tritte miteinander verbundener Gesamtheiten mit bekannten bzw. gesuchten Übertrittsintensitäten; wesentlich neue Tatsachen werden nicht mitgeteilt. Ferner befaßt sich Verf. mit der Anwendung der Integralgleichungen auf Probleme der Deckungskapitalberechnung und gelangt zur Überzeugung, daß hier die Integralgleichungen ein unnötig kompliziertes Hilfsmittel bilden, welches immer durch einfachere Methoden ersetzt werden kann und weder theoretisch besseren Einblick in das Problem liefert noch rechnerisch von Nutzen ist. In der zweiten Abhandlung wird diese Ansicht ausführlich begründet. *Birnbaum* (Lwów).

Numerische und graphische Methoden.

Boulad Bey, Farid: Sur les formes canoniques des équations d'ordre nomographique 6 et 5 représentables par des nomogrammes à échelles symétriques. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 150—153 (1936).

Behandlung von Fluchtlinientafeln mit zwei in bezug auf einen Punkt oder eine Gerade symmetrischen Leitern und einer dritten geradlinigen oder krummlinigen Leiter. *Rehbock* (Bonn).

Callender, A., D. R. Hartree and A. Porter: Time-lag in a control system. Philos. Trans. Roy. Soc. London A **235**, 415—444 (1936).

Vom mathematischen Standpunkt aus gesehen wird das System

$$\dot{\vartheta}(t) + m\,\vartheta(t) - C(t) = D(t),$$
$$n_1\vartheta(t) + n_2\dot{\vartheta}(t) + n_3\ddot{\vartheta}(t) + \dot{C}(t+T) = 0$$

mit bekannter Störungsfunktion $D(t)$ und bekannten Konstanten n_1, n_2, n_3, m, T für die Funktionen $\vartheta(t)$ und $C(t)$ behandelt; bei Elimination von $C(t)$ entsteht eine lineare Differenzen-Differentialgleichung für $\vartheta(t)$. Physikalisch liegt eine Theorie für Kontrollapparate, z. B. Thermostaten ($t =$ Zeit, $\vartheta =$ Temperatur), vor; T ist die Verzögerung, mit welcher der Kontrollapparat auf eine Störung anspricht. Es genügt, Störungen von der Dauer T zu betrachten (die Wirkung einer längeren Störung läßt sich durch Überlagerung finden). Nach Aufhören der Störung ($D = 0$) liegt ein homogenes System vor, dessen Lösung mit Operatorenrechnung aus Grundlösungen $\vartheta = Q\,e^{\lambda t}$ zusammengesetzt wird, wie man das von gewöhnlichen Differentialgleichungen her kennt. Im Hinblick auf die Bestimmung von Konstanten n_1, n_2, n_3, m, für die der Kontrollapparat die konstant zu haltende Größe $\vartheta(t)$ möglichst schnell auf ihren Normalwert zurückführt, besprechen die Verff. ausführlich die charakteristische Gleichung und eine Anzahl konkreter Lösungen des Systems. Die Lösungen wurden meist mit einem in Manchester gebauten Modell der Maschine von Bush gezeichnet. Die mathematische Untersuchung wird durch schon erprobte Vorschläge zur Herstellung von Kontrollapparaten mit vorgeschriebenen Konstanten ergänzt. *Theodor Zech.*

Kaiser, Heinrich: Grundriß der Fehlertheorie. (Zusammenfassende Darstellung.) Z. techn. Physik **17**, 219—226 (1936).

Vogt, Oskar: Über Beziehungen zwischen Fehlermassen. Bern: Diss. 1935. 112 S. u. 24 Abb.

This paper has for its subject, aside from considerable expository material, the study of the "moment quotient" $\lambda(\alpha)$ for a frequency function, which is defined as the reciprocal of the ordinate at the mean times the ratio of the α-th to the $(\alpha+1)$-st absolute moment computed about the mean. The special case for $\alpha = 1$ (called the "error quotient") has been studied for several frequency functions by Bortkewicz, Pearson, and Gumbel [see Metron **6**, No. 2, 65—86 (1926)] and a brief account of their work is given here. The properties of moment quotients are illustrated for special frequency functions, particularly for the system $C_s\,e^{-h^s|x|^s}$. In general $\lambda(\alpha)$ is shown to be invariant under a linear transformation of the independent variable. The limiting value of $\lambda(\alpha)$ as $\alpha \to \infty$ is demonstrated finite and then is found explicitly for the two cases of finite and infinite range. In the final section the author turns to the question of the determination of a symmetric frequency function in terms of its sequence of $\lambda(\alpha)$'s ($\alpha = 1, 2, \ldots$). (It is noted that there are always infinitely many unsymmetric solutions if there is one symmetric one.) For a finite range the absolute moments are readily found in terms of the $\lambda(\alpha)$'s so that the well-known results of the corresponding moments problem are at once available. For an infinite range, the immediate formal solution in terms of the absolute moments by expansion in a series of Laguerre polynomials is given and illustrated. *C. C. Craig.*

Vajda, Stefan: Beiträge zur Theorie der Ausgleichsformeln. Bl. Versich.-Math. **3**, 404—412 (1936).

