Werk

Titel: Analysis (spezielle Differential- und Integralgleichungen s. a. Mechanik usw. bzw...

Jahr: 1937

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0015|log112

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

exists and coincides with the transfinite diameter defined for the three dimensional case by Pólya and Szegö [J. f. Math. **165**, 4 (1931); this Zbl. **2**, 136]. *G. Szegö.*

Analysis.

Approximationen von Funktionen. Orthogonalentwicklungen:

Bernstein, S.: Sur un théorème de M. Szegö. Prace mat.-fiz. **44**, 9—14 (1937).

Using the methods of the best approximation, the author gives a new proof of a result of the reviewer (Königsberger Gelehrte Ges. **1928**) and obtains it in the following sharper form. Let

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \cos\nu\theta + b_\nu \sin\nu\theta), \qquad |f(\theta)| \leqq 1,$$

and

$$\lambda_0 + \lambda_n \cos n\varphi_k + 2\sum_{\nu=1}^{n-1}(\lambda_\nu \cos\nu\varphi_k - \mu_\nu \sin\nu\varphi_k) \geqq 0, \qquad n\varphi_k = \alpha + k\pi,$$
$$(k = 0, 1, \ldots, 2n-1).$$

Then with $\mu_0 = \mu_n = 1$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n}\lambda_{n-\nu}[a_\nu\cos(\nu\theta+\alpha)+b_\nu\sin(\nu\theta+\alpha)]+\sum_{\nu=0}^{n}\mu_{n-\nu}[b_\nu\cos(\nu\theta+\alpha)-a_\nu\sin(\nu\theta+\alpha)]\right| \leqq \lambda_0$$

where the bound λ_0 can be attained. *G. Szegö* (St. Louis, Mo.).

Bernstein, Serge: Sur la formule de quadrature approchée de Tchebycheff. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 1305—1306 (1936).

The problem of Tchebycheff of determining the numbers $0 \leqq x_\nu \leqq 1$ such that

$$\int_0^1 f(x)\,dx = n^{-1}\sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)$$

should hold for all polynomials $f(x)$ of the degree n has been recently taken up in several papers of the author and his collaborators. Here he modifies the question by permitting for $f(x)$ only polynomials of a certain degree M_n and shows that necessarily $M_n < \pi\sqrt{2n}$ holds. Hence $n \leqq 19$ follows for the original question of Tchebycheff. This bound can be reduced by numerical calculation to 8. The proof is indicated in short terms. *G. Szegö* (St. Louis, Mo.).

Marcinkiewicz, J.: Sur la convergence des séries orthogonales. Studia Math. **6**, 39—45 (1936).

To every orthonormal set $\{\varphi_i(x)\}$ a sequence $\{n_\nu\}$ can be determined such that in the development $f(x) \sim \sum a_i\varphi_i(x)$, $f(x) \in L^2$, the subsequence $\sum_{i \leqq n_\nu} a_i\varphi_i(x)$ is convergent almost everywhere. Furthermore it is showed that the condition $f(x) \in L^2$ can not be replaced by $f(x) \in L^p$ $(p < 6/5)$ even if the given system is complete and uniformly bounded. *G. Szegö* (St. Louis, Mo.).

Menchoff, D.: Sur la convergence et la sommation des séries de fonctions orthogonales. Bull. Soc. Math. France **64**, 147—170 (1936).

Soit $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, un système normé de fonctions orthogonales sur un intervalle (a, b), que nous désignons suivant Kaczmarz et Steinhaus par ON. L'auteur dit qu'un système ON est un système de convergence, lorsque la convergence de la série $\sum_1^\infty c_n^2$ entraîne la convergence presque partout dans (a, b) de la série $\sum_1^\infty c_n\varphi_n(x)$. Il démontre le théorème intéressant: I. Chaque système ON contient une partie $\{\varphi_{m_k}(x)\}$, $m_{k-1} < m_k$, qui est un système infini de convergence. Soit $w(n)$ une fonction définie pour nentier, telle que (1) $w(n) > 0$, (2) $\lim_{n\to\infty} w(n) = \infty$. L'auteur dit qu'une telle fonction est un multiplicateur de convergence pour un système ON donnée $\{\varphi_n(x)\}$,

