wandter Größen. 1. Vertiefung des Weylschen Ansatzes. Polynome vom Grade $k \geqq 2$. Ein allgemeiner Satz. 2. Polynome ersten Grades (der lineare Fall). 3. Polynome zweiten Grades. 4. Summen und Reihen, die denen der Paragraphen 2 und 3 verwandt sind. 5. Trigonometrische Summen. 6. Metrische Sätze über die Gleichverteilung gewisser Folgen. Asymptotische Verteilung der Ziffern in Dezimalbrüchen. X. Diophantische Ungleichungen. 1. Anwendung der Gleichverteilungsmethoden. 2. Eine elementare Skolemsche Methode. 3. Die van der Corputsche Theorie der rhythmischen Funktionensysteme. — Das sehr nützliche Buch schließt mit einem Sachregister, das den Gebrauch noch erleichtert. Für jeden, der sich für dieses Gebiet interessiert, wird das Buch unentbehrlich sein. *van der Corput* (Groningen).

Analysis.

● **Schmidt, Harry: Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung unter besonderer Berücksichtigung ihrer physikalischen Bedeutung.** Leipzig: Max Jänecke 1935. VIII, 125 S. u. 20 Abb. RM. 5.80.

Die besondere Tendenz dieses Buches, das sich in der Stoffauswahl (Vektoralgebra, Vektoranalysis, Elemente der Tensorrechnung) wenig von der Mehrzahl der kleineren, für den Physiker bestimmten Lehrbücher unterscheidet, charakterisiert der Verf. im Vorwort folgendermaßen: „... diese Schrift ... möchte lediglich eine zuverlässige, sachlich völlig einwandfreie Einführung in ihren Gegenstand für Anfänger vermitteln, ohne sich auf faule Kompromisse einzulassen, um leichte Lesbarkeit zu erzwingen." Dieses Bestreben des Verf. äußert sich naturgemäß am stärksten in der Vektoranalysis. Statt beispielsweise Scheinbeweise für die Integralsätze zu geben, übernimmt Verf. diese und einige andere Sätze ohne Beweis in einer Form, in der sie in einer Reihe von Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung einwandfrei bewiesen werden. Auf begriffliche Schwierigkeiten wird ausführlich eingegangen. Doch scheinen dem Ref. die endgültigen Formulierungen der Definitionen eines Vektors (S. 26) und eines Tensors (S. 105—106) mißverständlich. Die Definition der Massendichte in einem Punkt (S. 45) ist nicht korrekt. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Baidaff, B. I., und J. Barral Souto: 5 interessante Werte eines allgemeinen Mittelwertes. Bol. mat. 7, 102—104 (1934) [Spanisch].

Baidaff, B. I., und J. Barral Souto: Studie über den Differentialquotienten eines allgemeinen Mittelwertes. Bol. mat. 8, 81—83 (1935) [Spanisch].

Die Verff. betrachten die Potenzmittelwerte

$$y(x) = (\sum p_\nu a_\nu^x)^{1/x}, \qquad p_\nu \geqq 0, \ \sum p_\nu = 1,$$

als Funktionen von x. Insbesondere beweisen sie durch Abschätzen der Ableitung $y'(x)$ die geläufige Tatsache, daß $y(x)$ monoton wächst. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Münzner, Hans: Über Verschärfungen der Tschebycheffschen Ungleichung. Skand. Aktuarie Tidskr. 18, 279—287 (1935).

Pocklington, H. C.: An inequality. J. London Math. Soc. **10**, 242—243 (1935).

The results are (I) if a, k, p are positive, $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ positive and non-increasing, $\sum_1^n x_r y_r \geqq a^p$, and $\sum_1^n x_r \leqq ka$, then either $\sum_1^s x_r \geqq a$ or $\sum_1^s y_r \geqq a^{p-1}$ for $s \geqq k$; (II) if $p \geqq 2$ and $\sum_1^n x_r^p \geqq a^p$, $\sum_1^n x_r \leqq ka$, then $\sum_1^s x_r \geqq a$ for $s \geqq k$.

E. C. Titchmarsh (Oxford).

Herschfeld, Aaron: On infinite radicals. Amer. Math. Monthly **42**, 419—429 (1935).

