Cioranescu, N.: Sur les dérivées polydimensionnelles d'une fonction de plusieurs variables. Enseignement Math. **34**, 220—227 (1935).

Etant donnée une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables, on fait correspondre à tout intervalle k-dimensionnel I_k (c. à d. à tout parallélépipède k-dimensionnel aux arêtes parallèles aux axes dans l'espace n-dimensionnel E_n) une expression connue $f_k(I_k)$ dépendant linéairement des valeurs que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prend aux sommets de I_k; p. ex. $f_n(I_n)$ désigne la fonction additive d'intervalle n-dimensionnel dans E_n, attachée à la fonction donnée de point f. En suivant M. Bögel [J. reine angew. Math. **170**, 197—217 (1934); ce Zbl. **8**, 250] l'auteur étudie la limite $f(I_k)/\mathrm{vol}\, I_k$, où I_k est un intervalle k-dimensionnel aux sommets tendant vers le sommet fixé dans un point $P^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ et $\mathrm{vol}\, I_k$ désigne le volume k-dimensionnel de I_k. L'auteur exprime la valeur de cette limite (la dérivée k-dimensionnelle de f) en termes des coefficients différentiels partiels de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dont l'existence jusqu'au k-ième ordre est supposée. Ces formules sont généralisées au cas où les intervalles sont remplacés par les parallélépipèdes quelconques dont les arêtes ne sont pas forcément parallèles aux axes.

Saks (Warszawa).

Analysis.

● **Madelung, Erwin: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Unter Mitarbeit v. Karl Boehle und Siegfried Flügge. 3. verm. u. verb. Aufl. (Die Grundlehren d. math. Wiss. in Einzeldarstell. mit besonderer Berücksichtigung d. Anwendungsgeb. Hrsg. v. R. Courant. Gemeinsam mit W. Blaschke, F. K. Schmidt u. B. L. van der Waerden. Bd. 4.)** Berlin: Julius Springer 1936. XIII, 381 S. u. 25 Fig. RM. 27.—.

The additions and improvements that have been made in this useful compendium will be of aid to the numerous mathematical physicists who are interested in relativity, quantum theory and chemical physics. There is now a section dealing with the theory of groups in which among other things the rotation groups are discussed. The properties of transformations are developed both in this section and in the earlier section devoted to vector analysis. The methods of tensor analysis are used freely in some parts of the book and applications are made later on in the accounts of the recent theories of gravitatio and cosmology. — The section dealing with quantum theory is a noteworthy feature for it contains accounts of the Schrödinger theory, the many body problem, Pauli's principle, asymmetric Eigenfunktions and the Dirac theory. The statistical methods are explained in a section following the one on thermodynamics. — Physical principles are carefully explained and the attempt is made to unify physics as much as possible in the presentation. Thus for example by the use of Poisson's time of relaxation, the Navier-Stokes equations of hydrodynamics are derived by a transition process from the equations of the theory of elasticity. *H. Bateman.*

Crudeli, Umberto: Inversione delle derivazioni. Boll. Un. Mat. Ital. **15**, 65—66 (1936).

Marcouchevitch, A.: Sur le second théorème de la moyenne. Rec. math. Moscou **42**, 567—582 u. franz. Zusammenfassung 582 (1935) [Russisch].

A general formulation of the second law of mean is given by the formula

$$\int_E f(x)\,\varphi(x)\,dx = N \int_{E(N,n)} f(x)\,dx + n \int_{E-E(N,n)} f(x)\,dx.$$

Here f and φ are integrable over a bounded measurable set E, φ is bounded and n, N are arbitrary numbers satisfying $n \leqq \inf_E \varphi \leqq \sup_E \varphi \leqq N$. The author discusses various necessary and sufficient conditions under which, in the case where E reduces to an interval (a, b), the set $E(N, n)$ can be chosen as the sum of a finite number of intervals. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Barrow, D. F.: Infinite exponentials. Amer. Math. Monthly **43**, 150—160 (1936).

Es handelt sich um eine elementare (graphische) Diskussion der Konvergenz unendlich iterierter Exponentiale $E(a_0, a_1, \ldots a_n \ldots) = \lim_{n\to\infty} a_0^{a_1^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_n}}}}}$, $a_i \geqq 0$. Das Hauptergebnis ist: E konvergiert, wenn schließlich $e^{-e} \leqq a_i \leqq e^{\frac{1}{e}}$ ist. Es werden noch die Grenzfälle $a_i = e^{\frac{1}{e}} + \varepsilon_i$ bzw. $a_i = e^{-e} - \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \to +0$, besprochen.

Rogosinski (Königsberg i. Pr.).

La Menza, F.: Funktionalsysteme von linearen Ungleichungen. Bol. Semin. mat. Argent. **4**, Nr 16, 30—33 (1934) [Spanisch].

Man betrachte die lineare Ungleichung

$$A_1(P)x_1 + A_2(P)x_2 + \cdots + A_n(P)x_n + C(P) > 0,$$

wobei $A_i(P)$ und $C(P)$ reelle Funktionen eines Punktes P sind, welcher eine Menge Γ des r-dimensionalen Raumes durchläuft. Der Verf. sucht Bedingungen für die Verträglichkeit eines solchen Funktionalsystems linearer Ungleichungen. Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt zunächst die Beschränktheit nach unten der Funktion $C(P)\left(\sum_1^n A_i^2(P)\right)^{-\frac{1}{2}}$ als notwendige Bedingung. Der Verf. gibt ferner eine umständliche und unklar formulierte notwendige und hinreichende Bedingung.

I. J. Schoenberg (Swarthmore, Pa.).

Chaundy, T. W., and Eric Phillips: The convergence of sequences defined by quadratic recurrence-formulae. Quart. J. Math., Oxford Ser. **7**, 74—80 (1936).

The authors consider the convergence of the sequence defined by the recurrence-formula

$$u_{n+1} = au_n^2 + 2bu_n + c,$$

where a, b, c are real and independent of n. By simple substitutions this is reduced to the simpler form

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - k)(u_n - 1 + k).$$

It is proved that (I) if k is not real, $u_n \to \infty$ monotonically; (II) if $|u_0| > k$, $u_n \to \infty$ monotonically; (III) if $|u_0| < k$ and $\frac{1}{2} \leqq k \leqq \frac{3}{2}$, $u_n \to 1 - k$; (IV) if $|u_0| < k$ and $\frac{3}{2} < k \leqq 2$, u_n oscillates finitely; (V) if $|u_0| < k$ and $k > 2$, $u_n \to \infty$, except when u_0 belongs to a certain set of measure zero, and then u_n oscillates finitely. *W. N. Bailey.*

Roman, Irwin: An Euler summation formula. Amer. Math. Monthly **43**, 9—21 (1936).

Delsarte, J.: Les fonctions „moyenne-périodiques“. J. Math. pures appl., IX. s. **14**, 403—453 (1935).

This memoir is an elaboration of results previously announced (ref. below). Let D_0 be a domain of dimension $\leqq n$ in a space of n dimensions, let D_M be the transform of D_0 under the translation which takes 0 into M. Let $K(M, P)$ be a kernel which depends only upon $\overline{MP}$. $f(M)$ is mean periodic relative to $K(M, P)$ and D_0 if

$$\delta_M[f] = \int_{D_M} K(M, P) f(P)\, d\omega_P \equiv 0.$$

In the first chapter of this paper the author discusses the Fredholm-Nörlund equation $\delta_M[f] = g(M)$ for $n = 1, 2$. The main tools are certain Bernoulli polynomials and a generalization of the Euler-Maclaurin summation formula which lead to a principal solution (cf. Zbl. 8, 253 for details in the case $n = 1$). In the second chapter the expansion of a mean periodic function of one variable is given in terms of exponential mean periodic functions (Zbl. 8, 314). Here the bilinear operator

$$K[f, g] = \delta_0\left\{\int_0^\xi f(\xi - \eta)\, g(\eta)\, d\eta\right\}$$

comes into play. If $A(\lambda) = \delta_0[e^{\lambda\xi}]$, and $\{\lambda_n\}$ is the set of roots of $A(\lambda) = 0$ (all but a finite number of which are located in small sectors about the imaginary axis), then $K[e^{\lambda_i\xi}, e^{\lambda_j\xi}] = \delta_{ij}A'(\lambda_j)$. If $f(x)$ is mean periodic relative to $K(x)$ and the interval $(0, a)$ for all x in this interval, and all the λ's are simple, then the expansion of $f(x)$ becomes

$$f(x) \sim \sum_1^\infty K[f(\xi), e^{\lambda_i\xi}]\{A'(\lambda_i)\}^{-1}e^{\lambda_i x}. \tag{A}$$

Multiple roots lead to natural modifications. The validity of this expansion is established with the aid of the method of Cauchy and Picard when $f(x)$ is of bounded variation provided $K(x)$ is of bounded variation, $K(0+0) \neq 0$, $K(a-0) \neq 0$, the continuous part of $K(x)$ being absolutely continuous. The author finally considers the problem of the mean periodic prolongation for all x of a function which is given as mean periodic in $(0, a)$. If $f(x)$ is of bounded variation, the convergence of the series (A) for all x is a nec. and suff. condition for the existence of such a prolongation which is then given by the series. *E. Hille* (New Haven, Conn.).

● **Remes, Eugène: Sur les méthodes pour réaliser la meilleure approximation des fonctions d'après le principe de Tchebychef.** Kiev: Verl. d. Ukrain. Akad. d. Wiss. 1935. 162 S. u. 9 Fig. [Ukrainisch].

Approximation d'une fonction $f(x, y, z, \ldots)$ à l'aide d'une expression $\varphi(x, y, z, \ldots)$ 1° linéaire par rapport à l'ensemble des variables $x, y, z, \ldots$, 2° linéaire par rapport à chacune des variables $x, y, z, \ldots$, le domaine fondamental étant respect. déterminé par les inégalités de la forme 1° $1 \geqq x \geqq y \geqq z \geqq \cdots 0$, 2° $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b, \ldots$. Cas particulier où $f = (x^\varrho + y^\varrho + z^\varrho + \cdots)^{1/\varrho}$. Intégration numérique de l'équation $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Interpretations géométriques relatives au problème de Poncelet $\left(f = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$. Approximations polygonales d'une courbe convexe. Problème de l'approximation d'un ensemble à deux dimensions à l'aide d'une courbe polynomiale $y = P_n(x)$ de degré n. Méthodes du calcul numérique des polynomes de Tchebycheff $\Pi_n(x)$. Exemple $f(x) = |x|$: les coefficients des $\Pi_n(x)$ sont donnés pour $n \leqq 10$. Résolution d'un système surabondant (fini ou infini) des équations linéaires. — En signalant (dans la préface) le rôle que les méthodes de Tchebycheff sont appelées à jouer dans la théorie des fonctions, l'auteur insiste surtout sur l'importance de leurs applications techniques, et c'est au progrès de ces applications que son livre, dans sa plus grande partie, est destiné à contribuer. *W. Gontcharoff* (Moskau).

Sokolov, G.: Sur quelques propriétés extrémales des sommes trigonométriques. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr **6/7**, 857—882 u. franz. Zusammenfassung 883—884 (1935) [Russisch].

