Werk

Titel: Analysis (spezielle Differential- und Integralgleichungen s. a. Mechanik usw. bzw...

Jahr: 1936

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0014|log49

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

only the simplest and actually obvious properties of sets of measure zero. The definition of the Lebesgue integral is as follows: A non-negative function $f(x)$ is integrable in (a, b) if there exists an increasing function $F(x)$ such that (*) $F'(x) = f(x)$ almost everywhere in (a, b). Then the lower limit of the differences $F(b) - F(a)$ where $F(x)$ is an arbitrary increasing function subject to the condition (*) is the definite integral of $f(x)$ over (a, b). The paper contains the theorems: on term by term integration of sequences of functions, on integration by parts and on integration by substitution. Incidentally there is given also a simple proof of the well-known inequality $\int_a^b f^\alpha g^\beta \, dx \leqq \left(\int_a^b f \, dx\right)^\alpha \left(\int_a^b g \, dx\right)^\beta$ $(\alpha + \beta = 1,\ \alpha > 0,\ \beta > 0)$.

Saks (Warszawa).

Fréchet, Maurice: Sur quelques définitions possibles de l'intégrale de Stieltjes. Duke math. J. **2**, 383—395 (1936).

In the first part of the paper the author discusses various definitions of the Stieltjes-Riemann integral (*) $\int_a^b F(x) \, d\, C(x)$ where $F(x)$ and $C(x)$ are both monotonic functions in a finite interval (a, b). Thus: (I) $F(x)$ is said to be integrable with respect to $C(x)$ over (a, b) if the sums $\sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i) \cdot [C(x_{i+1}) - C(x_i)]$, where $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ and $x_i \leqq \xi_i < x_{i+1}$, tend to a definite limit as $\max(x_{i+1} - x_i) \to 0$; this limit is denoted as the integral (*). (II) The upper bound of the sums $\sum_i f(x_{i-1})[C(x_i) - C(x_{i-1})]$ and the lower bound of the sums $\sum_i f(x_i)[C(x_i) - C(x_{i-1})]$ are respectively termed the upper and the lower integrals of $F(x)$ with respect to $C(x)$ on (a, b); the function $F(x)$ is called integrable with respect to $C(x)$ on (a, b) if these two integrals are equal, their common value being then denoted by (*) (definition of Glivenko). — The author proves: In order that the integral (*) exist in the sense (I) it is necessary and sufficient that the functions $F(x)$ and $C(x)$ have no point of discontinuity in common. In order that the integral (*) exist in the sense (II) it is necessary and sufficient that on each side of every point x in (a, b) one at least of the functions $F(x)$ and $C(x)$ be continuous. There is discussed the formula on integration by parts corresponding to both definitions. — The second part of the paper is devoted to the integration over the infinite interval $(-\infty, +\infty)$.

Saks (Warszawa).

Analysis.

Sehenker, Otto: Geometrische Betrachtungen zum arithmetischen und geometrischen Mittel. Tôhoku Math. J. **42**, 185—189 (1936).

Ausführliche Auseinandersetzung eines Induktionsbeweises für die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Pfeiffer, G.: Du domaine de la théorie des déterminants de Jacobi. Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. math. **1**, 7—15 u. franz. Zusammenfassung 15 (1935) [Ukrainisch].

Consider the following system of q functions y_i depending on q independent variables ξ_j:

$$y_i = \frac{A_i/\xi_1 + \cdots + A_{i,q-1}\xi_{q-1} + A_{i,0}\xi_0}{A_0/\xi_1 + \cdots + A_{0,q-1}\xi_{q-1} + A_0\xi_0} \equiv \frac{\theta_i}{\theta_0} \equiv \frac{\theta_i/\xi_0}{\theta_0/\xi_0} \equiv \frac{u_i}{u_0}. \quad (i = 1, 2, \ldots, q)$$

Assume that the A's depend on a parameter ε, but not on the ξ's. Let

$$\eta_i = \frac{\xi_i}{\xi_0} \ (i = 1, 2, \ldots, q-1), \quad Y_1 = \frac{D(y_1, \ldots, y_q)}{D(\eta_1, \ldots, \eta_{q-1}, \varepsilon)}, \quad G_1 = \frac{D(\theta_1, \ldots, \theta_q, \theta_0)}{D(\xi_1, \ldots, \xi_q, \xi_0)}.$$

The author shows that $G_1 = (-1)\, u_0^{q+1}\, \xi_0 Y_1$, so that the relations $Y_1 \neq 0$, $G_1 \neq 0$

are equivalent, if $u_0 \neq 0$. We obtain similar results, if we introduce into the A's several parameters $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ *J. Shohat* (Philadelphia).

Pfeiffer, G.: Sur un changement des variables. Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. math. **1**, 16—25 u. franz. Zusammenfassung 25 (1935) [Ukrainisch].

Consider the arbitrary function Φ of its arguments

$$\Phi\left(z_\lambda, x_\mu, p_{\sigma\tau}, \frac{D(z_{p_1}, \ldots, z_{p_\varepsilon})}{D(x_{j_1}, \ldots, x_{j_\varepsilon})}\right) \quad \left(\sigma, \lambda = 1, 2, \ldots, \varkappa;\ \tau, \mu = 1, 2, \ldots, n;\ p_{\sigma\tau} = \frac{\partial z_\sigma}{\partial x_\tau}\right),$$

where the z's are functions of the x's. Take $z_{\sigma_1}, \ldots, z_{\sigma_\pi}$ for new independent variables and $x_{\tau_1}, \ldots, x_{\tau_\pi}$ for new functions ($\pi \leqq \varkappa$, $\pi \leqq n$). By introducing arbitrary functions, the author derives relations involving the new and old first derivatives and Jacobians, so that the new ones can be found. *J. Shohat* (Philadelphia).

● **Murri, Carlo Alfredo: Sull'integral seno.** Loano: Tipogr. Loanese 1935. 19 pag.

The author gives an elementary presentation of various methods for evaluating the definite integral

$$S(a) = \int_0^a \frac{\operatorname{Sin} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \int_a^\infty \frac{\operatorname{Sin} x}{x}\, dx$$

(use of asymptotic expansions, of the Fourier expansion for $\frac{\operatorname{Sin} x}{x}$, etc.), also elementary relations involving $S(a)$, $S(2a), \ldots$ He closes with the interpolation formula

$$y(x) \backsim \sum_{r=0}^{n} \frac{h}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{h}(x - rh)}{x - rh}\, y_r. \qquad (y_r \equiv y(rh))$$

(Numerous misprints. In places lack of rigor and preciseness; thus, practically no discussion of the degree of convergence of the approximate formulae employed. Ref.) *J. Shohat* (Philadelphia).

Corput, J. G. van der: Verteilungsfunktionen. VIII. Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **39**, 579—590 (1936).

In dieser letzten Mitteilung wird ein in IV. vorkommender Satz benutzt, um Satz 13 aus der Einleitung zu beweisen. Für I.—VII. s. dieselben Proc. **38** (1935); **39** (1936) und dies. Zbl. **12**, 347; **13**, 57, 160, 203; **14**, 11. *J. F. Koksma* (Amsterdam).

Leighton, Walter, and H. S. Wall: On the transformation and convergence of continued fractions. Amer. J. Math. **58**, 267—281 (1936).

In order to investigate the convergence of an infinite continued fraction $\xi \equiv y_0 + \frac{x_1|}{|y_1} + \frac{x_2|}{|y_2} + \cdots$ $(x_n \neq 0)$, the authors consider the "transformed" continued fraction $\eta \equiv b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots \equiv T_\xi$ $(a_n \neq 0)$ i. e., A_n/B_n and X_n/Y_n denoting the n-th convergents for η and ξ resp., then, with properly chosen α_n, β_n,

$$D_0 A_n = \alpha_n X_n + \beta_n X_{n+1}, \quad D_0 B_n = \alpha_n Y_n + \beta_n Y_{n+1} \quad (D_0 \neq 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(special case: "equivalent" transformation). They first establish conditions under which the convergence of η implies that of ξ (also, when $\lim \xi = \lim \eta$). Then, applying to various η known criteria of convergence, the authors obtain new such criteria for ξ, also properties of the sum-function for continued fractions with variable elements. Illustrations. I°. $y_0 + \frac{1|}{|y_1} + \frac{1|}{|y_2} + \cdots$ converges, if $0 < \left|\frac{1}{y_{2n} y_{2n+1}}\right| \leqq \frac{1}{4}$, $\left|\frac{1}{y_{2n-1} y_{2n}}\right| \geqq \frac{25}{4}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. 2°. If $h_1, h_2, \ldots \neq 0$ and $\lim_{n=\infty} h_{2n} h_{2n+2\varkappa-1} = 0$, $\lim_{n=\infty} h_{2n} h_{2n+2\varkappa+1} = \infty$ for some integer $k \geqq 0$, then, given in the complex z-plane any finite region R at a minimum positive distance from O, there exists a positive integer $N = N(R)$ such that $h_{2n} + \frac{z|}{|h_{2n+1}} + \frac{z|}{|h_{2n+1}} + \cdots$ $(n \geqq N)$ converges uniformly in R. *J. Shohat* (Philadelphia).

Achyeser, N. A., et M. Krein: Sur deux questions de minima qui se rattachent au problème des moments. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **1**, 343—346 (1936).

The authors establish necessary and sufficient conditions for the existence of a function $f(x)$, with a finite number of discontinuities of the first kind in $(-1, 1)$, having preassigned $n+1$ first moments $s_\varkappa = \int_{-1}^{1} f(x)\, x^\varkappa\, dx$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots, n)$, and such that $-(1-\theta)\, L \leqq f(x) \leqq (1+\theta)\, L$, with given $L(>0)$ and θ. The method is similar to that previously employed for the case $\theta = 0$ (this Zbl. **10**, 351; **13**, 109). They further discuss the range of possible values of L for a given θ (with $|\theta| < 1$); they also give the solution of the following minimum-problem: find $\min. \left\{ \int_{-1}^{1} |p_n(x)|\, dx + \theta \int_{-1}^{1} p_n(x)\, dx \right\}$ for all polynomials $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ with $\sum_{i=0}^{n} a_i s_i = 1$. Similar results are given for the corresponding trigonometric moments-problem: $\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, e^{-i\varkappa\varphi}\, d\varphi =$ given $c_\varkappa = a_\varkappa - i b_\varkappa$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots, n)$, $f(\varphi)$ as described above.

J. Shohat (Philadelphia).

Popoviciu, Tibère: Sur un problème de maximum de Stieltjes. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 1645—1647 (1936).

The author considers the expression

$$D \equiv D(x_1, \ldots x_n;\, f) = f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_n) \cdot \prod_{i,j=1;\, i>j}^{n} (x_i - x_j)^2.$$

Here the points x_i are distributed on a set E formed by m closed intervals (a_i, b_i) $(i = 1, 2, \ldots, m;\, a_i < b_i \leqq a_{i+1})$, the distribution being arbitrary in the sense that in (a_i, b_i) lies a certain number k_i $(0 \leqq k_i \leqq n)$ of points. The real function $f(x)$, defined on E, is subject therein to certain conditions [continuity at a_i, b_i, non-negativeness inside (a_i, b_i), $f(a_i) = f(b_i) = 0, \ldots$]. The main result of this Note can be stated as follows: D attains its maximum for a unique distribution $x_i = \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (distinct, none coinciding with a_i, b_i), and the correspondence between $f(x)$ and the maximal distribution $\{\xi_i\}$ is continuous. — Some special $f(x)$ $(= 1, e^{-x^2}, 1 - x^2, \ldots)$, considered by Stieltjes, yield extremal properties of the zeros of the classical orthogonal polynomials.

J. Shohat (Philadelphia).

Geronimus, J.: On a supposition of Stieltjes. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. **13**, 55—61 (1936).

Let $\{P_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ be an orthonormal system of Tchebycheff polynomials in $(-1, 1)$, with the weight-function

$$p(x) \geqq 0 \quad \left(\int_{-1}^{1} p(x) P_n(x) P_m(x)\, dx = \delta_{mn};\; m, n = 0, 1, \ldots \right).$$

What can be said of the polynomial $E_{n+1}(x)$, of degree $n+1$, obtained from the Tchebycheff function $Q_n(x)$ of the second kind by means of the relation

$$\frac{1}{Q_n(y)} = E_{n+1}(y) + \frac{\alpha}{y} + \cdots \equiv E_{n+1}(y) + \left(\frac{1}{y}\right) \quad \left(\alpha, \cdots - \text{const};\; Q_n(y) = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{y - x} p(x)\, dx \right)?$$

For $p(x) \equiv 1$ Stieltjes stated and Szegö recently proved [this Zbl. **10**, 202 (1935)] that the zeros of $E_{n+1}(x)$ all lie inside $(-1, 1)$ and are separated by those of the Legendre polynomial $X_n(x)$. The present paper shows this result to hold, for $n \geqq 2\nu - 1$, if $p(x)$ is of the type $\frac{\sqrt{1-x^2}}{|q(z)|^2}$ $\left(z = x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, where $q(z)$ is a polynomial of degree 2ν, with real coefficients, which does not vanish for $|z| = 1$. The proof follows directly from the following interesting fact. The sequence $\{E_{n+1}(x)\}$ forms an orthogonal system $\left(\text{with } p_1(x) = \frac{p(x)}{1 - x^2}\right)$, if and only if $p(x)$ is of the type

indicated $\left(\text{we assume here the existence of } L - \int_{-1}^{1} \frac{\log p(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. The latter conclusion is based upon the properties (Bernstein, Geronimus) of the polynomial $S_n(y) = \frac{1}{Q_n(y)\sqrt{y^2-1}} + \left(\frac{1}{y}\right)$, which is related to $E_{n+1}(y)$ as follows:

$$E_{n+1}(y) - \sqrt{y^2-1}\, S_n(y) = \text{const} + \left(\frac{1}{y}\right).$$

J. Shohat.

Geronimus, J.: On some quadrature formulas and on allied theorems on trigonometric polynomials. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 129—135 (1936).