Es sei $a_n \geqq 0$; die „rechtsseitige Wurzeliteration" $\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_n}}}$ ist konvergent oder divergent, je nachdem

$$\alpha = \overline{\lim} \frac{\log\log a_n}{n} \lessgtr \log 2$$

($\log\log a_n = -\infty$ für $a_n \leqq 1$). Dieses Kriterium von Pólya [Arch. d. Math. (3) **24**, 84 (1916)] wird in dem Falle $\alpha = \log 2$ dadurch ergänzt, daß dann die notwendige und hinreichende Bedingung der Konvergenz

$$\overline{\lim}(\log\log a_n - n \log 2) < +\infty$$

ist. Weiter wird die Stärke der Konvergenz abgeschätzt und an Beispielen erläutert.

Die „linksseitige Wurzeliteration" $\sqrt{a_n + \sqrt{a_{n-1} + \cdots + \sqrt{a_1}}}$, $a_n \geqq 0$, $a_n \not\equiv 0$, konvergiert dann und nur dann, wenn $a_n \to a$. Der Grenzwert ist $= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a})$.
G. Szegö (St. Louis, Mo.).

Watson, G. N.: Über eine Formel für numerische Berechnung der bestimmten Integrale. Čas. mat. fys. **65**, 1—7 (1935).

Eine von K. Petr 1915 angegebene Entwicklung eines bestimmten Integrales wird bewiesen; für das auftretende Restglied werden geeignete Reihen entwickelt.
F. Rehbock (Bonn).

Stożek, Włodzimierz: Über den Inhalt einer auf der Kugel liegenden geschlossenen Kurve. Prace mat.-fiz. **43**, 237—240 (1936).

Aus einer potentialtheoretischen Formel von Gauß läßt sich durch einen Grenzübergang die folgende (natürlich auch elementar leicht beweisbare) Formel für den Flächeninhalt P eines Gebietes auf der Einheitskugel herleiten, das von einer stückweise stetig differentiierbaren, einfach geschlossenen Kurve C berandet wird:

$$P = \int_C \frac{\cos(e, n)}{1 + \cos(e, OM)} ds.$$

Hierbei ist s die Bogenlänge und $M = M(s)$ ein variabler Punkt auf C, ferner O der Kugelmittelpunkt, e der Radius zu einem festen, im Gebiet gelegenen Punkt und n die in das Innere des Gebiets weisende, zur Kugel tangentiale Normale von C im Punkt M. [Verf. findet infolge eines Rechenfehlers $1 - \cos(e, OM)$ statt $1 + \cos(e, OM)$ im Nenner des Integranden.]
W. Fenchel (Kopenhagen).

Šamonil, Ferdinand: Sur la généralisation des certaines formules de sommation. Aktuár Vědy **5**, 129—133 (1935).

Die von Tauber [Acta math. **57** (1931); dies. Zbl. **2**, 387] gegebene Verallgemeinerung der Summenformeln von Laplace und Euler wird so umgeformt, daß sie auch eine Formel von Steffensen (Interpolation, S. 138ff. Baltimore 1927) als Spezialfall enthält.
W. Feller (Stockholm).

Kuzmin, R. O.: Sur la méthode de Tschebicheff pour l'évaluation approchée des intégrales. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 1094—1095 (1935).

Tchebicheff a proposé la formule suivante

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \frac{2}{n} \sum_{m=1}^{n} f(x_m) \tag{1}$$

pour le calcul approché des intégrales, où les nombres x_m doivent être déterminés par la condition que la formule (1) soit exacte pour un polynome quelconque de degré n. S. Bernstein, après avoir montré que pour n assez grand tous les nombres x_m ne peuvent pas appartenir à l'intervalle $(-1, +1)$ (Bull. Acad. Sci. URSS **1932**, 1219—1227; ce Zbl. **6**, 399), a posé à l'endroit cité la question de déterminer la distribution asymptotique des x_m pour n très grand. L'auteur apporte une contribution considérable à la résolution de cette question, en démontrant que, S désignant l'aire limitée par la courbe fermée ayant pour équation

