Werk

Titel: Analysis (spezielle Differential- und Integralgleichungen s. a. Mechanik usw. bzw...

Jahr: 1936

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0013|log44

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Appert, Antoine: Sur quelques notions susceptibles d'être prises comme terme primitif dans la théorie des espaces abstraits. Mathematica, Cluj **11**, 229—246 (1935).

The author considers the consequences of using one of the following notions as a basis for the definition of a space: closure, $\overline{E}$, subject to the conditions $E \leqq \overline{E}$, $\overline{0} = 0$, where 0 denotes the null set; interior. The derived set E' of a set E is defined in terms of closure by the rule: x belongs to E' if and only if it belongs to $E - x$. Then under the restrictions imposed above, $E = E + E'$. The space of the operator E' satisfies the condition x belongs to E' is equivalent to: $E - x$ is non null and x belongs to $(E - x)'$. The spaces (V) of Fréchet are those for which (III) $\overline{E} \leqq \overline{E + F}$. The accessible spaces of Fréchet are those for which $\overline{E}$ has properties I, II, III, and the additional properties: (IV) $\overline{E + F} \leqq \overline{E} + \overline{F}$; (V) If a set E has one and only one element, $\overline{E} = E$, and α). Cf. the prec. abstr. If we denote the interior of a set E by iE, the following formulas express a fundamental set of properties of the concept: (I') $iE \leqq E$; (II') $iS = S$, where S is the entire space; (III') $iEF \leqq iE$; (IV') $iE\,iF \leqq iEF$; (V') If a set E is obtained by removing from the space a single point, then $iE = E$; α') $iiE = iE$. The notions closure and interior are equivalent, and the six primed properties are equivalent to the unprimed properties. In an appendix attention is called to a method of extending the properties of spaces (V) to more general topological spaces. These methods were discussed by E. W. Chittenden, On general topology, etc. Trans. Amer. Math. Soc. **31**, 290—321. *E. W. Chittenden.*

Dunford, Nelson: Corrections to the paper „Integration in general analysis". Trans. Amer. Math. Soc. **38**, 600—601 (1935).

Es handelt sich weniger um Berichtigungen als um Ausfüllung einiger Lücken in der Arbeit des Verf. über die Lebesguesche Integrationstheorie von Funktionen auf allgemeinen Maßräumen und Werten aus abstrakten Vektorräumen; dies. Zbl. **11**, 341. *Bochner* (Princeton).

Bourbaki, Nicolas: Sur un théorème de Carathéodory et la mesure dans les espaces topologiques. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 1309—1311 (1935).

By the well known theorem all open sets in a metric space are measurable with respect to any measure in the sense of Carathéodory (cf. e. g. Hahn, Theorie der reellen Funktionen Bd. 1, p. 430. Berlin 1921). The paper contains a generalization of that result. Let namely E be an abstract topological space with a measure $\mu(X)$ such that $\mu(X)$ is defined and non negative for any set X in E and $\mu(\sum_n E_n) \leqq \sum_n \mu(E_n)$ for any sequence $\{E_n\}$ of sets in E. The author establishes the equivalence of the following two conditions: (I) $\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B)$, whenever A and B are sets in E and there exists a continuous function in E, assuming the constant values 1 and 0 over A and B respectively, (II) any continuous function $f(x)$ in E has the property of Carathéodory, i. e. $\mu(X + Y) = \mu(X) + \mu(Y)$, whenever there is a number α such that $f(x) \leqq \alpha$ over X and $f(x) > \alpha$ over Y. *Saks* (Warszawa).

Analysis.

Andruetto, Giacinta: Relazioni tra volumi e superficie di rotazione intorno ad assi paralleli. Boll. Un. Mat. Ital. **15**, 14—17 (1936).

Denjoy, Arnaud: Sur les fractions continues. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 371—374 (1936).

Die Note bringt einige neue Ergebnisse über die metrischen Eigenschaften der Kettenbrüche, von denen hier folgende wichtige Abschätzungen erwähnt seien: 1. $a_0 = 0$, $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ seien die Teilnenner der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung einer zwischen 0 und 1 liegenden Zahl θ; $\varphi(n)$ sei eine positive zunehmende Funk-

tion, $\int^{n} dn/\varphi(n) = \lg\lambda(n)$ sei divergent und $\sigma(n)$ die zu $\lambda(n)$ inverse Funktion; dann gibt es für fast alle θ bei jedem $n > n_0(\theta)$ ein m mit $n < m < n\sigma\{\lambda(n)\lg^{\alpha}\lambda(n)\}$, $a_m > \varphi(m)$, wenn $\alpha > 1$ ist; bei $2\alpha < 1$ wird die Behauptung für fast alle θ hinfällig. — 2. Ist $a_M \geqq a_{M_1} \geqq \cdots \geqq a_{M_{q-1}} \geqq \cdots \geqq a_{M_{n-1}}$ die nach abnehmender Größe geordnete Reihe $a_1, a_2, \ldots, a_n$, so gilt bei jedem $\varepsilon > 0$ für fast alle θ die Ungleichung

$$a_{M_{q-1}} < n \lg^{\frac{1+\varepsilon}{q}} n$$

für alle $n > n_0(\theta, \varepsilon, q)$; es lassen sich noch schärfere Ungleichungen derselben Art angeben. — Mehrere sinnstörende Druckfehler. *A. Khintchine* (Saratow).

Denjoy, Arnaud: Sur une formule de Gauss. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 537—540 (1936).

Ist $(0, a_1, a_2, \ldots, a_n + \xi_{n+1})$ $(0 < \xi_{n+1} < 1)$ die regelmäßige Kettenbruchentwicklung einer Irrationalzahl α, so hat bekanntlich Gauß die Behauptung ausgesprochen, daß das Maß der Menge der zwischen 0 und 1 liegenden, der Ungleichung $0 < \xi_{n+1} < x$ genügenden Zahlen α bei $n \to \infty$ gegen $\lg(1 + x)/\lg 2$ strebt. Für diese schon von Kuzmin [Atti del congr. int. Bologna **6**, 83 (1928)] und P. Lévy [Bull. Soc. Math. France **57**, 178 (1929)] bewiesene Behauptung bringt vorliegende Note einen Neubeweis, der sich als sehr verallgemeinerungsfähig erweist. Nicht nur findet Verf. die entsprechende Lösung für den Fall, daß α zwischen 0 und t $(t>0)$ eingeschlossen ist (der zugehörige Grenzwert ist $t\lg(1 + x)/\lg 2$), sondern er stellt auch allgemeinere Formeln auf, die z. B. erlauben, die analogen Probleme für solche Komplexe von Bedingungen wie $(\xi_n < x, \xi_{n+1} < y)$ zu lösen. *A. Khintchine* (Saratow).

Wigert, S.: Sur l'inégalité $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$. Ark. Mat. Astron. Fys. **25 B**, Nr 11, 1—2 (1936).

Kurzer Induktionsbeweis, der jedoch schon bekannt ist (vgl. Hardy-Littlewood-Pólya, Inequalities, 20—21, Beweis IV). *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Szües, Adolf: Sur la source commune de certaines inégalités remarquables. Mat. fiz. Lap. **42**, 127—133 u. franz. Zusammenfassung 133 (1935) [Ungarisch].

Let $\{a_\nu\}$ and $\{b_\nu\}$ be two sets of n real numbers. Considering all the permutations $\{b_{\lambda_\nu}\}$ of $\{b_\nu\}$, the sum $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_{\lambda_\nu}$ obtains its greatest resp. smallest value if the b's are so ordered that $(a_\mu - a_\nu)(b_\mu - b_\nu) \geqq 0$ resp. $\leqq 0$ holds for all values of μ and ν. From this general principle various classical inequalities like the theorem of arithmetic and geometric means, Tchebycheff's inequality etc. can be derived easily. *G. Szegö.*

San Juan, R.: Über ein Problem von Carleman. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. **10**, 265—267 (1935).

Le problème de M. Carleman s'énonce ainsi: les conditions: $f_1^{(n)}(0) = f_2^{(n)}(0)$, $\mathrm{Max}\,|f_1^{(n)}(x)| = A_n$, $\mathrm{Max}\,|f_2^{(n)}(x)| = A_n'$ $(n = 0, 1, \ldots; 0 \leqq x \leqq 1)$, $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{A_n}} = \sum \frac{1}{\sqrt[n]{A_n'}} = \infty$ entrainent-elles le fait que $f_1(x) = f_2(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$? L'A. aurait construit une fonction $\varphi(x)$ telle que (1) $|\varphi^{(n)}(x)| < \min(A_n, A_n')$ $(n = 0, 1 \ldots; 0 \leqq x \leqq 1)$. Son travail n'étant qu'un résumé nous n'avons pas pu suivre ses idées. Nous ne savons pas si $\varphi^{(n)}(0) = f_1^{(n)}(0) = f_2^{(n)}(0)$ $(n = 0, 1 \ldots)$ (et alors la réponse à la question de M. Carleman serait affirmative), ou si l'on exige seulement de $\varphi(x)$ de vérifier (1), ce qui est immédiatement réalisable (sans même que $\varphi(x)$ soit un polynome).

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Geronimus, J.: On some extremal properties of trigonometric polynomials with real roots. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 924—930 (1935).

Let consider the set of all trigonometric polynomials of the form

$$\sum_{k=0}^{m-1}(A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) + \cos m\theta$$

with only real roots. If λ is a fixed non negative number, the maximum of $\lambda A_0^2 + \sum_{k=1}^{m-1}(A_k^2 + B_k^2)$ is determined. It is attained if the roots are all real and equal. The case $\lambda = 1$ has been investigated by Blumenthal [Math. Ann. **77**, 390 (1916)].

G. Szegö (St. Louis, Mo.).

Favard, J.: Sur une propriété extrémale de l'intégrale d'une fonction périodique. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 273—276 (1936).

Der Verf. gibt einen sehr interessanten Beweis eines Satzes über die Integration eines trigonometrischen Polynoms, den Bohr, in Zusammenhang mit einem älteren Satz von ihm, neulich bewiesen hat (dies. Zbl. **12**, 347). Während der Bohrsche Beweis funktionentheoretische Hilfsmittel benutzte, verläuft der Beweis des Verf. im Reellen. Der Satz wird sehr einfach aus dem folgenden Satz abgeleitet: Es sei $f(x)$ eine stetige, periodische Funktion der Periode 2π, deren Fourierkoeffizienten bis zur Ordnung n exkl. verschwinden und für den $|f(x)| \leqq M$; dann gilt für dasjenige Integral $F(x)$ von $f(x)$, deren Mittelwert verschwindet, die Ungleichung $|F(x)| \leqq \frac{\pi}{2}\frac{M}{n}$, und die Konstante ist die bestmögliche. Zum Beweis wird benutzt, daß bei beliebigen A_k das betreffende Integral durch

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t-\pi)\left[t - \sum_{k-1}^{n-1} A_k \sin kt\right] dt$$

gegeben ist, woraus folgt

$$|F(x)| \leqq \frac{M}{\pi}\int_0^{\pi}\left|t - \sum_{k=1}^{n-1} A_k \sin kt\right| dt.$$

Bestimmung des Minimums des Integrals auf der rechten Seite liefert den Satz. Es wird bemerkt, daß die entwickelte Methode zur Verschärfung von Ungleichungen von S. Bernstein (dies. Zbl. **11**, 396) dienen kann. In einer gleichzeitig erschienenen Arbeit hat Bohr den zitierten Satz aus seinem früheren Satz abgeleitet (dies. Zbl. **13**, 110).