si la convergence de la série $\sum_1^\infty w(n)c_n^2$ entraîne la convergence presque partout de la série $\sum_1^\infty c_n\varphi_n(x)$. Comme application du théorème I il démontre: II. Étant donnés une fonction arbitraire $w(n)$, vérifiant les conditions (1) et (2), et un système ON quelconque $\{\varphi_n(x)\}$ on peut effectuer dans ce système un changement de l'ordre des fonctions $\varphi_n(x)$ de telle façon que pour le système $\{\varphi_{\nu_n}(x)\}$, ainsi obtenu, la fonction $w(n)$ soit un multiplicateur de convergence. — Enfin il considère la sommation des séries de fonctions orthogonales par la méthode linéaire régulière T' de Toeplitz au moyenne d'un matrixe $(a_{\mu\nu})$, $\mu, \nu = 1, 2, \ldots$, sous l'hypothèse supplementaire que la suite $\gamma_n = \max_{1\leqq k\leqq\infty} |a_{nk}|$ tend vers zéro pour $n\to\infty$. Il démontre le théorème: III. Étant donnés un système ON quelconque et une suite de constantes c_n telle que la série $\sum_1^\infty c_n^2$ converge, pour chaque méthode T' on peut effectuer dans la série $\sum_1^\infty c_n\varphi_n(x)$ un changement de l'ordre des termes de telle façon que la nouvelle série, ainsi obtenue, soit sommable presque partout dans (a, b) par cette méthode T'. *N. Obrechkoff.*

Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:

Minakshisundaram, S.: Tauberian theorems on Dirichlet's series. J. Indian Math. Soc., N. s. **2**, 147—155 (1936).

Zu einer unendlichen Reihe $\sum_1^\infty a_n$ und einer gegebenen monotonen Zahlenfolge $1\leqq\lambda_1<\lambda_2<\cdots$, mit $\lambda_n\to\infty$, bilde man die typischen Mittel r-ter Ordnung: $A^r(w)=\sum_{\lambda_n<w}(w-\lambda_n)^r a_n$; $A^0(w)=A(w)=\sum_{\lambda_n<w} a_n$ sind die Partialsummen der Reihe. Es sei $0<r\leqq 1$, $\alpha\geqq -1$, $\beta>0$, S beliebig; man setze $\gamma=\frac{\beta+\alpha r}{1+r}$. Ananda-Rau hat den Satz bewiesen: Aus (1) $a_n=O((\lambda_n-\lambda_{n-1})\lambda_n^\alpha)$ und (2) $A^r(w)=Sw^\gamma+o(w^\beta)$ folgt (3) $A(w)-S=o(w^\gamma)$. — Ganapathy Iyer (vgl. dies. Zbl. **11**, 17) hat, anschließend an eine Arbeit des Referenten, an Stelle der Bedingung (1) die allgemeinere eingeführt: $\sum_1^n |a_\nu|^p\lambda_\nu^p(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1})^{1-p}=O(\lambda_n^{p(\alpha+1)+1})$, $p>1$; in (3) ist dann γ durch $\delta=\frac{(\alpha p+1)r+\beta(p-1)}{rp+p-1}$ zu ersetzen. Hier werden diese Resultate auf beliebiges $r>1$ ausgedehnt und auf Summabilität Dirichletscher Reihen angewandt. *Szász.*

Hecke, E.: Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. I. Math. Ann. **114**, 1—28 (1937).