$$\int_{-1}^{+1} \log|z - t|\,dt = 2\log 2 - 2, \tag{2}$$

tous les nombres x_m se trouvent, pour n suffisamment grand, à l'intérieur de toute aire S_1 donnée limitée par une courbe C qui entoure l'aire S sans avoir de points communs avec la courbe (2). La démonstration résulte de la forme

$$p_n(x) = e^{\frac{n}{2}\int_{-1}^{+1}\log(x-t)\,dt} + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{e^{\frac{n}{2}\int_{-1}^{+1}\log|z-t|\,dt}}{z - x} \sin\frac{\pi n(1-z)}{2}\,dz,$$

sous la quelle l'auteur présente pour toute valeur de x extérieure au segment $(-1, +1)$ le polynome $p_n(x)$ ayant les nombres x_m pour racines, car, à l'extérieur de S_1, le premier terme est beaucoup plus grand que le second. *S. Bernstein* (Leningrad).

Hoel, Paul G.: Certain problems in the theory of closest approximation. Amer. J. Math. **57**, 891—901 (1935).

L'auteur étudie le problème de la determination des coefficients c_i de la somme $\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, s_i(x)$, où $s_i(x)$ sont des fonctions données, par la condition de minimer l'intégrale

$$\int_a^b w(x)\, |f(x) - \psi(x)|^m dx,$$

le poids $w(x) \geqq 0$ et le fonction $f(x)$ étant donnée, en supposant $m > 0$ constant. L'auteur se place dans des conditions très générales, où $f(x)$ et $s_i(x)$ sont bornées et mesurables, aucune somme $\psi(x)$ à coefficients non tous nuls n'étant nulle sur un ensemble intérieur à (a, b) de mesure positive, et étend avec des modifications convenables les résultats concernant $m > 1$ au cas où $m \leqq 1$. *S. Bernstein* (Leningrad).

Mirakyan, G.: Sur une nouvelle fonction qui s'écarte le moins possible de zéro. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. **12**, 41—47 (1935).

L'auteur étudie le problème suivant: le polynome $t(x) > 0$ (pour $-1 \leqq x \leqq 1$) de degré r étant donné, ainsi que les coefficients réels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots \sigma_l$, déterminer parmis les fonctions

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{t(x)}}\left[\sigma_0 x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + \sigma_l x^{n-l} + p_{l+1} x^{n-l-1} + \cdots + p_n + \frac{a_0 x^{l-1} + \cdots + a_{l-1}}{q_0 x^l + \cdots + q_l}\right]$$

dépendant de $n + l + 1$ coefficients arbitraires celle qui s'écarte le moins possible de zéro sur $(-1, +1)$. En supposant $2n - r \geqq l + 1$, $n > l$, l'auteur donne un procédé général ramenant la solution du problème à une équation algébrique de degré $(l + 1)$. Il est regrettable que la lecture du travail n'est pas aisée à cause de son langage très défectueux. *S. Bernstein* (Leningrad).

Geronimus, J.: Sur quelques propriétés extrémales de polynômes dont les coefficients premiers sont donnés. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. **12**, 49—58 (1935).

L'auteur s'occupe de la recherche de la valeur minime $L_{n,s}$ de l'intégrale

$$L(G) = \int_{-1}^{+1} |G(x)|\, dx, \tag{1}$$

où $G(x)$ est un polynome de degré $\leqq n$, lorsque

$$G(x) = [\sigma_0 x^s + \sigma_1 x^{s-1} + \cdots + \sigma_s] x^{n-s} + P(x),$$

en supposant les coefficients $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s$ donnés et le polynome $P(x)$ de degré inférieur à $n - s$ indéterminé. Pour le cas de $s = 1$, le problème est complètement résolu, on a:

$$L_{n,1} = \frac{|\sigma_1|}{2^{n-2}} \quad \text{ou} \quad L_{n,1} = \frac{|\sigma_0|}{2^{n-1}}\left[1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right],$$

suivant que $|\sigma_1| \geqq |\sigma_0|$ ou $|\sigma_1| \leqq |\sigma_0|$. Pour s fini quelconque, en supposant que $n \to \infty$, les coefficients donnés étant du même ordre, on a $L_{n,s} \backsim \frac{2}{\pi} M_{n,s}$, où $M_{n,s}$ désigne le minimum de (1), lorsque $G(x) \geqq 0$ dans l'intervalle $(-1, +1)$. *S. Bernstein.*

Břečka, M.: Über einige extremale Eigenschaften der vielfach monotonen und monotonen Polynome. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. **12**, 61—78 (1935).

