck bringenden Funktionalgleichung wird zunächst die beliebig oftmalige Differenzierbarkeit von f und dann eine Differentialgleichung gefolgert, der nur die Kegelschnitte genügen. Geometrisch ist die Vollkommenheit mit einer Schließungseigenschaft der Kurve $y = f(x)$ äquivalent. Es werden ferner einige Varianten dieser Eigenschaft daraufhin untersucht, ob sie die Kegelschnitte kennzeichnen. (Über eine verwandte Untersuchung vgl. dies. Zbl. **14**, 224.) Als Hilfssatz wird bewiesen: Eine zusammenhängende, mehr als einen Punkt enthaltende Menge in der Ebene, die mit jeder Geraden höchstens 2 Punkte gemein hat, ist eine streng konvexe, einfache Kurve. [Für abgeschlossene Mengen bei Marchaud, Acta math. **55**, 85 (1930).] *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Abason, Ernest: Contributions à l'étude de la moyenne des fonctions. (*Athènes, 2.—9. IX. 1934.*) Actes Congr. Interbalkan. Math. 95—101 (1935).

The author shows how the mean value theorems of Pompeiu and Tchakaloff can be treated by means of certain systems of polynomials called "puissances periodiques" introduced by him in an earlier paper. *G. Szegö* (St. Louis, Mo.).

Feldheim, Ervin: Sur l'orthogonalité des fonctions fondamentales de l'interpolation de Lagrange. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 650—652 (1936).

L'auteur s'occupe des propriétés d'orthogonalité des polynomes

$$l_x(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\,\omega_n'(x_k)}, \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

où $\omega_n(x) = \prod_1^n (x - x_k)$, particulièrement, dans le cas $\omega_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x$. L'auteur démontre que dans le cas considéré on a

$$\int_{-1}^{+1} l_{i_1}(x) \ldots l_{i_{2k}}(x) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$$

quels que soient les nombres différents $i_1, \ldots i_{2k}$ compris entre 1 et n. *Bernstein.*

Misès, R. de: Formules de cubature. Rev. math. Union Interbalkan. **1**, 17 bis 27 (1936).

The author derives an analog of his formula given in J. reine angew. Math. **174**, 56 (this Zbl. **12**, 400) for the two dimensional integral of a function f of two variables extended over a certain region. The formula involves values of f at proper points and some integrals containing a preassigned partial derivative of f. Various applications are given, among others a two-dimensional analog of Simpson's formula. *G. Szegö.*

Reihen:

Agnew, R. P.: Products of methods of summability. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 547—549 (1936).

En partant de: 1° $A: \sigma_n = \sum a_{nk} s_k$, 2° $B: \tau_n = \sum b_{nk} s_k$, l'Auteur étudie $AB: \omega_n = \sum c_{nk} s_k$, où la matrice $\|c_{nk}\| \equiv \|\sum a_{np} b_{pk}\|$ est le produit des matrices $\|a_{nk}\|\ \|b_{nk}\|$. Ainsi la régularité de A, B, D, et l'équivalence de A et D n'entraîne pas nécessairement l'équivalence de AB et DB. *Mandelbrojt.*

Ser, J.: Sur la valeur numérique des intégrales employées dans la sommation exponentielle. Bull. Sci. math., II. s. **60**, 199—202 (1936).

Cette note developpe les conséquences numériques de l'application de la transformation d'Euler à la fonction $u(a)$ de M. E. Borel, à l'aide de laquelle s'exprime la somme s_B de Borel à savoir

$$s_B = \int_0^\infty e^{-a} \cdot u(a) \cdot da, \qquad \left[u(a) = \sum_0^\infty \frac{a^n}{n!} \cdot u_n\right].$$

Si l'on considère la série $\sum_0^\infty (-1)^n \cdot u_n$ on donne à $u(a)$, en appliquant la transformation d'Euler, la forme

$$u(a) = \sum_{n=0}^\infty \frac{a^n}{(1+a)^{n+1}} \Delta_n \begin{bmatrix} u_0 \\ 0! \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^\infty \frac{a^n}{(1+a)^{n+1}} v_n$$

d'où $s_B = \sum g_n v_n$, formule donnée mais non demontrée par l'auteur. Les coefficients g_n s'expriment par les intégrales

$$g_n = \int_0^\infty e^{-a} \cdot \frac{a^n da}{(1+a)^{n+1}}.$$

E. Kogbetliantz (Téhéran).

Littlewood, J. E.: On the Fourier coefficients of functions of bounded variation. Quart. J. Math., Oxford Ser. **7**, 219—226 (1936).

The author constructs an example of a continuous non-decreasing [in $(0, 2\pi)$] function $f(\theta)$ such that $f'(\theta) = 0$ almost everywhere and such that the n-th (complex) Fourier coefficient of $f^*(\theta) = f(\theta) - \theta/(2\pi)$ satisfies the condition

$$c_n(f^*) = O(n^{-1-c})$$

where c is a positive constant. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Bosanquet, L. S.: The absolute Cesàro summability of a Fourier series. Proc. London Math. Soc., II. s. **41**, 517—528 (1936).

Let $\{\sigma_n^\alpha\}_{n=0,1,2\ldots}$ be the sequence of the Cesàro means, of order α, of the series $u_0 + u_1 + \cdots$. The latter series is said to be absolutely summable (C, α), or summable $|C, \alpha|$, if the series $|\sigma_1^\alpha - \sigma_0^\alpha| + |\sigma_2^\alpha - \sigma_1^\alpha| + \cdots$ converges. Let $f(t)$ be an L-integrable function, with period 2π, and let, for a fixed x,

$$\varphi(t) = \tfrac{1}{2}\{f(x+t) + f(x-t)\}, \qquad \Phi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-u)^{\alpha-1}\varphi(u)\,du \quad (\alpha > 0),$$

$$\Phi_0(t) = \varphi(t), \quad \varphi_\alpha(t) = \Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha}\Phi_\alpha(t) \qquad (\alpha \geqq 0).$$

The function $\varphi_\alpha(t)$ is the mean value, in a certain sense, of order α of $\varphi(t)$. The author proves the following two theorems, which are analogues of known results concerning ordinary summability [cf. Bosanquet, Proc. London Math. Soc. **31**, 135 bis 143 (1930)]. (a) If $\varphi_\alpha(t)$ is of bounded variation in $(0, \pi)$, then the Fourier series of $f(t)$ is summable $|C, \beta|$ at the point $t = x$, where $\beta > \alpha \geqq 0$. (b) If the Fourier series of $f(t)$ is summable $|C, \alpha|$ at the point $t = x$, then $\varphi_\beta(t)$ is of bounded variation in $(0, \pi)$, where $\beta > \alpha + 1$ $(\alpha \geqq 0)$. *A. Zygmund* (Wilno).