Given the $2n+1$ observed values $u_0, u_1, \ldots, u_n, u_{-1}, \ldots, u_{-n}$, the author reconsiders the classical situation in which the coefficients $c_0, \ldots c_j$ in the form $\sum_{r=0}^{j} c_r f_r(i) \equiv f(i)$, with given base functions $f_r(i)$ are determined by the least-squares principle, studying it when it is required that a single u, say u_0, shall be reproduced. After noting that $f(0)$ is a linear function of the u_i's, and that the coefficients p_i in $f(0) = \sum_i p_i u_i$ depend only on the functions $f_r(i)$, he sets up a characteristic equation in p_i and $f(i)$, $i = 0, 1, \ldots, -n$, that is the necessary and sufficient condition that u_0 be reproduced by the least-squares procedure when a set of base functions exist so that $u_i = f(i)$ for each i. It is shown that the characteristic equation plus the condition that $\sum p_i^2$ shall be a minimum is equivalent to the least-squares procedure for determining the set of p_i's. Next conditions under which the graduation function $f(i)$ is symmetrical are studied. It is demonstrated that any set of $2n$ base functions $g_t(i)$, $t = 1, 2, \ldots$, which satisfy the characteristic equation, form a fundamental set of such functions. A numerical example is appended. *C. C. Craig* (Ann Arbor, Mich.).

Sterne, T. E., and W. Edwards Deming: The accuracy of least-squares solutions. Physic. Rev., II. s. **49**, 857—858 (1936).

This note discusses three common meanings of "probable error" in relation to the estimation of parameters by least squares to clear up apparent differences between the author and Deming. [See W. E. Deming, Physic. Rev. **49**, 243 (1936); this Zbl. **13**, 361; and Sterne, this Zbl. **10**, 409.] *C. C. Craig* (Ann Arbor, Mich.).

Sibirani, F.: Alcune osservazioni sull'interpolazione col metodo dei minimi quadrati. Giorn. Ist. Ital. Attuari **7**, 36—41 (1936).

Gegeben seien n Punkte $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$, von welchen $n - m$ auf einer durch ein Polynom $y = f(x)$ vom Grade r definierten Kurve und die restlichen m außerhalb dieser Kurve liegen. Für die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ soll mit der Methode der kleinsten Quadrate ein Interpolationspolynom vom Grade r angegeben werden. Es werden die folgenden Fragen beantwortet: Wann ist schon $y = f(x)$ das mit der Methode der kleinsten Quadrate bestimmte Interpolationspolynom? Wann hat das Interpolationspolynom die Gestalt $y = f(x) + c$? Ferner wird unter der zusätzlichen Annahme, daß die m außerhalb von $y = f(x)$ gelegenen Punkte auf einer Kurve $y = f(x) + \varepsilon$ liegen, untersucht, wann das Interpolationspolynom die Gestalt $y = f(x) +$ konst. annehmen kann. *Birnbaum* (Lwów).

Nyström, E. J.: Ein Instrument zur Auswertung von Stieltjesintegralen. Soc. Sci. Fennica. Comment. phys.-math. **9**, H. 4, 1—18 (1936).

Zum Auswerten des Stieltjesintegrals $\int f(x)\,d\,h(x)$ ist ein gewöhnliches Planimeter geeignet, wenn die Kurve mit der Parameterdarstellung $\xi = h(x)$, $\eta = f(x)$ gezeichnet vorliegt. Das Nyströmsche Instrument soll das Zeichnen dieser Kurve $\eta(\xi)$ unnötig machen, wenn $\xi = h(x)$ und $\eta = f(x)$ auf einzelnen Blättern in Kurvenform vorliegen. Anwendungsbeispiele sind: Koeffizienten der Entwicklung von $f(x)$ nach Kugelfunktionen (überhaupt nach Orthogonalsystemen), von statischen und Trägheitsmomenten, von Flächeninhalten in ungleichmäßigen Netzen u. dgl. Für jeden dieser Verwendungszwecke braucht man eine oder einige passende Kurven $\xi = h(x)$, die ein für allemal gezeichnet vorrätig sein können. Nyströms Instrument ist ein harmonischer Analysator Mader-Ott, in dem Zahnstange und Zahnräder fehlen dürfen, der dafür im größeren Wagen eine Schlitteneinrichtung zum Einhängen des Planimeters enthält. Das Blatt mit der Kurve $\eta = f(x)$ wird unter das Gerät gelegt, das Blatt mit $\xi = h(x)$ am kleineren Analysatorwagen befestigt. Zwei Personen bedienen das Instrument; eine fährt mit dem Analysatorfahrstift die $f(x)$-Kurve nach, die andere sucht währenddessen durch Schlittenverschiebung eine am Schlitten befindliche Marke auf der vorbeigleitenden $h(x)$-Kurve zu halten. Diese Art der Bedienung dürfte nicht ganz angenehm sein, liegt aber in der Natur der gestellten Aufgabe. In einem gewissen ξ, η-System (mit krummen Linien $\eta =$ konst.) beschreibt der Planimeterfahrstift die erwähnte Kurve $\eta(\xi)$, das Planimeter zeigt also $\int \eta \, d\xi$, d. h. das Stieltjesintegral an. Die Theorie ist von der des Analysators Mader-Ott nur wenig verschieden. Für die Benutzung gibt Nyström einige interessante und sicher sehr nützliche Winke. *Zech.*

● **Bauschinger, J., und J. Peters: Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit acht Dezimalstellen, enthaltend die Logarithmen aller Zahlen von 1—200000 und die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen für jede Sexagesimalsekunde des Quadranten. Bd. 1 u. 2. 2. durchges. Aufl.** Leipzig: W. Engelmann 1936. Bd. 1: XIV, 367 S., Bd. 2: 951 S. RM. 58.—.