Le travail contient la solution des problèmes suivants: 1° déterminer l'écart minimum dans l'intervalle $(-1, +1)$ du polynome de degré n multiplement monotone d'ordre $h + 1$

$$y_n(x) = \sigma_0 x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + \sigma_n,$$

lorsque σ_0 et σ_1 sont donnés; 2° déterminer asymptotiquement l'écart minimum correspondant, lorsque $\sigma_0, \sigma_1, \ldots \sigma_s$ sont des nombres donnés du même ordre de grandeur, s étant fini et $n \to \infty$; 3° déterminer la valeur asymptotique de l'écart considéré, lorsqu'un des coefficients σ_i est donné (i est supposé fini). *S. Bernstein.*

Mises, R. v.: Über allgemeine Quadraturformeln. J. reine angew. Math. **174**, 56—67 (1935).

Auf einem etwas elementareren Wege als bei Wirtinger (Z. angew. Math. Mech. **13**, 166; dies. Zbl. **6**, 361) wird die Formel

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(a_\nu) + \int_0^1 M_\mu(x)\, f^{(\mu)}(x)\,dx \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

hergeleitet, wobei $a_0 = 0 \leqq a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leqq a_{n+1} = 1$ beliebig sind, die A_ν den Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^\mu A_\nu = \frac{1}{\mu+1} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m-1)$$

genügen und die Funktionen $M_\mu(x)$ durch die Bedingungen

$$M_{\mu+1}(x) = -\int_0^x M_\mu(\xi)\,d\xi; \quad M_1(x) = -x + \sum_{k \leqq \nu} A_k, \qquad a_\nu < x < a_{\nu+1},$$

erklärt werden. Sobald die Stellen a_ν fixiert sind, ergeben sich A_ν und $M_\mu(x)$ zwangsläufig aus der identischen Gültigkeit der Quadraturformel in $f(x)$. — Eine große Anzahl von besonderen Formeln ergeben sich hieraus durch Spezialisierung von m und n sowie der Stellen a_ν. Eine weitere Formel

$$\int_0^1 f(x)\,dN_1(x) + \int_0^1 N_\mu(x)\, f^{(\mu)}(x)\,dx = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

enthält Stieltjessche Integrale; $N_1(x)$ ist hier eine Funktion von beschränkter Schwankung, welche die Bedingungen

$$N_1(0) = 0, \qquad \int_0^1 x^\mu\,dN_1(x) = 0 \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m-1)$$

erfüllt, während $N_{\mu+1}$ aus N_μ wie früher hervorgeht. — Schließlich wird eine allgemeine Quadraturformel verwandter Art aufgestellt, welche Funktions- und Ableitungswerte in beliebiger Anzahl kombiniert. Die Eulersche Formel ergibt sich als Spezialfall. Abschätzungen der Restintegrale werden nicht vorgenommen. *Szegö.*

Tchakaloff, L.: Über den Gültigkeitsbereich einer Ungleichung von Darboux und ihrer Erweiterung, angewandt auf Polynome. Compositio Math. **2**, 362—377 (1935).

Es sei k positiv ganz, $\psi(x)$ nicht abnehmend mit mindestens $n = \left[\frac{k}{2}\right] + 1$ Wachstumsstellen. Unter einer Minimalmenge M_k wird eine Zahlenmenge (reell oder komplex) verstanden, so daß für jedes Polynom k-ten Grades $\varphi(x)$ die „Darbouxsche Ungleichung"