Eine kurze Darstellung der Grundgedanken hat Verf. schon in einer früher erschienenen Note (s. dies. Zbl. **12**, 200) gegeben. Nachdem die nötigen Sätze und Begriffe aus der Theorie der Modulfunktionen zusammengestellt sind, wird für die ganzen Modulformen der 1. Stufe und der Dimension $-k$ ein linearer Funktionaloperator durch $F|T_n=n^{k-1}\sum_{\substack{ad=n\\ b \bmod d,\ d>0}} F\left(\frac{a\tau+b}{d}\right)d^{-k}$ eingeführt. $F|T_n$ ist wieder eine ganze Form der Dimension $-k$. Vermöge der Erklärungen $F|(T_n\,T_m)=(F|T_n)|T_m$ und $F|(\alpha T_n+\beta T_m)=\alpha F|T_n+\beta F|T_m$ definieren die T_n einen Ring von Operatoren mit den komplexen Zahlen als Multiplikatoren. Alle T_n sind miteinander vertauschbar, und es gilt $T_n\cdot T_m=\sum_{d|n,\,m} T\left(\frac{n\cdot m}{d^2}\right)d^{k-1}$. Sind jetzt $F^\varrho(\tau)=\sum_{N=0}^\infty a^\varrho(N)e^{2\pi i N\tau}$ $(\varrho=1,\ldots,\varkappa)$ die Erzeugenden der ganzen Formen der Dimension $-k$, so wird durch $F^\varrho|T_n=\sum_{\sigma=1}^{\varkappa}\lambda_{\varrho\sigma}(n)F^\sigma(\tau)$ ein dem Ring der T_n isomorpher Matrizenring der $\lambda(n)$ erklärt. Hier gelten die Grundgleichungen $\sum_{d|n,\,N} a^\varrho\left(\frac{Nn}{d^2}\right)d^{k-1}=\sum_\sigma \lambda_{\varrho\sigma}(n)a^\sigma(N)$, $N\geqq 0$, $n\geqq 1$.

Zu den $\lambda(n)$ gibt es in dem Ring $\varkappa$ von n und τ unabhängige Matrizen $B^{(\nu)}$ mit $\lambda(n) = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} a^{\nu}(n) B^{\nu}$, $n \geqq 1$. $\lambda(0)$ wird durch diese Gleichung erklärt. Durch $f_{\varrho\sigma}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{\varrho\sigma}(n)\, e^{2\pi i n \tau}$ werden $\varkappa^2$ Funktionen eingeführt. Für die Matrix $B(\tau) = (f_{\varrho\sigma}(\tau))$ gilt $B(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(n) e^{2\pi i n \tau} = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} F^{\nu}(\tau) B^{\nu}$. Die Schar der $f_{\varrho\sigma}$ ist der Schar der F^{ϱ} linear äquivalent. Der Zusammenhang mit den Dirichlet-Reihen wird durch die Matrix $\Phi(s) = (\varphi_{\varrho\sigma}(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) n^{-s} = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} \varphi^{\nu}(s) B^{\nu}$ mit $\varphi^{\varrho}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{\varrho}(n) n^{-s}$ gegeben. $\Phi(s)$ besitzt für $\Re(s) > k$ die Eulersche Produktentwicklung $\Phi(s) = \prod_{p} (E - \lambda(p) p^{-s} + p^{k-1-2s} E)^{-1}$. Dieser Satz über $\Phi(s)$ läßt sich ohne Heranziehung des Begriffs Modulform aussprechen. Für gerades $k \geqq 4$ suche man alle Dirichlet-Reihen $\varphi(s)$ mit den Eigenschaften: 1. $(s-k)\varphi(s)$ ist ganz und von endlichem Geschlecht, 2. $R(s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \varphi(s)$ genügt der Gleichung $R(s) = (-1)^{\frac{k}{2}} R(k-s)$. Dann gibt es $\varkappa$ linear unabhängige Matrizen B^{ν}, so daß $\Phi(s) = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} \varphi(s) B^{\nu}$ die genannte Produktentwicklung besitzt. — Die charakteristischen Wurzeln von $B(\tau)$ gehören zur Schar der $F^{\varrho}(\tau)$. Sie sind identisch mit denjenigen Funktionen der Schar, die durch alle T_n bis auf einen konstanten Faktor in sich übergehen (Eigenfunktionen). Die Eisenstein-Reihe $G_{\varkappa}(\tau)$ ist bis auf einen konstanten Faktor unter den Formen der Dimension $-k$ als diejenige Eigenfunktion zu definieren, welche bei $\tau = \infty$ nicht verschwindet. Das genannte Problem der Dirichlet-Reihen mit den Eigenschaften 1. und 2. hat stets die Lösung $\varphi(s) = \zeta(s)\zeta(s-k+1)$ mit einem Pol erster Ordnung bei $s = k$. Für $k = 12$ und $k \geqq 16$ gibt es Lösungen, die bei $s = k$ regulär sind. Mindestens eine unter ihnen hat eine Eulersche Produktentwicklung. *Bruno Schoeneberg* (Hamburg).