Miranda, Carlo: Contributo allo studio delle serie doppie trigonometriche nell'indirizzo riemanniano. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. **1**, 10—20 (1936).

Soit $\delta_0(\varrho)$ la différence entre la valeur moyenne de $F(x, y)$ dans le cercle de rayon ϱ et de centre (x_0, y_0) et sa valeur $F(x_0, y_0)$ au centre; soient aussi en ce point (x_0, y_0)

$$\underline{\Delta} F_0 = \varliminf_{\varrho=0} 8\varrho^{-2} \cdot \delta_0(\varrho)$$

et simile pour $\overline{\Delta} F_0$. Désignons m_0 et M_0 les limites d'indétermination au point (x_0, y_0) de la série double sommée par rectangles

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}(x, y) \qquad (A_{00} \equiv 0) \qquad \text{(S)}$$

où $A_{mn}(x, y) = a_{mn}\cos mx \cos ny + b_{mn}\cos mx \sin ny + c_{mn}\sin mx \cos ny + d_{mn}\sin mx \cdot \sin my$ et posons

$$F(x, y) = -\sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{A_{mn}(x, y)}{m^2 + n^2}. \qquad (m^2 + n^2 > 0)$$

L'auteur démontre (th. 1) que l'on a

$$\frac{m_0 + M_0}{2} - \mu\frac{M_0 - m_0}{2} \leqq \underline{\Delta} F_0 \leqq \overline{\Delta} F_0 \leqq \frac{m_0 + M_0}{2} + \mu\frac{M_0 - m_0}{2}$$

la constante μ ne dépendant ni des A_{mn}, ni du point (x_0, y_0). Si $\underline{\Delta} F_0 = \overline{\Delta} F_0 = s$ on dira que la série double (S) est sommable au point (x_0, y_0) par la methode de Riemann avec la somme s, cette méthode attribuant à une série convergente $(m_0 = M_0)$ sa somme. Le th. 2 établit qu'une série (S) sommable presque partout par la méthode de Riemann est la série de Fourier de sa somme riemannienne pourvu que l'on ait avec $\beta > 0$ $A_{mn}(x, y) = O[(m^2 + n^2)^{-\beta}]$. *E. Kogbetliantz* (Téheran).

Differentialgleichungen, Potentialtheorie:

Moisseiev, N.: Über die Stabilität von Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen. Math. Ann. **113**, 452—460 (1936).

In seiner Abhandlung: „Über die Stabilität der Bewegung", betrachtete Liapunoff u. a. die Frage nach der Stabilität der Lösung $x = y = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ des Systems:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X(x, y, x_1, \ldots x_n), \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y(x, y, x_1, \ldots x_n), \\ \frac{dx_s}{dt} &= \alpha_s x + \beta_s y + \sum_{k=1}^{n} p_{sk} x_k + X_s(x, y, x_1, \ldots x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots n). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

[λ, α_s, β_s, p_{sk} = Konstanten, $\lambda > 0$; X, Y, X_s = holomorphe Funktionen der x, y, x_s, die frei von Gliedern nullter und erster Ordnung sind; dabei sollen die Wurzeln der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} p_{11} - k, & p_{12}, & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - k, & \ldots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1}, & p_{n2}, & \ldots & p_{nn} - k \end{vmatrix} = 0$$

negative Realteile besitzen.] — Ist $U = x^2 + y^2 + f(x, y, x_1, x_2 \ldots x_n)$, so kann nach Liapunoff die Ableitung $\frac{dU}{dt}$ durch geeignete Wahl der Funktion f in folgende Gestalt gebracht werden:

$$\frac{dU}{dt} = G(x^2 + y^2)^N + \bar{v}_{2N+1}(x, y, x_1, \ldots, x_n) \qquad (2)$$

(G = konst.; $\bar{v}_{2N+1}$ holomorph und frei von Gliedern, deren Ordnung niedriger als $2N + 1$ ist). Mit Hilfe verwickelter Transformationen des Systems (1) bringt Liapunoff das Problem (2) in eine solche Gestalt, die leicht die Frage nach der Stabilität zu entscheiden erlaubt. Das Resultat von Liapunoff lautet: Ist $G < 0$, so ist die Bewegung stabil, ist $G > 0$, so ist die Bewegung labil. — Verf. zeigt, daß dieses Resultat direkt am untransformierten System mit Hilfe der Konstruktion eines passenden topographischen Systems erhalten werden kann. Der Einfachheit wegen betrachtet er ein System von 3 Gleichungen. *A. Andronoff* u. *A. Witt* (Moskau).

Moisejev, N.: Über eine quantitative Charakteristik der qualitativen Berührungstheorie. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **3**, 53—56 (1936).

Those trajectories of the system of differential equations

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2(U+h)}\cos\varphi, \quad \frac{dy}{dt} = \sqrt{2(U+h)}\sin\varphi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -2n + \frac{U_y\cos\varphi - U_x\sin\varphi}{\sqrt{2(U+h)}}$$

are especially considered which are tangent to surfaces of an arbitrary cylindrical family, $f(x, y) = c$. The author suggests a function $E(c)$, such that $E(c_1)\,dc$ gives a measure of the excess of the points of external tangency over those of internal tangency to the members of the family for which $c_1 \leqq c \leqq c_1 + dc$. $E(c)$, if it exists at all, does not depend upon the explicit solution of the differential equations but only upon certain quadratures and another limiting process. The definitions of $E_1(c_1)$ and $E_3(c_1)$ should be interchanged. *D. C. Lewis* (Ithaca, N. Y.).

Sjöstrand, Olof: Sur une équation aux dérivées partielles du type composite. Ark. Mat. Astron. Fys. 25 A, Nr 21, 1—11 (1936).