The author makes use of Achyeser-Krein theorem concerning the existence of functions deviating the least from zero and having a preassigned "Abschnitt" of their Fourier expansion. The following result is established. Given the function $F(\theta) = \sum_{\varkappa=n-\varrho}^{\infty}(A_\varkappa \cos\varkappa\theta + B_\varkappa \sin\varkappa\theta)$. We can find numbers $(0 \leqq)\ \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{2m} (< 2\pi)$ $(m \leqq n)$ and a constant $L(>0)$ such that for any trigonometric polynomial $G(\theta)$, of order $\leqq n$,

$$\int_0^{2\pi} F(\theta)\, G(\theta)\, d\theta = L\left\{\sum_{i=1}^{m} G(\theta_{2i-1}) - G(\theta_{2i})\right\}. \quad \left(\varrho \leqq \frac{n-1}{2}\right) \tag{1}$$

The θ_i are the zeros of a certain trigonometric polynomial, and L must satisfy a certain stated inequality. The author further applies (1) in order to obtain the minimum, actually attained, of $\int_0^{2\pi} |G(\theta)|\, d\theta$ for any

$$G(\theta) = \alpha_n + \sum_{\varkappa=0}^{n-1} \{\alpha_\varkappa \cos(n-\varkappa)\theta + \beta_\varkappa \sin(n-\varkappa)\theta\},$$

such that

$$\omega(G) \equiv \sum_{\varkappa=0}^{\varrho} (\alpha_\varkappa a_{n-\varkappa} + \beta_\varkappa b_{n-\varkappa}) = 1 \quad \left(\varrho \leqq \frac{n-1}{2}\right).$$

J. Shohat (Philadelphia).

Gontcharoff, W.: Sur les formules d'interpolation de Lagrange et de Newton. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. **13**, 41—52 (1936).

The chief results are as follows. Let the points of interpolation a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ be positive and increase monotonically to ∞, subject naturally to the condition $\sum_1^\infty 1/a_n < \infty$; then, if the method of Lagrange converges, that of Newton does also and to the same limit. Let the a_n be arbitrary (real or complex) save for the restriction $\sum_1^\infty 1/|a_n| < \infty$; in order that convergence of the Lagrange method shall imply convergence of the Newton method it is n. and s. that sequence $\{S_n\}$ be bounded, where

$$S_n = \sum_{m=1}^{n-1} |\varphi_n(a_m) - \varphi_n(a_{m+1})| + |\varphi_n(a_n)|, \qquad \varphi_n(x) = \prod_{m=n+1}^{\infty} (1 - x/a_m).$$

The Newton method may converge, however, when that of Lagrange does not.

C. R. Adams (Providence).

Remes, Eugène: Sur une propriété extrémale des polynomes de Tchebychef. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. **13**, 93—95 (1936).

The paper gives an interesting generalization of a known result of Tchebycheff concerning polynomials deviating the least from zero. — Given a closed interval $S: \langle a, b\rangle$ of length l, and positive numbers $\lambda = \theta l$, $\varkappa (0 < \theta < 1)$. Consider all polynomials $P_n(x)$, of degree $\leqq n$, such that $\max. |P_n(x)| \leqq \varkappa$, x belonging to an arbitrary set $E \subset S$,

meas. $E \geqq \lambda$. Then $\max_{a \leqq x \leqq b} |P_n(x)| \leqq M \equiv \varkappa T_n\left(\frac{2}{\theta} - 1\right)$ (T_n = trigonometric polynomial of degree n), equality attained if and only if

$$P_{n,\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \pm \varkappa T_n\left(\frac{2x - a - (a+\lambda)}{\lambda}\right), & E \equiv \langle a, \quad a + \lambda \rangle \\ \pm \varkappa T_n\left(\frac{2x - b - (b-\lambda)}{\lambda}\right), & E \equiv \langle b - \lambda, \quad b \rangle . \end{cases}$$

The proof is based upon the study of the points ξ where $|P_n(\xi)| = \max_{a \leqq x \leqq b} |P_n(x)|$ and the representation of $P_{n,\frac{1}{2}}(x)$ and $P_n(x)$ by means of Lagrange interpolation formula.

J. Shohat (Philadelphia).

Abramesco, N.: Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynome et applications à la détermination des courbes de convergence de certaines séries de polynomes. (*2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.*) Mathematica, Cluj **9**, 321—327 (1935).

The author gives an elementary discussion of an expansion of the form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n z + B_n)\,[(z-a)(z-b)]^n, \qquad (A_n, B_n \text{ const}) \tag{1}$$

which is a special case of the more general one:

$$f(z) \sim \sum_{i=0}^{\infty} (U_{i,0} + U_{i,1} z + \cdots + U_{i,p-1} z^{p-1}) \frac{P^i(z)}{i!}, \qquad (U_{i,j} \text{ const}) \tag{2}$$

where $P(z)$ is a given polynomial of degree p, with zeros $a_1, a_2, \ldots, a_p$. [We have: $f(z) = Q(z) + P(z) f_1(z)$, $f_1(z) = Q_1(z) + P(z) f_2(z) \ldots$, where $Q(z), Q_1(z), \ldots$ are polynomials of degree $\leqq p-1$, coinciding in value with $f(z), f_1(z), \ldots$, resp. at $z = a_1, a_2, \ldots, a_p$, and (2) follows.] An algorithm is given for determining the $U_{i,j}$ which, applied to (1), yields:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\alpha_n z + \beta_n)\,[(z-a)(z-b)]^n, \tag{3}$$

$$\begin{matrix}\alpha_n \\ \beta_n\end{matrix} = \frac{\partial^n \begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}}{\partial l^n}, \quad \alpha = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}, \quad \beta = \frac{a f(b) - b f(a)}{a - b}, \quad l = ab.$$

First, investigate the validity of (1) for $f(z) \equiv \frac{1}{u - z}$; then, assuming $f(z)$ holomorphic, use Cauchy integral formula and get contour-integral representations for A_n, B_n. We thus find that if $f(z)$ is holomorphic in a certain domain D, then (1) is valid in the interior of the largest region which is bounded by a curve of the form $|z-a|\,|z-b| = R$, lying inside D. (1) may be considered as a generalization of Taylor series (let $a = -b$, then $b = 0$). The paper closes with a brief discussion of the region of convergence of the series (1), where the A_n, B_n are given, by representing it as the sum

$$z \sum_{n=0}^{\infty} A_n [z-a)(z-b)]^n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n [(z-a)(z-b)]^n.$$

J. Shohat.

Mindlin, J. A.: On the expansion of any function into a series of Schlömilch. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **1**, 151—153 (1936).

(Cf. Idem, this Zbl. **10**, 15—16.) Let $f(x)$, with a continuous derivative of bounded variation in the closed interval $(0, \pi)$, satisfy the condition $\lim_{x \to 0} f(x)\, x^{-n} = A$ (finite) for an arbitrarily given $n > 0$. The author derives the following expansion in $(0, \pi)$:

$$f(x) = \frac{a_1^{(n+r)}}{(\frac{1}{2}x)^r} J_{n+r}(x) + \frac{a_2^{(n+r)}}{(\frac{1}{2} \cdot 2x)^r} J_{n+r}(2x) + \cdots \qquad (-\tfrac{1}{2} < r < \tfrac{1}{2}) \tag{1}$$

($J_n(x)$ — Bessel functions of order 0), where the a's are explicitly given (in form of definite integrals involving the hypergeometric functions $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ and the Gegen-

bauer-Jacobi polynomials $C_n^{\alpha,\beta}(x)$). The proof (but briefly sketched) is based upon the use of the following integral equation in $\varphi(x)$:

$$f(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+r+\frac{1}{2})}\int_0^\pi \varphi(x\cos\xi)\sin^{2r}\xi\, C_n^{(r-\frac{1}{2},r-\frac{1}{2})}(\cos\xi)\,d\xi, \tag{2}$$

among the solutions of which there exists one with the following properties:

$$\Phi(\mu) = \Phi_n(\mu) + \mathfrak{R}(\mu) + Q_{n-1}(\mu), \quad \Phi_n(\mu) \equiv (-1)^n \Phi_n(-\mu),$$

$Q_{n-1}(\mu)$ = arbitrary polynomial of degree $n-1$, $\mathfrak{R}(\mu)$ = arbitrary function with $\mathfrak{R}(-\mu) \equiv (-1)^{n-1}\mathfrak{R}(\mu)$. The expansion (1) is now obtained by combining (2) with the Fourier series for $\Phi_n(\mu)$. Special consideration is given to the case $r = \frac{1}{2}$, where Legendre polynomials enter into play. *J. Shohat* (Philadelphia).

Danilevskij, A., et M. Krein: Sur les développements bilinéaires des noyaux symétriques, positifs au sens de Mercer. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **1**, 315—318 (1936).

Let $\{\varphi_i(x)\}$ be a complete orthonormal system of characteristic functions of the continuous, symmetric, and positive kernel $k(x, s)$, the corresponding characteristic values being denoted by $\{\lambda_i\}$. The authors prove the elegant theorem that if the kernel admits of a development of the form $k(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x)\,\psi_i(s)$, then the functions $\psi_i(x)$ are continuous and $\psi_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}$, where the matrix $\|a_{ik}\|$ is orthogonal by columns. Conversely, any such matrix gives an absolutely and uniformly convergent development of the kernel. Further, if the kernel has continuous partial derivatives $k_{pq}(x, s)$ $(p, q = 1, 2, \ldots, n)$ then the functions $\psi_i(x)$ have at least n continuous derivatives, and $k_{pq}(x, s)$ is represented by the series obtained by formal termwise differentiation, the resulting series being absolutely and uniformly convergent in the interior of the fundamental domain. In particular, if $k(x, s)$ is analytic in x and s, the functions $\psi_i(x)$ must be analytic. *E. Hille* (New Haven, Conn.).

Morgan, G. W.: On the convergence of transform integrals. Proc. London Math. Soc., II. s. **41**, 199—208 (1936).

Die Arbeit hat den Zweck, die „Fouriersche Darstellungsformel"

$$\int_0^{+\infty} K(xu)\int_0^{+\infty} K(ut)\,f(t)\,dt\,du = f(x), \tag{*}$$

wobei K ein Fourierscher Kern im Sinne von Watson ist (dies. Zbl. **7**, 64), unter geeigneten Voraussetzungen bezüglich K und der darzustellenden Funktion $f(x)$ zu beweisen. Bezüglich K wird vorausgesetzt, daß $K(x)$ und die beiden ersten primitiven Funktionen von $K(x)$ beschränkt in $(0, +\infty)$ sind. Bezüglich f sei angenommen, daß $f(x)$ für alle $x > 0$ der Integralmittelwert für $0 < y < x$ einer Funktion $\varphi(y)$ ist und daß $\varphi(y)$ und $\varphi(y)/\sqrt{y}$ in dem Intervall $0 < y < +\infty$ im Lebesgueschen Sinne integrierbar sind. Dann gilt (*) für alle $x > 0$, vorausgesetzt daß in (*) beide Integrale nicht im Lebesgueschen Sinne sondern sowohl im Nullpunkt als auch im Unendlichen als uneigentliche Integrale verstanden werden. Der Beweis verläuft nach dem Muster der Hardy-Titchmarshschen Methode (dies. Zbl. **7**, 63) und benutzt ein dem Verf. von Hardy mitgeteiltes Lemma. Es wird sodann gezeigt, daß, wenn für K die obigen Annahmen erfüllt sind und $|f|$ integrierbar und f von beschränkter Schwankung und stetig in $(0, +\infty)$ ist, die Darstellungsformel für alle $x > 0$ auch dann gilt, wenn der Teil $\int_0$ des äußeren Integrals sowie das innere Integral als Lebesguesche Integrale betrachtet werden. Der Beweis beruht auf von Rademacher und dann von Kaczmarz [Studia Math. **1**, 87—121 (1929)] entwickelten Methoden. *Wintner.*

Doetsch, Gustav: Zerlegung einer Funktion in Gausssche Fehlerkurven und zeitliche Zurückverfolgung eines Temperaturzustandes. Math. Z. **41**, 283—318 (1936).

Es handelt sich im wesentlichen um die Auflösung der Funktionalgleichung

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4t}(x-\xi)^2} \, d\Psi(\xi)$$

und die statistische oder wärmetheoretische Deutung der Resultate. — Erstens wird gefragt nach einer totalstetigen Lösung $\Psi(\xi)$ mit $\Psi'(\xi) = \Phi(\xi) \in L_2(-\infty, \infty)$. Es sei $T[f]$ die Fourier-Transformierte der Funktion f. Notwendig und hinreichend mit $\Phi(\xi) \in L_2$ ist, daß $F \in L_2$ und $\varphi(y) = e^{ty^2} T[F] \in L_2$, woraus folgt $\Phi(\xi) = T^{-1}[\varphi]$ nach dem Satz von Plancherel. Die Gauß-Transformation $F = \mathfrak{G}_{(t)}[\Phi]$ ist im metrischen Raume L_2 stetig und konvergenzverstärkend, da $\|\mathfrak{G}_{(t)}[\Phi]\| \leqq \|\Phi\|$; die Umkehrung ist dagegen überall unstetig, was z. B. für die Wärmeleitungstheorie wichtig ist. Verf. zeigt, daß $e^{ixy} = e^{ty^2} \mathfrak{G}_{(t)}[e^{i\xi y}]$ und daß x eine absolute Invariante ist, und zwar sind diese Invarianten die einzigen, die $O(|x|^{\mu})$ bei $|x| \to \infty$ sind. Ferner wird die Umkehrformel von Tricomi (dies. Zbl. **13**, 258) für die zweiseitige Laplace-Transformation $g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sz} G(z) \, dz$ behandelt und notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Lösung $G(z)$ mit $e^{z^2/2} G(z) \in L_2(-\infty, \infty)$ werden bestimmt. — Es sei jetzt $\Psi(\xi)$ nur von beschränkter Schwankung für $-\infty \leqq \xi \leqq \infty$ und $g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} \, dG(x) \equiv \mathfrak{B}[G]$. Damit eine monoton wachsende Lösung existiere ist notwendig und hinreichend, daß $F(x)$ in $[-\infty, \infty]$ von beschränkter Schwankung ist und $\frac{i}{y} e^{ty^2} \mathfrak{B}[F]$ positiv definit ausfällt. — Schließlich wird nach der Möglichkeit einer Zerlegung einer statistischen Funktion $F(x)$ in endlich viele Fehlerkurven gefragt, d. h. nach der Auflösung von

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sigma_i} e^{-\frac{(x-x_i)^2}{2\sigma_i^2}}$$

(n, a_i, x_i, σ_i Unbekannte) und einige anscheinend praktisch durchführbare Methoden dazu werden entwickelt. — Die Methode und die Lösbarkeitsbedingungen im Falle $\Phi(\xi) \in L_2$ sind wohl kaum als neu zu bezeichnen, aber die sich daran knüpfenden Bemerkungen bieten vieles von Interesse. Zu dem ausführlichen Literaturverzeichnis wären noch einige Arbeiten des Ref. hinzuzufügen: Ann. of Math., II. s. **27**, 427—464 (1926) [s. auch Math. Z. **32**, 422—425 (1930)] für Umkehrformeln, und Trans. Amer. Math. Soc. **39**, 131—153 (1936) (dies. Zbl. **13**, 259) für metrische Eigenschaften und absolute Invarianten der Gauß-Transformation. *E. Hille* (New Haven, Conn.).