B. Jessen (Kopenhagen).

Verblunsky, S.: On positive harmonic functions. II. Proc. London Math. Soc., II. s. **40**, 290—320 (1935).

This is a continuation of a previous paper (this Zbl. **10**, 162) on positive harmonic functions (= p. h. f.)

$$1 + \sum_1^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, r^n \qquad (0 \leqq r < 1) \qquad (1)$$

$$(2c_n = a_n - ib_n),$$

where the c_n can be represented in terms of independent complex parameters $z_n = \varrho_n e^{i\varphi_n}$, with $\varrho_n^2 \leqq 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. This paper again deals with the class P_n of functions (n) (that is, $z_{n+1} = z_{n+2} = \cdots = 0$, l. c.). The author shows that if all $|z_i| < 1$ $(i \leqq n)$, then the series $1 + \sum_1^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ is the reciprocal of a positive trigonometric polynomial, of order $\leqq n$; and conversely: $T(x)$ being such a polynomial, of order n, the Poisson function (1) of

$$f(x) = \frac{c}{T(x)} \equiv 1 + \sum_1^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (c > 0)$$

is of class P_n. This leads to a new parametric representation of positive trigonometric polynomials. — A closer study of the class P_2 further yields necessary and sufficient conditions for the existence of a solution of the integral equation in t

$$\int_0^{2\pi} \log\{t + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \alpha_2 \cos 2x + \beta_2 \sin 2x\}\, dx = 0 \qquad (\alpha_i,\ \beta_i \text{ given})$$

and the form of the solution.

J. Shohat (Philadelphia).

Verblunsky, S.: On positive harmonic functions in a half-plane. Proc. Cambridge Philos. Soc. **31**, 482—507 (1935).

The object of this paper is to obtain an integral representation of a harmonic function $J(\xi, \eta)$, which is positive in the half-plane $\eta > 0$. By means of the mapping $re^{i\theta} = -\frac{\zeta - i}{\zeta + i}$ we obtain $J(\xi, \eta) \equiv H(r, \theta)$ — harmonic in the unit-circle, and we can use the Abel-Poisson Sommation Theory of Fourier Series in order to establish the fundamental Theorem I:

$$J(\xi, \eta) = d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(1 + x^2)}{\eta^2 + (x - \xi)^2}\, dG(x) \tag{1}$$

d — const. $\geqq 0$; $G(x)$ — bounded, non-decreasing. The author further investigates the possibility of the more special representation

$$J(\xi, \eta) = \int_0^{\infty} e^{-\eta t}\{A(t)\cos\xi t + B(t)\sin\xi t\}\, dt,$$

and the nature of the functions $A(t)$, $B(t)$. Here an important role is being played by the constants

$$\alpha_n = \int_{n-1}^{n} (1 + x^2)\, dG(x) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$a_n = \int_{n-1}^{n} (1 + x^2)\, dH(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$H(0) = 0, \qquad H(x) \equiv G(x) - G(-x) \qquad (x > 0).$$

Illustration. If $d = 0$ in (1), then $\int_{-\infty}^{\infty} J^k(\xi, 1)\, d\xi < \infty$ (k positive integer) if and only if $\sum \alpha_n^k$ converges. — The paper closes with a study of the asymptotic behavior of $J(0, \eta)$, as $\eta \to \infty$, in particular, of the existence of $\lim_{\eta \to \infty} \eta^{\delta} J(0, \eta)$ $(0 \leqq \delta < 1)$, also of the integrability of $\eta^{\sigma} J^p(0, \eta)$ $(\sigma = 0,\ p - 2;\ p \geqq 1)$ in $(1, \infty)$. *J. Shohat.*

● **Ser, J.: La réduction des séries alternées divergentes et ses applications.** Paris: Gauthier-Villars 1935. VI, 43 pag. Frcs. 12.—.

The author exploits in detail the formal reciprocity [see this Zbl. 8, 152 (1934)] between the two sequences of values, $\{f(r)\}$ and $\{f_r\}$, where in the customary notation (not used by the author), $f_r = (-1)^r \Delta^r f(0)$. The formal properties of Newton's Interpolation formula are used to interpret divergent sequences by means of this reciprocity, and of artifices dependent thereon. The integral used by Borel in his exponential method of summation, and various types of factorial series recur in the work. Questions concerning the scope of the method are not discussed. *A. A. Bennett* (Providence).

Wegner, Udo: Zur Theorie der Interpolation. Deutsche Math. **1**, 103—107 (1936).

The error in Lagrange interpolation formula can be represented in the form

$$\int_a^b K_r(z, t)\, f^{(r)}(t)\, dt.$$

Here r is an integer not surpassing the number n of the interpolation points. The kernel K_r is independent of the given function $f(t)$; it can be calculated from the fundamental polynomials of the interpolation by means of Bernoulli polynomials. Integrating this formula with respect to z a formula of Wirtinger (this Zbl. **6**, 361) arises. In the case $r = n$ the kernel obtains a particularly simple form. *G. Szegö.*

Steffensen, J. F.: On the sum or integral of the product of two functions. II. Skand. Aktuarie Tidskr. **18**, 242—269 (1935).

This paper develops in elegant form for the most part known results in the problem of expressing the sum of the product of two functions in Tchebychef and Legendre Moments of the functions. But he does on introducing polynomials of which the

Tchebychef and Legendre polynomials are only special cases, obtain generalized formulae which contain the results for both summation and integration in the one expression. The results of further generalization by the introduction of a weight function and the use of Stieltjes integration are indicated. *C. C. Craig* (Ann Arbor).

Tricomi, Francesco: Trasformazioni funzionali e polinomi ortogonali, in ispecie sferici. Boll. Un. Mat. Ital. **14**, 213—218 u. 277—282 (1935).

The author observes that the transformation $f(s) = J(F) \equiv \int_{-1}^{s} (s-t)^{-1/2} F(t)\, dt$ being applied to $P_n(t)$, the n-th Legendre polynomial, transforms it into

$$2^{1/2}(n+1/2)^{-1} \cos[(n+1/2) \arccos x].$$

He introduces also a more general transformation $J^{\alpha}(F)$ which is obtained from $J(F)$ by replacing $(s-t)^{-1/2}$ by $(s-t)^{-\frac{1}{2}-\alpha}$, and derives some properties of this transformation, without noticing that the transformations in question are immediately expressible in terms of integration of fractional order. As an application the author derives some formulas transforming Legendre series into trigonometric series. Thus he obtains the following relation which apparently is new,

$$K(\sin\alpha) = 2\sum_{1}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-1} P_n(\cos 2\alpha) = \pi \sum_{0}^{\infty} \left\{\frac{1\cdot 2 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots (2n)}\right\}^2 \sin(4n+1)\alpha\,, \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\,,$$

where $K(k) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2\psi)^{-1/2}\, d\psi$. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Doetsch, Gustav: Integration von Differentialgleichungen vermittels der endlichen Fourier-Transformation. Math. Ann. **112**, 52—68 (1935).

This paper is closely connected with the author's earlier work on resultants („Faltungen") and on the equation of heat conduction. The finite Fourier transform $\mathfrak{f}\{G\}$ is simply the sequence of Fourier coefficients

$$\mathfrak{f}\{G\} \equiv g(n) = \int_{-l}^{l} e^{-in\pi x/l} G(x)\, dx\,.$$

The author recalls the formulas for the Fourier coefficients of the resultant of two functions and of the derivatives of a function, and proceeds to apply this simple machinery to the boundary value problem for the equation of heat conduction relative to the domain $0 \leqq x \leqq l$, $0 \leqq t \leqq T$. The finite Fourier transformation translates the partial differential equation plus boundary conditions into an ordinary linear differential equation plus initial value conditions. The resulting solution is of course the classical one. The method leads to transcendental addition theorems for the various Green's functions of the problem which imply corresponding theorems for theta functions, the prototype of which was discovered by F. Bernstein and the author. As a particular instance may be quoted the elegant formula

$$\vartheta_3(v, \tau_1 + \tau_2) = \int_{-1/2}^{1/2} \vartheta_3(v-u, \tau_1)\, \vartheta_3(u, \tau_2)\, du\,.$$

E. Hille (New Haven, Conn.).

Wintner, Aurel: On a class of Fourier transforms. Amer. J. Math. **58**, 45—90 (1936).

Eine Verteilungsfunktion $\sigma = \sigma(x)$, $-\infty < x < +\infty$, heißt symmetrisch, wenn $\sigma(x) = 1 - \sigma(-x)$, und konvex, wenn außerdem $\sigma(x)$ für $0 < x < +\infty$ konkav (und also für $-\infty < x < 0$ konvex) ist; ein konvexes σ ist höchstens für $x = 0$ unstetig. Die Faltung $\sigma = \sigma_1 * \sigma_2$ sowie der Limes $\sigma = \lim \sigma_n$ von zwei bzw. einer Folge konvexer Verteilungsfunktionen ist wieder konvex. Ein Teil der Arbeit handelt von gewissen analytischen Funktionen, von denen gezeigt wird, daß sie Fourierintegrale $L(t;\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\sigma(x)$ von konvexen Verteilungsfunktionen sind. Die Beweise beruhen darauf, daß auf Grund einer Produktdarstellung der Funktion das zugehörige σ explizit in der Form einer unendlichen Faltung

$\sigma = \sigma_1 * \sigma_2 * \cdots$ angegeben werden kann; die Konvexität von σ folgt dann aus der Konvexität jedes einzelnen σ_n. Zu den genannten Funktionen gehört unter Annahme der Riemannschen Vermutung die Funktion $\Xi(0)/\Xi(it)$. Neulich zeigte der Verf. (dies. Zbl. **11**, 294), daß, unabhängig von der Riemannschen Vermutung, die Funktion $\Xi(t)/\Xi(0)$ das Fourierintegral einer konvexen Verteilungsfunktion ist; in Anschluß hieran werden jetzt einige Betrachtungen über die Riemannsche Vermutung angestellt. Ein weiterer Teil der Arbeit handelt von stabilen, symmetrischen Verteilungsfunktionen. Die Verteilungsfunktion σ heißt stabil, wenn bei beliebigen $a > 0$ und $b > 0$ bei geeignetem $c = c(a, b) > 0$ die Gleichung $\sigma(x/a) * \sigma(x/b) = \sigma(x/c)$ stattfindet. Alle stabilen σ sind von P. Lévy bestimmt worden; spezialisiert man auf symmetrische σ, so lautet sein Ergebnis: Für jedes $0 < \lambda \leqq 2$ wird durch $L(t; \omega_\lambda) = e^{-|t|^\lambda}$ eine stabile, symmetrische Verteilungsfunktion ω_λ definiert; sämtliche stabile, symmetrische Verteilungsfunktionen sind durch $\sigma(x) = \omega_\lambda(x/a)$, $0 < \lambda \leqq 2$, $a > 0$, gegeben (von der trivialen Lösung $\sigma(x) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sign} x)$ wird dabei abgesehen). Der Lévysche Beweis beruht darauf, daß man von einem beliebigen σ in dem „Attraktionsbereich" von ω_λ ausgeht; durch wiederholte Faltungen und geeignete Normierungen der Faltungen entsteht dann ω_λ als Grenzfunktion. Der Verf. zeigt jetzt, daß man für das genannte σ in dem Attraktionsbereich von ω_λ eine konvexe Verteilungsfunktion wählen kann, woraus folgt, daß ω_λ ebenfalls konvex ist. Somit ergibt sich, daß jede stabile symmetrische Verteilungsfunktion auch konvex ist, welche Folgerung besonders hervorgehoben wird, weil Gauß die beiden Eigenschaften der Symmetrie und Konvexität nebeneinander als natürliche Bedingungen für die Verteilungsfunktion der Fehler bei zuverlässigen Messungen aufgestellt hat. Der Beweis wird sogleich für den entsprechenden Satz für Verteilungsfunktionen $\varphi = \varphi(E)$ im n-dimensionalen Euklidischen Raum R_y geführt; Symmetrie bedeutet hier Invarianz bei beliebigen Drehungen um $y = 0$, und Konvexität bedeutet, daß $\varphi(E)$, abgesehen von einer eventuellen Unstetigkeit in $y = 0$, das Integral einer bei wachsendem $|y|$ nicht zunehmenden Dichte $\eta(|y|)$ ist; die Definition der Stabilität ist ungeändert. Der Satz lautet dann, daß für jedes $0 < \lambda \leqq 2$ durch $A(u; \psi_{n\lambda}) = \int_{R_y} e^{iuy}\, \psi_{n\lambda}(dR_y) = e^{-|u|^\lambda}$ (wo uy das Skalarprodukt der beiden n-dimensionalen Vektoren u und y bedeutet) eine stabile, symmetrische und konvexe Verteilungsfunktion $\psi_{n\lambda}$ definiert wird, und daß sämtliche stabile, symmetrische Verteilungsfunktionen durch $\varphi(E) = \psi_{n\lambda}(E/a)$, $0 < \lambda \leqq 2$, $a > 0$, gegeben sind (wenn von der durch $\varphi(0) = 1$ definierten, trivialen Lösung abgesehen wird). Während bei Lévy einige Schlüsse nur summarisch angedeutet sind, ist der Beweis hier in allen Einzelheiten durchgeführt. Ferner enthält die Arbeit ein Resultat über den analytischen Charakter der Dichte von $\psi_{n\lambda}$ alsFunktion von $|y|$ aufgefaßt. Der Fall $\lambda = 2$ ist der einzige, wo die Streuung endlich und positiv ist. Dagegen beruht es offenbar auf einem Versehen, wenn in der Arbeit angegeben wird, daß jede stabile Verteilungsfunktion von positiver endlicher Streuung notwendig symmetrisch ist. *Jessen* (Kopenhagen).