Gesucht wird eine Lösung von $\partial\Delta u/\partial x = 0$ mit vorgegebenen Werten auf einem Kreise und einem Durchmesser desselben. Nach Hadamard [Tôhoku Math. J. **37** (1933); dies. Zbl. **7**, 349] hat jede Lösung die Form $u = v(x, y) + w(y)$, wobei v harmonisch ist; daher führt die Aufgabe unmittelbar auf eine Integralgleichung, die durch sukzessive Approximationen leicht lösbar ist. *W. Feller* (Stockholm).

Kravčuk, M., et C. Latyševa: Application du procédé des moments à la résolution approchée des équations linéaires différentielles ayant des singularités aux coefficients. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 3, 251—254 (1936).

Extension aux équations d'ordre quelconque du procédé développé récemment par les auteurs pour les équations du 2^d ordre (ce Zbl. 14, 306). *W. Stepanoff.*

Luikov, Alexis: The application of the Heaviside-Bromwich operational method to the solution of a problem in heat conduction. Philos. Mag., VII. s. 22, 239—248 (1936).

This paper applies the Heaviside operational method to the solution of several problems of heat conduction. The problems treated are (1) conduction of heat in a sphere with surface radiation (2) conduction in a plane slab whose surface is maintained at temperature $U(1-e^{-ct})$ (3) conduction in a finite rod whose ends are maintained at zero temperature (radiation of heat from the sidewalls). *Murnaghan.*

Ascoli, G.: Le equazioni a derivate parziali del tipo ellittico. Rend. Semin. mat. fis. Milano 9, 15—32 (1935).

Dieser Bericht soll über Grundzüge einiger neueren Untersuchungen aus der Theorie der partiellen elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung einleitende Informationen erteilen. Folgende Punkte werden sehr kurz berücksichtigt: Grundlösungen, verallgemeinerte Potentiale der einfachen Schicht und der Doppelschicht, Randwertprobleme für lineare Differentialgleichungen, nichtlineare Differentialgleichungen (insbesondere ältere Fortsetzungsmethoden, Zusammenhang mit der Variationsrechnung, Analyzität der Lösung). *Schauder* (Lwów).

Humbert, Pierre: Quelques généralisations de l'équation de Laplace. Rend. Semin. mat. Univ. Padova 6, 121—131 (1935).

This paper is a brief resumé of the author's book Potentiels et prépotentiels (this Zbl. 14, 263). *J. J. Gergen* (Durham, N. C.).

Wirtinger, W.: Über eine spezielle Aufgabe der Potentialtheorie. S.-B. Akad. Wiss. Wien 1936, 95—99.

The problem considered is that of calculating the density of the induced distribution on a pair of parallel grounded conducting planes when a point charge is inserted between them. Starting with the usual series representation of the potential (the term by term derivative of which converges slowly), and using Fourier series, Bessel functions and Cauchy's theorem, the author shows that, if the planes are $z=0$, $z=a$ and if the unit charge is at $(0,0,h)$, $0<h<a$, then

$$-2a^2\sigma = i\sum_{p=1}^{\infty} H_0^1(p\pi x i/a)\, p \sin p\pi h/a\,,$$

where H_0^1 is Hankel's function and σ the density at $(x,0,0)$. Using the table for H_0^1 in Jahnke and Emde (this Zbl. 8, 125) calculations are made for $a=2h=1$, $x=1,2,\ldots,10$. *J. J. Gergen* (Durham, N. C.).

Howland, R. C. J., and B. W. McMullen: Potential functions related to groups of circular cylinders. Proc. Cambridge Philos. Soc. 32, 402—415 (1936).

The problem is to construct potential functions which are invariant under a certain group of transformations associated with the system of cylinders and to find expansions of these functions about the centre of any one of the circles. For an infinite double row of cylinders with arbitrary stagger potential functions having the right sort of invariance are defined by

$$-w_0 = \log\sin\pi\varrho + \log\sin\pi(\varrho_0-\varrho)\,,$$

$$w_s = \frac{1}{(s-1)!}\frac{d^s}{d\varrho^s}\{(-)^{s-1}\log\sin\pi\varrho - \log\sin\pi(\varrho_0-\varrho)\}\,,$$

where $\varrho = z/a$, $\varrho_0=(p+iq)/a$. To express the expansions in a convenient form the authors introduce a set of polynomials $f_n(x)$ defined by the equations

$$f_n(\tan\theta) = \frac{d^n}{d\theta^n}(\log\sec\theta)\,, \qquad (n=1,2,\ldots)$$

and a set of related coefficients. — The analysis is also applied to the case two circles in symmetrical or skew-symmetrical position between two parallel lines. *H. Bateman.*

Opatowski, I.: Sulle coordinate isoterme e sui campi di forza Newtoniani. Accad. naz. Lincei, Mem., VI. s. **6**, 329—351 (1936).

Wird ein isothermes dreifaches Orthogonalsystem auf die kanonischen Parameter ϱ_i $(i = 1, 2, 3)$ bezogen (für welche $\Delta\varrho_i = 0$ ist), so hat man bekanntlich $(\operatorname{grad}\varrho_i)^2 = k_i/k_1k_2k_3$, wobei k_i eine von ϱ_i unabhängige Funktion bezeichnet; sind dann die Funktionen $F_i(\varrho_i)$ Lösungen der Differentialgleichungen $F_i''(\varrho_i) = f_i(\varrho_i)\,F_i(\varrho_i)$, mit $k_1f_1 + k_2f_2 + k_3f_3 = 0$, so ist $V = F_1F_2F_3$ eine harmonische Funktion. Es wird nun gezeigt, daß sich bei passender Normierung der Parameter stets Funktionen $\psi_i(\varrho_i)$ und Konstanten A, B finden lassen, so daß entweder $f_i = A\psi_i + B$, $k_1 = \psi_2 - \psi_3$ usf. wird oder $f_1 = A\psi_1 + B$, $f_2 = A\psi_2 + B$, $f_3 = A\psi_3$, $k_1 = -k_2 = \psi_3$, $k_3 = \psi_2 - \psi_1$. — Beispiele und Anwendungen auf die Bestimmung der Kraftlinien des Potentials V. *W. Feller* (Stockholm).