Etant donné $f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x$, où $|f(x)| \leqq L$, l'auteur étudie quel sont les maxima M_α et M_α^* de chacun des modules $\left|\sum_{\nu=0}^{n} n^\alpha(a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x)\right|$ et $\left|\sum_{\nu=0}^{n} n^\alpha(b_\nu \cos\nu x - a_\nu \sin\nu x)\right|$. Il prouve pour $\alpha \geqq 1$, $M_\alpha = M_\alpha^* = n^\alpha L$; pour $0 \leqq \alpha \leqq 1$, on a $M_\alpha \leqq \frac{2n^\alpha L}{1+\alpha}$, quel que soit n, toutefois le signe d'égalité n'a lieu que pour $\alpha = 1$ et $\alpha \to 0$, en tout cas $M_\alpha > n^\alpha L$ et $M_\alpha \geqq \frac{4n^\alpha L}{2+3\alpha+\alpha^2}$, la dernière inégalité étant plus forte que la première, si $0 < \alpha < m \neq 0{,}56$ $(m^2 + 3m - 2 = 0)$, les inégalités correspondantes pour le maximum conjugué M_α^* trouvées par l'auteur sont plus compliquées et moins précises: pour $n \to \infty$, il donne la forme asymptotique $M_\alpha^* \sim L\left[A(\alpha)\,n^\alpha + \frac{B(\alpha)}{\alpha}(n^\alpha - 1)\right]$, où $A(\alpha) > 0$, $B(\alpha) > 0$ sont bornés supérieurement et inférieurement uniformément par rapport à $\alpha\,(0 \leqq \alpha \leqq 1)$. Il donne de plus, pour $0 > \alpha$, et pour toute valeur de n, $\left|\sum_0^n (\nu + s)^\alpha(a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x)\right| \leqq L$.

S. Bernstein (Leningrad).

Ghika, Alexandre: Sur les systèmes de fonctions orthogonales d'une variable complexe. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 278—280 (1936).

Let D be a finite region bounded by the rectifiable Jordan curves $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$; here C_0 contains all the other curves. Denoting by α_0 a point interior to D, by α_ν a point interior to C_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, the author orthogonalizes the sequence

$$(z-\alpha_0)^m, \quad (z-\alpha_1)^{-m-1}, \quad \ldots, \quad (z-\alpha_n)^{-m-1} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

along the total boundary C of D. Denoting by $\varphi_k(z)$ the general orthogonal function, any function $f(z)$ regular in D and fulfilling

$$f(z) = 1/2\pi i \int_C \frac{f(x)}{x-z}\, dx, \qquad z \text{ in } D$$

($|f(x)|^2$ is integrable on C in Lebesgue's sense) can be developed in terms of the $\varphi_k(z)$'s in Fourier's manner. This development is convergent in the mean on the boundary; it is absolutely and uniformly convergent in every closed region interior to D. *Szegö.*

Boas jr., R. P.: Necessary and sufficient conditions in the moment problem for a finite interval. Duke math. J. **1**, 449—476 (1935).

This solution of the moment problem is connected with those of T. H. Hildebrandt and of D. V. Widder (this Zbl. **4**, 207 and **8**, 306—307). The author uses Widder's inversion operator

$$L_{k,t}\{\mu_n\} = \frac{(n+k+1)!}{n!\,k!}(-1)^k \Delta^k \mu_n, \quad n = \left[\frac{kt}{1-t}\right], \quad 0 \leqq t < 1,$$
$$L_{k,1}\{\mu_n\} = L_{k,1-}\{\mu_n\}.$$

A nec. and suff. cond. that the moment problem have a solution of bounded variation in $0 \leqq t \leqq 1$, is that

$$\int_0^1 |L_{k,t}\{\mu_n\}|\, dt < K. \qquad (k = 0, 1, 2, 3\ldots) \quad \text{(A)}$$

The solution is the integral of (B) a function in $L_r(0,1)$, $r > 1$, (C) a bounded function, (D) a function in $L_1(0,1)$, (E) a function of bounded variation, (F) a continuous function, if and only if, respectively,

$$\int_0^1 |L_{k,t}\{\mu_n\}|^r\, dt < K^r, \qquad \text{(B)}$$

$$|L_{k,t}\{\mu\}_n| < K, \qquad (0 \leqq t \leqq 1) \quad \text{(C)}$$

$$\lim_{j,k\to\infty} \int_0^1 |L_{j,t}\{\mu_n\} - L_{k,t}\{\mu_n\}|\, dt = 0, \qquad \text{(D)}$$

$$\int_0^1 |dL_{k,t}\{\mu_n\}| < K, \qquad \text{(E)}$$

$$\lim_{k\to\infty} L_{k,t}\{\mu_n\} \text{ exists uniformly in } 0 \leqq t \leqq 1. \qquad \text{(F)}$$

It is shown that condition (A) is algebraically equivalent to the corresponding condition of Hausdorff. The author also investigates the existence of a continuous solution not necessarily of bounded variation. *E. Hille* (New Haven, Conn.).

Wintner, Aurel: Gaussian distributions and convergent infinite convolutions. Amer. J. Math. **57**, 821—826 (1935).

Aus der Bernoulli-Verteilung $\beta(x) = 0$ für $x < -1$, $= \frac{1}{2}$ für $-1 < x < 1$, $= 1$ für $x > 1$ und einer positiven Folge $\{b_n\}$ entsteht durch wiederholte Faltungen und Grenzübergang die Verteilungsfunktion $\tau(x) = \beta(x/b_1) * \beta(x/b_2) * \beta(x/b_3) * \cdots$, welche dann und nur dann existiert, falls $\sum_1^\infty b_n^2$ konvergiert. Unter dieser Voraussetzung werden die folgenden Sätze bewiesen: I. Es existieren alle Momente $\int_{-\infty}^{\infty} x^m\, d\tau(x)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$

und die Werte derselben entsprechen einem bestimmten Momentenproblem, d. h. $\tau(x)$ ist durch die Werte seiner Momente eindeutig bestimmt. II. Für genügend kleinen Wert von λ wird $\tau(x)$ von der Gaußschen Funktion $\omega_\lambda(x) = (\lambda/\pi)^{\frac{1}{2}}\int\limits_{-\infty}^{x} \exp(-\lambda u^2)\, du$ im Unendlichen majorisiert, d. h. es ist $\tau(x) = O(\omega_\lambda(x))$ für $x \to -\infty$, $1 - \tau(x) = O(1 - \omega_\lambda(x))$ für $x \to +\infty$. Die sehr durchsichtigen Beweise beruhen auf dem Algorithmus, welcher die Momente einer mehrfachen Faltung durch die Momente der einzelnen Faktoren ausdrückt (dies. Zbl. **5**, 405). Entscheidend ist dabei die Symmetrie der Bernoulli-Verteilung, und tatsächlich beweist der Verf. die obigen Sätze für allgemeinere Klassen von Faltungen symmetrischer Verteilungsfunktionen. *I. J. Schoenberg.*

Wintner, Aurel: On convergent Poisson convolutions. Amer. J. Math. **57**, 827 bis 838 (1935).

Fortsetzung der Untersuchungen des Verf. und seiner Mitarbeiter über Faltungen von Folgen von Verteilungsfunktionen von besonderem Typus (dies. Zbl. **10**, 59; **11**, 157; **12**, 63). Hier werden die Verteilungen $\pi(x; a, q)$ $(a > 0, q > 0)$ betrachtet, wobei $\pi(x; a, q) = 0$ für $x < 0$, $= 1 - q$ für $0 < x < a$, $= 1$ für $x > a$, und die unendliche Faltung $\varrho(x) = \pi(x; a_1, b_1) * \pi(x; a_2, b_2) * \cdots$ für gegebene Folgen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$; sie konvergiert absolut, falls $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n q_n$ konvergiert. Bezüglich der Glätte von $\varrho(x)$ gilt folgender Satz. Unter den Voraussetzungen $\log a_n \backsim \log n^{-\lambda}$, $\log q_n \backsim \log n^{-\nu}$, wobei $\frac{1}{2} < \nu < 1 < \lambda + \nu$, besitzt $\varrho(x)$ überall beliebig hohe Ableitungen. Die Voraussetzungen sind in gewissem Sinn die besten ihrer Art. Dieses auf den Größenordnungen von a_n und q_n beruhende Glattheitskriterium läßt sich nicht, wie der Verf. bemerkt, auf gewisse spezielle zahlentheoretisch interessante Faltungen anwenden, wobei sich die Betrachtung der arithmetischen Eigenschaften der entsprechenden a_n und q_n nicht vermeiden läßt. Der Verf. untersucht ferner die symmetrische Bernoulli-Verteilung $\beta(x) = 0$ für $x < -1$, $= \frac{1}{2}$ für $-1 < x < 1$, $= 1$ für $x > 1$, und die Faltung $\sigma(x) = \beta(x/b_1) * \beta(x/b_2) * \cdots$, $(b_n > 0)$, welche existiert, falls $\sum\limits_{1}^{\infty} b_n^2$ konvergiert, und beweist den folgenden Satz: Falls $\sum b_n^2 < \infty$ und $\log b_n \backsim \log n^{-\alpha}$, so hat $\sigma(x)$ überall Ableitungen beliebig hoher Ordnung. Ferner ist $\sigma(x)$ längst der reellen Achse analytisch regulär oder nicht, je nachdem $\alpha < 1$ oder $\alpha > 1$. Die Beweise beruhen auf Abschätzungen der Fouriertransformierten in Verbindung mit der Lévyschen Umkehrungsformel. Endlich werden Fälle von stärker wachsenden b_n betrachtet, wo die Glätte von $\sigma(x)$ durch besondere Methoden nachgewiesen wird.

I. J. Schoenberg (Swarthmore, Pa.).

Wintner, Aurel: A note on the convergence of infinite convolutions. Amer. J. Math. **57**, 839 (1935).

Es sei $\{\sigma_n(x)\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ eine Folge von Verteilungsfunktionen. Mit $M_\delta(\sigma_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^\delta \, d\sigma_n(x)$ beweist der Verf. den folgenden Satz. Wenn für ein gewisses δ, mit $0 < \delta \leqq 1$, die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_\delta(\sigma_n)$ konvergiert, so konvergiert auch die unendliche Faltung (1) $\sigma_1 * \sigma_2 * \sigma_3 * \cdots$. Ich möchte hier folgende Verschärfung dieses Kriteriums formulieren. Mit den Bezeichnungen $\|x\| = \min(1, |x|)$ und $\widetilde{M}_\delta(\sigma_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|x\|^\delta \, d\sigma_n(x)$ gilt der Satz: Wenn für ein gewisses δ, mit $0 < \delta \leqq 1$, die Reihe $\sum\limits_{1}^{\infty} \widetilde{M}_\delta(\sigma_n)$ konvergiert, so konvergiert auch die Faltung (1). Der einfache Beweis folgt aus den Ungleichungen $|\sin x| \leqq \|x\|$, $\|xt\| \leqq \|x\| \cdot \max(1, |t|)$, nebst den Überlegungen des Verf.

I. J. Schoenberg (Swarthmore, Pa.).

Krawtchouk, M., et D. Topoliansky: Notice sur l'intégrale de Fourier. Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. math. **1**, 42—44 (1935) [Ukrainisch].

Les auteurs donnent une démonstration nouvelle de la formule de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\alpha\,(t-x)\,dt\,,$$

en la traitant comme cas limite de la somme de Fourier. *Autoreferat.*

Levinson, Norman: On a theorem of Ingham. J. London Math. Soc. **11**, 6—7 (1936).

A "function theoretical" (based on Carleman's formula) proof of necessity of a condition used by Ingham (this Zbl. 8, 306). *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Wolf, František: On the (C, k) summability of a trigonometrical integral. Proc. London Math. Soc., II. s. **40**, 502—523 (1936).

