

Werk

Titel: Grundlagenfragen, Philosophie (s. a. Quantentheorie), Logik.

Jahr: 1936

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0013|log32

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

13. Band, Heft 3 UND IHRE GRENZGEBIETE

S. 97—144

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

Wajsberg, M.: Beiträge zum Metaaussagenkalkül. I. Mh. Math. Phys. 42, 221 bis 242 (1935).

Die Beiträge betreffen die „Matrizenmethode“, jene in der Behandlung der Aussagenlogik üblich gewordene Methode, Unabhängigkeiten zu beweisen, indem man, ausgehend von gewissen „Wahrheitswerten“, Tabellen für die Wahrheitswertverteilung der aussagenlogischen Grundverknüpfungen derart angibt, daß die Axiome und die aus ihnen mittels Schlußschema und Einsetzung folgenden Aussagen bei allen Wertsetzungen einen Wert aus einer gewissen Teilmenge der Wahrheitswerte — einen „ausgezeichneten“ Wert — annehmen, während die als unabhängig zu erweisende Aussage auch nichtausgezeichneter Werte fähig ist. Der Autor zeigt solche aussagenlogischen Unabhängigkeiten auf, die mit der Matrizenmethode nur bei Zugrundelegung unendlich vieler ausgezeichnete Wahrheitswerte erwiesen werden können; darunter gehören z. B. die Unabhängigkeitsbehauptungen: 1. „Das Axiomensystem $Cpp, CCNpqCpq, CCNppq$ “ (wo Cpq = wenn p , so q , Np = nicht p) „zieht nicht jede beliebige Aussage nach sich.“ 2. „Von den (im üblichen Aussagenkalkül gültigen) Aussagen $Cpp, CCNpqCpq, CCNNppCp, CCNNppCp, CCNNppCp$ ist die (im üblichen Aussagenkalkül gültige) Aussage $CNNqq$ unabhängig.“ — Eine Matrix $\mathfrak{M}$ von Wahrheitswerten (der Begriff wird in bestimmter Weise präzisiert) heißt axiomatisierbar, wenn diejenigen aussagenlogischen Aussagen, die in $\mathfrak{M}$ stets ausgezeichnete Werte erhalten, mittels Schlußschema („Abtrennung“) und Einsetzung aus endlich vielen von ihnen abgeleitet werden können. Der Autor gibt Beispiele endlicher, nicht axiomatisierbarer Matrizen und zeigt an Hand eines längeren Beweises: Eine auf die Verknüpfungen C und N (bzw. auf C allein) bezügliche endliche Matrix $\mathfrak{A}$ ist — hinsichtlich der Aussagen, die mit den in $\mathfrak{A}$ auftretenden Verknüpfungen gebildet sind — axiomatisierbar, sobald die folgenden (bzw. die ersten drei der folgenden) Aussagen in $\mathfrak{A}$ stets ausgezeichnete Werte annehmen: $CCpqCCqrCpr, CCqrCCpqCpr, CCqqCp, CCpqCNqNp, CNqCCpqNp$. — Abschließend wird der Beweis einer Vermutung von Łukasiewicz (betreffs der Axiomatisierbarkeit einer gewissen unendlichen Matrix mit nur einem ausgezeichneten Wert) angekündigt; weiter werden ohne Beweis einige den Vollständigkeitsgrad und die Zusammensetzung von Matrizen betreffende Ergebnisse angegeben. — Angefügt ist eine Berichtigung zur Arbeit „Ein erweiterter Klassenkalkül“ (vgl. dies. Zbl. 7, 98): Die ohne Beweis behauptete Vollständigkeit des dort gegebenen Axiomensystems für den Hilbert-Ackermannschen „kombinierten Prädikaten- und Aussagenkalkül“ gilt erst bei Hinzunahme des weiteren Axioms $\overline{X \& \overline{X}}$. Schmidt.

Skolem, Th.: Über die Erfüllbarkeit gewisser Zähl ausdrücke. Skr. norske Vid.-Akad., Oslo Nr 6, 1—14 (1935).

Dieser Aufsatz betrifft die Erfüllbarkeit von Zähl ausdrücken der Form

$$(x)(Ey_1, y_2, \dots, y_n) K(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (1)$$

nebst einigen Verallgemeinerungen. Die Resultate sind meistens schon früher in kürzerer Gestalt angekündigt, nämlich in der Arbeit „Über die mathematische Logik“ (Norsk mat. Tidsskr. 1928) und in der Besprechung einer Ackermannschen Arbeit (Jb. Fortschr. Math. 54, 57; die ursprüngliche Arbeit erschien in Math. Ann. 100). Der Verf. definiert zunächst eine Tabelle $T(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ als eine Bestimmung der Wahrheitswerte der in K vorkommenden Prädikate für die Argumentreihen der Elemente $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ derart, daß $K(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ wahr wird. Zwei solche