Spezielle Funktionen:

Matthieu, P.: Die geometrische Theorie der rationalen Transformation der hypergeometrischen Differentialgleichung. Comment. math. helv. **9**, 51—76 (1936).

Es wird das von Goursat auf anderem Wege vollständig gelöste Problem der rationalen Transformation der hypergeometrischen Differentialgleichung auf rein geometrische Weise, also mittels der auf Riemann zurückgehenden Methoden, ebenfalls vollständig behandelt. Die Aufgabe ist dabei, alle Fälle zu bestimmen, in denen ein „Kreisbogendreieck" als Summe endlich vieler („erzeugender") Kreisbogendreiecke darstellbar ist, die sämtlich untereinander gegenüber Möbiustransformationen äquivalent sind. Bei der Durchführung der Untersuchung werden folgende Fälle unterschieden: Das erzeugende Kreisbogendreieck enthält zwei, einen oder keinen willkürlich wählbaren Winkel. Im letzten Fall wird dann noch unterschieden, ob die Winkelsumme des Dreiecks größer, gleich oder kleiner als π ist. *Haupt* (Erlangen).

Erdélyi, Artur: Über die Integration der Mathieuschen Differentialgleichung durch Laplacesche Integrale. Math. Z. **41**, 653—664 (1936).

Verf. sucht den Grund für die Tatsache, daß unsere Kenntnisse über die Struktur der Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung immer noch nicht so weit gediehen sind wie etwa jene der Besselschen Funktionen, darin, daß es bisher nicht gelungen ist, für die Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung analoge Integraldarstellungen aufzustellen, wie sie für die Besselsche Differentialgleichung bekannt sind. Durch die Substitution $x = ih\exp(i\varphi)$ wird die Mathieusche Differentialgleichung $d^2y/d\varphi^2 + (\lambda - 2h^2\cos 2\varphi)y = 0$ auf die Form $d^2y/dx^2 + dy/dx(1/x) - (1 + \lambda/x^2 + h^4/x^4)\,y = 0$ gebracht, welche bereits von Dougall angegeben wurde. Ein Integral dieser Differentialgleichung läßt sich in der Form

$$y = \sqrt{\pi/2}\int_1^{\exp(i\omega_1)} v(z)\exp(-xz)\,dz$$

schreiben, wobei die Belegungsfunktion v einer einfachen Volterraschen Integralgleichung genügt. Diese Integralgleichung läßt sich in einfacher Weise durch eine Potenzreihe lösen, wobei für die Koeffizienten eine Rekursionsformel gilt, welche gestattet, diese Koeffizienten als Potenzreihen nach dem Parameter h^2 zu entwickeln. Die ersten neun Koeffizienten werden numerisch angegeben. Verf. geht nun daran, mit Hilfe von Umlaufrelationen aus dieser allgemeinen Lösung die Lösungen erster und zweiter Art der Mathieuschen Differentialgleichung zu definieren. Der nächste Schritt besteht darin, daß eine asymptotische Darstellung für große Werte der unabhängigen Veränderlichen gesucht wird. Ausgehend von einem Watsonschen Satz können asymptotische Formeln aus der Integraldarstellung gewonnen werden, wobei besonders die Analogie dieser asymptotischen Formeln mit den asymptotischen Entwicklungen der Besselschen Funktionen hervorzuheben ist. Ausführliches Literaturverzeichnis. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Erdélyi, Artur: Über eine Integraldarstellung der $W_{k,m}$-Funktionen und ihre Darstellung durch die Funktionen des parabolischen Zylinders. Math. Ann. **113**, 347—356 (1936).

Der Verf. leitet aus den von Herrn C. S. Meyer erhaltenen Integraldarstellungen für die Whittakersche Funktion $W_{k,m}(z^2)$ (dies. Zbl. **10**, 262 u. **11**, 306) eine neue Integraldarstellung her, die für alle Werte von $\arg z$ und im Gegensatz zu den genannten Ausdrücken, für alle komplexen Werte von k gilt. Er findet:

$$W_{k,m}(z^2) = z e^{\frac{z^2}{2} + (m + \frac{1}{2} - k)\pi i} \int\limits_{\infty \exp i(\mu+\pi)}^{\infty \exp i\mu} e^{-u^2} H_{2m}^{(1)}(2zu) u^{2k} du, \quad (k, m, z \text{ beliebig komplex, } z \neq 0)$$

in der $H_\nu^{(1)}(w)$ die erste Hankelsche Zylinderfunktion vom Argument w und vom Index ν bedeutet. Der Integrationsweg verläuft oberhalb des Nullpunktes und μ genügt der Ungleichung $\mu \leqq \arg u \leqq \mu + \pi \left(-\frac{\pi}{4} < \mu < \frac{\pi}{4}\right)$. Der Verf. leitet aus dieser Integraldarstellung eine Reihenentwicklung von $W_{k,m}(z^2)$ nach parabolischen Zylinderfunktionen $D_\nu(w)$ her, nämlich

$$W_{k,m}(z^2) = 2^{\frac{1}{2}-k}\sqrt{z}\left\{\sum_{\lambda=0}^{p-1} \frac{\Gamma(2m+\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(2m-\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+1)} \frac{D_{2k-\lambda-\frac{1}{2}}(z\sqrt{2})}{(2z\sqrt{2})^\lambda} + R_p\right\}.$$

Diese Reihe bricht folglich ab für $4m \equiv 1 \pmod{2}$, und liefert dann eine Darstellung der Funktion $W_{k, \frac{n}{2}+\frac{1}{4}}(z^2)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ in Form eines Linearaggregates aus endlich vielen D_ν. — Ist $4m \not\equiv 1 \pmod{2}$, so wird das Restglied R_p unter gewissen Beschränkungen der Variabelen z und der Parameter k, m in ziemlich verwickelten Formen abgeschätzt. *S. C. van Veen* (Dordrecht).

Erdélyi, Artur: Über eine Integraldarstellung der $M_{k,m}$-Funktionen und ihre asymptotische Darstellung für große Werte von $\Re k$. Math. Ann. **113**, 357—362 (1936).