The author discusses the equiconvergence property between the Cesáro sums of a trigonometric integral $\int\limits_0^\infty e^{i\lambda x}\,dA(\lambda)$ and a certain trigonometric Fourier series. The following two are typical for the results contained in the paper. I. If $A(m_1) - A(m) = o(m^h)$ uniformly for m_1 in $(m, m+1)$, $h \geqq 0$, $l = [h]$ and if $\int\limits_0^\infty e^{i\lambda x}(i\lambda)^{-l-2}\,dA(\lambda) \equiv F(x)$ is a function which is the $(l+2)$-th integral of an integrable function $f(x)$ in an interval (a, b), finite or not, then, for $k > 0$,

$$\int\limits_0^\omega e^{i\lambda x}(1-\lambda/\omega)^k\,dA(\lambda) - \Gamma(k+1)/(\pi\omega^k)\int\limits_0^\varepsilon t^{-1-k}C_{1+k}(\omega t)[f(x+t)+f(x-t)]\,dt$$
$$= O(\omega^{-1}) + o(\omega^{h-k}),$$

as $\omega \to \infty$, uniformly in x on any finite interval contained in $(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)$. II. If $\int\limits_0^\omega (1-\lambda/\omega)^k\,dA(\lambda) = o(\omega^h)$, k is a non-negative integer, $l = k + [h]$, $h \geqq 0$, $A(\lambda) = 0$ for λ in $(0, 1)$, and if $F(x) \equiv \lim\limits_{\omega\to\infty}\int\limits_0^\omega (1-\lambda/\omega)^k e^{i\lambda x}(i\lambda)^{-l-2}\,dA(\lambda)$ has the same property as in I., then, for $m \geqq k$,

$$\int\limits_0^\omega e^{i\lambda x}(1-\lambda/\omega)^m\,dA(\lambda) - \Gamma(m+1)/(\pi\omega^m)\int\limits_0^\varepsilon t^{-1-m}C_{1+m}(\omega t)[f(x+t)+f(x-t)]\,dt$$
$$= o(\omega^{k+h-m}) + o(1),$$

as $\omega \to \infty$, uniformly in x on any finite interval contained in $(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)$. The integrals are generalized Stieltjes integrals defined by

$$\int\limits_a^b \Phi(\lambda)\,dA(\lambda) = \Phi(b)\,A(b) - \varphi(a)\,A(a) - \int\limits_a^b \varphi'(\lambda)\,A(\lambda)\,d\lambda$$

if a, b are finite and $\varphi(\lambda)$ has a continuous derivative, while

$$\int\limits_0^\infty \varphi(\lambda)\,dA(\lambda) = \lim_{\alpha\to\infty}\int\limits_0^\alpha \varphi(\lambda)\,dA(\lambda)\,.$$

The properties of Young's functions $C_p(t)$ play prominent role in the discussion.
J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Tricomi, F.: Über Doetschs Umkehrformel der Gauss-Transformation und eine neue Umkehrung der Laplace-Transformation. Math. Z. **40**, 720—726 (1936).

G. Doetsch [Z. Physik **49**, 705—730 (1928)] has given

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \exp(mz^2/2)\,dz\int\limits_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos z(x-\xi)\,d\xi$$

as the inverse of the Gauss transform

$$f(x) = \mathfrak{G}^{(m)}[F(\xi)] = (2\pi\, m)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x-\xi)^2/(2m)]\, F(\xi)\, d\xi.$$

For the bilateral Laplace transform the corresponding formulas are

$$\varphi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \Phi(t)\, dt,$$

$$\Phi(t) = (2\pi^3)^{-1/2} e^{-t^2/2} \int_0^{\infty} e^{u^2/2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/2} \cos(s+t)\, u\, \varphi(s)\, ds.$$

These formulas are verified under (naturally rather) severe limitations upon the functions. The formulas have the advantage of being real, but do presuppose that $f(\xi)$ and $\varphi(s)$ are known for all real values, so the validity is a priori restricted to a certain class of entire functions. *E. Hille* (New Haven, Conn.).

Hille, Einar: Notes on linear transformations. I. Trans. Amer. Math. Soc. **39**, 131—153 (1936).

The author discusses the functional transformation of the type

$$K_\alpha[f] \equiv \alpha \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha t) f(x+t)\, dt.$$

He is concerned particularly with problems of finding solutions of equation $K_\alpha[f] = 0$, of invariant elements, $K_\alpha[f] = f$, and of degree of approximation of f by means of $K_\alpha[f]$ as $\alpha \to \infty$. He shows that these problems admit of a more or less complete solution provided suitable restrictions are imposed on the kernel K and on function space to which f belongs. An important role in the discussion is played by the functional equation for the composite kernel $K(u; \alpha, \beta)$ which originates the transformation $K_\alpha[K_\beta[f]]$. The general theory is illustrated by examples of Weierstrass kernel $K(u) = \pi^{-1/2} a^{-u^2}$, Poisson kernel $K(u) = \pi^{-1}(1+u^2)^{-1}$, Picard kernel $K(u) = \frac{1}{2} e^{-|u|}$, and Dirichlet kernel $K(u) = (\pi u)^{-1} \sin u$. If parameters are suitably changed the cases of Poisson and Weierstrass are characterized by the same functional equation $F_\lambda[F_\mu[f]] = F_{\lambda+\mu}[f]$, that of Picard by $(\alpha^2 - \beta^2)\Pi_\alpha[\Pi_\beta[f]] = \alpha^2 \Pi_\beta[f] - \beta^2 \Pi_\alpha[f]$, and that of Dirichlet by $D_\alpha[D_\beta[f]] = D_\gamma[f]$, $\gamma = \min(\alpha, \beta)$. It is shown that the family of transformations $\{D_\alpha[f]\}$ which coincide with the Dirichlet kernel transformations for $\alpha \geqq 0$ and $= 0$ for $\alpha < 0$ represents the family of projections associated with the self-adjoint transformation of a Hilbert space as defined by $H(f) = \tilde{f'}$ = conjugate of the derivative of f. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Koizumi, S.: Notes on the asymptotic evaluation of operational expressions. Philos. Mag., VII. s. **21**, 265—274 (1936).

This paper gives sufficient conditions for the validity of the Heaviside asymptotic expansion rule. Let $F(p)$ be a function of the complex variable p whose only singularities in the finite part of the plane are poles and branch points and which is regular in the half-plane $R(p) > \beta > 0$ [$F(p)$ being made one-valued by suitable cuts]. Then if $\frac{F(p)}{p} = O(p^{-r})$, $r > 0$, as $|p| \to \infty$, the development of $\frac{F(p)}{p}$ about the branch point (or pole) whose real part is greatest furnishes an asymptotic development (in the sense of Poincaré) for the associated function $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} e^{tp} \frac{F(p)}{p}\, dp$. If $\sum A_n (p-b)^{\frac{n}{r}}$, $r > 0$, is the development of $\frac{F(p)}{p}$ about the branch point, or pole, b with greatest real part the asymptotic development of $f(t)$ is $e^{bt} \sum \frac{A_n}{\Gamma\left(-\frac{n}{r}\right)} t^{-\left(\frac{n}{r}+1\right)}$. If there are several branch points or poles having the same (greatest) real part the developments corresponding to each must be combined. *Murnaghan* (Baltimore).

Reihen:

Nersessian, Catherine: Sur la multiplicité du développement trigonométrique. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 195—197 (1936).

E is a set of multiplicity of trigonometric expansions if there exists a trigonometric series with non-zero coefficients which converges to zero outside of E. The author states that if the points of quasy-density of a perfect set P are everywhere dense in P, then every residual set R of P is a set of multiplicity. Here ξ is a point of quasy-density if the ratio l/d of the length l of an interval δ contiguous to P to the distance d of δ from ξ tends to zero when δ tends to ξ. If meas. $(P) > 0$, every set E, measurable B and of the second category in P, is a set of multiplicity. Various reflections and hypotheses are added. *E. Hille* (New Haven, Conn.).

Burkill, J. C.: The expression of trigonometrical series in Fourier form. J. London Math. Soc. **11**, 43—48 (1936).

The author departs from some results of S. Verblunsky (this Zbl. **1**, 272; **8**, 310; and **10**, 19). The first part of the note is devoted to trigonometrical series with finite upper and lower sums, so that $\overline{\lim\limits_n} \left|\sum\limits_1^n c_m e^{mix}\right| < \infty$ except in an enumerable set. Here $c_m = a_m - ib_m$, $A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$, $B_n(x) = b_n \cos nx - a_n \sin nx$. Suppose further that the integrated series $\sum\limits_1^\infty c_m e^{mix}/mi$ converges for all x to $F(x) - iG(x)$. Then the Cesàro derivatives of $F(x)$ and $G(x)$ exist almost everywhere, and the coefficients a_n, b_n are expressible by the Euler-Fourier formulas in terms of these derivatives, where the integrals are of the Cesàro-Perron type of order one. Under the same hypotheses the series $\sum\limits_1^\infty c_m e^{mix}$ is Poisson summable to the derivative of $F(x) - iG(x)$ for almost all x. In the second part of the paper the author is concerned with trigonometrical series whose coefficients are $o(n^2)$. Verblunsky had handled the case $o(n)$ successfully with the aid of the Denjoy integral, but for the case $o(n^2)$ his results did not seem to have final character. Replacing the integral (D) by the integral (CP), the author obtains more satisfactory results. He assumes that the Poisson sums of $\sum\limits_1^\infty B_n(x)/n$ are finite and integrable (D). Further, if $\overline{R}(x)$ and $\underline{R}(x)$ are the upper and lower Poïsson-Riemann sums of order 2 of $\sum\limits_1^\infty A_n(x)$, then $\overline{R}(x) \geqq \varphi(x) \geqq \underline{R}(x)$, where $\varphi(x)$ is CP-integrable, and concludes that $\sum\limits_1^\infty A_n(x)$ is the CP-Fourier series of $\varphi(x)$.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Bosanquet, L. S.: Note on the absolute summability (C) of a Fourier series. J. London Math. Soc. **11**, 11—15 (1936).

See Zbl. **8**, 61 for preliminary announcement. Let

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) = \tfrac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)],$$

$$\varphi_\alpha(t) = \alpha \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} \varphi(tu)\, du, \quad \alpha > 0.$$

A series is summable $|C, \alpha|$, $\alpha \geqq 0$, if the Cesàro means of order α of the partial sums form a sequence of bounded variation. I. If $\varphi(t)$ is of bounded variation in $(0, \pi)$ then the Fourier series of $f(t)$ is summable $|C, \delta|$ at $t = x$ for $\delta > 0$. II. If the Fourier series is absolutely convergent at $t = x$, then $\varphi_{1+\delta}(t)$ is of bounded variation in $(0, \pi)$ for $\delta > 0$. Both theorems become false for $\delta = 0$ as is shown by suitable examples.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Rutledge, George, and R. D. Douglass: The range of de la Vallée Poussin summation. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **14**, 191—194 (1935).

In a paper in Amer. Math. Monthly **43**, 27—32 (1936) (see the following rew.) the authors considered an entire function $Q(x) = F(x, -x, 1, -1)$ which is associated both with Stirling's interpolation series and de la Vallée Poussin summability. They now show that if a series is (VP.) summable its terms are $o[Q(n)] = o\left[n^{-1/2}(3+2\sqrt{2})^n\right]$, and they quote a (VP.) summable series whose terms are $O[n^{-1/2}Q(n)]$. (It is easy to complete this result by proving that $o[Q(n)]$ is the best estimate both for the terms and for the partial sums, and that there exist (VP.) summable series whose terms or partial sums are $\Omega[\varepsilon(n)\,Q(n)]$ for every $\varepsilon(n)\downarrow 0$.) *E. Hille* (New Haven).

Rutledge, George, and R. D. Douglass: Integral functions associated with certain binomial coefficient sums. Amer. Math. Monthly **43**, 27—32 (1936).

Compare the prec. rew. and Amer. Math. Monthly **41**, 29—36 (1934). The authors are concerned with the entire (= integral) functions $Q(x) = F(x, -x, 1, -1)$ and $M(x) = x\,F(1+x, 1-x, 2, -1)$ which are connected with Legendre functions, the Stirling interpolation series, and de la Vallée Poussin summability. The $M(n)$ and $Q(n)$ are positive integers, and $M(n)$, $Q(n)$ divided by $n^{-1/2}(3+2\sqrt{2})^n$ tend to finite limits. The (VP.) transform of the series $\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}Q(n)$ is $\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}$, so the series is merely bounded (VP.). *E. Hille* (New Haven, Conn.).

Kuttner, B.: Some relations between different kinds of Riemann summability. Proc. London Math. Soc., II. s. **40**, 524—540 (1936).