Differentialgleichungen, Potentialtheorie:

Bompiani, Enrico: Forme normali delle equazioni differenziali lineari e loro significato geometrico. Ann. Sci. Univ. Jassy **23**, 75—105 (1937).

Ce Mémoire développe la Note publiée dans Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **23**, 807 (1936) (ce Zbl. **15**, 17); à côté de la normalisation canonique de Laguerre-Forsyth (v.l.c.), ici est approfondie la normalisation relative d'une équation différentielle linéaire homogène

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_2(t)\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \cdots + a_n(t)x = 0,$$

qui consiste à effectuer sur t une transformation $\bar{t} = \bar{t}(t)$ (déterminée à moins d'une substitution affine $\bar{t}\,|\,h\bar{t} + k$), de façon que dans l'équation transformée le coefficient de $\frac{d^{n-1}x}{d\bar{t}^{n-1}}$ soit nul. Cela revient, au point de vue géométrique, à considérer dans un S_n projectif une courbe $C[x(t)]$, intégrale de l'équation précédente, et à fixer sur sa développable une courbe $C_1\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]$, substantiellement arbitraire: l'A. attache à ces deux courbes une configuration intéressante — formée par une succession de $n-1$ transformées de Laplace, jouissant de nombreuses remarquables propriétés — lui permettant d'obtenir une interprétation géométrique de ladite normalisation; il introduit par cette voie le paramètre affine $\bar{t}$, qui, à son tour, lui permet de définir le rapport simple de trois points quelconques de C, projectivement covariant à C et C_1 et doué d'une signification géométrique relativement simple. *Beniamino Segre* (Bologna).

Kampen, E. R. van: Remarks on systems of ordinary differential equations. Amer. J. Math. **59**, 144—152 (1937).

I. Ein Eindeutigkeitssatz. Es sei ein System von Differentialgleichungen

$$x_\nu'(t) = f_\nu(x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

gegeben, bei denen also die rechten Seiten t nicht enthalten. Es sei weiter ein System von Integralkurven

$$x_\nu(t) = \varphi_\nu(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

vorhanden derart, daß durch jeden Punkt $\xi_1, \ldots, \xi_n$ des $x_1, \ldots, x_n$-Raumes genau eine Kurve (2) geht. Erfüllen die Funktionen (2) außerdem in bezug auf $\xi_1, \ldots, \xi_n$ eine Lipschitz-Bedingung, so sind die Lösungen von (1) durch die Anfangswerte eindeutig bestimmt und durch (2) gegeben. — II. Bei einer Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x, y), \tag{3}$$

wo f stetig ist, ist die Menge der auf einer Integralkurve liegenden Punkte, in denen die Integralkurven von (3) sich nach rechts (links) verzweigen, rechts (links) abgeschlossen in dem Sinne, daß für eine Folge von derartigen Verzweigungspunkten, die von rechts (links) gegen einen Grenzpunkt konvergieren, dieser selbst Verzweigungspunkt ist. — Ist K eine Transversalkurve zu den Integralkurven und findet in keinem Punkte einer gewissen „rechtsseitigen" Umgebung von K eine Verzweigung von Integralkurven nach links statt, so findet in höchstens abzählbar vielen Punkten von K eine Verzweigung nach rechts statt. Zu diesen leicht zu beweisenden Sätzen vgl. auch Marie Charpentier, C. R. Acad. Sci., Paris **191**, 509—511 (1930). Weiter wird gezeigt, daß es zu ziemlich allgemeinen Mengen der x-Achse und der y-Achse Differentialgleichungen gibt, deren Lösungen die Punkte der gegebenen Menge zu Verzweigungspunkten haben, wobei noch zwischen rechtsseitiger und linksseitiger Verzweigung unterschieden wird. Vgl. hierzu auch M. Lavrientieff, Math. Z. **23**, 197 bis 209 (1925). *Kamke* (Tübingen).