Aus der Integraldarstellung in der vorst. ref. Arbeit wird für die gleichfalls von Whittaker definierte Funktion $M_{k,m}(z^2)$ (Whittaker-Watson, Modern Analysis, 4th Ed. 1927, § 16, 1) eine für alle Werte von k, m und z $(z \neq 0)$ gültige Integraldarstellung hergeleitet, nämlich:

$$M_{k,m}(z^2) = \frac{1}{\pi}\Gamma(2m+1)\Gamma(\tfrac{1}{2}-m-k) z e^{\frac{z^2}{2}-(m+k)\pi i} \int\limits_{\infty \exp i(\pi+\mu)}^{\infty \exp i\mu} e^{-u^2} J_{2m}(2zu) u^{2k} du. \quad (1)$$

Der Integrationsweg verläuft oberhalb des Nullpunktes und μ genügt der Untergleichung $-\frac{\pi}{4} < \mu < \frac{\pi}{4}$. Wegen:

$$L_n^{(2m)}(x) = \frac{\Gamma(2m+n+1)}{n!\,\Gamma(2m+1)} x^{-m-\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}} M_{n+m+\frac{1}{2}, m}(x)$$

folgt hieraus für $n + 2\Re(m) > -1$ eine Integraldarstellung der Laguerreschen Polynome:

$$L_n^{(2m)}(x) = \frac{1}{n!} x^{-m} e^x \int\limits_0^\infty e^{-\omega} J_{2m}(2\sqrt{x\omega})\, \omega^{n+m} d\omega.$$

Mittels der Sattelpunktsmethode wird aus (1) eine für große positive Werte von $\Re(k)$ gültige asymptotische Formel für $M_{k,m}(z^2)$ abgeleitet, nämlich:

$$M_{k,m}(z^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma(2m+1) k^{-m-\frac{1}{4}} \sqrt{z} \cos\left(2z\sqrt{k} - m\pi - \frac{\pi}{2}\right)[1 + O(|k|^{-\frac{1}{2}})].$$

Insbesondere findet man hieraus die bekannte asymptotische Darstellung für die Laguerreschen Polynome

$$L_n^{(2m)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{x}{2}} x^{-m-\frac{1}{4}} n^{m-\frac{1}{4}} \cos\left(2\sqrt{nx} - m\pi - \frac{\pi}{4}\right)[1 + O(n^{-\frac{1}{2}})].$$

S. C. van Veen (Dordrecht).

Kienast, A.: Über die asymptotische Darstellung gewisser Lösungen der Differenzengleichung der Hermiteschen Polynome. Math. Z. **41**, 739—753 (1936).

Der Verf. betrachtet das mit den Hermiteschen Funktionen zusammenhängende Integral

$$A(x,\xi)=\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}+\xi t}\,t^x\,dt\,,\quad R(x)>-1\,,$$

erstreckt über die reelle positive Achse. Mittels der Sattelpunktmethode wird diese Funktion für große Werte von $|x|$ in eine asymptotische Reihe entwickelt, nämlich,

$$A(x,\xi)=x^{\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}}e^{\xi\sqrt{x}}\tfrac{1}{2}\left\{\sum_{\nu=0}^{k-1}Q_\nu(\xi)\,x^{-\frac{\nu}{2}}+c_k x^{-\frac{k}{2}}\right\},\tag{1}$$

wo $|c_k|<C_k$ ist. (C_k ist eine gewisse nur von ξ und k abhängige Größe.) Diese Entwicklung gilt gleichmäßig im Sektor $|\arg. x|\leqq\pi-\varepsilon$. Weiter bedeutet:

$$Q_\nu(\xi)=\sum_{\mu=0}^{\nu}g_{\nu,\mu}[c_{\nu,\mu}(\xi)+(-1)^\nu c_{\nu,\mu}(-\xi)]=$$
$$=2\sqrt{\pi}\,2^{-\frac{\nu}{2}}e^{-\frac{\pi i\nu}{2}}e^{\frac{\xi^2}{4}}\sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^\mu 2^{-\mu}g_{\nu,\mu}U_{\nu+2\mu}\left(\frac{i\xi}{\sqrt{2}}\right).$$

Die Größen $U_\nu(\xi)$ sind Hermitesche Polynome, und werden definiert durch

$$e^{-\frac{t^2}{2}+\xi t}=\sum_0^\infty\frac{U_\nu(\xi)}{\nu!}t^\nu.$$

Die Größen $g_{\nu,\mu}$ sind Zahlenkoeffizienten, und werden wie folgt definiert: $g_{\nu,\mu}=$ Koeff. von $x^\mu z^\nu$ aus der Entwicklung von $e^{\frac{x}{z^2}\left\{\log(1+z)-z+\frac{z^2}{2}\right\}}$. Die ersten Größen Q sind: $Q_0=2\sqrt{\pi}\,e^{\frac{\xi^2}{4}}$; $Q_1=\frac{\sqrt{\pi}}{12}e^{\frac{\xi^2}{4}}\xi(\xi^2+6)$. Durch (1) wird folglich $A(x,\xi)$ für große Werte von $|x|$ in eine asymptotische Reihe nach Hermiteschen Polynomen von niedrigem Index entwickelt. *S. C. van Veen* (Dordrecht).

Whittaker, J. M.: An inequality for the Riemann zeta-function. Proc. London Math. Soc., II. s. **41**, 544—552 (1936).

The main result is that, given δ, $(0<\delta<\delta_0)$, the inequality

$$|\zeta(\sigma+it)|>e^{-40\{(1/\delta)\log(1/\delta)\}^2}\qquad(\tfrac{1}{2}+\delta\leqq\sigma\leqq2)$$

is satisfied for at least one value of t in every interval $(T,T+\sqrt{T})$. The proof depends on an inequality proved in the author's book Interpolatory function theory, this Zbl. **12**, 155. Results on the function $S_1(t)$ connected with the zeros of $\zeta(s)$ are also deduced. *E. C. Titchmarsh* (Oxford).

Funktionentheorie:

Ganapathy Iyer, V.: On the maximum-modulus curves of holomorphic functions. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **4**, 314—326 (1936).