Hristow, Wl. K.: Eine Reihe zur Berechnung der Subtraktionslogarithmen für kleine Argumentwerke. Astron. Nachr. **260,** 173—174 (1936).

Rohrberg, Albert: Die Anpassung des Rechenstabes an den Rechenbedarf der Gegenwart. Z. Instrumentenkde **56,** 322—328 (1936).

Geometrie.

Richter, Hans: Ein Beweis der Relationen von Vahlen. Math. Ann. **113,** 206—207 (1936).

Zwischen den Plückerschen Koordinaten $\pi_{i_1 i_2 \ldots i_d}$ eines Raumes S_{d-1} in S_n bestehen bekanntlich lineare und quadratische Relationen. Es wird elementar gezeigt, daß die Relationen d-ten Grades von Vahlen Folgen dieser linearen und quadratischen Relationen sind. Gleichzeitig ergibt sich ein neuer Beweis dafür, daß die letzteren Relationen auch hinreichend dafür sind, daß die $\pi_{i_1 \ldots i_d}$ Plückersche Koordinaten eines Raumes S_{d-1} sind. *van der Waerden* (Leipzig).

Perepelkine, D.: Sur les invariants angulaires d'un espace à n dimensions. Bull. Soc. phys.-math. Kazan, III. s. **7,** 55—62 u. franz. Zusammenfassung 62—63 (1936) [Russisch].

L'auteur pose le problème de la recherche des invariants angulaires des deux variétés planes R_p et R_q et il montre que le système complet des invariants angulaires indépendants rationels des ces variétés forme le système des invariants orthogonaux d'un tenseur du 2d rang. L'auteur montre ensuite le sens géometrique de ce tenseur. *Nil Glagoleff* (Moskau).

Blaschke, Wilhelm: Über Integralgeometrie. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **46,** 139—152 (1936).

Bericht über einige neuere Untersuchungen des Verf. und seiner Mitarbeiter (vgl. insbes. dies. Zbl. **14,** 119, 219 u. 274). Literaturverzeichnis. *W. Fenchel.*

● **Blaschke, W.: Vorlesungen über Integralgeometrie. H. 1. 2. erw. Aufl. (Hamburg. math. Einzelschriften. H. 20.)** Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1936. 60 S. u. 21 Fig. RM. 5.—.

Vgl. die Besprechung der 1. Aufl. (dies. Zbl. **12,** 414); in der neuen sind außer einigen Aufgaben mehrere Paragraphen hinzugekommen. Sie behandeln die Erweiterung einer Formel von Santaló [Formel (1) des genannten Ref.] auf nicht konvexe Figuren zur „kinematischen Hauptformel" und eine Verallgemeinerung des früher nur für Kurven endlicher

Ordnung bewiesenen Satzes von Crofton, daß die Länge einer Kurve gleich der „Anzahl" ihrer Treffgeraden ist. — Es seien $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_1$ zwei ebene Gebiete, $\mathfrak{G}_0$ fest, $\mathfrak{G}_1$ starr beweglich. F_i, U_i, K_i seien Flächeninhalt, Umfang bzw. Totalkrümmung des Randes von $\mathfrak{G}_i$; ferner K_{01} die Totalkrümmung des Durchschnitts von $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_1$ und $\dot{\mathfrak{G}}_1$ die kinematische Dichte von $\mathfrak{G}_1$. Dann lautet die Hauptformel für die Ebene

$$\int K_{01}\,\dot{\mathfrak{G}}_1 = 2\pi(K_0F_1 + U_0U_1 + F_0K_1)\,.$$

Sie wird bewiesen: erstens nach Maak für stetig gekrümmte Jordan-Kurven, zweitens für Komplexe auf dem vom Verf. im räumlichen Fall beschrittenen Wege (vgl. dies. Zbl. **14**, 274). Als einfache Anwendung wird die Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung von Bonnesen für nicht notwendig konvexe Jordan-Kurven gewonnen. — Der erwähnte Satz von Crofton wird nach Maak in folgender Fassung bewiesen: Ist $n(\mathfrak{g})$ die Anzahl der Schnittpunkte einer rektifizierbaren stetigen Kurve mit der Geraden $\mathfrak{g}$ und $\dot{\mathfrak{g}}$ die Geradendichte, so existiert $\frac{1}{2}\int n(\mathfrak{g})\,\dot{\mathfrak{g}}$ im Sinne von Lebesgue und ist gleich der Länge der Kurve. Ergänzend wird gezeigt, daß es hierbei gleichgültig ist, ob Stützpunkte mitgezählt werden oder nicht. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Sz. Nagy, Julius v.: Über die Buschenveloppen von H. Brunn. Math. Z. **41**, 479 bis 492 (1936).