Wouthuysen, S.: Über eine geometrische Interpretation der Lagrangeschen Differentialgleichung. Wis- en Natuurkdg Tijdschr. **8**, 222—226 (1937) [Holländisch].

Die Schnittkurven einer abwickelbaren Regelfläche $f(x, y, z) = 0$ mit den Ebenen $z = c$ genügen einer Lagrangeschen Differentialgleichung

$$x\varphi(p) + y\psi(p) = \omega(p), \qquad p = dy/dx$$

deren p-Diskriminante die Projektion der Rückkehrkurve der Regelfläche ist. Umgekehrt besitzt jede Lagrangesche Differentialgleichung, von gewissen Ausnahmefällen abgesehen, ein allgemeines Integral $f(x, y, c) = 0$, welches eine abwickelbare Regelfläche darstellt. *van der Waerden* (Leipzig).

Ważewski, T.: Sur l'unicité et la limitation des intégrales de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **15**, 155—158 (1936).

Es sei T die Menge der Punkte $x, y_1, \ldots, y_n$, für die

$$|x| < a, \qquad c_\nu + L_\nu|x| \leqq y_\nu \leqq d_\nu - L_\nu|x| \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

ist. Die Funktionen $\sigma_\nu(x, z_1, \ldots, z_p)$ $(\nu = 1, \ldots, p)$ seien stetig und $\geqq 0$ für $0 \leqq x < a$, und das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dz_\nu}{dx} = \sigma_\nu(x, z_1, \ldots, z_p) \qquad (\nu = 1, \ldots, p)$$

möge nur eine Lösung mit den Anfangswerten $0, \ldots, 0$ an der Stelle $x = 0$ haben, und zwar $z_1 \equiv 0, \ldots, z_n \equiv 0$. — Nun wird das System partieller Differentialgleichungen

$$\frac{\partial z_\nu}{\partial x} = f_\nu\left(x, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p, \frac{\partial z_\nu}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z_\nu}{\partial y_n}\right) \qquad (\nu = 1, \ldots, p) \tag{1}$$

für $z_\nu = z_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)$ betrachtet. Gilt in dem Existenzbereich der Funktionen f_ν

$$|f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p, \bar{q}_{\nu 1}, \ldots, \bar{q}_{\nu p}) - f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p, q_{\nu 1}, \ldots, q_{\nu p})|$$

$$\leqq \sigma_\nu(|x|, |\bar{z}_1 - z_1|, \ldots, |\bar{z}_p - z_p|) + \sum_{\varrho=1}^{n} L_\varrho |\bar{q}_{\nu\varrho} - q_{\nu\varrho}|,$$

so ist das Integral $z_1, \ldots, z_p$ des Systems (1) durch die Anfangswerte für $x = 0$ in dem Bereich T eindeutig bestimmt. — Die Arbeit enthält tatsächlich mehr, nämlich noch gewisse Abschätzungssätze. *Kamke* (Tübingen).

Privaloff, J.: Sur la théorie générale des fonctions polyharmoniques. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 328—330 (1937).

Soit $u(P)$ dans un domaine de l'espace à p dim., sommable dans tout domaine complètement intérieur. On forme Δ_h = moyenne spatiale dans l'hypersphère (centre P, rayon h) $- u(P)$. En répétant l'opération, on trouve la $n^{\text{ème}}$ fois Δ_h^n. Les plus grande et plus petite limites de Δ_h^n: $\frac{h^{2n}}{2^n(p+2)^n}$ pour P fixé et $h \to 0$ sont dites paramètres polyharmoniques supérieur et inférieur d'ordre n de u en P. Lorsqu'ils coïncident, la valeur commune est dite paramètre polyharmonique généralisé. L'auteur énonce: 1° si u admet des dérivées continues d'ordre $2n$, ce paramètre existe et coïncide avec le laplacien d'ordre n ordinaire; 2° série de propriétés de familles et suites de fonctions polyharmoniques, c. à d. de paramètre généralisé nul. — Il conviendrait de comparer avec la définition de M. Nicolesco, p. 11 de l'ouvrage (ce Zbl. **15**, 159). *M. Brelot.*

Sobolev, S.: Sur une méthode directe pour résoudre les équations polyharmoniques. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **4**, 351—353 (1936).