A côté du procédé de sommation (R, p) défini par

$$\lim_{n=\infty} \text{gén}\,(R, p) - \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\right\} = \lim_{h=0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \left[\frac{\sin nh}{nh}\right]^p \qquad (E(p) = p > 0)$$

l'auteur considère aussi le procédé (R', p) selon lequel

$$\lim_{n=\infty} \text{gén}\,(R', p) - s_n = \frac{1}{A_p} \cdot \lim_{h=0} \left\{h \cdot \sum_{n=1}^{\infty} s_n \cdot \left[\frac{\sin nh}{nh}\right]^p\right\},$$

la constante A_p étant choisie de manière à avoir $\lim\limits_{n=\infty}\text{gén}\,(R', p) - 1 = 1$. Il prouve que la sommabilité $(R, 2)$ entraîne celle (R', p) pour $p = E(p) > 2$ et inversement: la sommabilité $(R', 2)$ entraîne celle (R, p) pour $p > 2$. Ce sont là les meilleurs résultats possibles pour $p = E(p)$ car il est bien connu que $(R, 2)$ n'entraîne point $(R', 2)$ et inversement. Il reste à étudier les cas où p n'est pas entier. Pour $p = 2$ et en utilisant la notion plus large de sommabilité $(R, 2)$ ou $(R', 2)$ „approchée" [$h \to 0$ restant à l'intérieur d'un ensemble (E) de points de densité égale à 1 à l'origine, (E) étant arbitraire mais fixe dans chaque cas particulier], l'auteur prouve que $(R, 2)$ [ou bien $(R', 2)$] entraîne la sommabilité approchée $(R', 2)$ [ou bien $(R, 2)$] et il montre que l'extension de ce resultat à $p = 3$ est impossible. *E. Kogbetliantz* (Téheran).

Mears, Florence M.: Some multiplication theorems for the Nörlund mean. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 875—880 (1935).

La note contient trois théorèmes dont le premier traite la sommabilité de la série produit d'une serie sommable absolument par une série sommable non-absolument et le deuxième — celle de la série produit des deux séries sommables non absolument. Dans les deux cas les moyennes sommant la série produit sont définies à partir des moyennes employées lors de la sommation des séries facteurs d'une manière appropriée. *E. Kogbetliantz* (Téheran).

Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:

Pfluger, A.: Über eine Interpretation gewisser Konvergenz- und Fortsetzungseigenschaften Dirichletscher Reihen. Comment. math. helv. **8**, 89—129 (1935).

In this paper the results of Pólya in Math. Z. **29**, 549—640 (1929) on the relations between the rate of growth of an entire function of exponential type and the singularities of its Borel transform are extended to a class of irregular power series $g(z) = \sum_1^\infty a_n z^{-\lambda_n}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$. $g(z)$ is quasi-regular at $z = \infty$ if it is regular on the Riemann surface of $\log z$ für $|z| > V$, and bounded in every finite sector. The branch surface (Windungsfläche) $\mathfrak{W}$ of $g(z)$ is the union of all half-planes $\Re(z\,e^{-i\varphi}) > d$ in which $g(z)$ is holomorphic. The Stützfunktion of $\mathfrak{W}$, $k(\varphi) = \inf d$ for fixed φ, satisfies the usual inequalities. All boundary points of $\mathfrak{W}$ which are not interior to a rectilinear segment of the boundary are singular points of $g(z)$. $G(z)$ is quasi-entire if it is regular and single-valued on the Riemann surface L of $\log z$, and bounded for $|z| < V$, $t_1 < \arg z < t_2$, for all finite V, t_1 and t_2. $G(z)$ is of finite sectorial order if $G(z)\exp(-|z|^\nu)$ is sectorially bounded on L, $\varrho = \inf\nu$ being the sectorial order. $G(z)$ is of sectorial type χ, if $\chi = \inf A$, and $G(z)\exp(-A|z|^\varrho)$ is sectorially bounded. The indicator is defined as $h(\varphi) = \overline{\lim}\, r^{-\varrho}\log|G(r\,e^{i\varphi})|$, and $\chi = \sup h(\varphi)$. In case $M(r) = \sup|G(r\,e^{i\varphi})|$ exists, $\log M(r)$ is continuous, increasing and convex in $\log r$. Further, $\beta = \overline{\lim}\, r^{-\varrho}\log M(r)$ is called the ordinary type, $\chi \leqq \beta$ and $<$ can hold. In case $\varrho = 1$, χ finite (exponential type) the author associates with the quasi-entire function $G(z)$ a Borel transform $g(z)$ which is quasi-regular at infinity, $z\,g(z)$ being sectorially bounded for large z. Conversely, with such a function $g(z)$ is associated a Borel adjoint $G(z)$ which is a quasi-entire function. These functions are expressed in terms of each other by a suitable generalization of the usual contour integrals. The properties of $g(z)$ and $G(z)$ show considerable dualism. Thus, the radius of holomorphism of $g(z)$ equals the sectorial type of $G(z)$, and the radius of boundedness of $z\,g(z)$ equals the ordinary type of $G(z)$, and vice versa. Further, $h(\varphi) = k(-\varphi)$. There is also a dualism between the radii of convergence (ordinary, uniform, and absolute) of $g(z)$ and certain convergence types of $G(z)$ which also extends to over-convergence. As an application, the author gives a new class Dirichlet series for which the abscissa of boundedness coincides with the abscissa of absolute convergence. *E. Hille* (New Haven, Conn.).

Szász, Otto: Converse theorems of summability for Dirichlet's series. Trans. Amer. Math. Soc. **39**, 117—130 (1936).

The author gives a number of Tauberian theorems for Dirichlet series of which the following are fair samples. Let $F(t) = \sum_1^\infty c_\nu e^{-\lambda_\nu t}$ converge for $t > 0$, and let $F(t) \to s$ as $t \to +0$. Then $\sum_1^n c_\nu \to s$ if in addition one of the following conditions holds:

$$\sum_1^n |c_\nu|^p \lambda_\nu^p (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})^{1-p} = O(\lambda_n), \qquad p > 1, \tag{A}$$

$$\sum_1^n (|c_\nu| - c_\nu)^p \lambda_\nu^p (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})^{1-p} = O(\lambda_n), \qquad p > 1, \tag{B}$$

together with $\underline{\lim}\, c_\nu \geqq 0$ or $\lambda_{n+1}/\lambda_n \to 1$;

$$\sum_1^\infty \left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}\right)^\varrho (|c_\nu| - c_\nu)^{\varrho+1} < \infty, \qquad \varrho > 0, \tag{C}$$

$$\sum_1^n c_\nu \lambda_\nu \geqq -K\lambda_n \tag{D}$$

together with

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{\lambda_n \leqq x \leqq (1+\delta)\lambda_n} \Big|\sum_{\lambda_n \leqq \lambda_\nu < x} c_\nu\Big| = \psi(\delta) \to 0 \quad \text{as} \quad \delta \to 0.$$

E. Hille (New Haven, Conn.).

Avakian, Arra Steve: Almost periodic functions and the vibrating membrane. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **14**, 350—378 (1935).

Untersuchung der Schwingungen einer kreisförmigen Membran; die Differentialgleichung in Polarkoordinaten lautet

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\,T_1(r,\vartheta)\frac{\partial z}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[T_2(r,\vartheta)\frac{dz}{\partial\vartheta}\right]=\mu(r,\vartheta)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \tag{*}$$

Es wird vorausgesetzt, daß die totale Energie in bezug auf z und analoge Ausdrücke für $\frac{\partial z}{\partial t},\ldots,\frac{\partial^n z}{\partial t^n}$ (höhere Energien) endlich sind. Die Lösungen ergeben sich als fastperiodische Funktionen von t, deren Wertevorrat dem Raume der im Kreise K summierbaren Funktionen angehört, $\varrho(f,\varphi)=\iint\limits_K (f-\varphi)^2\,dx\,dy$ (Muckenhouptsche Funktionen). Im Falle der Kartesischen Koordinaten erweist sich die Gleichung (*) als ein Spezialfall der von S. Bochner untersuchten (dies. Zbl. **9**, 163). *W. Stepanoff.*

Cameron, Robert H.: Almost periodic properties of bounded solutions of linear differential equations with almost periodic coefficients. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **15**, 73—81 (1936).

Soit

$$\frac{d\xi_\mu(t)}{dt}=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{\mu,\nu}(t)\,\xi_\nu(t) \qquad (\nu=1,2,\ldots n)$$

un système différentiel linéaire dont les coefficients $\alpha_{\mu,\nu}$ sont des fonctions p. p. de la variable réelle t, soit M le module commun des $\alpha_{\mu,\nu}$; si l'intégrale:

$$\int_0^t R[\alpha_{11}(\tau)+\cdots+\alpha_{n,n}(\tau)]\,d\tau$$

est bornée quel que soit t et si, de plus, toutes les solutions du système sont bornées, alors il existe au moins un système complet de solutions $\{\xi_\mu^{(\nu)}(t)\}$ $(\mu,\nu=1,2,\ldots,n)$ tel que la fonction:

$$\sum_{\sigma=1}^{n}\xi_\mu^{(\sigma)}(t)\,\overline{\xi_\nu^{(\sigma)}}(t+\tau)$$

est p. p. en t, quelque soit τ et quels que soient μ et ν et dont le module est contenu dans M. En particulier

$$\sum_{\sigma=1}^{n}|\xi_\mu^{(\sigma)}(t)|^2$$

est p. p. quel que soit μ. — Ce résultat, dont un cas particulier avait été traité par le *Rf*, est obtenu par la considération du groupe des matrices de translation de la matrice $\|\xi_\mu^{(\nu)}\|=X(t)$. Soit $\{h_i\}$ une suite infinie de nombres réels tels que:

$$\lim_{i\to\infty}\lambda h_i\equiv(\text{mod }2\pi);\text{ quel que soit }\lambda\text{ dans }M$$

on appelle matrice de translation de $X(t)$ par rapport à $\{h_i\}$, la matrice:

$$[X(0)]^{-1}\left[\lim_{i\to\infty}X(h_i)\right].$$

Ces matrices forment un groupe par rapport à la multiplication. — Si ce groupe est abélien, on peut, de plus, déterminer un système complet de solutions tel que chaque fonction de ce système soit de la forme:

$$f(t)\,e^{i\int\frac{g(t)}{|f(t)|^2}dt}$$

où f et g sont des fonctions p. p. réelles, la première positive. *J. Favard.*

Differentialgleichungen, Potentialtheorie:

Marchaud, André: Sur les champs continus de demi-cônes convexes et leurs intégrales. Compositio Math. **3**, 89—127 (1936).

Vgl. das Referat über die C. R.-Voranzeige, dies. Zbl. **10**, 258. *W. Feller.*

Hirschfeld, H. O.: A generalization of Picard's method of successive approximation. Proc. Cambridge Philos. Soc. **32**, 86—95 (1936).

L'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y)$ avec les conditions aux limites $y(0) = A$, $y(a) = B$, a été résolue par Picard pour un intervalle $(0, a)$ suffisamment petit; si on ramène le problème à une équation intégrale non linéaire, la solution est donnée par Hammerstein [Acta math. **54** (1930)] sous la condition (A) $F(x, y) \equiv \int_0^y f(x, t)\,dt \geqq -c_1 y^2 - c_2$, $c_2 > 0$, $0 \leqq 2c_1 < \frac{\pi^2}{a^2}$; en particulier si (A') $f'_y(x, y) \geqq -2c_1$. L'aut. applique à ce problème la méthode des approximations successives en subdivisant $(0, a)$ en n intervalles partiels suffisamment petits, et il ajuste les solutions partielles en observant que le problème considéré est celui du minimum de $I(y) \equiv \int_0^a \{y'^2 + 2F(x, y)\}\,dx$. Dans le cas (A') a lieu l'unicité. En se bornant à la première approximation on retrouve la méthode d'approximation à l'aide des équations aux différences. *W. Stepanoff.*

Vass, John I.: A class of boundary problems of highly irregular type. Duke math. J. **2**, 151—165 (1936).