$f(z)$ étant holomorphe pour $|z|<R$, soit $M(r)$ le maximum de $|f(z)|$ pour $|z|=r$, $0\leqq r<R$. Blumenthal a étudié $M(r)$ en montrant que $|f(z)|=M(r)$ (*) sur une suite d'arcs analytiques [Bull. Soc. Math. France **31** (1907); voir aussi Valiron, Lectures on Integral functions]. L'auteur étudie l'ensemble des points $z(r)$ en lesquels (*) est vérifiée et classe les valeurs r d'après la situation des points $z(r)$ par rapport aux courbes de Blumenthal aboutissant au cercle $|z|=r$. Il montre que sauf pour des r isolés tous les points $z(r)$ sont des points intérieurs à ces arcs de Blumenthal et que dans les couronnes comprises entre les r exclus, le nombre des arcs de Blumenthal est fixe. Il donne un exemple dans lequel les courbes de Blumenthal sont des droites formant un faisceau régulier. *G. Valiron* (Paris).

Bourion, Georges: Sur les fonctions-limites de sommes partielles d'une série entière à la frontière du cercle de convergence. Bull. Sci. math., II. s. **60**, 247—256 (1936).

Si une suite de polynomes-sections $\{s_{n_k}\}$ d'une série de Taylor, de rayon de convergence un, converge sur un ensemble E du cercle $|x| = 1$, sa limite n'est aucunement liée au prolongement radial de la fonction correspondante. L'A. construit en effet une série de Taylor (S), de rayon de convergence un, déterminée une fois pour toutes, telle que, quelle que soit la fonction $\varphi(x)$, continue sur $|x| = 1$, sauf, peut-être en $x = 1$, on puisse déterminer une suite correspondante de pol.-sections $\{s_{n_k}\}$ de (S) tendant uniform. vers $\varphi(x)$ sur tout arc fermé de $|x| = 1$ ne renfermant pas $x = 1$. Un théorème analogue à celui d'Abel a cependant lieu si les n_k ne croissent pas trop vite. Ainsi si $\overline{\lim}\, n_{k+1}/n_k < \lambda < +\infty$, si sur un ensemble E de $|x| = 1$, de mesure angulaire $2\pi\omega$, avec $\omega > (\lambda-1)/(\lambda+1)$, on a $|s_{n_{k+1}} - s_{n_k}| < \varepsilon_k$, $\sum \varepsilon_k < \infty$, il existe au moins un point x_0 de E en lequel la limite des s_{n_k} coïncide avec le prolongement radial de la fonction correspondante. Les points x_0 forment un ensemble dont la mesure est au moins égale à $2\pi[\omega - (\lambda - 1)/(\lambda + 1)]$. *Mandelbrojt.*

Bernstein, Vladimiro: Sopra una possibilità di estendere l'attuale campo di applicazione delle indicatrici di crescenza delle funzioni olomorfe d'ordine finito. Scritti mat. Luigi Berzolari 305—313 (1936).

Il existe de fonctions entières pour lesquelles, dans la définition de l'indicatrice de croissance (indicatrice complète ou tronquée), on ne peut pas remplacer $\overline{\lim}$ par lim. Pour avoir des résultats précis sur de telles fonctions l'A. introduit de nouvelles indicatrices, définies par la même égalité $\left(h(\psi) = \lim\limits_{r \subset I} \frac{\log|f(re^{i\psi})|}{r^{\varrho(r)}}\right)$ que les indicatrices classiques, mais dans la définition desquelles r ne varie que dans un système, I, d'intervalles (au lieu que r varie de 0 à ∞). Ces indicatrices jouissent de plusieurs propriétés analogues à celles des indicatrices classiques et rendent beaucoup de service dans l'étude des fonctions entières à croissance non régulière. *Mandelbrojt.*

Dinghas, Alexander: Bemerkung zu einer Differentialungleichung von Carleman. Math. Z. **41**, 713—716 (1936).

Modifikation des Beweises der Carlemanschen Differentialungleichung [C. R. Acad. Sci., Paris **196** (1933); dies. Zbl. **6**, 316]. Aus dieser Ungleichung folgt leicht, wie schon von Carleman gezeigt worden ist, die zuerst von Ahlfors bewiesene Denjoysche Vermutung. *Rolf Nevanlinna* (Göttingen).

Wittich, H.: Ein Kriterium zur Typenbestimmung von Riemannschen Flächen. Mh. Math. Phys. **44**, 85—96 (1936).

Die Klasse der einfach zusammenhängenden R. Fl. mit logarithmischen Windungspunkten über endlich vielen Grundpunkten wird betrachtet. Für drei Grundpunkte hat R. Nevanlinna eine Bedingung aufgestellt, unter welcher die Fläche parabolisch ist. Hier wird die Methode des Ref. angewandt, um im allgemeinen Falle das entsprechende Kriterium herzuleiten. — Die Arbeit ist ohne Kenntnis der ähnlichen Resultate von Kobayashi (dies. Zbl. **12**, 23) geschrieben. Die Methode des Verf. ist im vorliegenden Falle einfacher als die von Kobayashi. *Ahlfors.*

Montel, Paul: Sur l'univalence ou la multivalence locale. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 579—581 (1936).

(C) désigne le cercle $|z| < 1$. La fonction $f(z)$, holomorphe dans (C), est dite localement univalente dans (C) si elle est univalente dans tout cercle de rayon ϱ intérieur à (C). ϱ est le module d'univalence locale. $f(z)$ est local. univalente dans l'intérieur de (C) si elle est local. univalente dans tout cercle $|z| < r < 1$. La condition nécessaire et suffisante pour que $f(z)$ soit local. univ. dans l'intérieur de (C) est que $f'(z) \neq 0$ dans (C). Une famille de fonctions admettant dans un cercle le même ϱ est dite également local. univalente. Pour qu'une famille soit également local. unival. dans l'intérieur de (C) il faut qu'à chaque domaine D, intérieur à (C) correspondent deux constantes k et h, telles que pour $z_1 \subset D$, $z_2 \subset D$ on ait $k^{-1} \leqq |f'(z_1)/f'(z_2)| \leqq k$,

$-h \leqq \arg[f'(z_1)/f'(z_2)] \leqq h$. Chacune de ces doubles inégalités suffit pour que la famille soit égal. local. univ. dans l'intérieur de (C). Les fonctions $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ local. univ. dans (C) avec le même ϱ admettent pour les modules maxima de $f(z), f'(z) \ldots f^{(n)}(z)$ $(|z| = r)$ les mêmes bornes qui dépendent de ϱ et de r. On traite également les fonctions local. multivalentes. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Joh, Kenzo: Über die Abschnitte der ungeraden schlichten Potenzreihen. Proc. Imp. Acad. Jap. **11**, 407—409 (1935).