Verf. hat sich in einer früheren Note mit einer Randwertaufgabe für die polyharmonische Differentialgleichung $\Delta^m u \equiv \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j}\right)^m u = 0$ und mit der entsprechenden Minimumaufgabe für

$$D_m(u) = \int\cdots\int_{\mathfrak{G}} \sum_{\sum \alpha_j = m} \frac{m!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)^2 dx_1 \ldots dx_n \tag{1}$$

beschäftigt, falls $m > \frac{n}{2}$ ist. Dabei ist der Rand S von $\mathfrak{G}$ in gewissem Sinne ausgeartet, und die Existenz der Grenzwerte der in Betracht kommenden Ableitungen wird nur im „Mittel" verstanden (dies. Zbl. **15**, 159). Es wird behauptet, daß bei $m \leqq \frac{n}{2}$ die Minimalfolge $u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots$ für (1) zwar nicht gleichmäßig, aber dennoch im Mittel konvergiert $\left[\int\cdots\int_{\mathfrak{G}} (u_j - u)^2 \to 0\right]$ und daß die Existenz der fraglichen Grenzwerte (im Mittel) der Ableitungen von u bei Annäherung an den Rand sich wie für $m > \frac{n}{2}$ folgern läßt. Die Lösung dieses Minimumproblems ist, wie gezeigt wird, im Innern unendlich oft differenzierbar. Man kann übrigens eine solche Folge bestimmen, die in jedem inneren Punkte mitsamt allen Ableitungen konvergiert. *Schauder.*

Soboleff, S.: L'algorithme de Schwarz dans la théorie de l'élasticité. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **4**, 243—246 (1936).

L'auteur étudie les équations de la théorie de l'élasticité ($\vec{u}$ = le vecteur du déplacement):

$$(\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} + \mu \Delta \vec{u} = 0. \tag{u}$$

Soient donnés deux domaines D_1, D_2 (aux surfaces S_1, S_2) pour lesquels on a résolu le problème de Dirichlet. Ces domaines ont une partie commune. Soit S_1' (S_2') la partie de S_1 (S_2) à l'intérieur de D_2 (D_1), $S_1'' = S_1 - S_1'$ ($S_2'' = S_2 - S_2'$), l—ligne d'intersection de S_1, S_2. On peut résoudre maintenant le problème de Dirichlet pour les domaines: A. $D_{12}' = D_1 + D_2$, avec les conditions $u|_{S_1''} = \psi$, $u|_{S_2''} = \chi$; B. $D_{12} = D_1 \cdot D_2$, avec les conditions $u|_{S_1'} = \psi$, $u|_{S_2'} = \chi$ (ψ, χ—fonctions données). On construit dans le cas B (par exemple) les solutions $v^{(n)}$ de (u) qui satisfont aux conditions suivantes:

$v^{(0)}|_{S_2'} = \chi$; $v^{(0)}|_{S_2''} = w$; $v^{(0)}|_{S_1''} = \lambda$; $v^{(2k)}|_{S_2'} = v^{(2k-1)}|_{S_2'}$; $v^{(2k)}|_{S_2''} = 0$; $v^{(2k)}|_{S_1''} = 0$

$v^{(1)}|_{S_1'} = -\psi + v^{(0)}|_{S_1'}$; $v^{(1)}|_{S_1''} = 0$; $v^{(1)}|_{S_2''} = 0$;

$v^{(2k+1)}|_{S_1'} = v^{(2k)}|_{S_1'}$; $v^{(2k+1)}|_{S_1''} = 0$; $v^{(2k+1)}|_{S_2''} = 0$.

w et λ sont deux fonctions suffisamment régulières et coincidant avec χ et ψ sur l. La solution cherchée est alors $v = \sum (-1)^n v^{(n)}$. *Janczewski* (Leningrad).

● **Juvet, Gustave: Mécanique analytique et mécanique ondulatoire.** Mém. Sci. math. Fasc. 83, 69 pag. Paris 1937.