Unter einer Buschenveloppe werde (mit H. Brunn) eine beschränkte, ebene Kurve (d. h. hier ein eindeutiges, mit stetiger Tangente versehenes Kreisbild) verstanden, welche zu jeder Richtung genau eine einfache Tangente besitzt. Verf. zeigt: Eine Buschenveloppe mit genau r (Dorn-) Spitzen, kurz mit B_r bezeichnet, ist Summe von $r = 2t + 1 \geqq 3$ Konvexbogen, so daß stets $r \equiv 1$. Beispiele: Hypozykloiden mit dem Halbmesserverhältnis $2r:(r-1)$. Für die Anzahl d der Doppelpunkte einer B_r gilt: $d = \frac{r-3}{2} + 2q$, mit $0 \leqq q \leqq \frac{(r-1)(r-3)}{2}$, und zu jedem solchen ganzzahligen q gibt es B_r (Maximum von d z. B. bei den ebengenannten Hypozykloiden). Ist k bzw. n die Klasse bzw. Ordnung von B_r, so gilt: $k \leqq n - 1 \leqq r$. Für jedes $r \geqq 3$ ist $k = r$ möglich, für jedes $r \geqq 5$ gibt es B_r, welche von der maximalen Ordnung $n = r + 1$ und zugleich von der minimalen Klasse $k = 5$ sind. — Von den vier in einem Doppelpunkte zusammenstoßenden konvexen Teilbogen wird eine konvexe und eine konkave Ecke gebildet; deformiert man letztere geeignet in eine Dornspitze so, daß zugleich der Doppelpunkt verschwindet, so spricht man von einer Durchschneidung. Durch eine solche wird eine B_r in die Summe einer B_{r_1} und einer B_{r_2} verwandelt, durch geeignete $\frac{r-3}{2}$ Durchschneidungen in die Summe von $\frac{r-1}{2}$ Buschenveloppen B_3. Jede B_r läßt sich durch gewisse stetige Deformationen in eine B_r mit maximalem d überführen. *Haupt* (Erlangen).

Sauter, Ilse: Zur Theorie der Bogen n-ter (Realitäts-) Ordnung im projektiven R_n. I. Math. Z. **41**, 507—536 (1936).

Diese Arbeit schließt an die Arbeit von O. Haupt an: Über die Erweiterung eines beliebigen Bogens dritter Ordnung, insbesondere zu einer Raumkurve dritter Ordnung (J. reine angew. Math. **170**; dies. Zbl. **8**, 170), und verallgemeinert die dort für den Raum R_3 erhaltenen Resultate auf den Fall des R_n. Ein Bogen n-ter Ordnung im R_n bedeutet ein eindeutiges, stetiges Streckenbild, wobei die Bilder der Streckenendpunkte verschiedene Punkte von R_n sind. Ein Bogen n-ter Ordnung im R_n wird von jeder Hyperebene in höchstens n Punkten getroffen. Nach einer eingehenden Untersuchung der Bogen n-ter Ordnung im R_n wird der Erweiterungssatz bewiesen: Jeder Bogen n-ter Ordnung im R_n kann mit bestimmten Ausnahmen ordnungsfest erweitert werden, insbesondere zu einer geschlossenen Kurve. Nur die Fälle bilden Ausnahmen, in denen ein k-dimensionaler Tangentialschmiegraum des Anfangspunktes des Bogens mit dem $(n$-k-1)-dimensionalen Tangentialschmiegraum des Endpunktes mindestens einen Punkt gemeinsam hat. Die Arbeit gibt auch eine Konstruktion an, die einen Bogen n-ter Ordnung zu einer Kurve n-ter Ordnung erweitert. Diese Konstruktion ist die natürliche Verallgemeinerung des Konstruktionsverfahrens von Haupt im Falle R_3. *Sz. Nagy* (Szeged).

Haupt, Otto: Über ebene Punktmengen mit überall unendlicher Krümmung. J. reine angew. Math. **175**, 221—223 (1936).

In geometrischer Weise wird bewiesen: Eine ebene Punktmenge M, deren Tangentialkrümmung in jedem (zu M gehörigen) Häufungspunkte von M unendlich ist, muß punkthaft sein. — Zur Definition der Tangentialkrümmung von M in P geht man dabei von den Kreisen aus, die mit M irgendeine Tangente in P und außerdem einen benachbarten Punkt gemeinsam haben. Ansätze zu etwas spezielleren Sätzen in derselben Richtung bei Brunold und Bouligand, vgl. dies. Zbl. **9**, 56. *W. Feller.*

Algebraische Geometrie:

● **Telling, H. G.: The rational quartic curve in space of three and four dimensions. Being an introduction to rational curves. (Cambridge tracts in math. a. math. physics. Nr. 34.)** London: Cambridge univ. press 1936. VI, 78 pag. 5/-.

Organisch geordnete Darstellung der Eigenschaften der rationalen Kurven im S_4 und S_3; zahlreiche Sätze sind als Übungen nur angedeutet, so daß die Hauptlinien der Theorie in besserem Licht erscheinen. Im 1. Kap. die rationalen normalen C^4: Definitionen, Gleichungen, projektive Erzeugungen, fundamentale Polarität, Sehnen, Ebenen die C^4 3mal schneiden; Invariantentheorie in symbolischer Schreibweise; Involutionen 2. Ordnung auf C^4; V_3 Ort der Sehnen, Fläche K Ort der Schnittpunkte von zwei Schmiegebenen und die V_3^3, die K enthalten; lineare Strahlenkomplexe, die die Tangenten von C^4 enthalten. Im 2. Kap. die rationalen C^4 des Raumes S_3: ihre Grundform 4. Grades, die Hauptinvolutionen, die Inflexionspunkte, die Ebenen, die C^4 2mal berühren; die mit C^4 verbundene Steinersche Fläche; verschiedene besondere C^4. Als Anhang die Involutionen 5. und 6. Ordnung auf einer rationalen C^4. *E. G. Togliatti* (Genova).