Corput, J. G. van der: Verteilungsfunktionen. III., IV. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **39**, 10—19 u. 19—26 (1936).

Für I bzw. II siehe dies. Zbl. **12**, 347 bzw. **13**, 57. III bringt Beweise der Sätze 9, 10, 11 aus I. IV bringt Hilfssätze für spätere Zwecke und Verallgemeinerungen von Ergebnissen aus I, u. a. des folgenden Satzes 6: Ist $\psi(x)$ irgendeine stetige monotone Funktion mit $\lim_{\gamma \to -\infty} \psi(\gamma) = 0$, $\lim_{\gamma \to \infty} \psi(\gamma) = 1$, so kann man jede in $(-\infty, \infty)$ überall dichte Folge durch Umordnung in eine Folge U mit der Verteilungsfunktion $\psi(\gamma)$ überführen, und zwar so, daß für jedes γ und jedes natürliche x gilt: $|U_\gamma(x) - x\,\psi(\gamma)| < 2 + 2\log x$.

($U_\gamma(x)$ ist die Anzahl der ersten x Glieder von U, welche $< \gamma$ sind.) — Interessant an diesem Satz ist, daß es bis jetzt noch nicht bekannt ist, ob eine spezielle Folge U mit zugehöriger Verteilungsfunktion $\psi(\gamma)$ existiert, derart, daß für jedes γ bei hinreichend großem x eine wesentlich schärfere Abschätzung als (1) gilt. *Koksma* (Amsterdam).

Reihen:

Takahashi, Tatsuo: On the termwise differentiated Legendre series. Jap. J. Math. **12**, 71—80 (1935).

L'influence de l'allure de $f(x)$ aux points-frontières $x = \pm 1$ de l'intervalle $(-1, +1)$ sur la convergence et la sommabilité de son développement en série de Legendre à l'intérieur de $(-1, +1)$ est bien connue. Ainsi p. ex. ce développement n'est équiconvergent pour $x = \cos\theta$ et $0 < \theta < \pi$ avec la série de Fourier de $f(\cos\theta) \cdot \sqrt{\sin\theta}$ que si le produit $f(x) \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{4}}$ est intégrable (L) dans $(-1, +1)$. L'auteur a étudié

l'influence des points $x = \pm 1$ sur la sommabilité $(C, 1)$ du développement en question dérivé terme à terme

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n + \tfrac{1}{2}) \cdot P'_n(x) \int_{-1}^{+1} f(t) \cdot P_n(t) \cdot dt .$$

Il démontre son équisommabilité $(C, 1)$ au point $x = x_0$ avec la série de Fourier de $f(\mathrm{Cos}\,\theta)\sqrt{\mathrm{Sin}\,\theta}$ dérivée terme à terme sous la condition d'intégrabilité (L) dans $(-1, +1)$ de $(x - x_0)^{-1} \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} [f(x) - f(x_0)]$, où $-1 < x_0 < +1$. Généralisation immédiate qu'il serait intéressant à démontrer: équisommabilité (C, δ) sous la condition d'intégrabilité (L) dans $(-1, +1)$ du produit $(x - x_0)^{-1} \cdot [f(x) - f(x_0)] \cdot (1 - x^2)^{\frac{\delta}{2} - 1}$, si $\delta > 1$, le cas $\delta < 1$ exigeant l'étude de l'influence de l'allure de $f(x)$ dans $-1 \leqq x \leqq +1$.

E. Kogbetliantz (Téhéran).

Gontcharoff, W.: Sur la convergence de la série d'Abel. Rec. math. Moscou **42**, 473—483 (1935).

The paper deals with the convergence properties and the analytic nature of the sum-function for Abel series

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n z (z - n\omega)^{n-1}}{n!} \qquad (c_n = \text{given constants}),$$

to which we are led, when seeking to determine a function $f(z)$ such that

$$f^{(n)}(n\omega) = c_n \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

[We can assume here, without loss of generality, $\omega = 1$.] The author first shows that if the series

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z (z - n)^{n-1}/n! \qquad (A^*)$$

converges (converges absolutely) for a certain z_0 $(\neq 0)$, it converges uniformly (converges absolutely) for all finite z. — Next, applying Abel transformation to (A*) and writing

$$(1 - z/n)^n = e^{n \log\left(1 - \frac{z}{n}\right)} = e^{r \cdot \frac{n}{r} \cdot \log\sqrt{1 - 2\frac{r}{n}\cos\theta + \frac{r^2}{n^2}}} \equiv e^{r\varphi\left(\frac{r}{n}\right)} \quad (z = re^{i\theta}),$$

we are led to the study of $H \equiv H(\theta) = \max \varphi(t)$ (t real; $0 \leqq t < \infty$), by means of which it is shown that $F(z)$ — sum of the convergent series (A*) — is an entire function such that

$$|F(z)| < e^{[H(\theta) + \varepsilon]r} \quad (r = |z| \text{ — sufficiently large; } \varepsilon > 0 \text{ arbitrarily small}).$$

Conversely, if $f(z)$ is an entire function such that

$$|f(z)| < e^{r k(\theta)}, \quad 0 \leqq k(\theta) < H(\theta) \quad (0 \leqq \theta < 2\pi;\ k(\theta) \text{ continuous}),$$

then $f(z)$ may be developped in Abel series

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(n) \frac{z(z - n)^{n-1}}{n!} . \qquad (1)$$

The proof is achieved by expressing the remainder R_n of (1), for $z = x$ real negative, as

$$R_n = (-1)^n \int_{x_0}^{0} dx' \int_{x'}^{1} dx'' \cdots \int_{x^{(n-1)}}^{n-1} f^{(n)}(x^{(n)})\, dx^n$$

(cf., id., Ann. École norm. **1930**, 11) and estimating $f^{(n)}(x)$ by means of Cauchy Theorem. An interesting consequence is the following: the relations $f^{(n)}(n) = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ imply $f(z) \equiv 0$, $f(z)$ being of the aforesaid nature. *J. Shohat* (Philadelphia).

Hardy, G. H., and J. E. Littlewood: Notes on the theory of series. XIX: A problem concerning majorants of Fourier series. Quart. J. Math., Oxford Ser. **6**, 304—315 (1935).

Let $f(x)$ be integrable and $f(\theta) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_m e^{mi\theta}$. If $|c_m| \leqq C_m$ and if $\sum_{-\infty}^{\infty} C_m e^{mi\theta} \sim F(\theta)$ is a Fourier series then $F(x)$ is called a majorant of $f(x)$, and exact majorant if $|c_m| = C_m$.

Let $J_r(f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^r d\theta\right)^{1/r}$. The authors discuss the relationship between $J_r(f)$ and $J_r(F)$ where F is any majorant of f. While it is easily seen that $J_{2k}(f) \leqq J_{2k}(F)$, k positive integer, holds for every majorant, and $J_1(f) = J_1(F)$ for the exact majorant, the inequality $J_q(f) \leqq J_q(F)$ is no more true for every majorant if $q > 2$ is unrestricted, as may be shown by simple examples. The main result of the paper is embodied in the following theorem. Let $1 < p \leqq 2$, $q > 2$, $1/p + 1/p' = 1/q + 1/q' = 1$. Then if (*) $J_q(f) \leqq A_q J_q(F)$ is true for every f and every majorant of f, (**) $J_p(F) \leqq A_p J_p(f)$ will be true for every f and some majorant of f. Some extremal properties of trigonometric polynomials and their majorants are also derived. (XVIII. see this Zbl. **12**, 351.)

J. D. Tamarkin (Providence).

Hyslop, J. M.: Some relations between the de la Vallee Poussin and Abel methods of summability. Proc. London Math. Soc., II. s. **40**, 449—467 (1935).

Remplaçant dans la définition du procédé (VP) de M. de la Vallée Poussin la variable discontinue $n = E(n)$ par celle continue ω l'auteur introduit un procédé de sommation noté (GVP) et défini ainsi

$$(GVP) - \lim_{n=\infty}^{\text{gén}} \sum_{m=0}^{n} a_m = \lim_{\omega=\infty} \sum_{m=0}^{E(\omega)} \frac{\Gamma^2(\omega+1)}{\Gamma(\omega+m+1)\Gamma(\omega-m+1)} a_m = s$$

(GVP) se réduit à (VP) si ω tend vers $+\infty$ par valeurs entières, donc $(GVP) \succ (VP)$ c'est-à-dire $\sum a_m$ sommable (GVP) l'est aussi (VP). Comparant (GVP) aux procédés (A) d'Abel et (W) de Weierstrass

$$(W) - \lim_{n=\infty}^{\text{gén}} \sum_{0}^{n} a_m = \lim_{\alpha=0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\alpha n^2} \qquad (\alpha \geqq 0)$$

l'auteur démontre que sous la condition $a_m = O(m^\lambda)$, où λ est fixe quelconque, les procédés (GVP), (VP) et (W) sont équivalents. Le procédé (W) est plus puissant que (VP) car la progression géométrique $\sum_0^\infty r^n e^{in\theta}$ p. ex. sommable (W) pour $r < e^{|\theta|}$ n'est pas sommable (VP) si $r_0(\theta) \leqq r < e^{|\theta|}$, où $r = r_0(\theta)$ est l'équation de la boucle extérieure du limaçon de Pascal $|1+z| = 2|\sqrt{z}|$. Enfin, si $a_m = O(m^\lambda)$ la sommabilité de $\sum_0^\infty a_m$ par le procédé (VP) entraîne celle (A) et avec la même somme, si la série $\sum_0^\infty a_n z^n$ possède un cercle de convergence de rayon unité. *E. Kogbetliantz* (Téhéran).