Humbert, P.: Some new operational representations. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. **4**, 232—237 (1936).

When $f(p) = p \int_0^{\infty} e^{-px} h(x) \, dx$ $f(p)$ is termed the symbolic or operational image of $h(x)$ and the relationship between $f(p)$ and $h(x)$ is indicated by the symbol $f(p) \doteqdot h(x)$. The present paper proves, amongst others, the following results:

$$ci(p) \sin p - si(p) \cos p \doteqdot \tan^{-1} x \tag{1}$$

where

$$\int_p^{\infty} \frac{\cos t}{t} \, dt = ci(p); \quad \int_p^{\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt = si(p),$$

$$2^k p (p^2+1)^{(k-1)/2} \{\sqrt{p^2+1} - p\}^n \doteqdot J_{n,k}(x), \tag{2}$$

where $J_{n,k}(x)$ denotes the generalized Bessel function

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (2\cos\theta)^k \cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta \quad (\text{so that} \quad J_{n,0}(x) = J_n(x)),$$

$$\frac{\partial J_{n,k}(x)}{\partial k} = J_{n,k}(x)\log 2 - \int_0^x ci(x-y)\frac{\partial J_{n,k}(y)}{\partial y}\,dy. \tag{3}$$

Murnaghan (Baltimore).

Reihen:

Verblunsky, S.: On the Fourier constants of a bounded function. Proc. Cambridge Philos. Soc. **32**, 201—211 (1936).

The paper is devoted to the solution of the following problem: Given $k+1$ real constants $c_0, c_1, \ldots c_k$, to find a necessary and sufficient condition that there shall exist a function $f(x)$, such that (*) $|f(x)| < 1$, and that (**) $\int_0^\pi f(x)\cos\nu x\,dx = c_\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots, k)$. It turns out that there exists a sequence of polynomials $p_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ with integer coefficients and the following property: In order that $c_0, c_1, \ldots c_k$ shall satisfy (*) and (**), it is necessary and sufficient that $|c_0| < \pi$ and that

$$p_n\left(\cos\frac{c_0}{4}, \sin\frac{c_0}{4}, c_1, \ldots, c_n\right) > 0, \quad p_n\left(\cos\frac{c_0}{4}, -\sin\frac{c_0}{4}, -c_1, \ldots, -c_n\right) > 0. \quad (n = 1, 2, \ldots, k)$$

It will be observed that c_0 is the only coefficient which occurs transcendentally. The polynomials p_n are given as determinants. The paper is a continuation of another paper (Proc. Cambridge Philos. Soc. **32**, 30—39, this Zbl. **14**, 153), dealing with a similar problem for moments. It may be added that by change of variable the latter problem reduces to a problem analogous to (*) (**), the cosines being replaced by sines.

A. Zygmund (Wilno).

Hardy, G. H., and J. E. Littlewood: Some more theorems concerning Fourier series and Fourier power series. Duke math. J. **2**, 354—382 (1936).

The following result, which is, in a sense, a theorem on "strong summability", constitutes the principal result of the paper. Let $u(\theta)$ be an L-integrable function of period 2π, and let $s_n(\theta)$ be the partial sums of the Fourier series of $u(\theta)$. If, for a given s, we put $\varphi(x, t) = u(x+t) + u(x-t) - 2s$, and if $k \geqq p > 1$, then

$$\left\{\sum_{n=1}^\infty \frac{|s_n(x) - s|^k}{n}\right\}^{1/k} \leqq K\left(\int_0^\pi \frac{|\varphi(x,\theta)|^p}{\theta}\,d\theta\right)^{1/p},$$

where K depends on k and p only. The theorem is false for $p = 1$, but it holds if the Fourier series of $u(\theta)$ is a power series in $e^{i\theta}$. Corresponding results are established for Fourier transforms. The proof of the main theorem is based on a series of propositions interesting in themselves. For example: (a) If $p > 1$, $u(\theta)$ is periodic and even, $\theta^{-1}|u(\theta)|^p$ is integrable, and $v(\theta)$ is the function conjugate to $u(\theta)$, then $\int_0^\pi \frac{|v(\theta)|^p}{\theta}\,d\theta \leqq K\int_0^\pi \frac{|u(\theta)|^p}{\theta}\,d\theta$, where K depends only on θ. (b) If $1 \leqq p \leqq k < \infty$, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ is analytic for $|z| < 1$, and the expression $\int_{-\pi}^\pi |f(re^{i\theta})|^p |1 - re^{i\theta}|^{p-1}\,d\theta$ is bounded for $r < 1$, then $\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{|c_n|^k}{n}\right)^{1/k} \leqq K\left(\int_{-\pi}^\pi |F(\theta)|^p |\theta|^{p-1}\,d\theta\right)^{1/p}$, where $K = K(k, p)$, and $F(\theta) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ (it is shown that $F(\theta)$ exists for almost all θ).

A. Zygmund (Wilno).

Marcinkiewicz, J.: Sur les séries de Fourier. Fundam. Math. **27**, 38—69 (1936).

The paper contains a number of important contributions to the theory of Fourier series. For example: (a) Completing Kolmogoroff's well-known theorem [Fundam. Math. **4**, 324—328 (1923)] the author shows that there is an L-integrable function $f(x)$, whose Fourier series $\mathfrak{S}[f]$ oscillates finitely almost everywhere. (b) For every function $\omega(t)$ satisfying the condition $\omega(t)\log\frac{1}{t}\to\infty$ as $t\to 0$, there exists a periodic $f\in L$ such that $\mathfrak{S}[f]$ diverges almost everywhere, although $h^{-1}\int_0^h|f(x+t)-f(x)|\,dx=O(\omega(h))$. (It was previously shown by the author [this Zbl. **12**, 401] that, if

$$h^{-1}\int_0^h|f(x+t)-f(x)|\,dx=O\left(\frac{1}{\log 1/|h|}\right),$$

then $\mathfrak{S}[f]$ converges almost everywhere.) (c) There exists an f integrable in the general Denjoy sense, such that $\mathfrak{S}[f]$ is not summable by Abel's method in a set of positive measure. (d) If f is integrable in the general Denjoy sense, then, for almost every x, a necessary and sufficient condition for the existence of the integral

$$\int_0^\pi\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\pi$$

is the differentiability of the integral of $f(x)$. (e) If, for x belonging to a set E of positive measure, the function $f(x)$ has a k-th de la Vallée Poussin derivative, then the Fourier series of f, differentiated term by term k times, is summable (C, k) almost everywhere in E. (In particular, if $f'(x)$ exists for $x\in E$, then $\mathfrak{S}[f]$, differentiated formally, is summable $(C, 1)$ for almost every $x\in E$.) Moreover, the author gives new proofs of a theorem of Plessner [J. f. Math. **158**, 219—227 (1927)] concerning the existence of conjugate integrals of higher order, and of the following proposition: If, for $x\in E$, we have an equation

$$f(x+t)=a_0(x)+a_1(x)\,t+\cdots+a_{k-1}(x)\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}+\omega(x,t)\frac{t^k}{k!},$$

where $\omega(x,t)=O(1)$ if $x\in E$, $t\to 0$, then for almost all $x\in E$, the expression $\omega(x,t)$ tends to a finite limit $a_k(x)$ as $t\to 0$. *A. Zygmund* (Wilno).

Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:

Petersen, Richard: Über eine Klasse analytischer Funktionen von spezieller fastperiodischer Struktur. Acta math. **67**, 81—122 (1936).

In seiner dänisch geschriebenen Habilitationsschrift (dies. Zbl. **6**, 199) hat der Verf. die Klasse derjenigen analytischen Funktionen $f(s)=f(\sigma+it)$ untersucht, welche auf jeder vertikalen Geraden eines Streifens $\alpha<\sigma<\beta$ fastperiodisch sind, ohne im Streifen $[\alpha,\beta]$ fastperiodisch zu sein, und in einigen späteren kleineren Mitteilungen (dies. Zbl. **8**, 12; **9**, 252 und insbesondere **11**, 347) analytische Funktionen untersucht, welche auf einer vorgegebenen Menge von vertikalen Geraden fastperiodisch sind. In der vorliegenden Arbeit werden diese Untersuchungen einheitlich dargestellt und dadurch insbesondere der Inhalt der Habilitationsschrift allgemein zugänglich gemacht. *B. Jessen* (Kopenhagen).

Ingham, A. E.: Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series. Math. Z. **41**, 367—379 (1936).

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist: Es sei $f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_n e^{\lambda_n t i}$ gleichmäßig konvergent in $-T\leqq t\leqq T$, die λ_n seien reell und $\lambda_n-\lambda_{n-1}\geqq\gamma>0$. Dann ist für jedes $T>\pi/\gamma$

$$|a_n|\leqq A(T\gamma)\cdot\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|\,dt,\quad \sum|a_n|^2\leqq A(T\gamma)\cdot\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\,dt,$$

wobei $A(x) = \frac{\pi x^2}{2(x^2 - \pi^2)}$. Für $T < \pi/\gamma$ gibt es keine analogen Ungleichungen. [Mit einer ungenauen Schranke für T vgl. N. Wiener, A class of gap theorems. Annali di Pisa 3 (1934); dies. Zbl. **10**, 28.] Hieraus folgt der Satz: Es sei 1. $\lambda_n - \lambda_{n-1} \geqq \gamma > 0$ für $n > n_0$, 2. $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s} = f(s)$ $(s = \sigma + it)$ konvergent für $\sigma > 0$, 3. $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(\sigma+it)|^2 dt = O(1)$ für ein festes $T > \pi/\gamma$ und $\sigma \to +0$, 4. die Funktion $\frac{f(s) - f(0)}{s}$, wenn geeignet definiert auf $\sigma = 0$ sei stetig im Bereich $\sigma \geqq 0$, $-\delta \leqq t \leqq \delta$, für ein $\delta > 0$ [z. B. $f(s)$ regulär in $s = 0$]. Dann konvergiert $\sum a_n$ und ist $= f(0)$. Das Wesentliche an diesem Satz ist, daß dank der Schranke für T (die durch keine kleinere ersetzt werden kann), keine explizite Voraussetzung über die a_n nötig ist (analog zu einem Lückensatz von Hardy und Littlewood). Ferner folgt der zuerst von Pólya (1923) bewiesene Satz: Ist $\varliminf_{n\to\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \geqq \gamma > 0$, so enthält jedes abgeschlossene Intervall von der Länge $2\pi/\gamma$ auf der Konvergenzgeraden der Reihe 2 einen singulären Punkt der Funktion $f(s)$. Der Schlußparagraph enthält Bemerkungen zu dem Grenzfall $T = \pi/\gamma$.

Otto Szász (Cincinnati, Ohio).

Davenport, H., and H. Heilbronn: On the zeros of certain Dirichlet series. J. London Math. Soc. **11**, 181—185 (1936).