Milne, William P.: Three tritangent planes of the quadricubic curve. Proc. London Math. Soc., II. s. **41**, 454—461 (1936).

Eine analytische Darstellung der Schnitt-C^6 einer Quadrik und einer F^3 im dreidimensionalen Raume. Als Koordinatenebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ werden drei Dreitangentialebenen der Kurve gewählt; eine geeignete Form der Koeffizienten der beiden C^6-Gleichungen läßt die Möglichkeit von zwei verschiedenen Fällen erkennen: Entweder liegen die 9 Berührungspunkte der Kurve mit $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ auf der Basiskurve C^4 eines Quadrikbüschels oder sie liegen auf einer einzigen Quadrik, derjenigen, die die C^6 auch enthält. Im 1. Fall haben C^6 und C^4 drei weitere Punkte gemein, die die Berührungspunkte der C^6 mit einer vierten Dreitangentialebene sind, so daß die 4 Ebenen, irgendwie auf zwei Paare verteilt, zwei Quadriken derselben Schar von Berührungsquadriken liefern. Die Berührungspunkte von C^6 mit zwei der Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ bestimmen eine kubische Raumkurve, die, zusammen mit C^6, auf einer viernodalen F^3 liegt; man hat so drei solche Flächen $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$; zwei von ihnen, z. B. Γ_2 und Γ_3, schneiden sich noch, außer in C^6, in einer ebenen Kurve 3. Ordnung C_1; die Tangentialkegel von Γ_2 und Γ_3, aus Punkten von Γ_2 und Γ_3 selbst, schneiden die Ebene von C_1 in Kegelschnittpaaren, die im 1. Falle demselben System und im 2. Falle verschiedenen Systemen von Berührungskegelschnitten angehören. Im 2. Falle erhält man auch leicht den bekannten Satz, daß die 9 Berührungspunkte der C^6 mit $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ vom Punkte $x = y = z = 0$ aus durch 9 Geraden projiziert werden, die auf ∞^1 Kegel 3. Ordnung liegen (s. auch H. W. Richmond, dies. Zbl. **12**, 123). *E. G. Togliatti* (Genova).

Chisini, Oscar: La rappresentazione torica di una curva algebrica nell'intorno di un suo punto singolare. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **69**, 209—218 (1936).

Diese Abhandlung beschäftigt sich mit der Darstellung einer ebenen algebraischen Kurve $f(xy) = 0$ durch ein System reeller Raumlinien (dies. Zbl. **8**, 220). Setzt man $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$, $f(xy) = f(x_1x_2y_1y_2) + if_2(x_1x_2y_1y_2)$, wo f_1, f_2 reelle Funktionen bedeuten, so erhält man eine Darstellung der gegebenen Kurve auf einer reellen Fläche F eines vierdimensionalen Raumes; diese Fläche wird dann mit der Quadrik $y_1 = \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$ geschnitten; und die so gewonnene Schnittlinie wird auf einem S_3 durch die Formeln $X = x_1$, $Y = x_2$, $Z = \frac{y_2}{2\lambda}$ projiziert und homographisch transformiert. Man erhält so eine Raumkurve C, die eine geeignete Darstellung der Umgebung des Punktes $x = y = 0$ auf $f(xy) = 0$ liefert; wenn die algebraische Funktion $y(x)$ in jener Umgebung h Werte besitzt, und wenn λ groß genug gewählt wird, so hat die orthogonale Projektion C' von C auf $Z = 0$ mit jeder Halbgeraden aus $X = Y = 0$ genau h Schnittpunkte, die dem Kreise L mit der Gleichung $X^2 + Y^2 = 1$ beliebig nahe liegen. Legt man die Ebene $y_1 y_2$ so, daß ihr Anfangspunkt $y_1 = y_2 = 0$ auf L liege, daß die Verlängerung von y_1 durch $X = Y = 0$ hindurchgehe und daß y_2 parallel zu Z sei, so beschreiben die den Schnittpunkten $y_1 C'$ entsprechenden Punkte $(y_1 y_2)$ eine neue Kurve K, die die Kurve C ersetzen kann; K unterscheidet sich von C nur durch unendlich kleine Größen 2. Ordnung. Die Anwendung dieser Konstruktion der beiden Linien $y = 0$ und $y = x^n$, die im Anfangspunkt eine Berührung n-ter Ordnung aufweisen, gibt bzw. den Kreis L und eine Raumkurve K, die n Windungen um L macht; sie ist wie eine Schraubenlinie auf einer Torusfläche. *E. G. Togliatti.*

Zariski, Oscar: On the Poincaré group of rational plane curves. Amer. J. Math. 58, 607—619 (1936).