Gergen, J. J., and S. B. Littauer: Continuity and summability for double Fourier series. Trans. Amer. Math. Soc. **38**, 401—435 (1935).

In Part I are established the following theorems on equivalence of Cesàro and Riesz methods of summability for a double series $\sum a_{mn}$: (I) A series is summable (C, α, β) $(\alpha, \beta \geqq 0)$ to s if it is ultimately bounded (C, α, β) and summable (R, α, β) to s; it is summable (R, α, β) to s if it is ultimately bounded (R, α, β) and summable (C, α, β) to s. (II) A series is bounded (C, α, β) $(\alpha, \beta \geqq 0)$ if and only if it is bounded (R, α, β). (I) is interesting because of its generality and its analogy to results already known on equivalence of Cesàro and Hölder methods for double series (see an abstract by Schoenberg, this Zbl. 8, 464). Both theorems are proved by aid of three lemmas on simple series, somewhat like but more precise than those used by Hobson in his proof of the Riesz theorem on equivalence of the methods for simple series; and by aid of a minor extension of a lemma of Agnew (see this Zbl. 5, 291). Part II is devoted to the double Fourier series $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} \cos mu \cos nv$ of a function $f(u, v)$ integrable on the square $(0, 0; \pi, \pi)$, even and of period π in each variable; attention is restricted to the behavior of f and its Fourier series at the origin. Natural definitions

are introduced for fractional integration and continuity in the mean for functions of two variables, and for boundedness (C, a, b) and almost boundedness (C, a, b) of f in a domain. Then by aid of the results of Part I and a sequence of additional lemmas, the authors establish three extensions of the Hardy-Littlewood theorem, as refined by Paley (Proc. Cambridge Philos. Soc. **26**, 180 & 190), Bosanquet (Proc. London Math. Soc. **31**, 147 & 153), and Wiener (Proc. London Math. Soc. **30**, 1—8; Ann. of Math. **33**, 78), on the equivalence of continuity in the mean of a function of one variable and the summability of its Fourier series. Limitations of space prevent our stating the theorems in full here; suffice it to say that the results are of noteworthy generality and include as particular cases some of the theorems on double series obtained earlier by C. N. Moore (Trans. Amer. Math. Soc. **14**, 96), W. H. Young (Proc. London Math. Soc. **11**, 181), and Merriman (Ann. of Math. **28**, 526). *Adams* (Providence).

Differentialgleichungen, Potentialtheorie:

● **Iseli, Fritz: Gewöhnliche Differentialgleichungen nebst Anwendungen.** Berlin: Julius Springer 1936. 106 S. u. 57 Abb. RM. 5.40.

Das Buch ist für junge Ingenieure bestimmt, gibt aber auch dem Mathematiker erwünschte Beispiele aus der Praxis für die einfachsten (vor allem linearen) Differentialgleichungen: Arbeit beim Strammen einer Feder, Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit, natürliche Verzinsung, Stab mit Querschnitten gleicher Beanspruchung, Seilreibung, Erwärmung eines Heizkörpers mit konstanter Wärmezuführung, Newtons Abkühlungsgesetz, Bewegung eines Schwungrades, Ein- und Abschalten eines elektrischen Stromkreises; Bewegung des Uhrpendels, Durchbiegung eines Trägers, Seilkurve, Kettenlinie, ballistisches Galvanometer, Ohmsches Gesetz für Wechselstrom. Existenzbeweise fehlen absichtlich, dagegen werden komplexe Zahlen eingeführt und benutzt; auf die Verwendung von Exponentialpapier und ähnliche praktische Dinge wird Wert gelegt. *F. Rehbock* (Bonn).

Iglisch, Rudolf: Die erste Resonanzkurve beim Duffingschen Schwingungsproblem. Math. Ann. **112**, 221—246 (1936).

Der Verf. beschäftigt sich mit der Diskussion derjenigen Lösungen $x = x(t)$ der Differentialgleichung $x'' + a^2 \sin x = -bf(t)$, die an beiden Endpunkten, aber nicht im Innern des Intervalls $0 \leqq t \leqq \pi$ verschwinden. Dabei sind a und b verfügbare Parameter und $f(t)$ ist eine gegebene Funktion, die sich qualitativ wie $f(t) = \sin t$ verhält. *Wintner* (Baltimore).

Yosida, Kôsaku: On the groups of rationality for linear differential equations. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **17**, 498—510 (1935).

The author studies the automorphisms and the dimension properties of some groups connected to the groups of rationality for linear differential equations. *Janczewski* (Leningrad).

Kourensky, M.: Sur la réduction de l'intégration des systèmes d'équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre de plusieurs fonctions inconnues, à l'intégration de sytèmes d'équations linéaires du premier ordre à une seule fonction inconnue. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **21**, 1083—1094 (1935).

Bemerkungen und Zusätze im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. **10**, 298) über Systeme von zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Funktionen von drei Variablen. Verf. betrachtet hier auch den Fall eines Systems mit zwei unbekannten Funktionen von vier Variablen oder drei unbekannten Funktionen von drei Variablen. *G. Cimmino* (Napoli).

Tsortsis, A.: Über die vollständigen Integrale einer partiellen Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen. Bull. Soc. Math. Grèce **16**, 188—200 (1935) [Griechisch].

Verf. schreibt in seinem Vorwort: „Ziel des vorliegenden Artikels ist die Untersuchung der vollständigen Integrale einer partiellen Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit einer unbekannten Funktion und beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen auf Grund der Theorie der Scharen infinitesimaler Transformationen von Herrn Vessiot." *Bessel-Hagen* (Bonn).

Bureau, Florent: Sur les solutions élémentaires des équations linéaires aux dérivées partielles, totalement elliptiques. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 454—456 (1936).

Soit $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ une forme algébrique définie, de degré $n \geqq p \geqq 2$, dont les coefficients sont constants. L'aut. considère l'équation linéaire écrite symboliquement $f(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_p)\, u = 0$. Il en indique une solution élémentaire (d'autres auteurs disent: fondamentale), qui a deux expressions différentes, suivant que p est pair ou impair. A l'aide d'une formule qui généralise la formule de réciprocité, relative aux équations du second ordre, il annonce qu'il peut généraliser la théorie des potentiels et le problème de Dirichlet. Il annonce en outre que la méthode bien connue de E. E. Levi permet d'étendre les résultats aux équations linéaires elliptiques à coefficients variables. *Georges Giraud* (Bonny-sur-Loire).

Caccioppoli, R.: Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con due variabili indipendenti, e sui problemi regolari di calcolo delle variazioni. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **22**, 305—310 (1935).

Nach S. Bernstein (Math. Ann. **69**) kann man die zweiten und höheren Ableitungen der Lösung u einer quasilinearen Differentialgleichung $Ar + 2Bs + Ct = D$ (in zwei unabhängigen Variablen x, y) im abgeschlossenen Gebiete immer dann abschätzen, wenn uns eine Abschätzung für u selbst und deren erste Ableitungen sowie ebensolche Schranken für die Randwerte und deren Ableitungen genügend hoher Ordnung bekannt sind. Ähnliches gilt für die allgemeinere Gleichung $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$. Die wichtige Abschätzung von S. Bernstein, der sie für den analytischen Fall durchgeführt hatte (für den nichtanalytischen Fall nach derselben Methode vgl. Schauder, dies. Zbl. **7**, 208—209), beruht auf ziemlich komplizierten Rechnungen. Verf. hat nun in der vorliegenden Note für dieses Ergebnis ein anderes Verfahren skizziert, das viele Rechnungen erspart und eine Erweiterung der Resultate ermöglicht, indem nämlich in jedem inneren Teilgebiete die fraglichen Ableitungen auch dann abschätzbar sind, wenn über die Randwerte nichts bekannt ist. Daraus werden nach dem bekannten Schema Folgerungen für das Dirichletsche Problem gezogen.
Schauder (Lwów).

Caccioppoli, R.: Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con due variabili indipendenti, e sui problemi regolari di calcolo delle variazioni. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **22**, 376—379 (1935).

Bekanntlich ist jede zweimal Hölder-stetig differenzierbare Lösung der elliptischen Gleichung $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$ mit analytischem F selbst analytisch. Weiter ist jede einmal Hölder-stetig differenzierbare Lösung eines regulären Variationsproblems $\int\int_G f(x, y, p, q)\, dx\, dy$ analytisch, falls f analytisch ist [E. Hopf, Math. Z. **30** (1929)]. Nach Verf. kann man sich hier von der Bedingung der Hölderstetigkeit befreien und in beiden Fällen nur die bloße Stetigkeit der in Betracht kommenden Ableitungen fordern. Zwecks Lösung dieser Probleme betrachtet der Verf. zwei elliptische Differentialgleichungen: a) eine quasilineare $Ar + 2Bs + Ct = D$, wobei A, B, C, D von u unabhängig sind und in allen Variablen mitsamt ihrer ersten Ableitungen beschränkt bleiben (für $p^2 + q^2 \to \infty$); b) eine allgemeine Differentialgleichung $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$, für welche F beim $|u| + |p| + |q| + |r| + |s| + |t| \to \infty$ z. B. in $C(r + t)$ übergeht. Nach Verf. soll es genügen, im Falle a) die Randwerte als bloß einmal stetig differenzierbar, im Falle b) als zweimal stetig differenzierbar anzunehmen [im Falle b) soll auch das Gebiet genügend klein sein], um bereits das Dirichletsche Problem lösen zu können mittels einer im Innern zweimal Hölder-stetig differenzierbaren Funktion. Dem Ref. gelang es nicht, die Skizze des Beweises zu überprüfen. Die Abschätzung am Rande nach der Bernsteinschen Methode (auf die sich hier der Verf. beruft) erfordert nämlich immer — wenn sich der Ref. nicht irrt — die Regularität der Randwerte von etwas höherer Ordnung. *Schauder* (Lwów).

Cibrario, Maria: Il problema di Dirichlet in dominii infiniti e le equazioni del secondo tipo misto ellittico-paraboliche. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **14**, 215—247 (1936).

Die Ergebnisse dieser Arbeit wurden vom Verf. zum großen Teil schon veröffentlicht (dies. Zbl. **12**, 299). Hier werden die Beweise ausführlicher auseinandergesetzt und neue Einzelheiten angegeben, besonders in bezug auf die verschiedene Gestalt der Gebiete, für welche die Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise erbracht sind, und die Regularität der Lösungen auf der „uneigentlichen Geraden". *G. Cimmino.*

Nicolesco, Miron: Résolution effective directe de quelques problèmes de frontière concernant les fonctions harmoniques et biharmoniques dans le cas des domaines hypersphériques. Bul. fac. şti. Cernăuţi **9**, 9—15 (1935).

En désignant par ϱ la distance du point variable au centre de l'hypersphère, l'aut. s'appuie sur la remarque, attribuée par lui à Volterra, que si u est harmonique, $\varrho\,\partial u/\partial\varrho$ l'est aussi. Par ce moyen, il ramène à des problèmes de Dirichlet le problème de trouver une fonction harmonique u telle que $Ku + \partial u/\partial\varrho$ prenne des valeurs données sur la frontière, K étant une constante donnée, et le problème de Mathieu, qui consiste à trouver une fonction biharmonique u, connaissant les valeurs de u et de son laplacien sur la frontière. *Georges Giraud* (Bonny-sur-Loire).