1. $\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^\infty (n + a)^{-s}$, $0 < a \leqq 1$ hat für rationales a außer $a = 0$ und $a = \frac{1}{2}$ unendlich viele Nullstellen in $\sigma > 1$, das gleiche gilt für transzendentes a. Für rationales $a = l/k$, $k > 2$, $(l, k) = 1$, $0 < l < k$ wird $\zeta(s, a) = k^s \sum_{\substack{n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k) \\ n=1}}^\infty n^{-s}$ mit $Z(s) = \frac{k^s}{\alpha(l)} \sum_{\substack{n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k) \\ n=1}}^\infty \alpha(n) n^{-s}$ verglichen, wo $\alpha(n)$ durch $\alpha(p) = \begin{Bmatrix} 1, & \chi_1(p) = 0, 1 \\ i, & \chi_1(p) = -1 \end{Bmatrix}$, p prim, $\alpha(\prod p_i^{\varrho_i}) = \prod \alpha(p_i)^{\varrho_i}$ durch einen festen reellen Nichthauptcharakter χ_1 modulo k definiert ist. Für

$$M(s, \chi) = \sum_{n=1}^\infty \alpha(n) n^{-s} = \prod_p (1 - \alpha(p)\chi(p)p^{-s})^{-1} \quad (\chi \text{ Charakter mod } k)$$

findet man:

$$\log M(s, 1) = -\tfrac{1}{2}(1 + i)\log(s - 1) + O(1),$$

$$\log M(s, \chi_1) = -\tfrac{1}{2}(1 - i)\log(s - 1) + O(1), \quad \log M(s, \chi) = O(1),$$

falls $\chi \neq 1$, $\chi \neq \chi_1$ für $s \to 1 + 0$. Hieraus folgt leicht

$$Z(s) = \frac{2k^s}{\Phi(k)} R\left(\frac{1}{\alpha(l)} M(s, 1)\right) + O(1),$$

da aber für gegebene $\delta > 0$, $H > 0$ Zahlen s_1, s_2 mit $1 < s_1 < s_2 < 1 + \delta$ so gefunden werden können, so daß $R\left(\frac{1}{\alpha(l)} M(s, 1)\right) > H$, $R\left(\frac{1}{\alpha(l)} M(s, 1)\right) < -H$ gilt, so ist $Z(s_1) > 0 > Z(s_2)$ für hinreichend großes H, also $Z(s) = 0$ in einem Punkt von $s_1 < s < s_2$. Mittels des Kroneckerschen Approximationssatzes kann bei gegebenen $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ ein $\tau > 0$ mit $|\zeta(s + \tau i, l/k) - \alpha(l)Z(s)| < \varepsilon$ in $\sigma > 1 + \delta$ gefunden werden. Wendet man dies auf einen hinreichend kleinen Kreis um eine Nullstelle $s_1 > 1$ von $Z(s)$ an, so ergibt der Satz von Rouché die Existenz einer Nullstelle von $\zeta(s, l/k)$ in der Nähe von $s_1 + \tau i$. — Für transzendentes a sind die Zahlen $\log(a + n)$, $n = 0, 1, \ldots$ ersichtlich ganzzzahlig linear unabhängig. Ist für ein gegebenes $\delta > 0$ $\sum_0^m (n + a)^{-1-\delta} > \sum_{m+1}^\infty (n + a)^{-1-\delta}$, so wird $\alpha(n)$ durch $\alpha(n) = 1$ für $n \leqq m$, $\alpha(n) = -1$ für $n > m$ erklärt, $Z(s) = \sum_0^\infty \alpha(n)(n + a)^{-s}$ hat in $1 < s < 1 + \delta$ eine Nullstelle, und eine Anwendung des Kroneckerschen Satzes er-

gibt wie oben Nullstellen von $\zeta(s, a)$ in $1 < \sigma < 1 + \delta$. — 2. Für die Zetafunktion $\zeta(s, Q)$ einer ganzzahligen positiv definiten quadratischen Form mit Fundamentaldiskriminante, also für die Zetafunktion einer Idealklasse eines imaginären quadratischen Zahlkörpers, ergibt die oben angewendete Methode die Existenz unendlich vieler Nullstellen in $\sigma > 1$, vorausgesetzt, daß die Klassenzahl gerade ist, was die Existenz eines reellen Nichthauptcharakters der Klassengruppe zur Folge hat. Für $Q(x, y) = x^2 + 5y^2$ vgl. Potter-Titchmarch, dies. Zbl. **11**, 391. *Deuring.*

Differentialgleichungen, Potentialtheorie:

Chiellini, Armando: Applicazione della teoria degli invarianti differenziali lineari alla integrazione delle equazioni differenziali lineari del terzo ordine. Boll. Un. Mat. Ital. **15**, 113—118 (1936).

Notwendige und hinreichende Bedingung, damit eine lineare Differentialgleichung 3. Ordnung sich in eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten transformieren läßt, ist das Verschwinden einer gewissen Differentialinvariante der Gleichung. Die Bestimmung der Transformation erfordert dann die Auflösung einer Riccatischen Gleichung oder einfach Quadraturen. *G. Cimmino* (Napoli).

Greenwood, J. A.: Associated algebraic and partial differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 222—224 (1936).

If to a system of algebraic equations there is associated a system of partial differential equations by replacing x_i^α by $\partial^\alpha u/\partial x_i^\alpha$ [Riquier, Ann. École norm., III. s. **45**, 145—188 (1928)] then the algebraic system is inconsistent if and only if the general solution of the differential system is $u = 0$; the general solution of the differential system is a non-zero polynomial if and only if the algebraic system has only the solution $x_i = 0$. *Raudenbush* (New Haven).

Robbins, C. K.: Contact transformations in solved form. Amer. Math. Monthly **43**, 288—293 (1936).

If X, Y, P arise from x, y, p by a contact transformation, then $Y_x - PX_x + (Y_y - PX_y)\,p = 0$, $Y_p - PX_p = 0$. The author determines (without integration) classes of particular solutions of these equations by assuming (I) P does not involve p; (II) P involves only p. Subsequently he eliminates P and obtains classes of solutions for the resulting partial differential equation, in which X is regarded as the unknown. *J. M. Thomas* (Durham).

Lewy, Hans: Generalized integrals and differential equations. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **22**, 377—381 (1936).

Ohne Beweis werden folgende Theoreme angegeben: 1. Definition des Integrals $L = \int_{X_0}^{x} a(f(x), x, g_1(x), \ldots, g_n(x))\, db(f(x), x, g_1(x), \ldots, g_n(x))$. Es sei $f(x)$ in $X_0 \leqq x \leqq X_1$ eine Funktion, die durch stetige Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ approximiert werden kann, und es seien $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ stetige Funktionen mit beschränkter Totalvariation; dann läßt sich L eindeutig erklären als der Limes

$$L = \lim_{k \to \infty} \int_{X_0}^{x} a(f_k(x), x, g_1(x), \ldots, g_n(x))\, db(f_k(x), x, g_1(x), \ldots, g_n(x)),$$

wenn a und b in einem gewissen angegebenen Bereich stetige Ableitungen nach ihren Argumenten besitzen. 2. Existenz der „Lösung" $u(x)$ einer „gewöhnlichen Differentialgleichung" $du(x) = a_0(f(x), g_i(x), u(x))\, df(x) + \sum_{l=1}^{n} a_l(f(x), g_i(x), u(x))\, dg_l(x)$ mit $u(0) = 0$. Darunter wird verstanden: Man ersetze die Differentialgleichungen durch eine Folge von Differentialgleichungen, indem man $f(x)$ ersetzt durch eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen $f_k(x)$ mit $f_k(0) = 0$, die mit $k \to \infty$ gegen $f(x)$ streben und die stetigen Funktionen $g_i(x)$ ersetzt durch stetig differenzierbare Funk-

tionen $g_{ik}(x)$, die mit $k \to \infty$ derart gegen $g_i(x)$ streben, daß die totale Variation von $g_{ik}(x) - g_i(x)$ gegen Null geht und die totalen Variationen von $g_{ik}(x)$ gleichmäßig beschränkt bleiben. Unter gewissen Voraussetzungen für $a_0, \ldots, a_n$ konvergieren die Lösungen $u_k(x)$ mit $u_k(0) = 0$ dieser Differentialgleichungen gegen eine Funktion $u(x)$, deren Betrag eine angegebene Schranke nicht überschreitet; sie heißt Lösung der obigen Gleichung. 3. Entsprechend wird die Existenz einer verallgemeinerten Lösung behauptet für das hyperbolische Anfangsproblem $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \alpha} = 0, i = 1, \ldots, m < n$; $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \beta} = 0$, $i = m+1, \ldots, n$; $n \geqq 2$, wobei $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ auf $\alpha - \beta = 0$ vorgegeben ist. 4. Dieses letzte Theorem wird verwendet zum Beweis von Konvergenzsätzen für analytische Lösungen von Folgen elliptischer, Monge-Ampèrescher Differentialgleichungen, deren Koeffizienten analytische Funktionen der Argumente $u, v, x, p = \frac{\partial x}{\partial u}, q = \frac{\partial x}{\partial v}$ sind; ein ausführliches Referat sei bis zur Publikation der vollständigen Beweise verschoben. *Rellich* (Marburg, Lahn).

Temliakow, A.: Zu dem Wachstumsproblem der harmonischen Funktionen des dreidimensionalen Raumes. Rec. math. Moscou **42**, 707—716 (1935).

The material in this paper coincides in part with that indicated previously by the author in the C. R. Acad. Sci. Paris **200**, 799 (1935) (this Zbl. **11**, 71). Let (r, θ, φ) be the spherical coordinates of (x, y, z). Let

$$F(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (A_{nm}^{(1)} \cos m\varphi + A_{nm}^{(2)} \sin m\varphi) r^n P_n^{(m)}(\cos\theta),$$

where the P's are Legendre's functions and the A's constants, be everywhere harmonic. Let

$$f(u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(n+m)!}{n!} \left(A_{nm}^{(1)} \frac{\cos mt}{i^m} + A_{nm}^{(2)} \frac{\sin mt}{i^m} \right) u^n,$$

so that $2\pi F = \int_0^{2\pi} f(x + iy\cos t + iz\sin t, t)\, dt$, and f corresponds to F in the sense of Whittaker-Bergmann (for references to Bergmann's work in this direction see the above C. R.-note). The author defines the order $\lambda(F)$ and type $\sigma(F)$ of F by replacing the circle by a sphere in the usual definition for entire functions. He proves that, for each t, λ equals the order, and, in the case of axial symmetry, σ equals the type of the entire function f. An expression for λ in terms of the A's is obtained. In the latter part of the paper, he derives a formula, due to and printed with Bergmann's permission, expressing f in terms of the values of F in its real domain in the case of axial symmetry. *J. J. Gergen* (Rochester).

Boggio, T.: Sull'integrazione delle equazioni idrodinamiche di Helmholtz. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **21**, 415—419 (1935).

Verf. zeigt, daß man die Differentialgleichungen von Helmholtz integrieren und die Integrale von Cauchy erhalten kann einzig unter Benutzung der Eulerschen Variablen. Bisher war der Umweg über die Lagrangeschen Variablen üblich. *Weinstein* (Genf).

Agostinelli, Cataldo: Sopra la ripartizione delle acque di una sorgente piana. Atti Ist. Veneto Sci. etc. **44**, 635—648 (1935).

Verf. untersucht den Ausfluß von n freien Strahlen aus einem gemeinsamen Quellpunkt bzw. den Zufluß nach einem gemeinsamen Senkpunkt. Es wird die Methode von T. Boggio (vgl. vorst. Ref.) benutzt, der nur die Anwesenheit von Staupunkten angenommen hatte. *Weinstein* (Genf).

Reissner, Erich: Allgemeine Integration der Plattengleichung bei linear veränderlicher Steifigkeit. Ing.-Arch. **7**, 80—82 (1936).

The differential equation of an isotropic plate whose stiffness is a linear function of x is

$$N_0 x \Delta\Delta w + 2N_0 \Delta w_x = p(x, y).$$

For the homogeneous equation the author derives the solution

$$w = f_1(\xi) + f_2(\eta) + \tfrac{1}{4}\int \log(\xi + \eta)[f_3(\xi)\,d\xi + f_4(\eta)\,d\eta],$$

where $\xi = x + iy$ and $\eta = x - iy$. *Holl* (Ames).

Variationsrechnung:

Janet, Maurice: Dualité dans certaines questions de calcul des variations. J. Math. pures appl., IX. s. **15**, 177—191 (1936).

Verf. geht von der Tatsache aus, daß sich die Eigenwerte des Integralausdruckes $v(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x, y)\, u(y)\, dy$ durch Extrema sowohl von $\int_{x_0}^{x_1} u(x)\, v(x)\, dx : \int_{x_0}^{x_1} v^2(x)\, dx$ wie auch von $\int_{x_0}^{x_1} u^2(x)\, dx : \int_{x_0}^{x_1} u(x)\, v(x)\, dx$ kennzeichnen lassen, und bespricht ihre Anwendung auf das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem. *K. Friedrichs.*

Blaschke, Wilhelm: Integralgeometrie. XIV. Ein Gegenseitigkeitsgesetz der Optik. Math. Ann. **113**, 110—112 (1936).

Das Bestehen der optischen Reziprozitätsgesetze in beliebigen Medien ist gleichbedeutend mit der Existenz von gewissen Poincaréschen Integralinvarianten oder, was auf dasselbe hinausläuft, von Extremalen- oder Strahlendichten im Sinne des Verf. (vgl. dies. Zbl. **14**, 119). Dies ist für 2 Reziprozitätssätze von Herzberger (Strahlenoptik, Berlin 1931) benutzt worden. Von der Strahlendichte für die ∞^4 Strahlen in einem beliebigen räumlichen Medium ausgehend, gelangt der Verf. zu einem allgemeineren Reziprozitätsgesetz, das für speziellere Medien von Straubel, Gleichen [Physik. Z. **4**, 114 bzw. 226 (1903)] und Levi-Civita [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., V. s. **24**, 666 (1915)] gefunden wurde. Man lege die Strahlen durch kanonische Koordinaten $x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3$ fest und betrachte eine unendlich dünne, vierparametrige Schar von Strahlen, die von einem Flächenelement f ausgehen; φ bezeichne das Flächenelement, das von den Endpunkten der Vektoren p erfüllt wird, wenn sie von einem Punkt abgetragen werden, und ω den Winkel zwischen der Strahlrichtung und dem Normalvektor von f. Dann ist $f\varphi\cos\omega$ gleich dem entsprechenden Ausdruck für ein beliebiges anderes durch dieselben Strahlen gelegtes Flächenelement. *Fenchel.*

Manià, B.: Sopra un problema di navigazione di Zermelo. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **23**, 292—295 (1936).

Ankündigung eines Existenzbeweises für die im Titel genannte Minimumaufgabe von Zermelo (dies. Zbl. **1**, 341). *Rellich* (Marburg, Lahn).

Weinstein, A.: On a minimal problem in the theory of elasticity. J. London Math. Soc. **10**, 184—192 (1935).