Using a method of the reviewer [Math. Ann. **100**, 188 (1928)] the following theorem of Fejér [J. London Math. Soc. 8, 61 (1933); this Zbl. **6**, 257] is proved in a new way. The partial sums of a function $z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \cdots$, univalent for $|z| < 1$, are univalent in $|z| < 3^{-\frac{1}{2}}$. *G. Szegö* (St. Louis, Mo.).

Takahashi, Shin-ichi: On the multivalency of an analytic function. Proc. Imp. Acad. Jap. **12**, 59—60 (1936).

Let $f(z) = z + \cdots$ be analytic and meromorphic for $|z| \leqq R$ and $f(z) \neq 0$ for $0 < |z| \leqq R$; $R > 1$. Then $f(z)$ is at most p-valent in $|z| < 1$ if $|f(z)| > R\{1 + (R-1)^{2p+2}\}^{-\frac{1}{2}}$ for $|z| = R$. *G. Szegö* (St. Louis, Mo.).

Basilewitsch, J.: Sur les théorèmes de Koebe-Bieberbach. Rec. math. Moscou, N. s. **1**, 283—291 (1936).

Let $f(z) = z + \cdots$ be univalent for $|z| < 1$. Recently (this Zbl. **12**, 409) Golusin proved two inequalities for $f(z)$ and showed that the first is the "best possible". Here the author does the same for the second inequality which is

$$|\arg f'(z)| \leqq \pi + \log \frac{|z|^2}{1 - |z|^2}, \qquad 2^{-\frac{1}{2}} \leqq |z| < 1.$$

The method is based on Löwner's theory in geometric form. *G. Szegö.*

Golusin, G. M.: Sur les théorèmes de rotation dans la théorie des fonctions univalentes. Rec. math. Moscou, N. s. **1**, 293—296 (1936).

Proof of the fact that the constants in various estimates contained in a previous paper by the author (this Zbl. **14**, 221) are the best possible. *J. D. Tamarkin.*

Stoïlow, S.: Sur les transformations intérieures et la caractérisation topologique des surfaces de Riemann. Compositio Math. **3**, 435—440 (1936).

Die Arbeit ist die Ausführung einer Note in den C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 189 bis 190 (1935). Vgl. dies. Zbl. **10**, 377. *H. Seifert* (Heidelberg).

Stoïlow, S.: Le topologie et la théorie des fonctions. (*Athènes, 2.—9. IX. 1934.*) Actes Congr. Interbalkan. Math. 115—120 (1935).

Ein Referat über einige Resultate des Verf. sowie von Kerékjártó, Kuratowski u. a. aus den Grenzgebieten der Topologie, der Funktionentheorie und der Theorie der reellen Funktionen. *P. Alexandroff* (Moskau).

Zumbusch, Heinz: Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Die Automorphismen der unbeschränkten eigentlichen Kreiskörper. Math. Z. **41**, 631 bis 652 (1936).

Zur Bestimmung der Automorphismen genügt es, die Regularitätsbereiche $\mathfrak{R}$ unter den unbeschränkten eigentlichen Kreiskörpern zu untersuchen. Verf. zeigt (unter gewissen allgemeinen Voraussetzungen), daß es in solchen Bereichen $\mathfrak{R}$ entweder 2 beschränkte reguläre Funktionen f und g mit nichtidentisch verschwindender Funktionaldeterminante gibt oder daß sie von der Form

$$\left| \prod_{i=1}^{K} (a_i w + b_i z)^{\alpha_i} \right| < C; \; \alpha_i > 0 \tag{A}$$

sind. So ergeben sich 3 Klassen von Regularitätsbereichen, die getrennt auf Automorphismen untersucht werden: 1. Die Bereiche, die durch eine Ungleichung (A) charakterisiert werden mit mindestens einem irrationalen $\frac{\alpha_i}{\alpha_K}$. 2. Die analogen Bereiche mit lauter rationalen $\frac{\alpha_i}{\alpha_K}$. 3. Bereiche mit den (obengenannten) Funktionen f

und g. — Zur Behandlung der ersten Klasse wird das Koebesche Uniformisierungstheorem herangezogen, in der zweiten Klasse müssen von vornherein alle Automorphismen achsen- und damit mittelpunktstreu sein, in der 3. Klasse gilt eine vom Verf. aufgestellte Verallgemeinerung des Cartanschen Eindeutigkeitssatzes. So folgt schließlich: Ist ein unbeschränkter eigentlicher Kreiskörper nicht äquivalent einem Reinhardtschen Körper, so besteht seine Automorphismengruppe aus der Kreiskörpergruppe, kombiniert mit höchstens endlich vielen anderen linearen Transformationen. — Das ist erstaunlich, weil es unter den unbeschränkten Reinhardtschen Körpern noch Ausnahmen gibt. *Behnke* (Münster i. W.).

Flamant, Paul: Sur la compacité dans les classes de fonctions quasi analytiques (D). C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 652—654 (1936).

L'A. considère les classes quasi-analytiques (D): $|f^{(n)}(x)| < k^n A_n$, telles que la suite $\{nA_{n-1}/A_n\}$ ne croisse pas. Il indique des inégalités pour la norme d'un produit, il en conclut en particulier que les produits de n fonctions prises dans une famille compacte constituent une famille compacte du même type. [Pour les définitions voir C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 1282—1284 (1933); ce Zbl. 8, 76.] L'A. étudie les familles $\omega(\varphi)$, où ω varie dans une famille compacte et où ω est une fonction holomorphe à l'origine, et en particulier où ω est une fonction entière. L'A. étudie la structure des familles compactes. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Kondô, Motokiti: Sur les fonctions générales définies dans le domaine des nombres complexes. Proc. Imp. Acad. Jap. **12**, 36—38 (1936).

L'A. étend les théorèmes de Picard, Liouville, le principe de Lindelöf etc. aux fonctions $\varphi(z)$ non analytiques mais caractérisées par des propriétés particulières. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Bruwier, L.: Sur une généralisation de l'équation de Laplace basée sur un système de nombres hypercomplexes. Fonctions holomorphes d'une variable hypercomplexe. Mathesis **50**, 304—312 (1936).