Es werden hinreichende Bedingungen aufgestellt für die Entwickelbarkeit einer Funktion nach Eigenfunktionen der folgenden in einem bestimmten Sinne „irregulären" Randwertaufgabe: Die Differentialgleichung ist $u''(x) - 2\varrho(\cos c)\,u'(x) + \varrho^2 u(x) = 0$, wo ϱ ein Parameter, c eine Konstante und $c = p\pi/q$ mit $0 < 2p < q$; p, q ganze Zahlen. Das Intervall sei $0 \leqq x \leqq 1$. Randbedingungen sind: Entweder R_I: $u'(0) = 0$, $W_2(u) = a_{21}u'(0) + a_{20}u(0) + b_{21}u'(1) + b_{20}u(1) = 0$. Oder R_{II}: $u(0) = 0$, $W_2(u) = 0$. Verf. gelangt zu folgendem Ergebnis: Dafür, daß $f(x)$ sich nach den Eigenfunktionen der Randwertaufgabe im offenen Intervall $(0, 1)$ in eine gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln läßt, ist folgendes hinreichend: $f(x)$ ist integrierbar und von beschränkter Variation in $(0, 1)$, ferner analytisch im Einheitskreis der komplexen x-Ebene sowie darstellbar in der Form $C_1 + C_2x + x^2\Phi_1(x^k)$ bzw. $C_1 + x\Phi_2(x^k)$, je nachdem R_I oder R_{II} vorliegt. Dabei bedeuten C_1, C_2 Konstante und k die kleinste ganze Zahl, für welche $e^{kic} = 1$. Der Beweis für die Reihenentwicklung wird, wie üblich, durch Abschätzung der Greenschen Funktion bzw. gewisser mit ihr in der komplexen ϱ-Ebene gebildeter Kurvenintegrale geliefert. *Haupt* (Erlangen).

Biernacki, M.: Sur les valeurs asymptotiques des intégrales des équations différentielles. Ann. Soc. Polon. math. **13**, 93—99 (1935).

Pour une équation différentielle $y' = f(x, y)$, f étant continue dans le démiplan $x > a$, (*) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x, y) = \varphi(y)$ existant uniformément pour $-\infty < y < +\infty$, $\overline{\lim\limits_{y\to-\infty}}\, \varphi(y) > 0$, $\underline{\lim\limits_{y\to+\infty}}\, \varphi(y) < 0$, — toute valeur limite y_0 pour $x\to\infty$ d'une intégrale est finie et telle que $\varphi(y_0) = 0$. La même conclusion a lieu pour une intégrale finie, si $c < y_0 < d$ et si (*) existe uniformément dans tout $\langle c', d'\rangle \subset (c, d)$. Si $\varphi(y)$ passe par un zéro y_0 en décroissant, il existe une infinité d'intégrales tendant vers y_0; il en existe une au moins, si $\varphi(y)$ croît au point y_0. *W. Stepanoff* (Moskau).

Kamke, E.: Über die partielle Differentialgleichung $f(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = h(x,y)$. Math. Z. **41**, 56—66 (1936).

Die Funktionen f, g, h sind in einem Gebiete $\mathfrak{G}$ stetig differentiierbar, $f^2 + g^2 > 0$. Dann existiert in jedem einfach zusammenhängenden Gebiete $\mathfrak{g}$, $\bar{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{G}$, f, g, h in $\mathfrak{g}$ beschränkt, ein Integral $J(x, y)$ der im Titel geschriebenen Differentialgleichung. Für $h \equiv 0$ existiert $J(x, y)$ mit $J_x^2 + J_y^2 > 0$. *W. Stepanoff* (Moskau).

Görtler, Heinrich: Asymptotische Eigenwertgesetze bei Differentialgleichungen vierter Ordnung. Mitt. math. Semin. Gießen H. **26**, 1—62 (1936).

Für Eigenwertprobleme, die aus einem selbstadjungierten Differentialausdruck vierter Ordnung in einer und zwei Veränderlichen (in zwei Veränderlichen sei der Differentialausdruck von der Form $A\Delta\Delta u$ + Glieder niedrigerer Ordnung) entspringen, wird nach Methoden von Courant die asymptotische Verteilung der Eigenwerte angegeben. *Rellich* (Marburg, Lahn).

Pfeiffer, Georg: Die Konstruktion des allgemeinen Operators des Involutionssystems von homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **14,** 327—341 (1936).

The paper determines all linear homogeneous differential operators $Y = \eta^i \partial/\partial x^i$ admitted (Lie, Transformationsgruppen **3**, 138—143) by a complete system X_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, r)$. The first solution is obtained by assuming X_α in solved form and treating directly the differential equations on the unknown coefficients of Y. The second solution (pp. 340—341) is much more to the point. It amounts to reducing X_α to the form $\partial/\partial x^\alpha$ by a transformation T, then finding the symbols Y admitted by $\partial/\partial x^\alpha$ and finally transforming them by T^{-1}. This, of course, requires a knowledge of the solutions of $X_\alpha f = 0$. Since the first method also involves these solutions, there seems no reason for including it. *J. M. Thomas* (Durham).

Pfeiffer, G.: Sur la transformation de A. Mayer dans la méthode de Jacobi-Mayer. Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. math. **1,** 1—4 u. franz. Zusammenfassung 4 (1935) [Ukrainisch].

Cerf, G.: Sur des transformations d'équations aux dérivées partielles du second ordre à n variables indépendantes obtenues par une propriété d'invariance du groupe des transformations de contact. J. Math. pures appl., IX. s. **15,** 1—10 (1936).

A un élément du premier ordre $x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3$ faisons correspondre une hypersurface à trois dimensions (1) $Z = F(X_1, X_2, X_3;\, x, z, p)$. L'élimination de X_1, X_2, X_3 entre les relations (2) $F_i = \partial F/\partial x_i + p_i \partial F/\partial z + p_{1i} \partial F/\partial p_1 + p_{2i} \partial F/\partial p_2 + p_{i3} \partial F/\partial p_3 = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ et (3) $D(F_1, F_2, F_3)/D(X_1, X_2, X_3) = 0$ conduit, en général, à une relation entre les x, z, p. Pour $p_1 = \partial z/\partial x_1, \ldots;\, p_{11} = \partial^2 z/\partial x_1^2, \ldots$, cette relation devient une équation (A) du second ordre pour la fonction inconnue z. Dans certaines conditions les X_1, X_2, X_3 déterminés par les relations (2) et (3) sont des fonctions indépendantes de x_1, x_2, x_3 lorsque z décrit une intégrale de l'équation (A). La transformation correspondante $x \to X$ conduit alors de l'intégrale z à une fonction $Z(X_1, X_2, X_3)$ (1) et on démontre que cette fonction vérifie une équation (B) du second ordre. Il en est ainsi dans le cas ou les x, z, p figurent dans F par l'intermédiaire de seulement 5 fonctions $\varphi_j(x, z, p)$ $(j = 1, \ldots, 5)$ et ces fonctions φ_j constituent un groupe de fonctions. *O. Borůvka* (Brno).

Rellich, Franz: Zur Konstruktion der Grundlösung für eine gemischte Randwertaufgabe einer partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung. Math. Ann. **112,** 490 bis 492 (1936).

Es handelt sich um die Gleichung

$$u_{xxt} - au = f(x, t), \qquad (a = \text{konst.}).$$

Gesucht wird eine Lösung $u(x, t)$ im Streifen $0 \leqq x \leqq 1$, $t \geqq 0$, mit vorgegebenen Randwerten. Durch eine einfache Reihenentwicklung wird die Grundlösung des Problems angegeben. *G. Cimmino* (Napoli).

Winants, Marcel: Chacun des deux problèmes (a_0, III, 3′) et (a_0, III, 2′) peut être résolu par le moyen d'une équation intégrale ayant un nombre infini de termes. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **22,** 8—25 (1936).

Man sucht nach einer Lösung der Gleichung

$$z_{xxy} - z_{xyy} = f(x, y, z)$$

in der Nähe der Koordinatenursprung mit vorgegebenen Werten von z für $y = 0$, $x = 0$ und $x = y$, oder vorgegebenen Werten von z für $y = 0$, von z und z_x für $x = y$. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung beweist man durch die Methode der sukzessiven Approximationen, nachdem die Differentialgleichung mit den Nebenbedingungen in eine Gleichung der Form $z = If(x, y, z)$ transformiert worden ist, wobei I einen gewissen Linearoperator bezeichnet. *G. Cimmino* (Napoli).

Gay: Sur l'équation de M. P. Humbert. Bull. Soc. Math. France **63**, 197—209 (1935).

Cette équation est

$$\partial^3 u/\partial x^3 + \partial^3 u/\partial y^3 + \partial^3 u/\partial z^3 - 3\partial^3 u/(\partial x\, \partial y\, \partial z) = 0,$$

mais, par un changement d'axes, M^r Liénard (Société mathématique de France, Comptes rendus des séances de l'année **1933**, pages 29 à 32) la ramena à la forme exclusivement employée dans le travail actuel,

$$\partial^3 u/(\partial x^2\, \partial z) + \partial^3 u/(\partial y^2\, \partial z) = \partial \Delta u/\partial z = 0.$$

L'aut. étudie les questions de trouver des solutions u dans un domaine borné, connaissant soit les valeurs de u sur la frontière, soit les dérivées de u suivant les normales aux courbes de niveau (Oz étant vertical), soit les dérivées de u suivant les normales à la frontière. Le premier problème reçoit une solution explicite, où figurent une fonction de Green et une fonction arbitraire (à signaler une confusion qui, dans un cas particulier étudié au paragraphe 5, fait que l'aut. affirme faussement la constance d'une certaine fonction). Le deuxième problème peut être traité d'une façon analogue, brièvement indiquée. Pour le troisième problème, qui est plus compliqué, l'aut. indique sommairement un mécanisme d'approximations successives, soumis à de nouvelles hypothèses relatives à la frontière; pour ce problème, l'aut. étudie à part le cas des surfaces de révolution. *Georges Giraud* (Bonny-sur-Loire).

Selberg, Henrik L.: Ein Existenzsatz der Potentialtheorie und seine Anwendung. Avh. Norske Vid. Akad. Oslo **1935**, 1—10 (Nr 6).

Der bekannte Satz über die Existenz einer harmonischen Funktion $u(z, \alpha, \beta)$ mit einem positiven und einem negativen logarithmischen Pol in α bzw. β auf einer beliebigen Riemannschen Fläche wird bewiesen und zum Beweise eines Satzes von Myrberg (dies. Zbl. **7**, 163) über die Greensche Funktion auf Riemannschen Flächen benutzt. *L. Ahlfors* (Cambridge, Mass.).

Garrett, George A.: Necessary and sufficient conditions for potentials of single and double layers. Amer. J. Math. **58**, 95—129 (1936).