Rosenblatt, Alfred: Sur la fonction ordinaire de Green de l'espace à trois dimensions. Prace mat.-fiz. **44**, 153—185 (1936).

Ziel der Arbeit ist die Herleitung der folgenden Abschätzung bezüglich der Greenschen Funktion $G(P, P')$ eines einfach zusammenhängenden räumlichen Gebietes D für die Laplacesche Gleichung: Setzt man $r = \overline{PP'}$; δ, δ' gleich den Abständen der beiden Punkte P, P' vom Rande, so gilt $G(P, P') \leqq \frac{K\delta\delta'}{r^3}$, unter K eine vom Gebiet allein abhängende Konstante verstanden. Wesentlich ist bei der Beweisführung die Voraussetzung, daß das Krümmungsmaß in den Punkten der Randfläche absolut genommen beschränkt sei. *G. Cimmino* (Napoli).

Maria, Alfred J.: Concerning the equilibrium point of Green's function for an annulus. Duke math. J. **1**, 491—495 (1935).

As well known Green's function for an annulus possesses a single equilibrium point, i.e. a point in which the gradient vanishes. It lies on the same diameter as the pole on the opposite side of the centre. Denoting by R_1 and R_2 the radii of the annulus, $R_1 < R_2$, and by r the distance of the pole from the centre, the distance of the equilibrium point from the centre is a definite function $g(r)$. The present paper is devoted to the study of $g(r)$ using the theory of elliptic functions. The author proves; $g(r)$ is increasing, $\min g(r)$ is $> R_1$, $\max g(r)$ is $< R_2$. Furthermore $g'(r) \to 0$ if $r \to R_1$ or $r \to R_2$. *G. Szegö* (St. Louis, Mo.).

Dive, Pierre: Sur le potentiel logarithmique d'une couche elliptique. Mathematica, Cluj **11**, 1—22 (1935).

Es wird gezeigt, daß die Ungleichung $c \leqq 2ab(a+b)^{-1}$ notwendig und hinreichend ist dafür, daß $-ax^2 - by^2 + c$, wobei a und b positiv sind, das logarithmische Innenpotential einer passend zu wählenden homogenen Ellipsenscheibe darstellt (im dreidimensionalen Fall gibt es keine Ungleichung dieser Art; vgl. dies. Zbl. **1**, 395 und **4**, 166). Es wird sodann der vom Verf. (dies. Zbl. **2**, 208 und **4**, 166; auch W. Nikliborc, dies. Zbl. **5**, 106) für Ellipsoide gegebene Eindeutigkeitssatz auf den zweidimensionalen Fall übertragen und damit eine Fragestellung von E. Hölder (dies. Zbl. **5**, 106) elementar und allgemein beantwortet. Endlich wird das Potential eines unendlichen homogenen elliptischen Zylinders mit großer Ausführlichkeit diskutiert. *Wintner* (Baltimore).

Bakaliajev, A. S.: Le principe de rayonnement généralisé dans un problème stationnaire dans l'espace de théorie de l'élasticité. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **4**, 255—258 (1935).

Das „verallgemeinerte Ausstrahlungsprinzip" (vgl. dies. Zbl. **12**, 70—71) ist auch für stationäre, räumliche Probleme der Elastizitätstheorie gültig. Für ein ins Unend-

liche reichendes elastisches Medium hat auch hier das Problem i. a. keine eindeutige Lösung. In der vorliegenden Arbeit wird die hinreichende Bedingung für die Eindeutigkeit angegeben, die physikalisch die Abwesenheit einer aus dem Unendlichen kommenden Strahlung bedeutet. Als Hilfsmittel wird eine geeignet verallgemeinerte Greensche Formel benutzt. *Th. Pöschl* (Karlsruhe).

Platrier, Charles: Petites déformations et petits mouvements des corps élastiques homogènes. J. École polytechn., II. s. cahier **34**, 15—76 (1935).

The body forces on an element of a homogeneous elastic solid, whose deformations and small motions are supposed to be produced at constant temperature, are not subjected here to the restriction of being reducible to a single force. The surface tractions on the surface of the element are also not subject to this restriction. — The universal equations of motion are then of the types

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} + \varrho(X - i_x) = 0,$$

$$\frac{\partial \theta_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \theta_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_{13}}{\partial z} + 2P + \varrho(\Gamma_x - j_x) = 0.$$

Where $(-\bar{i}\,dm)$ is the resultant and $(-\bar{j}\,dm)$ the resultant moment with respect to the centre of gravity of the element dm of the forces of inertia of this element. There are now 9 components of stress T_{mn} $(m; n = 1, 2, 3)$ and they are connected with the 9 quantities $(N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, P, Q, R)$ by relations of types

$$N_1 = T_{11}, \quad 2T_1 = T_{23} + T_{32}, \quad 2P = T_{32} - T_{23}$$

the 9 quantities $(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23}, \theta_{31}, \theta_{32}, \theta_{33})$ are needed for the specification of the stress-couple. The quantities $(X \cdot Y \cdot Z)$ are the components of the resultant body force per unit mass and $(\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z)$ the components of the resultant body couple per unit mass. — An energy equation is obtained and general equations are found for expressing the components of strain and rotation in terms of the 18 quantities $T_{mn} \cdot \theta_{mn}$. There are in general 135 coefficients in these equations and to these must be added the density of inertia and six coefficients of inertia making 142 coefficients in all. — A study is made of the propagation of plane waves in a homogeneous medium and a generalisation of Fresnel's wave surface is found for the most complex homogeneous medium. *H. Bateman* (Pasadena).

Spezielle Funktionen:

Sheffer, I. M.: A differential equation for Appell polynomials. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 914—923 (1935).

Given a set of polynomials $\{P_n(x)\}$ (i. e. P_n is of degree exactly n) and an arbitrarily chosen sequence of constants $\{\lambda_n\}$ subjects to the only limitation that $\lambda_n \not\equiv 0$ in n. There always exists a sequence of polynomials

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_{ni}\, x^i \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad \text{of degree } \leqq n,$$

such that the differential equation

$$L(y) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\, y^{(n)}(x) = \lambda\, y(x) \tag{1}$$

has, for $\lambda = \lambda_n$, the polynomial solution $y = P_n(x)$. Moreover,

$$\lambda_n = l_{00} + n l_{11} + n(n-1)\, l_{22} + \cdots + n!\, l_{nn}.$$

The present paper deals with differential equations of type (1) satisfied by the special set of Appell polynomials, characterized by

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = P_{n-1}(x), \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$e^{tx} A(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n, \qquad A(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad \text{(generating function)}.$$

The following interesting result is obtained. $\{P_n(x)\}$ is an Appell set if and only if 1. $L[P_n(x)] \equiv (b_0 + x)\,P_n'(x) + b_1 P_n''(x) + b_2 P_n'''(x) + \cdots = n P_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$, where

$$B(t) \equiv \frac{A'(t)}{A(t)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n,$$

or 2. $n P_n(x) = (b_0 + x) P_{n-1}(x) + b_1 P_{n-2}(x) + \cdots + b_{n-1} P_0(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

The aforegoing is generalized by requiring $\lambda = \lambda_n$ in (1) to be a polynomial in n, and this yields the following important result. An Appell set satisfies a differential equation of type (1) of finite order, if and only if the generating function $A(t)$ is of the form $e^{Q(t)}$, $Q(t)$ — polynomial. Moreover, k — the degree of $Q(t)$ — represents the smallest possible order of the said equation (excepting the trivial case $k = 0$). Illustration: Hermite polynomials. *J. Shohat* (Philadelphia).

Kimball, B. F.: A generalization of the Bernoulli polynomial of order one. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 894—900 (1935).

The author defines a generalized Bernoulli polynomial $B_s(x, w)$ of order 1 for $|s| \leqq M$ and $x \neq 0$ or a negative real as that (unique) solution of the equation $[f(x + w, s) - f(x, s)]/w = s x^{s-1}$ which for each x considered is analytic in s over the range in question and has the property $f(x, s) \to 0$ as $\Re(x) \to +\infty$ for each s with $\Re(s) < 0$. The existence of $B_s(x, w)$ is shown and certain properties exhibited, especially with reference to an associated generalized zeta-function. *C. R. Adams.*

Koshliakov, N. S.: An extension of Bernoulli's polynomials. Rec. math. Moscou **42**, 425—431 u. engl. Zusammenfassung 431—434 (1935) [Russisch].

The paper is devoted to a study of the polynomials $\{\omega_n^{(p)}(x)\}$ generated by

$$\frac{2e^{xz}}{\frac{p+z}{p-z}e^{2z} - 1} \equiv e^{xz}[\Phi(z) - 1] \sim \frac{p}{p+1}\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^{(p)}(x)}{n!} z^{n-1} \ldots$$

$$\Phi(z) = \frac{p \operatorname{ch} z + z \operatorname{sh} z}{z \operatorname{ch} z + p \operatorname{sh} z} \qquad (p > -1). \tag{1}$$

It is shown that $\omega_n^{(p)}(x)$ is a polynomial in x of degree n $(p \neq 0)$, $n - 1$ $(p = 0)$. It represents a generalization of the classical Bernoulli polynomial $B_n(x)\left[\omega_n^{(\infty)}(x) \equiv 2^n B_n\left(\frac{x}{2}\right)\right]$. — An expansion of $\omega_n^{(p)}(x)$ is given in a generalized Fourier series according to $\{\operatorname{Sin}\mu_j x, \operatorname{Cos}\mu_j x\}$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$, μ_j denoting the real roots of the equation

$$\mu \cos\mu + p \sin\mu = 0. \tag{2}$$

The author further shows, as illustration, two applications of the polynomials $\omega_n^{(p)}(x)$. 1. A sommation formula is derived for the difference $f(x+h-0) - f(x+0)$, $f(\alpha)$ being defined in $(x, x+h)$ $(h>0)$, with $f'(\alpha)$ bounded and integrable. 2. The temperature distribution is studied in a homogeneous sphere of a given radius R_2, under certain boundary conditions. Namely: the solution of the equation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \left[v_{|r=0} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial r}_{|r=R_2} + \left(H - \frac{1}{R_2}\right) v_{|r=R_2} = 0,\ H = \text{given const.}\right]$$

is represented in the form

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\frac{\mu_n r}{R_2} \qquad (\mu_n = \text{positive roots of (2)}),$$

and we seek to determine the functions $a_n(t)$. *J. Shohat* (Philadelphia).

Babini, José: Verallgemeinerung der Bernoullischen Polynome. Rev. Acad. Ci. exact. Madrid **32**, 491—500 (1935) [Spanisch].

Ist (φ_i) eine Zahlenfolge, dann werden die verallgemeinerten Bernoullischen Polynome mit der Spanne h durch $\varphi_n(x) = n! \sum_{r=0}^{n} h^{n-r} \frac{\varphi_r}{r!} \binom{\frac{x}{h}}{n-r}$ erklärt. Als erzeugende

Funktion läßt sich $(1+zh)^{\frac{x}{h}} e^{z\varphi}$ auffassen, worin $e^{z\varphi}$ in bekannter Weise zu entwickeln ist und $\varphi^n = \varphi_n$ ist. Die charakteristische Beziehung $\Delta_h \varphi_n(x) = n\varphi_{n-1}(x)$ ist leicht herzuleiten. Einen interessanten Sonderfall ergibt $h = 0$. Bemerkenswerte neue Polynome findet man durch den Ansatz $\Delta_h \psi_n(x) = \Delta_h \varphi_n(x) = n\psi_{n-1}(x)$. Eine Reihe von Formeln verbinden die Polynome $\psi_n(x)$ und $\varphi_n(x)$. Setzt man im besonderen $\psi_n(x) = n!\, h^n \binom{x}{h}_n$ und dann $\varphi_n(0) = \overline{\varphi}_n$, so heißen die so definierten Zahlen verallgemeinerte Zahlen von Bernoulli und Rey Pastor, mit ihrer Hilfe kann man dann jedes Bernoullische Polynom darstellen. Für die Polynome $\overline{\varphi}_n(x)$ gibt es einen Ergänzungssatz in der Form $\overline{\varphi}(x) = (-1)^n \overline{\varphi}_n[(n-2)h + k - x]$, und von ihnen aus kann man auch zu einer Verallgemeinerung der Formel von Euler-MacLaurin gelangen. Sätze über die Nullstellen lassen sich leicht herleiten. Unter Benützung der zyklischen Funktionen gelangt man von den verallgemeinerten Bernoullischen Polynomen zu verallgemeinerten Eulerschen Polynomen. *Franz Knoll* (Wien).

Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

Izumi, Shin-ichi, and Tosio Kitagawa: On some integral equations. Jap. J. Math. **12**, 81—94 (1935).

Es werden Ausdrücke für die analytischen Lösungen der Funktionalgleichungen

$$2f(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt, \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x+t)\,f(t)\,dt, \qquad f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^b f^{(k)}(x+t)\,d\varphi_k(t),$$

$\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(x) \int_a^b f^{(\nu)}(x+t)\,d\varphi_\nu(t) = 0$ aufgestellt, teils unter der Nebenbedingung, daß sie $O(e^{A(x)})$ seien, teils ohne Wachstumseinschränkungen. Vielfach berufen sich die Verff. auf eine Arbeit von G. Valiron, Ann. École norm. **46** (1929); aber die Sätze und Zitate sind so unbestimmt gehalten, daß Ref. nicht ihre Richtigkeit nachprüfen konnte. *Bochner* (Princeton).

Scorza Dragoni, G.: A proposito di un teorema di Golomb sulle equazioni integrali non lineari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **22**, 385—392 (1935).

Ein Satz des Herrn Golomb über die nichtlineare Integralgleichung

$$\varphi(x) + \int_a^b k(x,y)\,f[y,\varphi(y)]\,dy = g(x),$$

wobei über die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial u}(y,u)$ nur eine einseitige Beschränktheit von gewisser Art gefordert wird (dies. Zbl. **9**, 312—313), wird hier unter derselben Voraussetzung nach einer anderen Methode (Fortsetzungsprinzip) bewiesen. *Schauder* (Lwów).

Kantorovič, L.: Sur les espaces semiordonnés linéaires et leurs applications à la théorie des opérations linéaires. C. R. Acad. Sci. USSR, N. s. **4**, 13—16 (1935).

Eine neue Art von linearen Räumen wird vom Verf. axiomatisch eingeführt. Als Grundrelationen sind dabei nur die algebraischen (Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen) und die Ordnungsrelation $x > y$ gewählt. Topologische Eigenschaften des Raumes lassen sich dann definieren. Ref. gestattet sich, die genaue Angabe der entsprechenden Axiome zu ersparen, da in den weiteren Publikationen des Verf. (im Druck) eine einfachere Axiomatik derselben Räume gegeben wird. *A. Kolmogoroff* (Moskau).

Kantorovič, L.: Sur quelques méthodes générales de prolongement de l'espace de Hilbert. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **4**, 123—126 (1935).

Es ist bekanntlich in manchen analytischen und insbesondere physikalischen Fragen nützlich, gewisse „ideale" Funktionen, wie z. B. die Diracsche δ-Funktion, einzuführen. Verf. gibt eine allgemeine Methode solcher „Fortsetzung" des Hilbert

schen Raumes. Es sei also H der Hilbertsche Raum und (x, x) die entsprechende quadratische Form. Wir betrachten ein System $\mathfrak{B}$ von positiv definiten quadratischen Formen $B(x, x)$, welches die Grundform (x, x) umfaßt und mit $B_1(x, x)$ und $B_2(x, x)$ immer eine „schwächere" Form $B(x, x)$ enthält. Bei Verf. sind die Formen $B(x, x)$ nur auf einer dichten Untermenge des Raumes H definiert, das Resultat der Fortsetzung bleibt aber dasselbe, wenn man nur die Formen betrachtet, welche schwächer als (x, x) sind, und solche Formen kann man immer auf den ganzen Raum H erweitern. Der Raum H mit der Form $B(x, x)$ als metrischer Grundform ist im allgemeinen unvollständig, d. h. es gibt im H solche Elementenfolgen $\{x_n\}$, daß $B(x_n - x_m, x_n - x_m)$ mit $n \to \infty$, $m \to \infty$, gegen Null konvergiert, welche jedoch kein Limeselement im H besitzen. Durch die entsprechende Hinzufügung von neuen Elementen bildet man den Raum H_B, welcher H umfaßt. Ist dabei B_1 schwächer als B_2, so ist H_{B_2} im H_{B_1} enthalten. Die Summe $\mathfrak{H} = \sum_{B \in \mathfrak{B}} H_B$ bildet die endgültige, durch $\mathfrak{B}$ erzeugte, Fortsetzung des Raumes H. *A. Kolmogoroff* (Moskau).

Variationsrechnung:

● **Donder, Th. de: Théorie invariantive du calcul des variations. Nouvelle édit. (Inst. belge de recherches radioscient. Vol. 4.)** Paris: Gauthier-Villars & Cie. 1935. XXI, 230 pag. Frcs. 35.—.

This new edition follows the same general methods as the earlier edition [this Zbl. **3**, 10], with the addition of fresh material. The book contains three parts which deal with (1) variations of an n-fold integral with variable boundary, (2) extremals, (3) applications to mathematical physics. The integral under consideration is generally of the form $I_n = \int_{(n)} \mathfrak{F}(x^i, y^\alpha, y^\alpha_i, y^\alpha_{ij}, \ldots)\, dx^1 \ldots dx^n$, where $y^\alpha (\alpha = 1, \ldots, m)$ are functions of x^i $(i = 1, \ldots, n)$ and of a parameter τ, the x^i being themselves functions of τ and of unvaried parameters λ^i $(i = 1, \ldots, n)$; $y^\alpha_i = \partial y^\alpha / \partial x^i$, $y^\alpha_{ij} = \partial^2 y^\alpha / \partial x^i\, \partial x^j$, ... The parameter τ may also appear explicitly in $\mathfrak{F}$. A fundamental part is played by the variational derivatives of $\mathfrak{F}$ with respect to $y^\alpha, y^\alpha_i, \ldots$,

$$\frac{\delta \mathfrak{F}}{\delta y^\alpha} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y^\alpha} - \frac{d}{dx^i}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y^\alpha_i}\right) + \frac{d^2}{dx^i\, dx^j}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y^\alpha_{ij}}\right) - \cdots, \tag{34}$$

$$\frac{\delta \mathfrak{F}}{\delta y^\alpha_i} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y^\alpha_i} - \frac{d}{dx^j}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y^\alpha_{ij}}\right) + \frac{d^2}{dx^j\, dx^k}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y^\alpha_{ij\,k}}\right) - \cdots, \tag{35}$$

and so on, d/dx^i indicating partial differentiation, the quantity on which it operates being considered as a function of x^j, τ. Summation with respect to repeated indices is here understood. The variational derivative of zero index $(D\mathfrak{F})$ and the variational derivative of index i $(D^i\mathfrak{F})$ are defined in such a way that the first variation of the integral may be written in the form

$$\frac{\delta I_n}{\delta \tau} = \int_{(n)} (D\mathfrak{F})\, d(x^1 \ldots x^n) + \oint_{(n-1)} \sum_i (-1)^i (\mathfrak{F} X^i + D^i \mathfrak{F})\, d(x^1 \ldots x^{i-1}\, x^{i+1} \ldots x^n), \tag{76}$$

where $X^i = \delta x^i / \delta \tau$. The first part of the book also deals with the first variation of an n-fold integral in an N-space $(n < N)$, the second variation of I_n (five different forms being given), and extension to the case where there are several parameters $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — The integral I_n may be written $\int \mathfrak{F}^\times d(\lambda^1 \ldots \lambda^n)$, $\mathfrak{F}^\times$ being expressed in terms of x^i, y^α and their partial derivatives with respect to the λ's. The conditions under which the integral is invariant under transformation of the λ's (x^i, y^α being invariants of this transformation and $\mathfrak{F}^\times$ retaining the same functional form), are given explicitly (conditions of parametricity). (J. Géhéniau, this Zbl. **11**, 59.) — Transformations of the form $x^i = x^i(x^1_*, \ldots, x^n_*)$, $y^\alpha = y^\alpha(y^1_*, \ldots, y^m_*, x^1_*, \ldots, x^n_*)$ are considered, the parameters τ, λ^i being transformed identically. $\mathfrak{F}$ is transformed according to $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}\, \partial(x)/\partial(x_*)$, in order to leave $\mathfrak{F} d(x^1 \ldots x^n)$ invariant. The tensor character of various expressions with respect to this transformation is discussed, including $\mathfrak{F} X^i$, $d(\mathfrak{F} X^i)/dx^i$, $D^i\mathfrak{F}$, $d(D^i\mathfrak{F})/dx^i$, $D\mathfrak{F}$, $\delta\mathfrak{F}/\delta y^\alpha$, and the results related to the classical absolute differential calculus and the more general absolute calculus of Sinigallia. — In the second part, extremals are defined as solutions of the equations $\delta\mathfrak{F}/\delta y^\alpha = 0$; these are the conditions that I_n should have a stationary value under certain boundary conditions ($\mathfrak{F}$ not containing τ explicity). The author puts

$$p^{i_1}_\alpha = \frac{\delta \mathfrak{F}}{\delta y^\alpha_{i_1}}, \ldots\ p^{i_1 \ldots i_c}_\alpha = \frac{\delta \mathfrak{F}}{\delta y^\alpha_{i_1 \ldots i_c}}, \tag{617}$$

where c is the highest order of derivative $y^\alpha_{i_1 \dots i_c}$ occurring in $\mathfrak{F}$, and defines a Hamiltonian

$$H = -\mathfrak{F} + \sum_\alpha \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_c} [p^{i_1}_\alpha y^\alpha_{i_1} + \cdots + p^{i_1 \cdots i_c}_\alpha y^\alpha_{i_1 \dots i_c}], \tag{620}$$

this being expressed, by virtue of (617), as a function of

$$x^1, \dots x^n, p^{i_1}_\alpha, \dots p^{i_1 \cdots i_c}_\alpha, y^\alpha, y^\alpha_{i_1}, \dots y^\alpha_{i_2 \dots i_c}.$$

He then gives, as generalised canonical equations of the extremals,

$$\frac{dy^\alpha}{dx^{i_1}} = \frac{\partial H}{\partial p^{i_1}_\alpha}, \dots \qquad \frac{dy^\alpha_{i_2 \dots i_c}}{dx^{i_1}} = \frac{\partial H}{\partial p^{i_1 \cdots i_c}_\alpha},$$

$$\sum_{i_1} \frac{dp^{i_1}_\alpha}{dx^{i_1}} = -\frac{\partial H}{\partial y^\alpha}, \dots \qquad \sum_{i_1} \frac{dp^{i_1 \cdots i_c}_\alpha}{dx^{i_1}} = -\frac{\partial H}{\partial y^\alpha_{i_2 \dots i_c}}. \tag{622}$$

Generalisations of the Hamilton-Jacobi equation, Hilbert's independence theorem and Weierstraß's excess formula are given. — The applications in the third part include the relativistic field equations for gravitation and electromagnetism, the Hamilton-Jacobi equation for a moving charge, gravitational and electromagnetic waves and rays, Schrödinger's wave equation in general relativistic form, generalised Bianchi-Hilbert identities, adjoint polynomials; the variation of the area of a hypersurface is applied to classical capillarity theory. — A list of the author's works is given. *J. L. Synge* (Toronto).