Die ebenen Kurven werden als zweidimensionale Gebilde V_2 im vierdimensionalen Raum R_4 zweier komplexer Veränderlicher aufgefaßt. Die Gruppe der Kurve ist die Poincarésche Fundamentalgruppe des Außenraumes $R_4 - V_2$. Direkt bestimmt wird die Gruppe der rationalen Kurve mit maximaler Spitzenzahl von gerader Ordnung $2n - 2$. Ihre Gruppe ist isomorph zur Gruppe der Abbildungsklasse der n-mal gelochten zweidimensionalen Kugel und also homomorph zu der Gruppe der Zöpfe aus n Fäden. — Alsdann werden die Gruppen der Kurven ermittelt, die sich als Grenzfälle der obigen Maximalkurve auffassen lassen; sie sind bis auf einen Ausnahmefall für $n = 4$ zyklisch. — Die Relationen der Zopfgruppe werden erneut und vereinfacht abgeleitet. Die Arbeit setzt wesentlich das Ergebnis einer Note des Verf. voraus, die in den Ann. of Math. unter dem Titel „A theorem on the Poincaré group of algebraic hypersurfaces" erscheinen soll. *K. Reidemeister* (Marburg a. d. L.).

Kontorowitsch, P.: Über eine untere Abschätzung der Anzahl der Weierstrass-Punkte in einem nicht-hyperelliptischen algebraischen Funktionenkörper. Bull. Soc. phys.-math. Kazan, III. s. 7, 99—101 u. deutsch. Zusammenfassung 101 (1936) [Russisch].

If r denotes the number of Weierstrass points on an algebraic curve f of genus p, then according to Hurwitz $r \geqq 2p + 2$, and $r = 2p + 2$, only if f is hyperelliptic. In the present paper it is shown that if f is not hyperelliptic, then the stronger inequality holds: $r \geqq \frac{6(p-1)(p+1)}{3p-5}$. For $p = 3$ this yields $r \geqq 12$, and this inequality, as Hurwitz has shown, cannot be bettered. *O. Zariski* (Baltimore).

Wiman, A.: Über die Cayleysche Regelfläche dritten Grades. Math. Ann. 113, 161—198 (1936).

Die Cayleysche Regelfläche R_3 ist derjenige Grenzfall der allgemeinen Regelfläche 3. Grades, für welchen die beiden Leitlinien und die beiden Torsalen in einer einzigen „Hauptgeraden" $z = w = 0$ zusammenfallen. Ihre Gleichung kann auf die Gestalt

$$yw^2 - 3xzw + 2z^3 = 0 \tag{1}$$

gebracht werden. Sie ist zu sich selbst dual. Sie gestattet eine dreigliedrige projektive Gruppe Γ_3, welche auch die „Hauptebene" $w = 0$, sonst aber keine Fläche invariant läßt. Die Bahnkurven der eingliedrigen Untergruppen Γ_1 von Γ_3 sind in einem Fall Geraden einer speziellen linearen Kongruenz, in allen anderen Fällen kubische Raumkurven C_3, welche die Hauptgerade im „Hauptpunkt" $x = z = w = 0$ berühren und die Hauptebene dort schmiegen. Auf der Fläche liegen ∞^3 solche C_3, darunter die ∞^1 asymptotischen Kurven der Fläche. Es gibt einen eingliedrigen Normalteiler in Γ_3, der alle Erzeugenden der R_3 invariant läßt, und einen, der alle asymptotischen Kurven invariant läßt. Diese beiden erzeugen einen zweigliedrigen Normalteiler Γ_2, der alle Flächen des Büschels

$$yw^2 - 3xzw + 2z^3 - \lambda w^3 = 0 \tag{2}$$

invariant läßt. Außerdem gibt es ∞^1 Untergruppen Γ_2', welche je eine Erzeugende, und ∞^1 Untergruppen Γ_2'', welche je eine asymptotische Kurve invariant lassen. Eine Untergruppe Γ_2' läßt die Flächen eines Büschels von Cayleyschen R_3 invariant, während eine Untergruppe Γ_2'' ein Büschel von Flächen 6. Ordnung F_6, zu dem die doppelt gezählte R_3 gehört, invariant läßt. — Die Cayleysche R_3 läßt sich birational auf eine (t,u)-Ebene abbilden; die Erzeugenden gehen dabei in Geraden $t = c$ und die asymptotischen Kurven in Geraden $u = c$ über, während die Gruppe Γ_3 durch die Gruppe

$$t' = at + b, \quad u' = a^2 t + c$$

abgebildet wird. Die Flächen F_6 lassen sich ebenfalls auf Ebenen abbilden und ihre asymptotischen Kurven sind kubische Raumkurven C_3. — Es gibt ein Büschel von Geradenkomplexen 6. Ordnung, welche alle bei Γ_3 invariant bleiben. Das Büschel enthält einen dreifach gezählten quadratischen Komplex, der einen Grenzfall eines tetraedralen Komplexes darstellt, aus den Haupttangenten der Flächen des Büschels (2) besteht und eine fünfgliedrige projektive Gruppe Γ_5 gestattet. Bei einer zweigliedrigen Untergruppe $\Gamma_2^{(\nu)}$ von Γ_3 zerfällt jeder Komplex des Büschels in ∞^1 invariante Kongruenzen, welche je zwei Flächen des bei $\Gamma_2^{(\nu)}$ invarianten Flächenbüschels zu Brennflächen haben. Diese Kongruenzen werden ausführlich untersucht. Außerdem wird noch eine zu der R_3 analoge Regelfläche 4. Ordnung betrachtet, deren asymptotische Kurven ebenfalls C_3 sind. Für weitere Einzelheiten muß auf die reichhaltige Abhandlung verwiesen werden. *van der Waerden* (Leipzig).

Daníelsson, Ólafur: Über orientierbare und nicht orientierbare algebraische Flächen. Math. Ann. **113**, 83—94 (1936).