The problem of the stability of a square plate with four clamped edges may be formulated mathematically as follows. Consider the class of all even functions $w(x, y)$ which have continuous derivatives of the fourth order in the square S and which satisfy the conditions $w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ on its boundary C. It is required to find the least value λ of the expression $I(w)/D(w)$ where $I(w) = \iint_S (w_{xx} + w_{yy})^2\, dx\, dy$, $D(w) = \iint_S (w_x^2 + w_y^2)\, dx\, dy$. The function w which renders I/D a minimum satisfies the differential equation

$$\Delta\Delta w + \lambda \Delta w = 0$$

with the stated boundary conditions. Using the principle that if in a minimum problem some of the conditions are made less stringent the minimum value in the modified

problem cannot be greater than in the original problem the author seeks the least value μ_m of the expression $I(v)/D(v)$ for all even functions $v(x,y)$ which vanish on the boundary C and which satisfy the m boundary conditions

$$\int_C \frac{dv}{dn} g_{2k-1}\, ds = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

where

$$g_\nu = \cosh\frac{\nu\pi}{2}\cos\nu x \quad \text{on the sides} \quad y = \pm\tfrac{1}{2}\pi$$

and

$$g_\nu = \cosh\frac{\nu\pi}{2}\cos\nu y \quad \text{on the sides} \quad x = \pm\tfrac{1}{2}\pi.$$

Then μ_m is not greater than λ and μ_m is a non-decreasing function of m. It is found that $\mu_1 = 5{,}1550$, $\mu_2 = 5{,}30196$, $\mu_3 = 5{,}30357$, $\mu_4 = 5{,}30362$. The method of Ritz is employed to show that $\lambda < 5{,}31173$. By combining the two results λ is confined between the narrow limits 5,30362 and 5,31173. Reference is made by the author to the paper G. I. Taylor [Z. angew. Math. Mech. **13**, 147—152 (1933); Zbl. Mech. **1**, 157] who showed that $\lambda < 5{,}33$.. *H. W. March* (Madison, Wisc.).

Weinstein, A.: On the symmetries of the solutions of a certain variational problem. Proc. Cambridge Philos. Soc. **32**, 96—101 (1936).

The problem of the stability of a square plate with four clamped edges can be formulated as a minimum problem [A. Weinstein, C. R. **200**, 107 (1935); Zbl. Mech. **3**, 105 and the prec. ref. E. Trefftz, Z. angew. Math. Mech. **15**, 339 (1935); Zbl. Mech. **4**, 299]. In the present paper it is shown that every minimizing function is an even function of each of its two arguments x and y. *H. W. March* (Madizon, Wisc.).

Funktionentheorie:

Barba, G.: Sulla iterazione di una classe di funzioni. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **23**, 473—477 (1936).

L'auteur cherche à faciliter l'étude de l'itération d'une fonction rationnelle f en transformant cette fonction par une autre fonction g convenablement choisie. Il indique que l'on peut trouver une fonction automorphe g, telle que la transformée $g^{-1}fg$ de f par g soit linéaire; son itération est alors immédiate. Par exemple l'itération de $2x^2 - 1$ se ramène à celle de $2z$ en transformant par $x = \cos z$. *E. Blanc* (Paris).

Ciorănescu, Nicolas: Sur les zéros des fonctions méromorphes et de certaines classes de polynômes. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **37**, H. 2, 9—11 (1936).

If $f(z)$, $\bar{f}(z)$, $F(z)$, and $\bar{F}(z)$ are holomorphic at $z = 0$, $f(0) = \bar{f}(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, $f(z) \ll \bar{f}(z)$, $F(z) \ll \bar{F}(z)$, the author has proved that $F[f(z)] \ll \bar{F}[\bar{f}(z)]$ (this Zbl. **13**, 357). Taking $F(z) = [a_0 + z]^{-1}$, $\bar{F}(z) = [|a_0| - z]^{-1}$, the author finds that the roots of the equation $f(z) = a_0$ are on or outside the circle $|z| = \varrho$ passing through the root of $\bar{f}(z) = |a_0|$ which is nearest to the origin. Applications to the case in which the coefficients of $f(z)$ are dominated by binomial coefficients and to a theorem of Montel (this Zbl. **3**, 157). *E. Hille* (New Haven, Conn.).

Menchoff, D.: Sur la monogénéité asymptotique. Rec. math. Moscou, N. s. **1**, 189—210 u. franz. Zusammenfassung 210 (1936) [Russisch].

A complex function is said to be approximately monogenic at a point z_0 if it possesses the finite approximate differential coefficient at z_0, i.e. if there is a set E of density 1 at z_0 such that the limit $[f(z) - f(z_0)]/(z - z_0)$ exists and is finite, as z tends to z_0 on E. There is established the following theorem which is the generalization of the classical Cauchy-Goursat theorem and has been enunciated without proof in the recent monograph by the author (D. Menchoff, Les conditions de monogénéité, Paris 1936, esp. p. 49; this Zbl. **14**, 167): If a continuous complex function is approximately monogenic everywhere in an open region D, except perhaps at an enumerable set of points, then it is holomorphic in D. — Incidentally there is given a new shorter proof of an other previous result of the

author [Fundam. Math. **25**, 59—97 (1935); this Zbl. **12**, 82): If $f(z)$ is a continuous complex function in an open region D and if at any point z_0, except possibly at an enumerable set, the quotient $[f(z) - f(z_0)]/(z - z_0)$ has the same finite limit as z tends to z_0 along two arbitrary straight-lines through z_0; then $f(z)$ is holomorphic in D. *Saks* (Warszawa).

Golusin, G. M.: Über die Verzerrungssätze der schlichten konformen Abbildungen. Rec. math. Moscou, N. s. **1**, 127—134 u. dtsch. Zusammenfassung 135 (1936) [Russisch].

Let $F(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ be analytic and univalent (schlicht) in $|z| < 1$. The author shows that the known results of Löwner [Math. Ann. **89**, 103—121 (1923)] can be successfully applied for evaluation of various upper bounds associated with $F(z)$, other than the upper bounds of the coefficients $|a_2|, \ldots$ In addition to known inequalities of Bieberbach, Nevanlinna, Grunski, and Grötsch (for which the author gives new proofs) the author derives the following estimates and shows that they cannot be improved

$$|\arg F'(z)| \leqq 4 \arcsin |z| \quad \text{or} \quad \pi + \log \frac{|z|^2}{1 - |z|^2},$$

according as $|z| \leqq 2^{-1/2}$ or $2^{-1/2} < |z|$,

$$\left| \arg \frac{z^2 F'(z)}{|F(z)|^2} \right| \leqq -\log(1 - |z|^2). \qquad \textit{J. D. Tamarkin.}$$

Herrmann, Aloys: Zur Erzeugung von hyperanalytischen Funktionen einer Quaternionenvariablen aus einer gewöhnlichen analytischen Funktion. Deutsche Math. **1**, 358—362 (1936).

Verf. legt Untersuchungen über die Quaternionen von L. E. Dickson, J. H. M. Wedderburn und Weyr dieser Arbeit zugrunde. Es wird eine Normalform für die Quaternionenfunktionen angegeben, die in gewissen Fällen einen einfachen Übergang von der Quaternionenfunktion zu einer entsprechenden analytischen Funktion $f(z)$ ermöglicht. *Behnke* (Münster i. W.).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

● **Mises, Richard von: Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Einführung in die neue Wahrscheinlichkeitslehre und ihre Anwendung. 2., neubearb. Aufl. (Schriften z. wiss. Weltauffassung. Hrsg. v. Philipp Frank u. Moritz Schlick. Bd. 3.)** Wien: Julius Springer 1936. VIII, 282 S. RM. 16.—.

Es handelt sich um die zweite umgearbeitete Auflage des Werkes, in welchem der Verf. im Jahre 1928 eine klare, tiefsinnige und jedermann zugängliche Darlegung seiner Gesichtspunkte betreffs der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihrer Funktion in der Statistik und allgemein in den beobachtenden Wissenschaften veröffentlicht hat. Es ist hier nicht der Ort, diese Gesichtspunkte nochmals wiederzugeben, zu diskutieren oder andersartigen Gesichtspunkten gegenüberzustellen, sondern es soll vielmehr auf einige der wichtigen Ergänzungen hingewiesen werden, die dem Werk hinzugefügt wurden, um einerseits die Ausführungen noch klarer erscheinen zu lassen (wie z. B. die Einführung eines lehrreichen Beispiels im 2. Vortrag), und vor allem, um einigen späteren Einwendungen und neueren wissenschaftlichen Entwicklungen Rechnung zu tragen. Auf die Einwände wird vor allem im stark erweiterten 3. Vortrag geantwortet; besonders interessant ist die Verteidigung des „Regellosigkeitsaxioms", das besonders stark der Kritik und Verbesserungsversuchen ausgesetzt war. Die auf neuere wissenschaftliche Entwicklungen bezüglichen Zusätze betreffen natürlich in erster Linie die theoretische Physik, deren sämtliche neueren Fortschritte vom Verf. kritisch unter dem Gesichtspunkt ihrer Bedeutung für den Wahrscheinlichkeitsbegriff untersucht werden, bis zu der Heisenbergschen Theorie, deren philosophische Bedeutung für die Vereinheitlichung des physikalischen Weltbildes hervorgehoben wird. *Bruno de Finetti* (Trieste).

Feller, Willy: Zur Theorie der stochastischen Prozesse. (Existenz- und Eindeutigkeitssätze.) Math. Ann. **113**, 113—160 (1936).

Diese Arbeit kann als eine wesentliche Ergänzung und Weiterführung der bekannten Kolmogoroffschen Untersuchungen über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Math. Ann. **104**, dies. Zbl. **1**, 149) angesehen werden. Zunächst werden die beiden Kolmogoroffschen partiellen Differentialgleichungen unter verallgemeinerten Voraussetzungen abgeleitet (insbesondere wird keine Momentenexistenz gefordert). Für diese Gleichungen wird dann unter sehr allgemeinen Bedingungen die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen bewiesen; das geschieht im Rahmen einer allgemeinen Untersuchung über parabolische Differentialgleichungen, die auch rein analytisch von Interesse ist. Im folgenden wird dieselbe Methode auch auf unstetige stochastische Prozesse angewandt und führt hier zu Integrodifferentialgleichungen, für welche ebenfalls unter gewissen Voraussetzungen allgemeiner Natur Existenz- und Eindeutigkeitssätze aufgestellt werden. Ein besonderer Abschnitt ist dem „rein unstetigen" Prozeß gewidmet, bei welchem die Änderungen nur sprungweise erfolgen können; die Behandlung dieses Falles erweist sich als besonders einfach, da man hier mit gewöhnlichen Differentialgleichungen auskommt. — Die Beweise sind sehr ausführlich und klar dargelegt. *A. Khintchine* (Moskau).

Kac, M.: Quelques remarques sur les fonctions indépendantes. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 1963—1965 (1936).

Grenzwertsätze über Folgen gegenseitig unabhängiger Funktionen (vgl. Steinhaus, dies. Zbl. **14**, 206), die sich sämtlich auch wahrscheinlichkeitstheoretisch deuten lassen und in dieser Deutung leicht aus bekannten Tatsachen gefolgert werden können. Beim letzten Satz wird das wahrscheinlichkeitstheoretische Analogon explizit angegeben: Die Bedingung $\sum_{k=1}^{n} b_k = o(n^2)$, wo die b_k die Streuungen der gegenseitig unabhängigen Summanden bedeuten, sei für das Bestehen des Gesetzes der großen Zahlen notwendig. In dieser Fassung ist der Satz bekanntlich falsch; vielmehr muß, damit die Behauptung richtig wird, noch das (nicht einfache) wahrscheinlichkeitstheoretische Analogon der Forderung der „gleichmäßigen Integrierbarkeit" hinzugefügt werden. — Beweise werden nicht angeführt. *A. Khintchine* (Moskau).

Geiringer, Hilda: Zur Verwendung der mehrdimensionalen Normalverteilung in der Statistik. Mh. Math. Phys. **43**, 425—434 u. **44**, 97—112 (1936).

Kriterien zur Beurteilung, ob eine mehrdimensionale statistische Aufnahme durch eine Gaußsche Verteilung interpretierbar ist, wobei die Parameter der letzteren freigelassen werden. Der Gedankenkreis und die verwandten Methoden schließen sich eng an frühere Arbeiten der Verf. an, vgl. insbesondere die Darstellungen in dies. Zbl. **8**, 265 u. **12**, 112 (ferner auch **8**, 368 u. **11**, 218). *W. Feller* (Stockholm).

Doeblin, Wolfgang: Sur les chaînes discrètes de Markoff. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 24—26 (1936).

Eine Reihe von Sätzen über einfache Markoffsche Ketten mit endlicher Anzahl von möglichen Zuständen. Als Beispiele mögen folgende Behauptungen dienen: Es gibt eine gewisse Anzahl von Zustandsgruppen $G_1, \ldots, G_k$, „Endgruppen" (groupes finaux) genannt, so daß das System, wenn es einmal in einen Zustand der Gruppe G_i gekommen ist, diese Gruppe nicht mehr verlassen kann; dabei konvergiert die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das System sich bei der n-ten Beobachtung außerhalb $\sum_{i=1}^{k} G_i$ befindet, bei $n \to \infty$ gegen Null; befindet sich das System einmal in einem Zustande der Gruppe G_i, so besteht die Wahrscheinlichkeit 1 dafür, daß es durch jeden Zustand dieser Gruppe unendlich oft hindurchgeht. Beweise werden nicht angegeben. *A. Khintchine* (Moskau).

Onicescu, Octav, et G. Mihoc: Sur les chaînes statistiques. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 2031—2033 (1936).

Es handelt sich um die von Verff. in Verallgemeinerung der Markoffschen Ketten eingeführten, in dies. Zbl. **12**, 28 referierten „chaines en liaisons complètes". An einem Beispiel wird gezeigt, wie sie sich unter Umständen auf Markoffsche Ketten zurückführen lassen. *W. Feller* (Stockholm).

Böhm, Friedrich: Grundfragen der angewandten Wahrscheinlichkeitsrechnung und der theoretischen Statistik, insbesondere das Problem der reinen Gruppen. Arch. math. Wirtsch. u. Sozialforschg **2**, 17—33 u. 69—97 (1936).

Eingehende und sehr klare Besprechung sämtlicher Schriften von K. Marbe zur Theorie des „statistischen Ausgleichs" sowie ihrer Kritik durch Bortkiewicz, Mises und Kamke. *A. Khintchine* (Moskau).

Insolera, Filadelfo: A proposito di un ipotetico comportamento assintotico della mortalità. Rend. Circ. mat. Palermo **49**, 303—306 (1935).

Zelenka, Ant.: Versicherungsmathematische Werte bei Zinsfußänderungen. Aktuár. Vědy **6**, 9—20 (1936).