Let S be a simple closed surface having a tangent plane at each of its points, and such that, for any two points P, Q of S, the interior normals n_P, n_Q to S satisfy (1) $|\sphericalangle n_P, n_Q| < K\,\overline{PQ}$, where K is independent of P, Q. Let $\nu(e)$ be a completely additive function of point sets e (meas. B) on S. The author studies potentials representable in the forms

$$\text{I}\quad U(M) = \int_S \frac{\cos(MP,\, n_P)}{MP^2}\, d\nu(e_P), \qquad \text{II}\quad V(M) = \int_S \frac{d\nu(e_P)}{MP}.$$

The following conditions are in particular shown to be equivalent. (a) For M in the interior T of S $U(M)$ can be written in the form I; (b) For M in T $U(M)$ can be written as the difference of two not negative functions each harmonic in T; (c) $U(M)$ is harmonic in T and $\varlimsup_{p\to\infty} \int_{S_p} |U(M)|\, dS_p < \infty$ for a sequence of surfaces $\{S_p\}$ each lying in T, each having the properties of S, and such that (i) [max for P on S of $\delta(P, S_p)] \to 0$ as $p \to \infty$, where $\delta(P, S_p)$ is the normal distance from P to S_p, and (ii) an inequality of the type (1) holds for P, Q arbitrary on $S + S_1 + S_2 + \cdots$. Similar results are given for the region exterior to S, and for representation in the form II. The proofs rest in part on Evans' and Miles' (this Zbl. **1**, 277) analysis of the integral equations associated with the generalized Dirichlet and Neumann problems for surfaces of the same type as S. That (a), (b) and (c) are equivalent in the case of spheres was proved by Bray and Evans [Amer. J. Math. **49**, 153—180 (1927)]. That (b) and (c) are equivalent in the case that S has bounded curvature and the S_p are normal surfaces approximating S was proved by de la Vallée Poussin (this Zbl. **6**, 308). *Gergen.*

Lampariello, G.: Comportamento all'infinito di usuali funzioni del posto. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **22,** 557—564 (1935).

Es sei $\mathfrak{w}$ ein wirbelfreies Vektorfeld derart, daß in jeder festen Richtung $r^m \mathfrak{w}$ $(m > 1)$ für $r \to \infty$ gegen einen nicht identisch verschwindenden Vektor $\mathfrak{u}$ strebt; dann wird bewiesen, daß es unter den Potentialen von $\mathfrak{w}$ eins gibt, das im Unendlichen von der Größenordnung $m - 1$ verschwindet. — Ein ähnlicher Satz wird auch für skalare Funktionen bewiesen. *W. Feller* (Stockholm).

Sokolnikoff, I. S., and E. S. Sokolnikoff: The problem of Dirichlet for an ellipsoid. Terrestr. Magnet. Atmosph. Electr. **40,** 433—442 (1935).

This is the paper the resumé of which was reviewed in this Zbl. **13,** 113. In addition to the material mentioned in the review this paper contains an outline of a scheme of successive approximations for the solution of the system of infinitely many equations in infinitely many unknowns cited. No attempt is made to prove that the approximations yield a solution. The paper also contains formulas for the calculation of the capacity of an ellipsoid of revolution in the presence of grounded conducting sheets of infinite extent. *J. J. Gergen* (Rochester).

Minetti, Silvio: Sul movimento di un corpo solido intorno ad un punto fisso e sull'integrazione con una sola quadratura del movimento di precessione regolare. Mem. Accad. Ital. **6,** 1335—1353 (1935).

The author's general theory of the geometry of function spaces [Mem. Accad. Ital. **4** (1933); this Zbl. **8,** 165] is applied to discover a case of integrability by a single quadrature of the general Riccati differential equation. This result is then used in obtaining the explicit integration of the differential equations of precession. *D. C. Lewis* (Ithaca, N. Y., U. S. A.).

Bakaliajev, A. S.: Le théorème de l'unicité pour quelques problèmes de limites dans la théorie de l'élasticité. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **1,** 55—58 (1936).

Beweis für die Eindeutigkeit der Lösung des in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **13,** 165) gestellten Problems. Die gesuchten Funktionen müssen — außer den Differentialgleichungen und Randbedingungen zu genügen — im Unendlichen in geeigneter Weise verschwinden und die „verallgemeinerte Anstrahlungsbedingung" erfüllen. Die verwendeten Hilfsmittel sind dieselben wie in der genannten Note des Verf. *Th. Pöschl* (Karlsruhe).

Germay, R.-H.-J.: Sur l'intégrale d'une équation intégro-différentielle, considérée comme fonction des valeurs initiales x_0 et y_0. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **4,** 293—298, 325—329 (1935); **5,** 2—5 (1936).

Germay, R. H. J.: Sur les solutions des systèmes d'équations intégro-différentielles normales considérées comme fonctions des valeurs initiales $x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_p^0$. I. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **4,** 329—336 (1935); **5,** 5—11 (1936).

Die Lösung $y(x)$ der Integro-Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y;\, u_1, u_2, \ldots, u_p), \qquad u_r = \int_{x_0}^{x} f_r[x, s;\, y(s)]\, ds,$$

mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$, unter passenden Voraussetzungen für $F, f_1, f_2, \ldots, f_p$, ist eine stetig differentiierbare Funktion von x_0, y_0; denn die Ableitungen der sukzessiven Approximationen nach x_0 und y_0 konvergieren gleichmäßig. Dieser Satz läßt sich auf den Fall eines Systems verallgemeinern. *G. Cimmino.*

Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

Sternberg, W.: Équations intégrales étendues. C. R. Acad. Sci., Paris **202,** 382—384 (1936).

The integral equation considered is the mixed integral equation:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi + p(x)\, \varphi(c) + f(x)$$

c lying between a and b. The usual results concerning solutions of such an equation are given, most of which have obviously been obtained previously, e. g. by Hurwitz [Trans. Amer. Math. Soc. **16**, 121—133 (1915)] and Moore [Bull. Amer. Math. Soc. **18**, 358 (1912)]. Any novelty would result from the presence of the parameter λ on the integral term and not on the mixed term $p(x)\,\varphi(c)$ or the utilization of two parameters, one for each of these terms. *Hildebrandt* (Ann Arbor).

Randels, W. C.: On Volterra-Stieltjes integral equations. Duke math. J. **1**, 538 bis 542 (1935).

The author considers integral equations of the form

$$f(x) = g(x) + \lambda\int_0^x f(y)\,d_y K(x, y).$$

Here the integral is of the Young-Stieltjes type over the open interval $(0, x)$. $g(x)$ is bounded and meas. (B), $K(x, y)$ is meas. (B) in x, and there is a bounded, $\uparrow$ function $V(y)$, $V(0) = 0$, such that $|K(x, y_1) - K(x, y_2)| \leqq |V(y_1) - V(y_2)|$. The author shows the existence of a unique solution given by a suitable extension of the usual resolvent formula. The special case in which $K(x, y)$ is continuous in y had been solved by J. D. Tamarkin [abstract, Bull. Amer. Math. Soc. **35**, 165 (1929)]. The following useful lemma is basic in the discussion. If $f(x) > 0$, bounded, and meas. (B), and $g_1(x)$, $g_2(x)$ are bounded, $\uparrow$, and continuous on the left, then

$$\int_0^1 f(x)\,d[g_1(x)\,g_2(x)] \geqq \int_0^1 f(x)\,g_1(x)\,dg_2(x) + \int_0^1 f(x)\,g_2(x)\,dg_1(x).$$

E. Hille (New Haven, Conn.).

Pincherle, S.: Le dilatazioni nello spazio delle serie di potenze. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **14**, 343—348 (1936).

A dilatation A on the space S of power series is defined by a sequence of numbers $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ and the condition that $A(x^n) = a_n \cdot x^n$. The set of these operators form a commutative ring. The infinitesimal transformation of the group is defined by $X(x^n) = n x^n$. For any f of S: $X(f) = xDf$ (D = derivative). The derivative of a linear functional operation B on S is defined by the identity: $B'(\varphi) = B(x\varphi) - xB(\varphi)$. The Taylor expansion $A(f\varphi) = A(\varphi)\,f(x) + A'(\varphi)\,f'(x) + \cdots + A^{(n)}(\varphi)\,f^{(n)}(x)/n! + \cdots$ is formally valid. In particular for $\varphi = 1$, $A(f) = \sum(\Delta^n a_0)\,x^n D^n f/n!$ This assigns a meaning to $A(x^s) = a_s x^s$ for any s, and leads to a necessary and sufficient condition that the field of regularity of f and $A(f)$ be identical, viz. that $\Delta^n a_0$ be the coefficients of the expansion of an entire function. *Hildebrandt* (Ann Arbor).

Mazur, S., et W. Orlicz: Sur la divisibilité des polynomes abstraits. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 621—623 (1936).

Einfachste Teilbarkeitseigenschaften von Polynomen mehrerer Veränderlichen lassen sich auf abstrakte Polynome [vgl. S. Masur und W. Orlicz, Studia Math. **5**, 50—68 u. 179—189 (1935); dies. Zbl. **13**, 210] verallgemeinern. Insbesondere gilt für die abstrakten Polynome die Eindeutigkeit der Zerlegung in irreduzible Polynome. *A. Kolmogoroff* (Moskau).

Kantorovitch, Leonidas: Sur les propriétés des espaces semi-ordonnés linéaires. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 813—816 (1936).

Une définition simplifiée [comparer la Note de l'auteur dans C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **4**, 13—16 (1935); ce Zbl. **13**, 168] des espaces semi-ordonnés linéaires. Soit Y un espace vectoriel, c'est à dire un groupe additif abelien avec des nombres réels comme opérateurs. On ne suppose à priori aucunes propriétés topologiques de Y. Au lieu de cela l'auteur propose considérer comme la notion primitive la notion d'un élément positif de Y. En écrivant $y' > y''$ quand $y' - y''$ est positif, les axiomes des espaces semi-ordonnés linéaires s'expriment ainsi: Axiome I. Lorsque $y > 0$, on n'a pas $y = 0$, ni $-y > 0$. — Axiome II. Lorsque $y' > 0$ et $y'' > 0$, on a

$y' + y'' > 0$. — Axiome III. Quel que soit $y \in Y$, il existe un élément $(y)_+ \in Y$ (la partie positive de y) tel que l'on ait $(y)_+ \geqq 0$, $(y)_+ - y \geqq 0$ et que l'on ait $y' > (y)_+$ pour chaque y' qui vérifie à la fois les conditions $y' > 0$ et $y' > y$. — Axiome IV. Lorsque $k > 0$ est un nombre réel et $y > 0$ un élément de Y, on a $ky > 0$. — Axiome V. Quel que soit l'ensemble E borné supérieurement des éléments y de Y, il existe la borne supérieure précise sup E. — Soit maintenant

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n = \inf_n \{\sup (y_n, y_{n+1}, \ldots)\}, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} = \sup_n \{\inf (y_n, y_{n+1}, \ldots)\}.$$

On écrit $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, lorsqu'on a $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n = y$ et $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n = y$. Un espace semi-ordonné linéaire est régulier, si, quelle que soit une suite $\{E_n\}$ des sousensembles de Y avec $\lim\limits_{n\to\infty} \{\sup E_n\} = y_0$ déterminé, il existe une suite des ensembles finis $E'_n \subset E_n$, tels que $\lim\limits_{n\to\infty} \{\sup E'_n\} = y$.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Differenzengleichungen:

Robinson, L.-B.: Sur une équation aux différences mêlées. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 1319 (1935).

The author announces an extension of results of Izumi (Tôhoku Math. J. **30**, 10—18) concerning the equation $f'(x) = a(x)\, f(\omega(x)) + b(x)$. *C. R. Adams.*

Trjitzinsky, W. J.: Linear difference equations containing a parameter. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **14**, 181—214 (1936).

The author studies the asymptotic form, in the complex parameter λ, of the solutions of the equation $(A) \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k}(x, \lambda)\, y(x+k) = 0$, where

$$a_{n-k}(x, \lambda) \sim \lambda^{m_k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n-k,\nu}(x)\, \lambda^{-\nu} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n;\ m_k \text{ integral})$$

in the parameter λ at $\lambda = \infty$ for λ in a region R and $|\arg \lambda|$ bounded; the $\alpha_{n-k,\nu}(x)$ are analytic for x ($|x| \geqq 1$) in any finite part of a region K such that x in K implies $x - 1$ in K;

$$\alpha_{n-k,\gamma}(x) \sim x^{c_{n-k,\gamma}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha^u_{n-k,\gamma}\, x^{-\mu}$$

($k = 0, 1, \ldots, n$; $\gamma = 0, 1, \ldots$; $c_{n-k,\gamma}$ integral); and (A) is formally, and in an extended sense here defined, of Fuchsian type in x. The investigation follows the lines of recent work of a similar nature by Birkhoff and Trjitzinsky on linear difference equations (see this Zbl. **6**, 168) and by the latter on linear q-difference and linear differential equations (see this Zbl. **7**, 211; **8**, 255) and linear differential equations containing a parameter (to appear in Acta math.). Thus formal solutions are determined, a sum is obtained for a function of the type $\lambda^{-lx/p} x^h h(x, \lambda)$, and a process of iteration (due to Birkhoff) basically employed as an aid to securing the main existence theorem — to the effect that there exists a fundamental set of analytic solutions asymptotically represented by the formal series. The concluding section is devoted to the associated non-homogeneous equation. *C. R. Adams* (Providence).