A special class of real rational surfaces is investigated as to orientability and as to the possibility of cutting out from the surface a Moebius strip. In the final statement it appears that the surfaces under consideration distribute into two classes, according as the mapping upon the plane possesses in the plane (1) only isolated fundamental points and no fundamental curves, or (2) only two fundamental points and as fundamental the line joining them. In the first case the surface is non-orientable and possesses Moebius strips, in the second case the surface is orientable. *O. Zariski.*

Waerden, B. L. van der: Zur algebraischen Geometrie. Berichtigung und Ergänzungen. Math. Ann. **113**, 36—39 (1936).

The Author clears up a few minor points scattered in his sequence of papers "Zur algebraischen Geometrie" (see this Zbl. **6**, 365; **7**, 74, 226, 421; **9**, 225, 226; **12**, 119), filling in some omitted proofs and correcting in one instance the original proof. These additions concern: 1. the behaviour of a prime ideal under a purely transcendental extension of the underlying field; 2. the expression of the coordinates of the intersection of an algebraic curve with the general hypersurface of a pencil as an algebraic function of the parameter of the pencil; 3. the Bertini theorem on the multiple points of the general curve of a linear system on an algebraic surface; 4. a dimensionality theorem in the theory of algebraic correspondences. *O. Zariski.*

Segre, B.: Sulle varietà di Veronese a due indici. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **23**, 391—397 (1936).

Zweiter und letzter Teil einer Untersuchung über Veronesesche Mannigfaltigkeiten (s. dies. Zbl. **14**, 227). Wichtig sind die Beziehungen zwischen den $\Pi^{(r)}$ und $\Pi^{(s)}$ eines Punktes P, wenn $r + s = n + 1$; erstens entsprechen sie sich in einer Homologie, welche P als Zentrum, die Polarhyperebene π von P in bezug auf $\Phi^{(1)}$ als Homologie-hyperebene und $-r:s$ als Charakteristik besitzt; zweitens erhält man $\Pi^{(r)}$ als Ort derjenigen Punkte von $\Phi^{(r)}$, deren Verbindungsgeraden mit P sich noch auf $\Phi^{(s)}$ (in einem Punkte) stützen. Diese zweite Eigenschaft führt zu folgenden Konstruktionen von $\Pi^{(r)}$: Wenn $r < s$, ist $\Pi^{(r)}$ die übrige Schnittmannigfaltigkeit von $\Phi^{(r)}$ mit dem Projektionskegel $P\Phi^{(s)}$; wenn $r = s$, ist $\Pi^{(r)}$ Ort der Punktepaare von $\Phi^{(r)}$, die mit P in gerader Linie liegen; wenn $r > s$ ist, kann man zunächst $\Pi^{(s)}$ konstruieren, um dann die Homologie anzuwenden, wovon oben die Rede war. Die so gewonnene Konstruktion von $\Pi^{(r)}$ gestattet, die Ordnung von $\Pi^{(r)}$ zu bestimmen; zu diesem Zweck wird hier als Anwendung einer anderen Untersuchung des Verf. (s. dies. Zbl. **13**, 416) und der Schubertschen Charakteristikentheorie für die Quadriken eines Raumes S_n ein allgemeines Verfahren angegeben; die praktische Ausführung der Rechnungen bietet aber große Schwierigkeiten und wird hier nur für $r = 2$, $s = n - 1$ wirklich ausgeführt. *E. G. Togliatti* (Genova).

Baker, H. F.: On the proof of a lemma enunciated by Severi. Proc. Cambridge Philos. Soc. **32**, 253—259 (1936).

Severi enunciated the following lemma: if an irreducible algebraic series of sets of s points of index r, on an algebraic curve enjoys the property that the sets of rs points which consist of the r sets of the series which contain a given point move in a linear series, then the sets of s points of the series itself move in a linear series. The Author discusses the connection between this lemma and a theorem on algebraic correspondences (s, r) between two curves C and D suggested by the author elsewhere. Let $\sum_{i=1}^{r} v_j(z_i) \equiv \sum_{k=1}^{p} M_{j,k}\, u_k(x)$, $j = 1, 2, \ldots, q$; $\sum_{i=1}^{s} u_j(x_i) \equiv \sum_{k=1}^{q} N_{j,k}\, v_k(z)$, $j = 1, 2, \ldots, p$, be the Hurwitz equivalences of the correspondence, where u_k and v_k are the Abelian integrals of the first kind attached to C and D respectively. It is well known that the matrices $M = (M_{j,k})$ and $N = (N_{j,k})$ have the same rank n. Among the p integrals Nv there are n independent ones, and on the other hand there exist exactly $q - n$ independent integrals v for which the sums $\sum_{i=1}^{r} v(z_i)$ are identically zero. The theorem suggested is to the effect that these last integrals are independent of the integrals Nv. From this theorem Severi's lemma would follow, while the lemma itself strongly suggests that the theorem is true. We are informed that since the paper was written, Hodge has shown the author a proof of the theorem. There is a good deal of evidence, however not conclusive, in support of the statement that the matrix MN is of rank n. The Author is well justified in his implicit criticism of Severi's proof of the lemma. There remains the proof given by Castelnuovo, which is based on an enumerative formula by Schubert and which is entirely rigorous. *O. Zariski.*

Lunell, Einar: Über eine Methode der abzählenden Geometrie. Ark. Mat. Astron. Fys. **25** A, Nr 19, 1—12 (1936).