Jecklin, Heinrich: Retrospektive Reserveberechnung nach Gruppen gleichen Akquisitionsjahres. Aktuár. Vědy **6**, 21—28 (1936).

Wald, A.: Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre. (II. Mitt.) Erg. math. Kolloqu. H. **7**, 1—6 (1936).

In einer früheren Mitteilung (vgl. dies. Zbl. **10**, 407) hat der Verf. für ein von Schlesinger vorgeschlagenes System von Produktionsgleichungen Existenz und Eindeutigkeit der Lösung unter einer einschneidenden, ökonomisch nicht zu rechtfertigenden Voraussetzung bewiesen. Hier wird der Beweis unter sehr viel allgemeineren, ökonomisch begründeten Annahmen durchgeführt. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Geometrie.

Neumann, J. v.: Continuous geometry. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **22**, 92—100 (1936).

A brief discussion of the consequences of a self-dual system of axioms for projective geometry which avoids the notion of points altogether and whose "undefined entities" represent the linear subspaces of the given space. In particular, it is required that the class L of all elements be partially ordered and continuous with respect to an undefined relation "$<$" which is transitive, but non-reflexive. A defined equivalence of elements partitions L into a unique and completely ordered set of equivalence-classes. Thence a unique, additive, numerical dimension-function $D(a)$ for all $a \in L$ is defined and so normalized that the range of D is either the set $D_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right)$ for some $n = 1, 2, \ldots$, or the set D_∞ of all real numbers on the closed interval $(0, 1)$. When $D = D_n$, L is the set of all linear subspaces of an $n-1$-dimensional projective space P_{n-1}. When $D = D_\infty$, L is an entirely new type of geometry. — A detailed treatment to appear soon will include a discussion of the close connection between the present study and recent work of the author and F. C. Murray on operator rings Ann. of Math. **37**, 116—229 (1936); this Zbl. **14**, 161. *J. L. Dorroh* (Baltimore).

Neumann, J. v.: Examples of continuous geometries. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **22**, 101—108 (1936).

Examples of geometries satisfying the axioms of the author's preceding note (see the prec. rev.). Examples are given both of $L = L_n$ for the case $D = D_n$ and of $L = L_\infty$ for the case $D = D_\infty$. A dimensional distance $\delta(a, b)$ for $a, b \in L$ is defined and δ defines a metric in L. The range of δ is the same as that of D so that it does not lead to an interesting topology in L_n, but it does impose a significant topo-

logy on L_∞. L_∞ is complete and connected in the topology with respect to δ. Every L satisfying the axioms gives rise to an associated division algebra. Further details will appear in the future paper mentioned in the author's preceding note. *Dorroh.*

Toda, Kiyoshi: Theorems relating to Feuerbach's theorem. Tôhoku Math. J. **42**, 128—131 (1936).

Einige Sätze über Zykel und Speere. *Rehbock* (Bonn).

Rossier, P.: Relations focales entre des coniques osculatrices à une courbe et applications à la catoptrique. Arch. Sci. Physiques etc. **18**, 147—153 (1936).

Graf, Ulrich: Über eine anschauliche Deutung der Kreiskörper mit Hilfe der zyklographischen Projektion. Tôhoku Math. J. **42**, 103—113 (1936).

Durch die zyklographische Projektion wird jedem Punkte $(z, w) = (u, v; x, y)$ des R_4 eineindeutig die orientierte Kugel $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - u)^2 = (\pm v)^2$ im R_3 mit den rechtwinkligen Koordinaten ξ, η, ζ zugeordnet. Verf. behandelt die so entstehenden Bilder der Kreise analytischer Ebenen und setzt aus diesen Bildern die Bilder der Kreiskörper zusammen. *Behnke* (Münster i. W.).

Aumann, Georg: Über einen elementaren Zusammenhang zwischen Mittelwerten, Streckenrechnung und Kegelschnitten. Tôhoku Math. J. **42**, 32—37 (1936).

In einem Intervall der x-Achse sei ein Mittel gegeben, d. h. eine stetige, symmetrische Funktion $m(x_1, x_2)$, die in jeder Variablen monoton wächst und deren Wert stets zwischen x_1 und x_2 liegt. Mit Hilfe von m läßt sich die Gleichheit zweier Strecken (x_1, x_2) und (y_1, y_2) durch $m(x_1, y_2) = m(x_2, y_1)$ definieren. (Ist m das arithmetische Mittel, so erhält man die gewöhnliche Streckengleichheit.) Verf. zeigt, daß dieser von selbst reflexive und symmetrische Gleichheitsbegriff dann und nur dann transitiv ist, wenn m ein quasiarithmetisches (= transformiertes arithmetisches) Mittel ist. Faßt man x als Parameter auf einem Kurvenbogen auf, so läßt sich in dieser Weise durch Vermittlung von m eine Streckengleichheit auf der Kurve einführen. Ist der Bogen konvex, so erhält man ein Mittel m, indem man den Punkten x_1 und x_2 denjenigen Punkt zuordnet, in dem die Tangente der Sehne x_1, x_2 parallel ist. Transitivität dieses Mittels ist gleichbedeutend mit der Gültigkeit des Pascalschen Satzes für Sechsecke mit paarweise parallelen Gegenseiten. Hierfür erweist sich als notwendig (und trivialerweise hinreichend), daß die Kurve ein Kegelschnitt ist. Der Parameter, für den das Mittel in das arithmetische übergeht, ist, wie leicht zu sehen, die Affinbogenlänge. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Segre, B.: Intorno alle ovali sghembe, e su di una estensione del teorema di Cavalieri-Lagrange alle funzioni di due variabili. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **23**, 654 bis 656 (1936).

1. Es sei C eine Jordankurve im R_3. Wieviele Ebenenbüschel B gibt es zu C derart, daß jedes, zur Büschelachse fremde, von C berandete, hinlänglich „reguläre" Flächenstück F (mindestens) eine Tangentialebene aus B mit Berührpunkt „im Innern" von F besitzt? Die Frage wird für den Fall behandelt, daß C speziell eine beschränkte, mit scharfer Tangente und stetiger Schmiegebene versehene Jordankurve C_4 von vierter Ordnung ist, welche keine Trisekante besitzt. [In einer inzwischen erschienenen Arbeit „Über reelle geschlossene Raumkurven vierter Ordnung", Math. Ann. **112**, 743—766 (1936); dies. Zbl. **14**, 35, hat P. Scherk gezeigt, daß dann die C_4 ganz auf dem Rande ihrer konvexen Hülle liegt, wenigstens falls C_4 überall eine scharfe Schmiegebene besitzt.] Es ergibt sich: Auf jeder zur C_4 fremden Ebene existiert genau eine Gerade g, welche Achse eines Büschels B ist; B enthält dann auch zwei, die C_4 doppelt berührende Ebenen, deren Berührpunkte sich auf der C_4 wechselseitig trennen. — 2. Angabe verschiedener Eigenschaften der C_4 (vgl. aber auch Scherk a. a. O.). — 3. Erörterung einer, 1. entsprechenden Aufgabe, wenn an Stelle von C ein ebener Schnitt eines Zylindermantels Z tritt und wenn der Normalschnitt von Z die Begrenzung eines einfach zusammenhängenden (ebenen) Gebietes ist. — Eine ausführliche Darstellung wird in Aussicht gestellt. *Haupt* (Erlangen).

Coxeter, H. S. M.: The representation of conformal space on a quadric. Ann. of Math., II. s. **37**, 416—426 (1936).

M. Bôcher hat nachgewiesen [Bull. Amer. Math. Soc. **20**, 185—200 (1914)], daß der Konformraum C_n (= der Raum der Inversionsgeometrie, s. F. Morley, Inversive Geometry, London 1933; dies. Zbl. **9**, 29) aus dem Euklidischen oder aus dem projektiven Raum P_{n+1} durch Adjunktion eines uneigentlichen (idealen) Kegels erhalten werden kann. Im zweidimensionalen Falle C_2 zerfällt dieser Kegel in ein schneidendes Geradenpaar, und der zugehörige vollständige Konformraum ist auf eine gewöhnliche Quadrik abbildbar. — Die von O. Veblen angeregte vorliegende Abhandlung arbeitet die analoge Abbildung der drei- und vierdimensionalen Konformräume C_3 und C_4 auf Hyperquadriken des projektiven P_4 bzw. P_5 heraus. Dies erfolgt unter Benutzung der folgenden geometrischen Tatsache: Wird eine Hyperquadrik des P_{n+1} von einem ihrer Punkte O aus in einen P_n projiziert, so wird dadurch eine (1, 1)-Korrespondenz zwischen denjenigen Punkten der Hyperfläche, die nicht in der Berührhyperebene von O liegen, und denjenigen Punkten des P_n hergestellt, die nicht in einem gewissen P_{n-1} liegen. Der C_n wird dann durch Adjunktion der übrigen Punkte der Hyperfläche gewonnen, d. h. durch Hinzufügen von O und seinem isotropen Kegel. Damit kann dann gleichzeitig auch die Geometrie der isotropen Räume I_n, die identisch ist mit der Geometrie eines Kegels, der einen (von der Spitze verschiedenen) spezialisierten Punkt besitzt, miterfaßt und behandelt werden. Man kann sich dabei allgemein auf die Fälle n ungerade, $\frac{1}{2}n$ ungerade, $\frac{1}{2}n$ gerade beschränken. Dies aber allgemein durchzuführen ist mühsam, so daß sich der Verf. in dieser Arbeit auf die Betrachtung der Verhältnisse im C_4 und in seinen Unterräumen $C_3, C_2; I_3, I_2$ beschränkt. Für sie werden der Reihe nach die bei Konfigurationen üblichen Inzidenztafeln der Elemente der Unterräume angegeben, zum Schluß die bisher mit synthetischen Methoden durchgeführte Untersuchung mit solchen der algebraischen Geometrie vertauscht. *M. Steck* (München).

Buzano, Piero: Condizioni di incidenza per due iperspazi subordinati di uno stesso iperspazio. Atti Accad. Sci. Torino **71**, 196—204 (1936).

Considérons dans un S_n projectif deux espaces subordonnés, S_h et S_k, définis respectivement au moyen de $h+1$ et de $k+1$ points linéairement indépendants, X^r et Y^s. Les coordonnées projectives homogènes de ceux-ci,

$$X^r: \quad x_0^r, x_1^r, \ldots, x_n^r \qquad (r = 0, 1, \ldots, h)$$
$$Y^s: \quad y_0^s, y_1^s, \ldots, y_n^s \qquad (s = 0, 1, \ldots, k),$$

constituent deux matrices rectangulaires, dont les déterminants d'ordre $h+1$ et $k+1$ formés avec les colonnes d'indices $i_0, i_1, \ldots, i_h$ et $j_0, j_1, \ldots, j_k$ peuvent ordonnement être indiqués avec les symboles $(i_0 i_1 \ldots i_h)_x$ et $(j_0 j_1 \ldots j_k)_y$, et sont notoirement les coordonnées grassmanniennes de S_h et S_k. — E. D'Ovidio [Atti Accad. naz. Lincei, Mem., III. s. **1** (1877)] a donné des conditions pour que S_h et S_k se coupent suivant un S_p, sous la forme:

$$\sum (-1)^\omega (j_0 j_1 \ldots j_{h-p} i_1 i_2 \ldots i_p)_x (j_{h-p+1} \ldots j_{h+k-2p+1} i_1 i_2 \ldots i_p)_y = 0. \qquad (*)$$

Ici: $i_1, i_2, \ldots, i_p$ sont p indices différents, fixés ad libitum parmi les nombres $0, 1, \ldots, n$; $j_0, j_1, \ldots, j_{h+k-2p+1}$ sont $h+k-2p+2$ indices choisis parmi les $n-p+1$ qui restent; et la somme est faite par rapport à toutes les permutations de ce type, dont ω désigne la classe. — La nécessité des conditions (*) est prouvée dans le travail en question d'une façon plus rigoureuse que celle originelle de D'Ovidio. De plus, l'A. montre que lesdites conditions peuvent ne pas être suffisantes; afin que S_h et S_k se coupent suivant un S_l (avec $l > h+k-n$), il faut et suffit que les relations (*) subsistent pour toutes les valeurs entières non négatives de p comprises entre $h+k-n+1$ et l (ces deux nombres inclus). *Beniamino Segre* (Bologna).

Gambier, Bertrand: Enveloppe d'une famille de quadriques à un paramètre. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. s. **27**, 201—240 (1935).

L'auteur développe la théorie des surfaces B [= de Blutel, Ann. École norm. 7 (1890)] énoncée dans sa Note (ce Zbl. **10**, 373). En conservant les notations du référat cité, on a: B_1 est lieu de coniques C_1 $(Q = 0, P_1 = 0)$, B_2 — lieu de C_2 $(Q = 0, P_2 = 0)$. Si C_1, C_2 se coupent aux points J, J', B_1 et B_2 se touchent le long de (J), (J'). Chaque quadrique du faisceau $Q_1 = Q + F(\lambda) P_1^2$ enveloppe le même B_1 et l'autre B_2 d'où suit la méthode de la transformation de B. Il existe toujours de cônes S dans le faisceau Q_1. Soit K, K' deux points où C est coupée par la caractéristique de son plan, H, H' — les points de contact de B_1 avec les plans tangents de S qui passent par la tangente à la courbe — lieu de sommets de S. Les trois droites JJ', KK', HH' concourent. Si (K, K') coïncide avec (H, H'), il existe une quadrique Q_1 osculatrice à B le long de C; les génératrices en sont les tangentes asymptotiques de B. Les équations paramétriques de B (en coordonnées homogènes) sont $x_i = P_i \mu^2 + 2 Q_i \mu + R_i$ où $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ sont conjuguées, $\mu = \text{const}$ sont les coniques C et P_i, Q_i, R_i certaines fonctions de λ qui déterminent les courbes $\tau_i(P_i, Q_i, R_i)$ à tangentes parallèles. Représentation canonique suivant que les courbes τ_i sont gauches, planes ou droites. Etude des asymptotiques de B. *S. Finikoff.*

Algebraische Geometrie:

Libois, Paul: Étude projective de l'équation du quatrième degré. Mathesis **50**, 189—191 (1936).