Horák, Z.: Sur le calcul absolu des variations. Prace mat.-fiz. **43**, 119—149 (1936).

This paper contains some formal developments of the equations of the extremals of $\int F(a, \dot{x}, t)\, dt$, where F is a scalar function of the components of a tensor field a, $\dot{x}^\nu (= dx^\nu/dt)$ and the parameter t. The fact that the partial derivatives of F with respect to the components of $a (\partial F/\partial a)$ are themselves components of a tensor is fundamental. An arbitrary connection $\Gamma^\nu_{\lambda\mu} (\Gamma^\nu_{\lambda\mu} \neq \Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ in general) is introduced, and absolute (D, Δ) and covariant (∇_λ) derivatives are defined in terms of it in the usual way. The variation of F may then be written

$$\delta F = \Delta F = \frac{\partial F}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} \Delta \dot{x}^\lambda,$$

in which each term is invariant. When the connection is symmetric, the equations of the extremals may be written

$$\nabla_\lambda F - \frac{D}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} = 0, \qquad \left(\nabla_\lambda F = \frac{\partial F}{\partial a} \nabla_\lambda a\right). \tag{24}$$

Even when the connection is not symmetric, the author takes the equations (24) as the absolute equations of the extremals (although in what sense they then represent the extremals is obscure to the reviewer), and shows (at least for an F homogeneous in $\dot{x}^\nu$) that they reduce to

$$\frac{\partial F}{\partial x^\lambda} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} + 2\Gamma^\mu_{[\lambda\nu]} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} \dot{x}^\nu = 0, \tag{28}$$

which differ from the equations of Euler by the presence of the last term. — The author considers a non-holonomic Riemannian space V^m_n. He proves that the derivative of a scalar with respect to a tensor situated in V^m_n is also a tensor in V^m_n, and shows that the extremals in V^m_n, with respect to variations lying in V^m_n, satisfy

$$\nabla'_\lambda F - \frac{D'}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} = 0, \tag{53}$$

where the accent indicates projection on to V^m_n, the original connection being the Christoffel symbols of V_n. He shows that (53) remain essentially unchanged in form when non-holonomic parameters are used. The case where the varied curve (not the variation) satisfies the non-holonomic conditions is also discussed. Equations of lines of stationary length and equations of motion of conservative systems are developed in his notation. *J. L. Synge* (Toronto).

Morse, Marston: Three theorems on the envelope of extremals. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **21**, 619—621 (1935).

In addition to the topological characterization of a conjugate point given by Morse and Littauer (this Zbl. **6**, 350) this paper contains (1) a proof of the theorem

that the envelope of the set of extremals $x_i = x_i(s, \alpha)$, $i = 1 \ldots m$ for an analytic variations problem in parametric form in m-space, which pass through a fixed point A, is determined by $r(\leqq m-1)$ real single-valued continuous functions $s_i = s_i(\alpha)$, "analytic except at most on analytic loci M_p in the space (α) of dimensions $p < m-1$" (compare also Whitehead, this Zbl. **12**, 278), and (2) a statement of sufficient conditions for a proper, strong, relative minimum in terms of known conditions and of a set of points $H(g, e', e'')$, at a distance less than e' from the endpoint B of the extremal g exclusive of B, "and lying on rays issuing from B making angles less than e'' with the ray negatively tangent to g at B". A proof of this statement is to be published later.

Arnold Dresden (Swarthmore, Pa.).

Birkhoff, G. D., and M. R. Hestenes: Generalized minimax principle in the calculus of variations. Duke math. J. **1**, 413—432 (1935).

The authors give a new proof of Morse's relations involving the critical points of a function f and the connectivity numbers of a region in which it is defined. The case of non-degenerate critical points is treated first. Let $F(C_k)$ be the maximum of $f(x)$ on a k-chain C_k. Under proper choice of the class of admissible k-chains C_k, and a suitable definition of equivalence, the number of non-equivalent k-chains which afford a minimum to $F(C_k)$ is equal to the number M_k of critical points of type k, and Morse's relations are derived. Extensions are made to the case of general boundary conditions (see Morse and van Schaack, this Zbl. **10**, 28) and the case of degenerate critical points. As the generalized minimax principle, the results are next extended, under certain restrictions, to the case of a function defined over an abstract space. As an application, Morse's results on the fixed end point problem in the calculus of variations are derived. We observe that the concept of the minimum of the maximum of a function on the sets of a class has been used by Lusternik and Schnirelmann to obtain existence relations for critical points (this Zbl. **11**, 28). *A. B. Brown.*

Funktionentheorie:

Wiener, Norbert: Fabry's gap theorem. Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Peiping A **3**, 239—245 (1935).

L'Auteur donne une démonstration du théorème de M. Fabry: si

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots; \quad \frac{1}{\lambda_n} = o(1/n); \quad \lambda_{n+1} - \lambda_n > c \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

l'axe de convergence de $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ est une coupure. Cette démonstration ne diffère de celle de M. Pólya [Math. Z. **29**, 549 (1929)] que par les détails, qui sont simplifiés.

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Ríos, Sixto: Bemerkungen zur Note „Über einen Satz von M. Mandelbrojt". Rev. mat. hisp.-amer., II. s. **10**, 282—283 (1935).

Une remarque répondant à la critique parue dans ce Zbl. **10**, 404. Il s'agit aussi d'une généralisation d'un théorème de M. Mandelbrojt, par l'intermédiaire d'un th. de M. Pólya (Göttinger Nachr. **1927**, 191). *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Broggi, U.: Sulle costanti di Fourier-Laguerre. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **22**, 310—314 (1935).

Continuation of the papers reviewed in the Zbl. **12**, 350, 351. Main results: If the point $z = 1$ is interior to the Borel polygon of the series $\sum_0^\infty \beta_n z^n$, then there exists an entire function of exponential type having the β's as Fourier-Laguerre coefficients. Necessary and sufficient conditions that $z = 1$ is a regular point of the sum of the series, if the radius of convergence equals 1, is that

$$\int_0^\infty e^{-t} L_m(t) \left\{ \sum_0^\infty \beta_n t^n / n! \right\} dt = \alpha_m$$

exists for all m and $\liminf |\alpha_m|^{1/m} > 0$. — The theorem of Picone (this Zbl. **11**, 299) quoted by the author is implicitly contained in the results of S. Wigert [Ark. Mat. Astron. Fys. **15**, No 25, 7—9, 18—22 (1921)]. *E. Hille* (New Haven, Conn.).

Wolff, Julius: Généralisation d'un théorème de M. Carleman sur les séries de fractions rationnelles. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 551—553 (1936).

C'est une généralisation d'un théorème donné par M. Carleman [C. R. Acad. Sci., Paris **174**, 589 (1922)]. — En voici l'énoncé un peu modifié: Soit une série $\sum_1^\infty \frac{A_k}{z-\alpha_k}$ ayant pour somme zéro sur un arc de courbe simple et continue Γ au voisinage duquel les pôles α_k ne s'accumulent pas trop vite (distance de α_k à $\Gamma > \varrho\, e^{-\alpha k}$). Si l'on a $|A_k| < e^{-k\Phi(k)}$ [où $\Phi(k)$ croît vers l'infini avec k], on peut affirmer que tous les A_k sont nuls. *E. Blanc* (Paris).

Suryanarayanan, K. S.: Composite meromorphic functions. J. Indian Math. Soc., N. s. **1**, 241—246 (1935).

Soll $f(z) = g(h(z))$ meromorphe Funktion der Ordnung ω sein, so ist entweder h von derselben Ordnung und g rational, oder $h(z)$ ganz und g von der Ordnung Null, oder g von der Ordnung $\leqq \omega/n$, wenn h ein Polynom n-ten Grades ist. *Ullrich.*

Friedman, Bernard: Applications of Tauberian theorems to the study of entire functions. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **14**, 232—240 (1935).

Using N. Wiener's Tauberian theorems (this Zbl. **4**, 59—60) in their original form, and also in the form simplified by Bochner (this Zbl. **6**, 199) the author extends various results obtained for entire functions by Paley and Wiener (Amer. Math. Soc. Colloquium **19**) and shows that these results hold for meromorphic functions as well. Thus the following theorem is proved. Let $0 < a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots$ and let $\sum_n a_n^{-m-1} < \infty$. Let $n(r)$ be the number of a_n not exceeding r. Let $\lambda > 0, 0 < \varrho < 1, |\theta| < \pi, \gamma = m + \varphi$. Then, if $g(z)$ denotes the meromorphic function $\sum \left[\frac{1}{a_n+z} - \frac{1}{a_n} - \cdots + (-1)^m z^{m-1} a_n^{-m}\right]$ the following statements are equivalent:

$$\text{(I)}\ n(x) \sim \lambda x^\gamma \varphi(x). \qquad \text{(II)}\ g(x) \sim (-1)^m \pi\lambda\gamma\, \operatorname{cosec} \pi\varrho\, x^{\gamma-1}\varphi(x),$$

$$\text{III)}\ g(xe^{i\theta}) \sim (-1^m)\, \pi\lambda\gamma \operatorname{cosec}\pi\varrho\, e^{i\theta(\gamma-1)} x^{\gamma-1}\varphi(x).$$

Here $\varphi(x)$ is any positive continuous function satisfying certain conditions concerning its growth, introduced by Bochner. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Rauch, Armand: Extension d'un théorème de M. Valiron sur les directions de Borel. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 280—282 (1936).

Verf. gibt neue Verschärfungen von Valirons Satz über den mittleren Grenzexponenten $\varrho(\theta)$ einer ganzen Funktion $f(z)$ zur Richtung θ. Man vergleiche zunächst dies. Zbl. **1**, 21, lese aber dort Grenz- statt Konvergenzexponent. Seien dann f, g, h ganze Funktionen: erstens f vom mittleren Grenzexponenten $\varrho(\theta) = \lambda$, g von einer Richtungsordnung $< \lambda$. Dann ist der Grenzexponent für die Nullstellenfolge von $f - g$ für „fast alle" g gleich λ; oder schärfer zweitens: sind g, h in jener Richtung nicht zu sehr benachbart, so daß

$$\int_1^\infty \log^+ \frac{1}{|g(re^{i\theta}) - h(re^{i\theta})|} \frac{dr}{r^{\lambda+1}}$$

noch konvergiert, und ist in der Richtung θ für f wieder $\varrho(\theta) = \lambda$ und Divergenzexponent, während g, h von der Konvergenzklasse der Richtungsordnung λ sind, so hat die Nullstellenfolge des Produkts $(f - g)(f - h)$ in dieser Richtung den Divergenzexponenten λ. *Ullrich* (Gießen).

Rauch, Armand: Sur les algébroïdes entières d'ordre ϱ admettant des angles de divergence π/ϱ. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 818—821 (1936).

Fédoroff, V.: Sur les fonctions monogènes. Rec. math. Moscou **42**, 485—498 u. franz. Zusammenfassung 499—500 (1935) [Russisch].