Kap. I. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung und der Begriff der Welle. Charakteristikentheorie. Das Theorem von Jacobi. Kap. II. Anwendung auf die klassische Mechanik und die Riemannsche Geometrie. Kap. III. Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Der Begriff der Charakteristik und der Bicharakteristik. Systeme von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Charakteristische Mannigfaltigkeiten als Unstetigkeitsflächen. Wellenoptik und Strahlenoptik. Kap. IV. Wellenmechanik. Wahrscheinlichkeitsinterpretation. De Broglie-Wellen. Gruppengeschwindigkeit. *Rellich* (Marburg a. d. L.).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Tornier, Erhard: Zur Widerspruchsfreiheit der Benutzung von Lebesgueschem Maß und Integral vom Standpunkt der Häufigkeitstheorie. Deutsche Math. 1, 803 bis 804 (1936).

Beweis des Satzes: „Für jede Versuchsvorschrift gibt es mindestens ein Modell, in dem abzählbar viele beliebig vorgegebene meßbare Mengen maßgleiche Dichten haben und in dem außerdem für abzählbar viele beliebig vorgegebene beschränkte Lebesgue-integrierbare Funktionen die beobachteten Durchschnitte gegen die Lebesgueintegrale streben." *A. Khintchine* (Saratow).

Borel, Émile: Sur un problème élémentaire de stratégie. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 307—310 (1937).

Ein Hasardspiel bestehe darin, daß A und B je drei Zahlen a_i bzw. b_i mit derselben Summe s wählen; gewonnen hat, wer zwei Zahlen traf, die größer sind als diejenigen mit gleichem Index des Gegners (evtl. bleibt das Spiel unentschieden). Es wird gezeigt, daß A (in unendlich vielen Weisen) die a_i nach einem derartigen Wahrscheinlichkeitsgesetz wählen kann, daß er nichtnegative Gewinnchancen hat unabhängig davon, nach welchem Verteilungsgesetz B die b_i wählt. — Unter gewissen schematischen Voraussetzungen kann man dies auf das Problem der Verteilung von Truppenreserven auf drei Kampffronten anwenden. *W. Feller* (Stockholm).

Dugué, Daniel: Sur une extension de la loi des grands nombres. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 317—319 (1937).

Nach einem Satze des Ref. [C. R. Acad. Sci., Paris 189, 477 (1929)] folgt aus der Existenz der mathematischen Erwartung einer Verteilungsfunktion $F(x)$ die Gültigkeit des Gesetzes der großen Zahlen für eine Folge gegenseitig unabhängiger, dem Verteilungsgesetz $F(x)$ unterliegender zufälliger Größen. Verf. macht nun die einfache Bemerkung, daß die Differenzierbarkeit von $\log \varphi(t)$ [wo $\varphi(t)$ die dem Gesetz $F(x)$ entsprechende charakteristische Funktion bedeutet] bei $t=0$ für diese Gültigkeit notwendig und hinreichend ist und daß im positiven Fall die Mittelwerte gegen $\frac{1}{i}\left[\frac{d \log \varphi(t)}{dt}\right]_{t=0}$ konvergieren. Insbesondere folgt daraus, daß das Gesetz der großen Zahlen auch dann bestehen kann, wenn $F(x)$ keine mathematische Erwartung besitzt. Das ist z. B. der Fall, wenn $F'(x)$ gerade und bei großen x von der Größenordnung $x^{-2}(\log |x|)^{-\alpha}$ $(0 < \alpha \leqq 1)$ ist, was durch eine Rechnung begründet wird. — Es sei bemerkt, daß dasselbe Ergebnis auch unter der allgemeineren Voraussetzung $F'(x) = o(x^{-2})$ gültig bleibt, wie eine andere, von Kolmogoroff (Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, S. 55, Berlin: Julius Springer 1933) aufgestellte notwendige und hinreichende Bedingung ohne jede Rechnung ergibt. *A. Khintchine* (Saratow).

Fortet, Robert: Sur des probabilités en chaînes. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 315 bis 317 (1937).