Haller, M. E.: Self-projective rational octavics. Tôhoku Math. J. **42**, 38—53 (1936).

Mit denselben Methoden, die von anderen Verfassern schon angewendet worden sind (siehe z. B.: R. M. Winger und P. P. Stucky, dies. Zbl. **7**, 223—224; J. A. Carlson, Univ. Washington **1934**, 59—63) und die hier als bekannt vorausgesetzt werden, untersucht Verf. die rationalen ebenen C^8, die durch die Kollineationen einer Gruppe in sich transformiert werden. Er gibt 40 Typen solcher C^8: 25 besitzen eine zyklische Gruppe, 12 eine Diedergruppe, 2 eine kontinuierliche einparametrige Gruppe und 1 die Oktaedergruppe. Immer werden die parametrischen Gleichungen angegeben und in einer Tafel zusammengefaßt. Für 12 derselben werden auch die ternären Gleichungen ausgerechnet; es sind diese die interessantesten, nämlich die 2, die eine unendliche Gruppe gestatten, und diejenigen, die eine zyklische oder eine Diedergruppe der größten Ordnung besitzen. Die Diskussion betrachtet hauptsächlich die mehrfachen Punkte jener Kurven und die Bestimmung ihrer Plückerschen Äquivalenten. *E. G. Togliatti.*

Maxwell, Edwin A.: On the geometrical genus of certain surfaces. Proc. Cambridge Philos. Soc. **32**, 185—193 (1936).

The author calculates the geometrical genus of certain classes of irregular surfaces in ordinary space, for which the equations of the canonical system can be determined explicitly. Extensions to varieties in higher space are given. *J. A. Todd.*

Gambier, Bertrand: Étude des surfaces cubiques admettant des points d'Eckardt. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **22**, 591—605 (1936).

Continuation du travail paru à p. 510—524 du même volume (ce Zbl. **14**, 36). — Ici l'A. étudie les surfaces cubiques ayant 9, 3 ou 2 points d'Eckardt. Il dit incidemment que la surface cubique (avec 9 points d'Eckardt) $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 + a^3(x + y + z)^3 = 0$ admet 12 pentaèdres de Sylvester, ce qui vient contredire le critère classique de Plücker-Clebsch; effectivement ladite surface admet ∞^2 pentaèdres de Sylvester, puisque la forme cubique ternaire $x^3 + y^3 + z^3 + a^3(x + y + z)^3$ peut être mise de ∞^2 manières différentes sous la forme d'une somme de 4 cubes. *Beniamino Segre* (Bologna).

Cherubino, Salvatore: Sulle varietà di Kummer singolari reali. Rend. Semin. mat. Univ. Padova **6**, 141—176 (1935).

The author defines a generalised veriety of Kummer of real type K_p to

be the image of an involution of order two on a real abelian variety V_p generated by an involutorial birational transformation T of V_p into itself which is pseudo-ordinary with respect to the fundamental symmetry S of V_p. These transformations have been introduced in an earlier paper of the author [Atti Accad. Sci. Napoli **20** (1935); this Zbl. **12**, 222]. S induces a symmetry S^* on K_p which coincides with that induced by $S' = ST = TS$. The real points of K_p (i.e. those united in S^*) form a single sheet which is divided into a number of regions separated by branch points of the correspondence between K_p and V_p. The number of these sheets is $2^{p-\lambda} + 2^{p-\lambda'}$, where λ, λ' are the real characters of S and S' respectively. If T is ordinary, $\lambda = \lambda'$, but if T is singular it may happen that $\lambda > \lambda'$. The author concludes by discussing the case $p = 2$ in detail and determining all the hyperelliptic surfaces which possess pseudo-ordinary involutorial transformations. *J. A. Todd.*

Segre, B.: Sulle varietà di Veronese a due indici. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **23**, 303—309 (1936).

Erster Teil einer Untersuchung über die (r, n)-Veroneseschen Mannigfaltigkeiten $\Phi^{(r)}$, die in der üblichen linearen Darstellung der Enveloppen 2. Klasse Q eines Raumes S_n auf die Punkte eines Σ_ν mit $\nu = \frac{1}{2} n(n+3)$ den r-fach spezialisierten Q entsprechen $(r = 1, 2, \ldots, n)$. Die Reihe $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots, \Phi^{(n)}$ von Mannigfaltigkeiten besitzt sehr bemerkenswerte Eigenschaften, deren Untersuchung von G. Scorza [Rend. Accad. Napoli (3) **21**, 297 (1915)] angefangen worden ist und hier fortgesetzt wird. Jede $\Phi^{(r)}$ enthält die folgenden; die Punkte von $\Phi^{(n)}$ entsprechen eineindeutig und ausnahmslos den Punkten von S_n. Mit den $\Phi^{(r)}$ sind auch andere Mannigfaltigkeiten $\Pi^{(r)}$ und $\Xi^{(r)}$ eng verbunden (§ I): $\Pi^{(r)}$ liegt auf $\Phi^{(r)}$ und ist das Bild jener r-fach spezialisierten Enveloppen Q, deren Kerne auf einer gegebenen Quadrik $\mathfrak{P}$ des S_n liegen; $\Xi^{(r)}$ ist das Bild eines S_{n-r} in der Abbildung von $\Phi^{(n)}$ auf S_n und ist eine $(n-r, n-r)$-Veronesesche Mannigfaltigkeit. $\Pi^{(n)}$ fällt mit $\Phi^{(n)}$ zusammen; $\Pi^{(n-1)}$ hat die Ordnung $2\binom{2n-2}{n-1}$. Man kann allgemein $\Pi^{(r)}$ aus den $\Phi^{(r)}$ und dem Bild P der Enveloppe von $\mathfrak{P}$ folgendermaßen konstruieren: man betrachte in Σ_ν die Polarhyperebene π von P in bezug auf $\Phi^{(n)}$, d.h. das Bild der $\infty^{\nu-1}$ Quadriken von S_n, die zur Enveloppe $\mathfrak{P}$ apolar sind; $\Pi^{(r)}$ ist dann der Ort der Pole von π in bezug auf alle $\Xi^{(r)}$ (d.h. von den Schnitten von π mit den Räumen Σ_R, wo die $\Xi^{(r)}$ liegen). § II beschäftigt sich mit der Konstruktion der Tangentialräume und -kegel von $\Phi^{(r)}$ in ihren verschiedenen Punkten; $\Phi^{(r)}$ ist Ort der Räume Σ_R; in allen Punkten eines solchen Σ_R, die für $\Phi^{(r)}$ einfach sind, ist der Tangentialraum von $\Phi^{(r)}$ immer derselbe. Wenn dagegen ein Punkt P von $\Phi^{(r)}$ auf $\Phi^{(s)}$ $(s > r)$, aber auf keiner $\Phi^{(s')}$ mit $s' > s$ liegt, so hat $\Phi^{(r)}$ in P einen Tangentialkegel, welcher die Erzeugende Σ_S von $\Phi^{(s)}$ durch P als Spitze hat und sich nicht ändert, wenn $P\,\Sigma_S$ durchläuft; man schließt daraus die Multiplizität von $\Phi^{(s)}$ für $\Phi^{(r)}$, die Konstruktion der ganzen Reihe $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots, \Phi^{(n)}$ aus einer einzigen gegebenen $\Phi^{(r)}$, usw. *E. G. Togliatti* (Genova).

Beck, H.: Eine Cremonasche Raumgeometrie. J. reine angew. Math. **175**, 129 bis 158 (1936).

L'A. commence par considérer l'algèbre non commutative du 3e ordre définie par le tableau suivant:

	E_0	E_1	E_2
E_0	E_0	E_1	E_2
E_1	E_1	E_0	E_2
E_2	E_2	$-E_2$	0

;

il appelle ternions (Ternionen) ses nombres complexes $X = xE_0 + yE_1 + zE_2$, et les représente avec les points (x, y, z) d'un espace affine à 3 dimensions, nommé espace crémonien (Cremonaraum). Le chap. I est précisément dédié à l'algèbre

susdite, avec égard particulier aux opérations rationnelles entre ternions et à leurs représentations dans l'espace crémonien; le ternion $X = xE_0 + yE_1 + zE_2$ admet $\tilde{X} = xE_0 - yE_1 - zE_2$ comme complexe conjugué, et $X\tilde{X} = \tilde{X}X = (x^2 - y^2)E_0$ résulte la norme commune aux deux ternions X et $\tilde{X}$. — Les opérations renversables entre les ternions X et X' données par les formules:

$$X' = (XC + D)^{-1}(XA + B), \qquad X' = (\tilde{X}C + D)^{-1}(\tilde{X}A + B),$$

avec A, B, C, D ternions arbitraires tels qu'il soit norme $(AD - BC) \neq 0$, constituent un groupe mixte dépendant de 11 paramètres essentiels; celui-ci se représente géométriquement avec un groupe de transformations quadratiques, définissant — dans l'espace crémonien — la géométrie des ternions (chap. II). — Le chap. III montre que cette géométrie peut être opportunément liée à la géométrie projective de S_4. On peut présenter ce lien de la manière suivante (qui rend presque évidents beaucoup de résultats des chap. II et III): considérons un V_3^2-cône réel de S_4, ayant deux systèmes ∞^1 de plans réels, et projectons-le stéréographiquement sur un S_3 d'une façon opportune; en correspondance aux ∞^{11} transformations homographiques de V_3^2 en soi-même, on obtient de la sorte en S_3 les transformations fondamentales du groupe des ternions. — Le dernier chapitre (le IVe) met en évidence et approfondit le fait remarquable que la géométrie des ternions a, dans le champ complexe, une structure identique à la géométrie élémentaire d'un espace euclidien S_4, à la géométrie de Laguerre d'un espace euclidien S_3, et à la géométrie projective d'un complexe spécial de droites de l'espace ordinaire; dans ces rapprochements un point de l'espace crémonien vient respectivement correspondre à un espace isotrope de S_4, à un plan orienté de S_3, et à une génératrice du complexe spécial. — Les développements du Mémoire sont très détaillés et quelquefois même prolixes; ils auraient pu être un peu simplifiés, en substituant à E_0, E_1, E_2 les nouvelles unités

$$\varepsilon_0 = \tfrac{1}{2}(E_0 + E_1), \qquad \varepsilon_1 = \tfrac{1}{2}(E_0 - E_1), \qquad \varepsilon_2 = E_2,$$

admettant le tableau de multiplication suivant:

	ε_0	ε_1	ε_2
ε_0	ε_0	0	ε_2
ε_1	0	ε_1	0
ε_2	0	ε_2	0

[Pour la caractérisation de l'algèbre — isomorphe à celle des ternions — qu'on obtient ainsi, cfr. le type XXVII de la classification donnée par G. Scorza dans Le algebre del 3° ordine, Atti Accad. Sci. Napoli, II. s. **20** (1935); ce Zbl. **12**, 392.]

Beniamino Segre (Bologna).

Chambers, L. H.: On (2, 2) planar correspondences. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 382—388 (1936).

Wenn in zwei Ebenen π, π'' zwei Involutionen I, J gegeben sind und ihre Paare entsprechender Punkte rational auf die Punkte einer dritten Ebene abgebildet werden, so erhält man zwischen π, π'' eine (2, 2)-Transformation. Diskussion und Beschreibung von 10 Fällen solcher Transformationen, die man erhält, wenn I und J der Reihe nach die vier wohlbekannten typischen ebenen Involutionen sind: die harmonische Homologie und die Involutionen von Geiser, De Jonquières und Bertini. Diese letzte wird immer zunächst auf einem Doppelkegel 2. Ordnung abgebildet, der dann auf eine Ebene stereographisch projiziert wird. *E. G. Togliatti* (Genova).

Blanch, Gertrude K.: Properties of the Veneroni transformation in S_4. Amer. J. Math. **58**, 639—645 (1936).

Die Hyperflächen r-ter Ordnung eines Raumes S_r, die durch $r + 1$ in allgemeiner

Lage gegebene Räume S_{r-2} hindurchgehen, bilden ein homaloides System und definieren eine Cremonasche Verwandtschaft zwischen S_r und S'_r; das homaloide System im S'_r ist ebenso beschaffen [E. Veneroni, Rend. Ist. Lomb. (2) **34**, 640 (1901)]. Hier werden die vier bilinearen Gleichungen der Transformation für $r = 4$ ausgerechnet und die Möglichkeit involutorischer Typen im Falle $S_4 \equiv S'_4$ diskutiert. Die Rechnungen sind teilweise nur kurz angedeutet. *E. G. Togliatti* (Genova).

Huff, Gerald B.: Discontinuous groups associated with the Cremona groups. Amer. J. Math. **58**, 627—636 (1936).