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,d\psi(x) \right| \leqq |\varphi(\xi)| \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi(x)$$

mit einem ξ aus M_k befriedigt werden kann; hierbei soll keiner Teilmenge von M_k die gleiche Eigenschaft zukommen. Verf. beweist: Eine Menge von $p < n$ Zahlen kann keine Minimalmenge M_k sein. Ist k ungerade, so gibt es genau ein M_k von n Zahlen, nämlich die n Nullstellen des zu $\psi(x)$ gehörigen orthogonalen Polynoms $\varphi_n(x)$ vom n-ten Grade. Ist k gerade, so gibt es unendlich viele solche Systeme von n Zahlen, nämlich die Nullstellen von $\varphi_n(x) + c\varphi_{n-1}(x)$ und nur diese, wobei c eine beliebige reelle Konstante bedeutet. Weiter werden spezielle Fälle, Beispiele und das trigonometrische Analogon des Problems behandelt. *G. Szegö* (St. Louis, Mo.).

Pleijel, Åke: Über asymptotische Reihenentwicklungen in der Operatorenrechnung. Z. angew. Math. Mech. **15**, 300—304 (1935).

This paper gives a satisfactory discussion of asymptotic developments in the Heaviside operational calculus. The following assumptions are made upon the operator function $\varphi(p)$: (1) $\varphi(p)/p \to 0$ as $|p| \to \infty$, $\frac{\pi}{2} \leqq \arg p \leqq \frac{3\pi}{2}$; (2) $\varphi(p)$ is analytic save, possibly, at a finite number of points; if a is one of these singular points $\varphi(p)$ has, near it, a development $\varphi(p) = (p-a)^\alpha\{a_0 + a_1(p-a)^k + a_2(p-a)^{2k} + \cdots\}$ where $k > 0$ is rational and α is arbitrary; (3) the integral $\int \frac{e^{pt}}{p}\varphi(p)\,dp$ evaluated over the semicircle $p = Re^{i\theta}$, $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ has a limit $2\pi i\,h(t)$ as $R \to \infty$. It is shown that if the development corresponding to that (or those) singularity (singularities) possessing the greatest real part is used it furnishes an asymptotic expansion for $h(t)$ valid for real positive values of t. If we make the additional hypothesis $\frac{\varphi(p)}{p} \to 0$ as $|p| \to \infty$, $-\frac{\pi}{2} < \arg p < \frac{\pi}{2}$ the method given is valid for negative, and also for complex, values of t. *Murnaghan* (Baltimore).

Reihen:

Verblunsky, S.: On a class of perfect sets. Acta math. **65**, 283—305 (1935).

A set P, situated in the interval $(0, 2\pi)$, is called a set of multiplicity, if there is a trigonometrical series converging to 0 outside P but not everywhere. Let P be a perfect set, and $d_1, d_2, \ldots$ the sequence of intervals contiguous to P. The set P may be constructed by subtracting consecutively the intervals $d_1, d_2, \ldots$ from $(0, 2\pi)$. When $d_1, d_2, \ldots d_n$ have been subtracted, there remain certain closed intervals $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$, and from one of these, ϱ_i say, d_{n+1} is to be subtracted. Verblunsky shows that, if $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{\varrho_i} = 0$, then P is a set of multiplicity. This result was suggested as probable by Mlle Bary [Fundam. Math. **9** (1927), 62—115, esp. 62—63], who proved it under a certain additional hypothesis concerning the intervals d_{n+1} and ϱ_i. *A. Zygmund* (Wilno).

Kac, M.: Une remarque sur les séries trigonométriques. Studia Math. **5**, 99—102 (1935).

If $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$, the Fejér polynomials of the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos n^2 x$ are unbounded in every interval $a \leqq x \leqq b$. *A. Zygmund* (Wilno).

Marcinkiewicz, J.: On the convergence of Fourier series. J. London Math. Soc. **10**, 264—268 (1935).

Hardy and Littlewood have shown [J. London Math. Soc. **7** (1932); this Zbl. **5**, 394] that, if the Fourier coefficients of a function $f \in L$ are $O(n^{-\delta})$ $(\delta > 0)$, then the Fourier series of f is convergent at every point x where (*) $f(x+t) - f(x) = O\left(\frac{1}{\log 1/|t|}\right)$. The author shows that, if a function $f \in L$ satisfies the condition (*) at every point x of a set E of positive measure, the Fourier series of f converges almost everywhere in E. It is stated without proof that the inequality (*) cannot be replaced by anything less stringent. *A. Zygmund* (Wilno).