Variationsrechnung:

Menger, Karl: Calcul des variations dans les espaces distanciés généraux. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 1007—1009 (1936).

L'Auteur indique une extension des méthodes directes de M. Tonelli au calcul des variations des fonctionnelles curvilignes dans des espaces abstraits très générals, dont ceux considérés par M. Bouligand, dans ses recherches de calcul des variations géométrique, sont des cas particuliers. *Basilio Manià* (Pisa).

Bukrejeff, B.: Die Zermelosche Navigationsaufgabe. Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. math. **1**, 167—170 u. deutsch. Zusammenfassung 170 (1935) [Ukrainisch].

Salvadori, Mario: Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **5,** 51—72 (1936).

The problem considered is that of minimizing an integral of the form $\iint_R f(x, y, z, z')\, dx\, dy$, wherein z' means $\partial^2 z/\partial x\, \partial y$. For this problem the analogues of the necessary conditions of Euler, Legendre, Jacobi and Weierstrass are found. The Euler condition is $(f_{z'})' + f_z = 0$, the meaning of the $'$ being as above. The Legendre and Weierstrass conditions are formally identical with those for single integrals. The Jacobi condition is expressed in terms of the characteristic numbers of a certain integral equation, the Legendre condition being assumed to hold in strengthened form. By expansion methods, it is shown that if $z_0(x, y)$ is continuous together with certain of its partial derivatives [including $(z_0')'$] on a rectangle R, and satisfies the Euler condition and the strengthened Legendre and Jacobi conditions, then z_0 furnishes a weak relative minimum for $\iint_R f(x, y, z, z')\, dx\, dy$ in the class of all (sufficiently continuous) functions having the same boundary values as z_0. *McShane.*

Froloff, S., et L. Elsholz: Limite inférieure pour le nombre des valeurs critiques d'une fonction, donnée sur une variété. Rec. math. Moscou **42,** 637—642 (1935).

The cycle Z on a manifold M has length (longueur) l in M if l is the maximum number of cycles $z_i \subset M$, different from M, such that the intersection $Z \cdot z_1 \cdot z_2 \ldots z_l \not\sim 0$. The closed set $F \subset M$ has length l if l is the greatest integer μ such that in every neighborhood of F there is a cycle of length μ. The length of an empty set is -1. Suppose $f(x_1, \ldots, x_n)$ is of class C'' on manifold M^n and c is an isolated critical value [(x) local coordinates]. Theorem 1 (Froloff): Let α, β, and λ be the respective lengths of the sets (α) satisfying $f \leqq c - \varepsilon$; (β) satisfying $f \leqq c + \varepsilon$; (λ) set E of critical points at which $f = c$. Then if ε is sufficiently small, $\lambda \geqq \beta - \alpha - 1$. Let $[F_i]$ be the class of closed sets on M^n which have lengths $\geqq i$, $i = 0, 1, \ldots, m$ $=$ length of M^n. Let c_i be the minimum of the maxima of the values of f on the sets of $[F_i]$. Theorem 2 (Elsholz): If $c_i = c_j$, $j > i$, then there is a set P of critical points, of length $\geqq j - i$, such that $f = c_i = c_j$ at each point of P. The work is closely connected with that of Lusternik and Schnirelmann (this Zbl. **11,** 28), and of course with that of Marston Morse. *A. B. Brown.*

Funktionentheorie:

Montel, Paul: Sur quelques rapports nouveaux entre l'algèbre et la théorie des fonctions. (*2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.*) Mathematica, Cluj **9,** 47—55 (1935).

Popken, Jan: Über arithmetische Eigenschaften analytischer Funktionen. Groningen: Diss. 1935. 121 S.

Two principal results of the paper can be formulated as follows: 1. Let $f(x)$ fulfil the differential equation

$$\sum_{\mu=0}^{m} p_\mu(x)\, f^{(\mu)}(x) = 0,$$

$p_\mu(x)$ being polynomials with a degree $\leqq g$. Let a be rational, $p_m(a) \neq 0$, and R may denote the maximal number of rational independent terms in the set $\{f(a), f'(a), \ldots, f^{(m-1)}(a)\}$. Supposed $f(x)$ is not a polynomial, a positive number c exists such that

$$c^{h+1}\, h!^{R-1} \max_{0 \leqq \sigma \leqq m+g-1} |f^{(h+\sigma)}(a)| \geqq 1, \qquad h = 0, 1, 2, \ldots$$

2. Let the development of an algebraic function around $x = 0$ have algebraic coefficients c_n. Then a constant $c > 0$ exists such that either $c_n = 0$ or $|c_n| \geqq c^{-n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *G. Szegö* (St. Louis, Mo.).

● **Mandelbrojt, S.: Séries lacunaires. (Actualités scient. et industr. Nr. 305. Exposés sur la théorie des fonctions. Publiés par Paul Montel. II.)** Paris: Hermann & Cie. 1936. 40 pag.

Das Problem, aus der Natur der Koeffizienten a_n auf die Verteilung und Art der Singularitäten der Funktion $\sum a_n z^n = f(z)$ zu schließen, wurde zuerst von Hadamard behandelt. Sind insbesondere immer wieder Gruppen von Koeffizienten Null, so heißt die Reihe eine Lückenreihe. Eine natürliche Verallgemeinerung des Problems ist die auf Dirichletsche Reihen $F(s) = \sum a_n e^{-l_n s}$. Ist $F(s)$ eine ganze Funktion, so kann man aus der Verteilung der l_n auf die Existenz gewisser Juliascher Richtungen schließen. Die einschlägigen Resultate sind hier übersichtlich, teilweise mit Beweisskizzen sowie Literaturnachweis, zusammengestellt. *Otto Szász* (Cambridge, Mass.).

Onofri, Luigi: Intorno agli zeri di alcune classi di funzioni analitiche. Mem. Accad. Ital. **6**, 1267—1291 (1935).

The first part contains a number of theorems of well known type on sine or cosine series having non-negative sums owing to convexity properties of the coefficients or the like. As an example may be mentioned: If $b_n \geqq 0$, $\Delta(n b_n) \leqq 0$, then $\sum_1^\infty b_n \sin n\varphi$ converges to a positive sum for $0 < \varphi < \pi$. In the second part of the paper these results are applied to a discussion of the number of zeros of a power series $f(z) = \sum_1^\infty a_n z^n$ inside the unit circle. The underlying idea is that there are exactly k zeros in $|z| < 1$ if the real or the imaginary part of $z^{-k} f(z)$ does not change its sign on $|z| = 1$. As a sample of the resulting theorems we can take: If $a_{k+n} + a_{k-n}$ $(n = 0, 1, \ldots, a_{-n-1} = 0)$ is bounded, non negative, convex for $n \leqq k$ and never concave, then $f(z)$ has k zeros in $|z| < 1$. *E. Hille* (New Haven, Conn.).

Macintyre, A. J.: Two theorems on „schlicht" functions. J. London Math. Soc. **11**, 7—11 (1936).

Sharpening a result of Littlewood the author proves the inequalities

$$\left|\frac{f'(z)}{1 - 4f(z)}\right| \leqq (1 - |z|^2)^{-1}, \qquad |\log(1 - 4f(z))| \leqq 2\log\frac{1 + |z|}{1 - |z|},$$

valid for functions $f(z)$ univalent and $\neq 1/4$ in $|z| < 1$, $f(o) = 0$. The bounds are attained. *G. Szegö* (St. Louis, Mo.).

Ghermanescu: Sur le théorème de Picard-Borel. Ann. École norm., III. s. **52**, 221—268 (1935).

L'auteur développe trois notes des C. R. Acad. Sci., Paris (voir ce Zbl. **10**, 121 et 266; **11**, 119). Il donne donc des conditions (relations de recurrence entre les coefficients) permettant de reconnaître qu'une fonction entière d'ordre fini admet une valeur exceptionnelle de Picard ou Hadamard, avec extensions au cas d'un système linéaire de fonctions entières d'ordre fini, système pour lequel il définit diverses sortes de combinaisons exceptionnelles: non homogènes (ou de Montel), homogènes, fondamentales et primordiales; il complète un théorème de Varopoulos sur les valeurs exceptionnelles des algébroïdes. A noter que l'A. attribue à Borel le th. d'Hadamard d'après lequel une identité $f \equiv P + Q e^R$, où f est une fonction donnée d'ordre fini, P, Q, R des polynomes, est unique, et ses généralisations (Hadamard, J. Math. pures appl. **1893**, 188—189; Borel, Fonctions entières, Chapitre V). Le th. de Borel, relatif à l'ordre infini, ou au cas où Q est une fonction entière d'ordre moindre que f, n'intervient qu'à la fin du mémoire dans les généralisations signalées très sommairement p. 266—267. *G. Valiron* (Paris).

Ullrich, Egon: Zum Umkehrproblem der Wertverteilungslehre. Vorl. Mitt. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, N. F. **1**, 135—150 (1936).

Das Defektproblem der Wertverteilungslehre besteht in der Konstruktion einer in der ganzen Ebene meromorphen Funktion, die gewisse gegebene Werte a_ν mit gegebenen Defekten $\delta(a_\nu)$ und Verzweigungsindizes $\varepsilon(a_\nu)$ von der Gesamtsumme 2 annimmt. Der Fall $\varepsilon(a_\nu) = 0$ wurde durch die von R. Nevanlinna aufgestellten Funktionen $\nu(z)$ erledigt. Die mit rationalen Funktionen zusammengesetzten $R(\nu(z))$ liefern weitere Beiträge, aber genügen nicht zur vollständigen Lösung. — Dem Verf.

gelingt die vollständige Lösung durch den folgenden Ansatz. Man betrachte den topologischen Baum (Streckenkomplex) der Funktionen $R(\nu(z))$. Dieser besteht aus einer endlichen Anzahl von periodischen Enden, die untereinander gleich sind: darin liegt der Grund, warum diese Funktionen keine vollständige Lösung geben können. Der Verf. konstruiert nun topologische Bäume, die wiederum periodische Enden besitzen, aber diese sind jetzt vollständig willkürlich. Es läßt sich nun vermuten (und der Beweis soll später erscheinen), daß die zugehörigen Funktionen vom Grenzpunkttypus sein werden. Es ist dann leicht zu sehen, daß diese Funktionenklasse genügend schmiegsam ist, um das gestellte Problem vollständig zu lösen. — Die Arbeit enthält viele instruktive Beispiele von topologischen Bäumen gegebener Funktionen.
Ahlfors (Cambridge, Mass.).

Minetti, Silvio: Sulle famiglie di funzioni analitiche ammettenti valori eccezionali e sul comportamento di una funzione uniforme in prossimità di un punto singolare essenziale isolato. Mem. Accad. Ital. **6,** 1293—1307 (1935).

In der Arbeit wird die folgende Tatsache als besonders wichtig hervorgehoben: Sei F eine Familie von Funktionen, die im Gebiete C einen Ausnahmewert a besitzen. Die Normalität von F ist damit gleichbedeutend, daß man aus jeder Teilfolge entweder eine gegen die Konstante a konvergierende Folge oder eine im abgeschl. Teilgebiet C' gleichmäßig von a entfernte Folge wählen kann. *Ahlfors.*

Miranda, Carlo: Sur un nouveau critère de normalité pour les familles de fonctions holomorphes. Bull. Soc. Math. France **63,** 185—196 (1935).