Verf. betrachtet eine schrittweise Wanderung, welche innerhalb einer meßbaren Menge V beliebiger Dimension verläuft. Es sei $P^n(E, F)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte

für den Übergang in n Schritten vom Punkte E in dem Punkte F und $p^n(F)$ die untere Grenze von $P^n(E, F)$ bei veränderlichem E. Nun wird die Voraussetzung (c) eingeführt: Es gibt eine Menge Ω, $\mathrm{mes}(\Omega) > 0$, ein n und ein $\eta > 0$, für welche $p^n(F) > 0$ in allen Punkten F von Ω. Unter dieser Voraussetzung lassen sich mehrere übliche ergodische Eigenschaften der Wanderung beweisen. Insbesondere strebt $P^n(E, F)$ mit $n \to +\infty$ für fast alle F gegen einen von E unabhängigen Limes $P(F)$ mit $\int_V P(F)\,dF = 1$.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Feldheim, Ervin: Sur la stabilité des lois de probabilité à deux variables. Bull. Soc. Math. France **64**, 209—212 (1936).

Neuer Beweis des Khintchineschen Satzes, daß unter allen zweidimensionalen Verteilungsfunktionen mit endlichen Momenten zweiter Ordnung und mit einem von ± 1 verschiedenen Korrelationskoeffizienten nur die Gaußsche stabil ist. Der Beweis benutzt die charakteristischen Funktionen und setzt den zentralen Grenzwertsatz voraus. (Ref. bemerkt, daß die Behauptung aus letzterem auch ohne Rechnung unmittelbar folgt.) *W. Feller* (Stockholm).

Raikov, D.: On the decomposition of Poisson laws. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **14**, 9—11 (1937).

Man setze $F(x; \lambda) = e^{-\lambda} \sum_{\varkappa \leqq x} \lambda^\varkappa / \varkappa!$; als Poissonsches Verteilungsgesetz wird jede Verteilungsfunktion der Form $F\left(\frac{x-\alpha}{\tau}; \lambda\right)$ $(\alpha \gtreqless 0,\ \tau > 0,\ \lambda \geqq 0)$ bezeichnet. Es wird der für die Arithmetik der Verteilungsgesetze sehr wichtige Satz bewiesen: Unterliegt die Summe von zwei gegenseitig unabhängigen zufälligen Größen einem Poissonschen Verteilungsgesetz, so gilt dasselbe auch von jedem der beiden Summanden. — Den entsprechenden Satz für Gaußsche Verteilungsgesetze hat bekanntlich kürzlich H. Cramér [Math. Z. **41**, 405—414 (1936); vgl. dies. Zbl. **14**, 121] bewiesen. *A. Khintchine.*

Larguier, Everett H.: On a method for evaluating the moments of a Bernoulli distribution. Ann. math. Statist. **7**, 191—195 (1936).

The author provides a table of polynomials in n adapted for the rapid machine computation of moments of the Bernoulli distribution. The work is illustrated by application to $(.06785 + .93215)^{378}$. *Albert A. Bennett* (Providence).

Geary, R. C.: Moments of the ratio of the mean deviation to the standard deviation for normal samples. Biometrika **28**, 295—305 (1936).

The author previously proposed a test of normality available when the population mean may be presumed to be zero. In application to the case of an unknown mean, a transformation due to Helmert could be used but this has the disadvantage of introducing a new source of variability for a given sample. The following was therefore suggested,

$$w_n' = \sum_{i=1}^{n'} |x_i - \bar{x}| \Big/ \sqrt{n' \sum_{i=1}^{n'} (x_i - \bar{x})^2}.$$

This paper determines the moments of w_n' and compares these with results previously obtained for the mean deviation. Tables of semi-invariants of w_n and w_n', and for the probability points of w_n' are given, as well as charts for the probability levels. *Albert A. Bennett* (Providence).

Hotelling, Harold: Relations between two sets of variates. Biometrika **28**, 321 bis 377 (1936).

After mentioning illustrative applications of correlation of vectors, the author defines the vector correlation coefficient, q, between two N by s matrices of variates. In the case $s = 2$, this reduces to $(r_{13}r_{24} - r_{14}r_{23})/\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{34}^2)}$, where r_{ij} is the correlation of x_i with x_j. This numerator is the "tetrad" extensively encountered. Three types of errors ignored in the use of the tetrad are examined. The theory of determinants and matrices is employed to introduce "canonical variates". These are such that all the correlations among them are zero save those between canonical