Marcinkiewicz, J.: On Riemann's two methods of summation. J. London Math. Soc. **10**, 268—272 (1935).

In his classical memoir on trigonometrical series, Riemann introduced the following two methods of summation of series. Let $a_1 + a_2 + \cdots$ be a series, and s_n its n-th partial sum. Let us assume that the expressions

$$R_1(h) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left(\frac{\sin \nu h}{\nu h}\right)^2, \quad R_2(h) = \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty} s_\nu \frac{\sin^2 \nu h}{\nu^2 h}$$

are convergent in the neighbourhood of $h = 0$. If $R_i(h)$ tends to s, as $h \to 0$, we shall say that the series $a_1 + a_2 + \cdots$ is summable R_i to sum s $(i = 1, 2)$. Riemann proved that any series convergent to s is summable R_1 as well as R_2 to s (as regards summability R_2, he considered the case $s = 0$ only). Marcinkiewicz solves the problem of the mutual relations of the methods R_1 and R_2, showing that a series may be summable R_1 without being summable R_2, or summable R_2 without being summable R_1. *A. Zygmund* (Wilno).

Szász, Otto: Convergence properties of Fourier series. Trans. Amer. Math. Soc. **37**, 483—500 (1935).

Let A be the class of series $\sum\limits_0^\infty c_\nu$ such that $\lim\limits_{\delta\to 0} \liminf\limits_{n\to\infty} \min\limits_{0<k<\delta(n+1)} (s_{n+k} - s_n) \geqq 0$, $s_n = \sum\limits_0^n c_\nu$, while $\bar{A}$ the class of series with $\liminf\limits_{n\to\infty} \min\limits_{0<k<\delta(n+1)} (s_{n+k} - s_n) > -\infty$, $\delta > 0$ fixed. Let B (or $\bar{B}$) be the class of series for which $\sum (c_\nu - |c_\nu|) \in A$ (or $\in \bar{A}$). The author proves the following results. (I) Let $\sum\limits_1^\infty a_\nu r^\nu \cos\nu\theta$, $0 \leqq r < 1$ represent a harmonic function, and let (i) $\sum a_\nu \in \bar{B}$. Then condition (ii) $\sum a_\nu r^\nu = O(1)$, $0 \leqq r < 1$, implies (ii′) $\sum\limits_1^n a_\nu = O(1)$ as $n \to \infty$ and vice versa. If (i) and (ii) are assumed then (iii) $\sum a_\nu r^\nu \cos\nu\theta_0 = O(1)$ implies (iii′) $\sum\limits_1^n a_\nu \cos\nu\theta_0 = O(1)$, θ_0 fixed, and vice versa. Finally if, under conditions (i) and (ii), $\varphi(\theta) \sim \sum a_\nu \cos\nu\theta$ is a Fourier series and $\sum\limits_1^n a_\nu \cos\nu\theta_0 = O(1)$ then $\int\limits_0^h \{\varphi(\theta_0 + t) + \varphi(\theta_0 - t)\}dt = O(h)$ as $h \to 0$. (II) Let $\sum a_\nu \in B$ and $\sum a_\nu r^\nu \to s$ as $r \to 1$, so that $\sum a_\nu = s$ (R. Schmidt). Let, for a fixed θ_0, $\sum a_\nu r^\nu \cos\nu\theta_0 \to s(\theta_0)$ as $r \to 1$. Then $\sum a_\nu \cos\nu\theta_0 = s(\theta_0)$. If this last condition is satisfied and $\varphi(\theta) \sim \sum a_\nu \cos\nu\theta$ is a Fourier series then $(2h)^{-1} \int\limits_0^h \{\varphi(\theta_0 + t) + \varphi(\theta_0 - t)\}dt \to s(\theta_0)$ as $h \to 0$. (III) Let $\omega(\theta) \sim \sum b_\nu \sin\nu\theta$ be a Fourier series and $\sum b_\nu \in \bar{B}$. Let $\int\limits_0^h \omega(t)\,dt = O(h)$ as $h \to 0$. Then $\sum\limits_1^n b_\nu = O(n)$. If, in addition, $\sum b_\nu r^\nu \sin\nu\theta_0 = O(1)$, $0 \leqq r < 1$ then $\sum\limits_1^n b_\nu \sin\nu\theta_0 = O(1)$. Conversely, if $\sum\limits_1^n b_\nu \sin\nu\theta_0 = O(1)$, then $\int\limits_0^h \{\omega(\theta_0 + t) + \omega(\theta_0 - t)\}dt = O(h)$ as $h \to 0$. (IV) Let $\sum b_\nu \in B$ and $2/h \int\limits_0^h \omega(t)\,dt \to d$ as $h \to 0$. Then $1/n \sum\limits_1^n \nu b_\nu \to d/\pi$ as $n \to \infty$. If, in addition, $\sum b_\nu r^\nu \sin\nu\theta_0 \to s(\theta_0)$ as $r \to 1$ then $\sum b_\nu \sin\nu\theta_0 = s(\theta_0)$. Conversely if the last condition is satisfied then $2/h \int\limits_0^h \{\omega(\theta_0 + t) + \omega(\theta_0 - t)\}dt \to s(\theta_0)$ as $h \to 0$. The author proves several lemmas of independent interest, of which we mention only one. Let $s_{n+k} - s_n \geqq -p$, $1 \leqq k < 1 + \mu(n + 1)$ and $\left|\sum\limits_1^\infty c_\nu r^\nu\right| \leqq M$. Then