Die hyperkomplexe Einheit j werde mit Hilfe der Restklassen eines festen Polynoms $A_k j^k + \cdots + A_0$ eingeführt, dessen Koeffizienten gewöhnliche komplexe Zahlen sind. Es wird gezeigt: Für eine hyperkomplexe Funktion $F(x, y) = f_k j^k + \cdots + f_0$ der reellen Veränderlichen x, y existiert dann und nur dann ein Grenzwert von $\{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y)\}/x + jy$, wenn $jF_x = F_y$ ist; dann genügen alle f_k der Differentialgleichung $\sum A_n \partial^k u/\partial^{k-n} x\, \partial^n y = 0$. Beim Beweise wird ein- bzw. n-malige Differenzierbarkeit der f_k vorausgesetzt. *W. Feller* (Stockholm).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Bjerke, Bj.: Ein Wahrscheinlichkeitsproblem. Norsk mat. Tidsskr. **18**, 83—87 (1936) [Norwegisch].

Aus einer Urne, die n Kugeln, darunter p weiße, enthält, werde ohne Zurücklegung $k \leqq n$ mal gezogen. Es wird gezeigt, daß die Wahrscheinlichkeit einer weißen Kugel beim k-ten Versuch für alle k gleich p/n ist. (Anm. des Ref. Ein unmittelbarer Beweis ergibt sich durch Induktion nach n.) *W. Feller* (Stockholm).

Lévy, Paul: Détermination générale des lois limites. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 698—700 (1936).

Ein Verteilungsgesetz L wird als Grenzgesetz bezeichnet, wenn sich eine Folge gegenseitig unabhängiger zufälliger Größen x_n und eine Folge positiver Zahlen c_n derart angeben lassen, daß $c_n \to \infty$, $\frac{c_{n+1}}{c_n} \to 1$ $(n \to \infty)$ und das Verteilungsgesetz von $\sum_{k=1}^{n} x_k/c_n$ bei $n \to \infty$ gegen L konvergiert. Damit L ein Grenzgesetz sei, sind folgende Bedingungen notwendig und hinreichend: 1. L ist unbeschränkt teilbar; 2. für jedes λ zwischen 0 und 1 kann die nach L verteilte zufällige Größe S in der Form $\lambda(X + Y)$ dargestellt werden, wo X, Y gegenseitig unabhängige zufällige Größen bedeuten, von denen X nach dem Gesetz L und Y nach einem unbeschränkt teilbaren Gesetz verteilt ist. Die Gesamtheit der Grenzgesetze wird durch die Formel

$$\log\varphi(t) = mit - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty}\right)\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dF(u)$$

für den Logarithmus ihrer Fouriertransformierten gegeben, wo $F(u)$ eine beliebige in jedem der beiden Integrationsintervalle nicht abnehmende Funktion ist, die den beiden Forderungen genügt: 1. Die Integrale sollen einen bestimmten Sinn haben. 2. $F(u)$ bei $u < 0$ und $-F(u)$ bei $u > 0$ soll eine konvexe Funktion von $\log|u|$ sein. — Die Ergebnisse lassen sich auf den mehrdimensionalen Fall übertragen. *A. Khintchine.*

Shen, Ching-Lai: Fundamentals of the theory of inverse sampling. Ann. math. Statist. **7**, 62—112 (1936).

This article falls into four parts: I. Introduction — in which are discussed basic statistical concepts used in the theory of sampling, Charlier's Type A curve, Pearsonian types, as applied to sampling, and the problem of inverse sampling. II. Fundamental relations between the moments of the distribution of sampling means and the moments of the distribution of the hypothetical means associated with the parent population — devoted chiefly to sequences of formulas. It is here shown that the frequency function of the distribution of sample means in standard units is the vertical reflection of the probability function for the hypothetical mean of the parent population. III. Inverse sampling associated with a normal parent population — discussing the most probable value of the mean and of the standard deviation of the parent population, the distribution of the hypothetical means and variances of the parent population and the probable error of the mean. IV. Inverse sampling associated with a parent population distributed according to Pearson's Type III function, — covering under this new restriction the topics of Part III. This article, a doctoral thesis under H. C. Carver, has 22 numbered theorems, 88 numbered collections of formulas and several tables. The final theorem reads "The hypothetical means of an infinite parent population is distributed according to Type III, if the parent population is assumed to be distributed according to Type III".
Albert A. Bennett (Providence).

Craig, Allen T.: Note on a certain bilinear form that occurs in statistics. Amer. J. Math. **58**, 864—866 (1936).

Formale Reihenentwicklung der Verteilungsfunktion einer Form $\sum a_{ik} x_i y_k$, wobei die x_i und y_k normalverteilte stochastische Veränderliche und die a_{ik} Konstanten sind. *W. Feller* (Stockholm).

Girshick, M. A.: Principal components. J. Amer. Statist. Assoc. **31**, 519—528 (1936).

The author treats the problem of analyzing a set of statistical variables into a set of independent variates which are to be viewed as more fundamental in character (see H. Hotelling, J. Ed. Psy. **1933**, and L. L. Thurstone, the Vectors of Mind **1935**) replying to the latter and applying thereto the methods of R. A. Fisher. Conclusions are: (1) the first principal component is that linear function of the variates which has least variance resulting from errors of measurement, and among all linear functions of the given variates which are uncorrelated with the first component, the second component has least variance resulting from such errors, and so on for the other components; (2) the factor loadings of the principal components are maximum likelihood statistics. *Albert A. Bennett* (Providence).

Fuhrich, Josef: Über eine allgemeine Methode zur mathematischen Analyse empirischer Reihen. Mh. Math. Phys. **44**, 307—317 (1936).

Der stetigen Beobachtungsreihe $f(x)$ werde die Transformierte $f_1(x) = \int_0^n f(y) f(x+y)\,dy$ zugeordnet, wobei n eine große Zahl ist. Besteht dann eine Beziehung der Form $f(x) = \varphi_1(x) + \eta(x)\,\varphi_2(x)$, wobei $\eta(x)$ eine stochastische Variable mit dem Mittel-