Eine Betrachtung von Zeuthen über Korrespondenzen ohne Wertigkeit (Zeuthen, Abzählende Methoden, S. 220—222, Leipzig 1914) wird kritisiert. Zeuthen hat auf einer Regelfläche der Ordnung 16 und vom Geschlechte S, bestehend aus den Geraden, welche einen Kegelschnitt C_2, eine Gerade L und eine Kurve 4. Ordnung C_4 vom Geschlechte 1 schneiden, eine (1,1)-Korrespondenz betrachtet, welche keine Wertigkeit besitzt und behauptet, das läge daran, daß die Regelfläche nicht durch Erteilung von neuen Doppelgeraden rational gemacht werden könne, ohne zu zerfallen. Hier wird nachgewiesen, daß diese Erklärung irrig ist: Man kann die Lage der Kurven L, C_2, C_4 so spezialisieren, daß Doppelgeraden mit zwei sich berührenden Mänteln entstehen und dadurch die Regelfläche rational wird. Die Zeuthensche Herleitung der Cayley-Brillschen Koinzidenzformel wird damit hinfällig.

van der Waerden (Leipzig).

Differentialgeometrie:

Engel, Friedrich: Zur Theorie der Translationsflächen. Rend. Circ. mat. Palermo **59**, 165—184 (1935).

A surface of translation with respect to a given plane is defined as the projective transform of a surface of translation (in the ordinary sense) the plane at infinity being transformed into the given plane. The author considers the problem of finding surfaces of translation with respect to two planes having plane generating curves. The general problem was known to Lie but has not been solved. By an affine transformation a surface of translation may be put in the form $z = X + Y$, where X is a function of x alone and Y one of y alone; this surface is to be one of translation with respect to the plane $x = 0$ and $x = \text{const}$. This leads to a functional differential equation (20) containing X, Y and Y_1; two cases are considered, first $Y''' = 0$ and the possible solutions that go with it and secondly $Y_1 = cY''' : Y''^2$ with its solutions. It is then shown that these are the only solutions and the author obtains the equations of some of the translation surfaces and their generating curves. *M. S. Knebelman.*

Ortlepp, Waldemar: Eine Abwandlung des Problems der Minimal-Rotationsflächen. Dresden: Diss. 1935. 20 S. u. 3 Fig.

Given, in the XZ-plane, a curve $z = f(x)$, consider the surface with equations $X = x \cos t \cdot \exp(\sin t)$, $Y = x \sin t \cdot \exp(\sin t)$, $Z = f(x)$. The author discusses the problem of minimizing the area of this surface by proper choice of the function $f(x)$. The area is given by a double integral with integrand $x \exp(2 \sin t) \cdot [1 + f'(x)^2 a]^{1/2}$, where $a = (1 + \cos^2 t)/\exp(2 \sin t)$. The Euler-Lagrange equation is found to have the form $af'(x)^3 + f'(x) + xf''(x) = 0$. This equation is solved explicitly in terms of elementary functions. The conditions of Legendre and Weierstrass are also discussed, although not as completely as the analogy with the classical problem of the surface of revolution with minimum area would suggest. *Tibor Radó* (Columbus).

Tsuboko, Matsuji: On space curves whose tangents belong to a linear complex. Mem. Ryojun Coll. Engrg **9**, 41—48 (1936).

L'A. commence par étudier, au point de vue projectif-différentiel, une courbe plane L ayant un point O sextatique, c'est-à-dire telle que la conique L_2 osculatrice à L en O ait dans ce point un contact du 5-ème ordre avec L. Sur la droite L_1 tangente à L en O il considère d'abord le point H d'Halphen, pour lequel passent les ∞^1 cubiques ayant un contact du 7-ème ordre avec L en O. Parmi ces cubiques il y en a une, L_3, admettant H comme point d'inflexion, caractérisée par la propriété de couper la droite h polaire de H par rapport à L_2, en dehors du point O, suivant deux points conjugués par rapport à L_2. Cette droite h passe par O et est nommée la normale projective de L au point O; elle rencontre L_2 ultérieurement dans un certain point K. — Le voisinage du 8-ème ordre du point O sur L admet deux et seulement deux invariants infinitésimes, respectivement du 4-ème et du 2-ème ordre, qui peuvent être introduits comme les parties principales des birapports (KPP_1P_2) et (KPP_2P_3), où P indique un point de L proche à O et P_1, P_2, P_3 sont ordonnément les points suivant lesquels la droite KP coupe les lignes L_1, L_2, L_3 dans le voisinage de O. — Tous ces résultats sont utilisés ensuite pour l'étude des courbes gauches dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire de droites, en tenant compte du fait que la surface développable formée par les tangentes à une telle courbe, Γ, coupe le plan osculateur à Γ dans un point O le long de la droite tangente à Γ dans ce point, et ultérieurement suivant une courbe ayant O comme point sextatique. Les éléments géométriques qu'on obtient aisément de la sorte, sont aussi mis en relation avec la quadrique osculatrice à Γ au point O et d'autres éléments connus. *Beniamino Segre* (Bologna).

Hayden, H. A.: Infinitesimal deformations of an L_m in an L_n. Proc. London Math. Soc., II. s. **41**, 332—336 (1936).

Der Verf. hat in einer früheren Arbeit [Proc. London Math. Soc., II. s. **37**, 416—440