Tabellen $T(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ und $T(b_1, b_2, \dots, b_{n+1})$ heißen kompatibel, wenn die Werte aller Prädikate für die gemeinsamen Argumentreihen von $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ einerseits und von $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$ andererseits übereinstimmen. Dann sind die Hauptsätze dieser Arbeit die zwei folgenden: 1. Notwendig und hinreichend für die Erfüllung von (1) in irgendeinem Individuenbereich ist die Existenz einer Menge von Tabellen $T_1(1, 2, \dots, n+1), T_2(1, 2, \dots, n+1), \dots, T_l(1, 2, \dots, n+1)$ derart, daß zu jedem $i \leq n+1$ und $j \leq l$ es ein $h \leq l$ gibt, so daß $T_j(1, 2, \dots, n+1)$ und $T_h(i, n+2, \dots, 2n+1)$ kompatibel sind. Weil es überhaupt nur endlich viele Tabellen gibt, hat man ein theoretisch durchführbares Entscheidungsverfahren. 2. Wenn (1) überhaupt erfüllbar ist, so ist es auch in einem Individuenbereich mit $3ln$ Elementen, wo l die Anzahl der Tabellen in einer Menge der obigen Art ist. Diese Anzahl ($3ln$) ist viel kleiner als die der Ackermannschen Arbeit. Von diesen zwei Sätzen gibt Verf. folgende Verallgemeinerungen. Der erste Satz wird auf Ausdrücke der Form

$$(x_1, \dots, x_m)(E y_1, \dots, y_n) K(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$$

ausgedehnt, wo jedes Prädikat in K , das an einer bestimmten Stelle von $y_1, y_2, \dots, y_n$ frei ist, dort wirklich alle $x_1, \dots, x_m$, nicht bloß einige, als Argumente hat; der zweite Satz auf Ausdrücke der Form

$$(x)(E y_1, \dots, y_n) K(x, y_1, \dots, y_n) \& (x_1, x_2, x_3) K_1(x_1, x_2, x_3),$$

wo das letzte Glied dieser Konjunktion gerade die Formel ist, die besagt, daß gewisse Relationen, die vielleicht in K auch erscheinen, symmetrisch und transitiv sind. In den beiden Fällen sind die genauen Bedingungen freilich etwas komplizierter als die für den Ausdruck (1) geltenden, aber sie sind analog.

H. B. Curry.

Huntington, Edward V.: **Effective equality and effective implication in formal logic.** Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 21, 266—271 (1935).

Huntington, Edward V.: **The mathematical structure of Lewis's theory of strict implication.** Fundam. Math. 25, 147—156 (1935).

In der letztgenannten Arbeit wird die Lewissche Aussagenlogik der strict implication (Lewis, A Survey of Symbolic Logic. 1918; Lewis-Langford, Symbolic Logic. 1932) in die Sprache einer „abstract theory ($K, \times, \sim, T, <$)“ im Sinne des Autors [K Elementenklasse, T Unterklasse, $\sim$ (nicht) bzw. $\times$ (und), $<$ (implies strictly)] ein- bzw. zweistellige Grundfunktionen] eingekleidet. Huntington richtet dabei sein Augenmerk auf zwei Tatsachen — betr. beider vgl. dies. Zbl. 10, 49: 1. Während im Lewis-Langfordschen Buche die strict implication mit Hilfe einer noch hinzutretenden einstelligen Grundfunktion $\Diamond$ (möglich) definiert wird, geht der Autor umgekehrt vor; das durch $a^* = a < \sim a$ definierte Zeichen $*$ spielt nämlich die Rolle des Lewisschen Zeichenkomplexes $\sim \Diamond$. 2. Die Herleitung der Äquivalenz von „ $a < b$ in T “ und „ $a = ab$ “ legt die Einführung der Relation „ $a < b$ “ für „ $a \prec b$ in T “ nahe. — Die letztere Betrachtung wird in der erstgenannten der beiden Huntingtonschen Arbeiten in spezieller Form systematisch durchgeführt, indem in einer nur die Grundfunktion „und“ die Grundrelation „äquivalent“ umfassenden abstract theory (die also insbesondere keine Negation einbezieht) eine „effective implication“ definitorisch eingeführt wird, deren Eigenschaften mit denen der Whitehead-Russellschen „material implication“ und der Lewisschen „strict implication“ verglichen werden.

Arnold Schmidt (Marburg, Lahn).

Bernstein, B. A.: **On finite Boolean algebras.** Amer. J. Math. 57, 733—742 (1935).

In einer endlichen „Booleschen Algebra“ mit den Elementen $a_1, \dots, a_n$ sei der Ausdruck $(a_1 + a'_1) \dots (a_n + a'_n)$ in eine additive Normalform entwickelt; diejenigen Summanden dieser Form, die $\neq 0$ sind, werden als „minimals“ bezeichnet. Dieser Begriff ist (wie der nach Bernstein mit ihm zusammenfallende Huntingtonsche Begriff des „irreducible element“) der endliche Spezialfall des von Schröder („Algebra der Logik“ Bd. 2. 1891) behandelten Begriffs des „Individuums“. — Die grundlegenden Sätze über minimals und die dual erklärten maximals werden aufgestellt; sie