Eine Untersuchung über die Gruppe $g_{\varrho,2}$ linearer Transformationen mit ganzzahligen Koeffizienten, die von der Involution $x'_i = x_i + M$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, $x'_{j+3} = x_{j+3}$ $(j = 1, 2, \ldots, \varrho - 3)$, wobei $M = x_0 - x_1 - x_2 - x_3$, und von allen Permutationen der $x_1 x_2 \ldots x_\varrho$ erzeugt wird. Diese Gruppe kommt in der Bestimmung der Linearsysteme ebener Kurven mit gegebener Dimension und Geschlecht vor; sie besitzt die zwei Invarianten $L \equiv x_1 + \cdots + x_\varrho - 3x_0$, $Q \equiv x_1^2 + \cdots + x_\varrho^2 - x_0^2$. Hier werden überall die Zahlen $x_0 x_1 \ldots x_\varrho$ mod 3 reduziert; man erhält so eine entsprechende Gruppe $g^{(3)}_{\varrho,2}$. Die reduzierten Werte von $x_0 x_1 \ldots x_\varrho$ bilden eine Charakteristik $x = \{x_0; x_1 \ldots x_\varrho\}$; sie ist vom Typus $(i_0; l\, m\, n)$, wo $l + m + n = \varrho$, wenn $x_0 = i_0$, und wenn unter den Zahlen $x_1 x_2 \ldots x_\varrho$ l-mal 2, m-mal 1 und n-mal 0 vorkommt; sie ist von der Art $(a_1\, a_2)$, wenn $x_1 + \cdots + x_\varrho - 3x_0 \equiv a_1$, $x_1^2 + \cdots + x_\varrho^2 - x_0^2 \equiv a_2$, wo $a_1, a_2 = 0, 1, 2$; es gibt 9 Arten von Charakteristiken. Die Bestimmung und Aufzählung aller Charakteristiken einer gegebenen Art und die Bestimmung aller Charakteristiken, die mit einer gegebenen in bezug auf $g^{(3)}_{\varrho,2}$ konjugiert sind, führen zu einer tieferen Untersuchung dieser Gruppe. Für $\varrho \leqq 8$ sind $g_{\varrho,2}$ und $g^{(3)}_{\varrho,2}$ endlich und einfach isomorph; für $\varrho = 9$ ist $g_{\varrho,2}$ unendlich; ihre Eigenschaften sind bekannt und geben diejenigen von $g^{(3)}_{\varrho,2}$. Für $\varrho > 9$ ist $g_{\varrho,2}$ unendlich; die Charakteristiken der Typen $(0; \varrho\, 0\, 0)$, $(0; 0\, \varrho\, 0)$, $(0; 0\, 0\, \varrho)$ sind selbstkonjugiert in bezug auf $g^{(3)}_{\varrho,2}$, während die übrigen Charakteristiken 9 konjugierte Systeme bilden, die den 9 möglichen Wertepaaren von a_1, a_2 entsprechen; und die Gruppe $g^{(3)}_{\varrho,2}$ ist diejenige Untergruppe der Gruppe G_ϱ aller linearen Substitutionen mit Koeffizienten im Galoisschen Felde [3] und mit L, Q als Invarianten, deren Substitutionen in den Charakteristiken $(0, 1)$ gerade Permutationen induzieren. Daraus kann man schließen, daß nur für $\varrho = 9$ die Reduktion der Koeffizienten mod 3 die Natur einer C-Charakteristik bestimmen kann (s. A. B. Coble, dies. Zbl. **10**, 128). *E. G. Togliatti* (Genova).

Differentialgeometrie:

Goormaghtigh, R.: Sur le lieu des centres de courbure d'une courbe gauche. Mathesis **50**, 185—188 (1936).

Fon, Te-Chih: A note on some special curves in space. Tôhoku Math. J. **42**, 80 bis 85 (1936).

Die vom Verf. früher (vgl. dies. Zbl. **13**, 319) eingeführte, jedem Punkt einer Raumkurve zugeordnete Binormalen-Regelfläche 2. Ordnung und die entsprechend mit Hilfe der Hauptnormalen definierte werden zu weiteren Charakterisierungen spezieller Kurvenklassen herangezogen. Z. B.: Schneidet die Schmiegebene die zugehörige Binormalen-Regelfläche 2. Ordnung stets in einem Kreis, so hat die Kurve konstante Windung und umgekehrt. Geht die rektifizierende Ebene stets durch den Mittelpunkt der zugehörigen Hauptnormalen-Regelfläche 2. Ordnung, so hat die Kurve konstante Windung und umgekehrt. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Nicolescu, Alexandru V.: Une classe de courbes gauches. Bull. Sci. École polytechn. Timişoara **6**, 184—186 (1936).

Verf. betrachtet (eine von Tzitzeïca studierte Klasse sphärischer Kurven verallgemeinernd) die Raumkurven, für welche $\operatorname{cotg} \lambda$ proportional der Bogenlänge ist, wo λ den Winkel zwischen der Schmiegebene und dem zum Kurvenpunkt führenden Radius der Schmiegkugel ist. Insbesondere diskutiert er die Kurven konstanter Krüm-

mung oder Windung, die Enneperschen und Bertrandschen Kurven, die zu dieser Klasse gehören. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Wald, A.: Begründung einer koordinatenlosen Differentialgeometrie der Flächen. Erg. math. Kolloqu. H. **7**, 24—46 (1936).

Durchführung des Beweises für den in C. R. Acad. Sci., Paris **201** (1935) und dies. Zbl. **12**, 371 angekündigten Satz; zu der notwendigen und hinreichenden Bedingung im letztgenannten Referat ist hinzuzufügen, daß der Raum im Mengerschen Sinne konvex ist (zu je zwei Punkten existiert mindestens ein Punkt „zwischen" ihnen). *W. Feller* (Stockholm).

Haimovici, Mendel: Géométrie intégrale sur les surfaces courbes. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 230—232 (1936).

Für die geodätischen Linien einer Fläche wird eine Dichte definiert, und zwar ebenso wie dies kürzlich auch Blaschke (vgl. dies. Zbl. **14**, 119) für die Extremalen beliebiger Variationsprobleme getan hat. Verf. überträgt ferner die Croftonsche Formel, die das Produkt der Dichten zweier Punkte in der Ebene durch die Dichte der Verbindungsgeraden und die Dichten der Punkte auf der Geraden ausdrückt, auf beliebige Flächen. Sind $\dot{S}'$ und $\dot{S}''$ die Dichten der beiden Punkte auf der Fläche, $\dot{G}$ die Dichte der Verbindungsgeodätischen G und s die Bogenlänge auf G, so gilt

$$\dot{S}'\,\dot{S}'' = [y_1(s')\,y_2(s'') - y_1(s'')\,y_2(s')]\,\dot{G}\,ds'\,ds''.$$

Hierbei sind y_1 und y_2 zwei Lösungen der zu G gehörigen Jacobischen Differentialgleichung mit $y_1 \frac{dy_2}{ds} - y_2 \frac{dy_1}{ds} = 1$. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Terracini, Alessandro: Invariante di Mehmke-Segre generalizzato e applicazione alle congruenze di rette. Boll. Un. Mat. Ital. **15**, 109—113 (1936).

P. Buzano [Boll. Un. Mat. Ital. **14**, 93 (1935); ce Zbl. **11**, 224] et E. Bompiani [Boll. Un. Mat. Ital. **14**, 237 (1935); ce Zbl. **12**, 276] ont considéré un invariant projectif, relatif à une droite générique d'une congruence de droites; ici l'A. assigne pour cet invariant une interprétation géométrique invariantive assez simple, dans l'ordre d'idées de celle donnée tout récemment par lui-même pour l'invariant de Mehmke-Segre [cfr. A. Terracini, Atti Accad. Sci. Torino **71**, 310 (1936); ce Zbl. **14**, 177]. La déduction repose sur la remarque suivante: deux coniques ayant un contact du 3e ordre dans un point P admettent la même courbure non seulement au point P, mais dans tous les points de la droite qui les touche en P (pour la notion qu'intervient ici, v. le travail de l'A. tantôt cité). *Beniamino Segre* (Bologna).

Finikoff, S.: Surfaces ayant aux points homologues les mêmes directrices de Wilczynski. Bull. Soc. phys.-math. Kazan, III. s. **7**, 44—54 (1936).

Dans ce travail [résumé dans C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 883 (1933); ce Zbl. **7**, 424] l'A. détermine les couples de surfaces jouissant de la propriété indiquée dans le titre. Il obtient seulement deux classes de surfaces: les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques (déjà profondement étudiées par Demoulin et Godeaux, cfr. p. ex. L. Godeaux, La théorie des surfaces et l'espace réglé, § 10. Paris: Hermann 1934; ce Zbl. **9**, 227), et certaines surfaces isothèrme-asymptotiques dont les lignes asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires. *Segre.*

Bol, G.: Topologische Fragen der Differentialgeometrie. LXIV. Über ein bemerkenswertes Fünfgewebe in der Ebene. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **11**, 387—393 (1936).

W. Blaschke hat (T_{50}, Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **9**, dies. Zbl. **7**, 78) die Behauptung aufgestellt: Wenn bei geeigneten Regularitätsforderungen fünf Kurvenscharen in der x, y-Ebene, nämlich $t_i(x, y) =$ konst. die Höchstzahl, nämlich 6 linear unabhängige Identitäten von der Gestalt

$$\sum_{i=1}^{5} f_i^{(k)}(t_i) = 0 \tag{1}$$

erfüllen, so ist das Kurvengewebe gleichwertig zu einem aus den geradlinigen Tangenten einer algebraischen Kurve 5. Klasse. — Bol erweist diesen Satz durch Aufzeigung eines Gegenbeispiels als falsch, während andere verwandte Sätze dieser Art, die von Bol und Blaschke stammen, ihre Gültigkeit behalten. — Bols Gegenbeispiel ist folgendes: $\frac{dt_1}{t_1} + \frac{dt_2}{t_2} + \frac{dt_4}{1-t_4} = 0$ und zyklisch (1, 2, 3, 4, 5),

$$\sum_{i=1}^{5} dt_i \left(\frac{\log 1 - t_i}{t_i} + \frac{\log t_i}{1 - t_i} \right) = 0 .$$

Dies Beispiel hängt mit der bekannten Figur von 5 windschiefen Geraden im R_4 zusammen mit der Eigenschaft, daß jede Ebene, die irgend 4 von ihnen trifft, auch notwendig die fünfte schneidet. Für diese Quintupel gibt Bol eine einfache Konstruktion. Die Frage nach allen Lösungen von (1) bleibt offen. *W. Blaschke* (Hamburg).

Topologie:

Smith, P. A.: Topological foundations in the theory of continuous transformation groups. Duke math. J. 2, 246—279 (1936).

In der klassischen Theorie der kontinuierlichen Gruppen werden häufig Behauptungen aufgestellt, die sich nur auf genügend kleine Umgebungen einer Stelle beziehen. Verf. stellt sich die Aufgabe, alle Voraussetzungen über diese Umgebungen möglichst scharf zu fassen, zu untersuchen, inwieweit die Verhältnisse im Kleinen die im Großen bestimmen und dabei sowohl abstrakte topologische Gruppen als insbesondere Transformationsgruppen zu berücksichtigen. — Grundlegend ist der Begriff einer Gruppenstruktur, d. i. eines topologischen Raumes $\mathfrak{G}$, in welchem gewisse Produkte ab definiert sind, wieder zu $\mathfrak{G}$ gehören und dem Assoziativgesetz $(ab)c = a(bc)$ genügen, sobald beide Seiten definiert sind, sowie der Begriff des Systems $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ vom Grade n, in welchem $A_1, \ldots, A_n$ offene Mengen in $\mathfrak{G}$ sind und alle Produkte $a_h a_{h+1} \ldots a_{h+k}$ für $h + k \leqq n$ definiert sind. $\mathfrak{G}$ heißt eine Halbgruppe, wenn in $\mathfrak{G}$ die Multiplikation stetig und die Division eindeutig ist und wenn es in $\mathfrak{G}$ ein System (A, B) gibt. $\mathfrak{G}$ heißt eine Teilgruppe (partial group), wenn es ein System (H, H) und ein Einzelelement e in H sowie ein Inverses zu jedem Element von H gibt, während ab und a^{-1} in $\mathfrak{G}$, soweit vorhanden, stetig sind. Es gibt dann Systeme $(A, A, \ldots, A)$ von beliebig hohem Grad mit eindeutiger Division. Ist $H = \mathfrak{G}$, so heißt $\mathfrak{G}$ eine Gruppe. — Ist eine Umgebung von e eine n-Zelle, so sind die Forderungen der Existenz und der Stetigkeit von a^{-1} Folgen der übrigen Postulate für Teilgruppen. — Um die Darstellungen von Gruppenstrukturen durch Transformationen eines Raumes $\mathfrak{X}$ zu untersuchen, werden „Darstellungsstrukturen $(\mathfrak{G}, \mathfrak{X})$ betrachtet, in denen Produkte $a \cdot x$, soweit definiert, zu $\mathfrak{X}$ gehören und stetig sind und in denen $a \cdot (b \cdot x) = ab \cdot x$ gilt, soweit $a \cdot (b \cdot x)$ und ab definiert sind, während aus $a \cdot x = a \cdot y$ folgt $x = y$. In $(\mathfrak{G}, \mathfrak{X})$ werden wieder „Systeme" $(A_1, \ldots, A_n; X)$ vom Grade n betrachtet, wobei der Fall $X = \mathfrak{X}$ eine besondere Rolle spielt. — Die klassische Liesche Theorie handelt von Strukturen $\mathfrak{G}^r$ und $(\mathfrak{G}^r, \mathfrak{X}^n)$, bei denen $\mathfrak{G}^r$ eine r-Zelle und $\mathfrak{X}^n$ eine n-Zelle ist und in denen Systeme $(A, B; X)$ oder (A, B, C) existieren, derart, daß die Koordinaten von ab oder von $a \cdot x$ Funktionen von der Klasse $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ oder $C^{(3)}$, d. h. ein- bis dreimal stetig differenzierbare Funktionen der Koordinaten von a und b bzw. x sind. — Wichtig ist ein Satz, der es gestattet, zu entscheiden, ob eine Familie von Transformationen mit „Gruppeneigenschaft" eine Halbgruppe darstellt. — Ein System $(G, G, \ldots, G; X)$ mit $G^{-1} = G$ heißt lokal transitiv in x_0, wenn $G \cdot x_0$ eine offene Menge ist. Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe, $\mathfrak{X}$ zusammenhängend und $(\mathfrak{G}, \mathfrak{X})$ ein System, so folgt aus der lokalen Transitivität die im Großen: $\mathfrak{G} \cdot x_0 = \mathfrak{X}$ für x_0 in $\mathfrak{X}$. Ist $(G, G, G, G; X)$ ein System mit $G^{-1} = G$ und e in G und ist $\mathfrak{g}$ die Menge der Elemente $\mathfrak{g}$ von GG mit $\mathfrak{g} \cdot x_0 = x_0$, so ist $\mathfrak{g}$ eine Teiluntergruppe von GG (d. h. die Produkte und Inversen der Elemente von $\mathfrak{g}$, so-