L'Auteur donne la démonstration complète de ce th. énoncé dans une Note précédente (voir ce Zbl. **11,** 311): Toute famille de fonctions $f(z)$ holomorphes dans un domaine où elles ne prennent pas la valeur a et où leurs dérivés d'ordre k ne prennent pas la valeur $b \neq 0$, est normale dans ce domaine. Il fait usage de la formule de Jensen-Poisson due à R. Nevanlinna et suit d'assez près l'exposé de Bureau (voir ce Zbl. **1,** 398; **6,** 408) c'est-à-dire la méthode donnée par R. Nevanlinna dans sa démonstration du th. de Landau (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **1924**), associée au th. de Montel d'après lequel les fonctions holomorphes dans un domaine D et bornées dans leur ensemble dans tout domaine Δ complétement intérieur à D, forment une famille normale. La proposition utilisée par l'auteur: une famille de fonctions $f(z)$, holomorphes pour $|z| < 1$ est normale dans ce cercle si $m(r, f) < A$, où $m(r, f)$ est la moyenne de Nevanlinna, découle en effet de ce th. de Montel et de l'inégalité de Nevanlinna $(r - |z|) \log |f(z)| < (r + |z|)\, m(r, f)$ (Comp. Bull. Sci. math. **1926,** 200). *G. Valiron* (Paris).

Staniland, A. E.: A note on analytic rotations in Euclidean space of four dimensions. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **15,** 65—72 (1936).

Verf. untersucht diejenigen orthogonalen Transformationen im w, z-Raum, die analytische Flächen wieder in analytische Flächen überführen. Dies sind die analytischen Drehungen [s. schon K. Reinhardt, Analytische Funktionen zweier Veränderlichen. Math. Ann. **83** (1921)], gekoppelt mit der Transformation $w' = \bar{w}, z' = \bar{z}$. Fixelemente und ausgezeichnete Darstellung werden angegeben. *Behnke.*

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Nagel, Ernest: The meaning of probability. J. Amer. Statist. Assoc. **31,** 10—30 (1936).

Vortrag mit anschließender Diskussion über denkbare Interpretationsmöglichkeiten des Wortes „Wahrscheinlichkeit" im Sprachgebrauch (etwa: „X ist wahrscheinlich glücklicher als Y"). *W. Feller* (Stockholm).

Bjerke, Bj.: Die Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung in genereller Form. Norsk mat. Tidsskr. **18,** 7—9 (1936) [Norwegisch].

Die elementare Formel dafür, daß von n Ereignissen mindestens eines bzw. alle eintreten, wird aus einer kombinatorischen Relation abgeleitet, die nach Ansicht des Verf. von der gewöhnlich benutzten verschieden und allgemeiner ist. *W. Feller.*

Kaucký, Jos.: Le problème des itérations dans un cas des probabilités dépendantes. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 722—724 (1936).

Verf. stellt sich die Aufgabe, die Wahrscheinlichkeiten von Iterationen gegebener Länge bei Ziehungen aus einer Urne zu ermitteln, wobei der Urne nach jeder Ziehung eine fest gegebene Anzahl von Kugeln der betreffenden Farbe beigefügt wird. Die Lösungen werden in Form von erzeugenden Funktionen gegeben. *A. Khintchine.*

Lévy, Paul: La loi forte des grands nombres pour les variables aléatoires enchaînées. J. Math. pures appl., IX. s. **15**, 11—24 (1936).

Ausführliche Beweise früher angekündigter Ergebnisse (dies. Zbl. **12**, 111). Der Beweis des Satzes vom iterierten Logarithmus beruht auf dem entsprechend verallgemeinerten Ljapounoffschen Grenzwertsatz. Für das starke Gesetz der großen Zahlen wird ein elementarer Beweis gegeben. *A. Khintchine* (Saratow).

Lévy, Paul: Sur la notion de probabilité conditionnelle. Bull. Sci. math., II. s. **60**, 66—71 (1936).

Analyse der Voraussetzungen, unter welchen der folgende plausible Satz richtig ist: Das Ergebnis A habe die Wahrscheinlichkeit a und außerdem die bedingte Wahrscheinlichkeit $\lambda(x)$, wenn bereits bekannt ist, daß eine gewisse stochastische Veränderliche X den Wert x angenommen hat; dann ist a der wahrscheinliche Wert $\lambda(x)$. *W. Feller* (Stockholm).

Copeland, Arthur H.: The probability limit theorem. Duke math. J. **2**, 171—176 (1936).

Es wird ein Beweis des zentralen Grenzwertsatzes gegeben, der im wesentlichen mit dem P. Lévyschen äquivalent ist. Der Zweck ist, durch eine unmittelbare Anknüpfung an die „Matrix Theory of Measurement“ des Verf. [Math. Z. **37** (1933); dies Zbl. **7**, 252] zu beweisen, daß „there is no inconsistency in the assumption that physical measurements behave in the manner described by the theorem“. Es ist jedoch nicht klar ersichtlich, in welcher Richtung die vorliegende Arbeit über die zitierte hinübergreifen soll. *W. Feller* (Stockholm).

Tricomi, F.: Ancora sulla rappresentazione di una legge di probabilità mediante esponenziali di Gauss. Giorn. Ist. Ital. Attuari **7**, 42—44 (1936).

Zurückkommend auf seine Untersuchungen über die Darstellbarkeit eines Wahrscheinlichkeitsgesetzes vermittels der Gaußschen Funktion (dies. Zbl. **12**, 28) bemerkt der Verf., daß die in den Integraldarstellungen auftretende „Gewichts“funktion $C(\alpha)$ nicht notwendig positiv sein muß; er führt hierbei noch einige weitere Ergänzungen sowie Literaturhinweise an. *Bruno de Finetti* (Trieste).

Onicescu, O., e G. Mihoc: Sopra le leggi-limite delle probabilità. Giorn. Ist. Ital. Attuari **7**, 54—69 (1936).

Une urne contient $2k$ boules blanches et $2k$ noires. On tire une boule; si c'est une blanche, on dépose ensuite dans l'urne une boule noire; si l'on extrait une noire, on dépose une blanche. Soit ν le nombre de boules blanches extraites dans n tirages successifs; on a toujours $\lim\limits_{n=\infty}\left(\frac{\nu}{n}-\frac{1}{2}\right)=0$, la limite étant prise au sens habituel d'Analyse. Si x est l'écart: $x=\nu-\frac{n}{2}$, et $P_n(x)$ la probabilité d'écart x pour une série de n tirages, l'auteur trouve $P(x)=\frac{1}{2^{4k-1}}C_{4k}^{2k-2x}$, C étant les coefficients binomiques. Si k est très grand, la valeur de $P(x)$ tend vers la formule de Gauss

$$P(x)=\frac{2}{\sqrt{2k\pi}}e^{-\frac{2x^2}{k}}.$$

B. Hostinský (Brno).

Gonin, H. T.: The use of factorial moments in the treatment of the hypergeometric distribution and in tests for regression. Philos. Mag., VII. s. **21**, 215—226 (1936).

In studying the character of discrete distributions involving hypergeometric series, it has been customary to utilize ordinary power moments. The author claims that factorial moments — the r-th factorial moment of $f(x)$ is defined by $m_{(r)} = \sum x^{(r)} f(x)$, where $x^{(r)} = x(x-1)\ldots(x-r+1)$ — are more appropriate and supports this claim by demonstrating their rapid effectiveness in handling a large number of problems already treated by other writers namely, K. Pearson, Biometrika **16**, 172—204 (1924); **13**, 296—300 (1921); S. J. Pretorius, Biometrika **22**, 140—143 (1930); A. A. Tschuprow, Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie, 1927; S. D. Wicksell, Philos. Mag., VI. s. **33**, 389—394 (1917); A. C. Aitken, Edin. Math. Notes **1935**; H. E. Soper, Frequency Arrays **1922**; J. Neyman, Biometrika **18**, 257 (1926).

Albert A. Bennett (Providence).

● **Reichel, Heinrich: Die wichtigsten mathematischen Methoden bei der Bearbeitung von Versuchsergebnissen und Beobachtungen.** Sonderdruck aus: Abderhalden, Handb. d. biolog. Arbeitsmethoden. Abt. 5, Tl. 10. Berlin u. Wien: Urban & Schwarzenberg 1935. 88 S. u. 29 Abb. RM. 4.—.

This booklet was designed particularly to help workers in biology and hygiene to use correctly and to understand elementary statistical methods of use to them. Some 50 pages are devoted to brief exposition of a necessarily limited number of topics, and the remaining 35 to illustrative numerical examples with explanatory notes. The topics dealt with include the use of the normal frequency function and the calculation of its characteristics, curve fitting for straight lines and curves simply reduced to the linear case (the use of the logarithmic transformation is given a prominent place throughout), the coefficient of correlation, and a simple method of dealing with 2×2 contingency tables. The standard errors of quantities calculated from samples are derived, for the most part in forms valid only for large samples. Variances, regression coefficients and correlation coefficients from samples are defined so as to give "best estimates" though the explanation given, in the case of the variance only, does not make this point clear to the reader. *C. C. Craig* (Ann Arbor).

Boehm, Carl: Versuch einer systematischen Darstellung der modernen Risikotheorie. II. Betriebswirtschaftliche Untersuchungen. Bl. Versich.-Math. **3**, 359—379 (1936).

I. vgl. dies. Zbl. **11**, 127.

Lenzi, E.: Ammortamento a due tassi nell'assicurazione sulla vita e l'optimum nella misura del riscatto. Giorn. Ist. Ital. Attuari **7**, 1—15 (1936).

Wird eine Schuld vom Barwerte π durch n vorschüssige Annuitäten vom Betrage $\frac{\pi}{a_{\overline{n}|}}$ getilgt und soll die jeweilige Restschuld $\frac{\pi}{a_{\overline{n}|}} a_{\overline{n-k}|}$ durch eine Todesfallsversicherung garantiert werden, so erhält man für die einmalige Nettoprämie $U = \frac{\pi}{d\,a_{\overline{n}|}}(A_{x\overline{n}|} - v^n)$, schlägt man noch die Verwaltungskosten hinzu, so ergibt sich $U' = U + \psi\pi a_{x\overline{n}|}$. Bedeutet A' die einmalige Tarifprämie einer Erlebensversicherung, die mindestens n Jahre dauert und für welche n gleiche Jahresprämien P'' bezahlt werden, so ergibt sich, wenn $\pi = A' + U'$ gesetzt wird, $\frac{\pi}{a_{\overline{n}|}} = \frac{A'}{a_{x\overline{n}|}(1 - \psi a_{\overline{n}|})}$. Diese Überlegungen gestatten auch einen neuen Einblick in den Begriff der Prämienreserve. Neben dieser theoretischen Fragestellung wird die praktische Anwendung, insbesondere der Interessengegensatz von Versicherer und Versichertem, die Frage zweier verschiedener Zinssätze für den Versicherungs- und den Darlehensvertrag beleuchtet, sowie die Bedeutung der Prämienreserve in diesem Falle klargelegt. Schließlich wird der Zusammenhang zwischen reiner Reserve, gezillmerter und reduzierter Reserve untersucht. *F. Knoll* (Wien).

Lenzi, E.: Sulle iterazioni elementari concernenti la formula di Eulero. Giorn. Ist. Ital. Attuari **7**, 51—53 (1936).

Nach der Feststellung, daß das von Huszár angegebene Verfahren (vgl. dies. Zbl. **12**, 217) von Lenzi bereits früher [Giorn. Ist. Ital. Attuari **5**, 250 (1934)] erkannt und veröffentlicht wurde, wird ein sehr rasch zum Ziel führendes Iterationsverfahren: $i_2 = \frac{1}{a} - \left(\frac{a}{a_1}\right)^{\varrho} \frac{1}{s_1}$, $\varrho = \frac{n i_1}{1 + i_1 - n/s_1} - 1$, angegeben und bewiesen. *F. Knoll.*