Let D be an open and connected domain of the complex plane z, $f(z)$ a function which is integrable over D, $I(\zeta, \varrho) = \int_{\omega(\zeta, \varrho)} (t-\zeta) f(t)\, d\omega$ where $\omega(\zeta, \varrho)$ is the open circle with the center at ζ and radius ϱ. Let z be a given point of D, $\delta > 0$ fixed. Consider all $\omega(\zeta, \varrho) \subset D$ containing z, $\varrho < \delta$. Set $\overline{Q}(z, \delta) = \sup_{\omega} |I(\zeta, \varrho)\varrho^{-4}|$, $\underline{Q}(z, \delta) = \inf_{\omega} |I(z, \varrho)\varrho^{-4}|$, $\overline{Q}(z) = \lim_{\delta \to 0} \overline{Q}(z, \delta)$. The author proves that a necessary and sufficient condition that $f(z)$ be equivalent to a holomorphic function in D is that (*) $\overline{Q}(z) = 0$ in D and sufficient that (*) hold in $D - E$ where E is a denumerable set which may be empty. Let $f(z)$ be continuous in D. Then a sufficient condition that $f(z)$ be holomorphic in D is that $\overline{Q}(z) = 0$ almost everywhere in D, while $L(z) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{0 < |h| < \varepsilon} |[f(z+h) - f(z)]\, h^{-1}|$ be finite in $D - E_0$ where E_0 is a set of type of E. This condition is satisfied in particular if almost everywhere in $D - E_0$, $f(z)$ either has a finite asymptotic derivative, or a finite "average derivative" $\tilde{f}'(z)$, defined by $\lim_{\varrho \to 0} \varrho^{-3} \int_{\omega(z, \varrho)} |f(t) - f(z) - \tilde{f}'(z)(t-z)|\, d\omega = 0$. Finally it is shown that a sufficient condition that a (continuous) $f(z)$ be holomorphic in D is given by $\bar{q}(z) = 0$ in D, where $\bar{q}(z) = \lim_{\delta \to 0} \bar{q}(z, \delta)$, $\bar{q}(z, \delta) = \sup \sigma_n^{-1} \left| \int_{C_n} f(t)\, dt \right|$ where $\{C_n\}$ is a suitably restricted family of contours, σ_n is the area of C_n and sup is taken relative to all C_n containing the given point z as an interior point. *J. D. Tamarkin.*

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Copeland, Arthur H.: Admissible numbers. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, N. s. **1**, Fasc. 2, 52—57 (1936).

Vortrag, berichtend über eine Möglichkeit der Durchführung einer Axiomatik des Kollektivbegriffes im v. Misesschen Sinne; vgl. dies. Zbl. **13**, 123. *W. Feller.*

Baticle, E.: Le problème des dés et son application à la théorie des moyennes. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 545—546 (1936).

Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, bei n „Würfeln" mit je p Seiten mit einem Wurf eine Punktzahl m zu erzielen, kann auf die Errechnung der möglichen Zerlegungen der Zahl m in n ganze, die Zahl p nicht übersteigende Zahlen zurückgeführt werden. Dieses Problem wurde vom Verf. bereits behandelt (vgl. dies. Zbl. **12**, 362). Im Anschluß daran wird nun für den Grenzübergang $m \to \infty$, $p \to \infty$, $m/p = \text{konst.}$, nachgewiesen, daß dieser — wie zu erwarten war — zum Studium des Wahrscheinlichkeitsgesetzes für die Summe von n voneinander unabhängigen aleatorischen Größen mit konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte in ihrem Variationsintervall Anlaß gibt. *de Finetti.*

Smirnoff, N.: Sur la distribution de ω^2 (Critérium de M. R. v. Mises). C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 449—452 (1936).

Die Note bringt folgenden wichtigen und interessanten Grenzwertsatz: Es seien $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ die sich bei n gegenseitig unabhängigen Versuchen ergebenden Werte einer dem Verteilungsgesetz $F(x)$ unterliegenden zufälligen Variablen; die „empirische" Verteilungsfunktion $S_n(x)$ sei durch

$$S_n(x) = \frac{k}{n} \quad (x_k \leqq x < x_{k+1};\ k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$S_n(x) = 0 \quad (x < x_1), \qquad S_n(x) = 1 \quad (x \geqq x_n)$$

definiert; $g(t)$ sei positiv und in (0,1) definiert, und $t(1-t)\, g(t)$ daselbst stetig differenzierbar; dann konvergiert das Verteilungsgesetz des bekannten v. Misesschen „Kriteriums"

$$\omega_n^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} g\{F(x)\} \{S_n(x) - F(x)\}^2 dF(x)$$

bei $n \to \infty$ gegen

$$\Phi(x) \doteq 1 - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\lambda_{2k-1}}^{\lambda_{2k}} \frac{e^{-\lambda x} d\lambda}{\lambda \sqrt{-D(\lambda)}};$$

hierin ist $D(\lambda)$ die zum Kern

$$K(x, y) = \begin{cases} x(1-y)\sqrt{g(x)\,g(y)} & (x \leqq y), \\ y(1-x)\sqrt{g(x)\,g(y)} & (x \geqq y) \end{cases}$$

gehörende Fredholmsche Determinante, und die λ_k sind die zugehörigen Eigenwerte.

A. Khintchine (Saratow).

Dugué, Daniel: Sur le maximum de précision des lois limites d'estimations. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 452—454 (1936).

Fortsetzung früherer Untersuchungen (dies. Zbl. **13**, 124). Es wird gezeigt, daß die obere Schranke des Präzisionsmaßes, die früher für alle im Limes nach dem Gaußschen Gesetz verteilten „estimates" aufgestellt war, auch unter allgemeineren Bedingungen gültig bleibt. Analoge Sätze gelten auch im mehrparametrigen Fall.

A. Khintchine (Saratow).

Zoch, Richmond T.: On the postulate of the arithmetic mean. Ann. math. Statist. **6**, 171—182 (1935).

This paper points out that the four axioms set down by Whittaker and Robinson (Calculus of Observations, p. 215—217, London 1929) from which to deduce the postulate of the arithmetic mean are not sufficient. He gives an example and criticises the proof given by Whittaker and Robinson in detail, giving more restrictive, but sufficient assumptions. In the second part of the paper he discusses critically the source papers cited by these authors (loc. cit.) and in addition papers by O. Suto [Tôhoku Math. J. **6**, 79—81 (1914)] and R. Beetle [Math. Ann. **76**, 444—446 (1915)]. It appears that none of the existing attempts to justify the postulate of the arithmetic mean are entirely satisfactory. *C. C. Craig* (Ann Arbor, Michigan).

Baker, G. A.: The probability that the mean of a second sample will differ from the mean of a first sample by less than a certain multiple of the standard deviation of the first sample. Ann. math. Statist. **6**, 197—201 (1935).

The author derives the distribution function of the difference of the means of two samples from the same normal population expressed in standard units of the first sample, pointing out that the result gives the probability that the mean of a second sample will differ from the mean of the first by a given multiple of the standard deviation of the first. He also finds the corresponding result when the difference between the means is expressed in units of the standard deviation of the combined samples. The not very surprising result in each case is that a Student's "t" distribution function is the appropriate one; in fact the second quantity considered differs from the quantity ordinarily used in testing the significance of the difference in two means in such a case by a constant factor. *C. C. Craig* (Ann Arbor, Michigan).

Neyman, J.: Su un teorema concernente le cosiddette statistiche sufficienti. Giorn. Ist. Ital. Attuari **6**, 320—334 (1935).

The author here solves a problem raised by R. A. Fisher in his fundamental paper, Philos. Trans. Roy. Soc. London A **222**, 323 (1922), using the terms, "statistic", "sufficient valuation" etc. in the sense there introduced. The author first proves: If T is a sufficient valuation of the parameter a, then the probability function $p(x_1, \ldots, x_n)$ may be presented in the product form, $p(x_1, \ldots, x_n) \equiv p(T) \cdot \Phi(x_1, \ldots, x_n)$, where $p(T)$ depends upon a, and $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ is a determinate function of the x's, not containing a. He then infers: If there exists a sufficient valuation T of the parameter a, the value which is obtained for it by the method of maximum likelihood is a function of T alone, and thus does not depend explicitly upon the x's. An example has been worked out to illustrate the theory. *Albert A. Bennett* (Providence).

Kullback, Solomon: On the Bernoulli distribution. Bull. Amer. Math. Soc. **41,** 857—864 (1935).

Using the fact that the factorial moments of the binomial distribution, of the related Poisson and Lexis type distributions, and of the multinomial distribution have simple expressions, and by using known expressions for X^n in terms of factorials, the author derives formulae for the moments of these distributions. The moments for the Poisson distribution function are obtained by a limiting process from the expressions given for the binomial case. *C. C. Craig* (Ann Arbor, Michigan).

Kullback, S.: A note on the distribution of a certain partial belonging coefficient. Metron **12,** Nr 3, 65—70 (1935).

The partial belonging coefficient considered differs essentially from the "t" usually set up to test the significance of the difference of the means of two samples from normal in that the variances appearing in the denominator are calculated about the mean of the population, instead of about the means of the respective samples. Thus the result arrived at here follows readily from any of the well-known methods used in finding the distribution function of this t, even though it may not previously have appeared in print. *C. C. Craig* (Ann Arbor, Michigan).

Kullback, Solomon: On samples from a multivariate normal population. Ann. math. Statist. **6,** 202—213 (1935).

The author determines the distribution of an extensive list of functions calculated for samples drawn from a multivariate normal population, basing the method of solution on the theory of characteristic (moment-generating) functions as previously developed by the author (this Zbl. **11,** 32). These functions are related to the mean, the variance, ratio of variances, Student's distribution, correlation ratio, etc., some treated first for a single sample, then later in the case of k independent samples. Previous results by J. Wishart and M. S. Bartlett (this Zbl. **7,** 23), A. E. Ingham (this Zbl. **7,** 7), S. S. Wilks (this Zbl. **6,** 23) and in earlier papers are utilized. *Bennett.*

Sukhatme, P. V.: A contribution to the problem of two samples. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **2,** 584—604 (1935).

The main purpose of this paper is to discuss the derivation and use of tables of 5% and 1% probability levels in connection with a criterion function, L, to test the significance of the difference (1) between variances $u = \frac{n_1 s_1^2}{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}$ and (2) between arithmetic means $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$, where $\bar{x}_1$ and $\bar{x}_2$ are the means of two samples, and $n_1 s_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x}_1)^2$; $n_2 s_2^2 = \sum_{i=1}^{n_2} (x_i - x_2)^2$. — The function L given by Neyman and E. S. Pearson is

$$L = \left(\frac{s_1}{s_0}\right)^{\frac{2n_1}{N}} \left(\frac{s_2}{s_0}\right)^{\frac{2n_2}{N}} = \frac{N}{(n_1)^{n_1/N} (n_2)^{n_2/N}} \frac{(u)^{n_1/N} (1-u)^{n_2/N}}{\left(1 + \frac{t^2}{N-2}\right)}$$

where $N s_0^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}_0)^2$, $\bar{x}_0$ being the mean of the combined sample of $N = n_1 + n_2$ items. — The sampling distribution of L is obtained. It is found that the distribution involves an elliptic function of the first order when the samples are of equal size. Tables of the 5% and 1% levels of probability are included in the paper. Finally, the question is discussed as to whether the test is suitable for application to non-normally distributed material. It is found that the test may be applied in practice except to extremely non-normal distributions. *H. L. Rietz* (Iowa).

Wilks, S. S.: The likelihood tests of independence in contingency tables. Ann. math. Statist. **6,** 190—196 (1935).

The Neyman-Pearson likelihood criterion λ_s is set down for the hypothesis that a sample of grouped data is taken from a population of specified group frequencies