$$|s_n| < M(1 + 8e)(2 + \mu)/\mu + p(1 + 4e(2 + \mu)(1 + \mu)/\mu^2).$$

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Morgan, Gilbert Walter: On the new convergence criteria for Fourier series of Hardy and Littlewood. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **4**, 373—382 (1935).

A series $\sum a_n$ is said to be (H) summable to s if

$$T(x) = [H(x)/2\pi]^{1/2} \sum_{m=-x}^{\infty} \exp[-\tfrac{1}{2} m^2 H(x)]\, s_{m+x} \to s \quad \text{as} \quad x \to \infty$$

[Valiron, Rend. Circ. mat. Palermo **42**, 267—284 (1917)]. In extending some recent work of Hardy and Littlewood (this Zbl. **8**, 310, 464) the author proves the following

results. (I) If $H(x)$ is decreasing and $x^{-2} \prec H(x) \prec 1$ while $x^2 H(x)$ increases and the ratio $\frac{H(ax)}{H(x)}$, for a positive a, lies between positive bounds, and if $\sum a_n$ is (H) summable to s, while $a_n = o\{(H(n))^{1/2}\}$, then $\sum a_n$ converges to s. (II) Let $f(t)$ be periodic (of period 2π), even and integrable, $f(t) \sim \sum a_n \cos nt$ and $f(0) = 0$. Let $\varphi(x)$ be positive and $\Phi(x) = \int^x \frac{du}{u\,\varphi(u)} \to \infty$ as $x \to \infty$ and let $\varphi'(x)$ exist and be positive, while $x\varphi'(x)\log x = O(\varphi(x))$. Let, for some K, $\eta(x) = \Phi^{-1}[\Phi(x) - K]$ and $H(x)\,\eta^2(x) = O(1)$. Then, if $f(t) = o\{\varphi(1/t)^{-1}\}$, the series $\sum a_n$ is (H) summable to 0. (III) Under the conditions above, if $a_n = O(1/\eta(n))$ then the series $\sum a_n$ converges to 0.
J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Ramaswami, V.: Some Tauberian theorems on oscillation. J. London Math. Soc. **10**, 294—308 (1935).

Seien: S und s die Oszillationsgrenzen einer Folge s_n, L und l diejenigen des A-Verfahrens, M und m diejenigen des (C, ∞)-Verfahrens, d. h. $\lim\limits_{r=\infty}\{\lim\limits_{n=\infty}\sup$ bzw. $\inf \sigma_n^{(r)}\} = M$ bzw. m, wo $\sigma_n^{(r)}$ die (C, r)-Summe der Folge s_n ist. Verf. untersucht, wann diese Oszillationsgrenzen einander gleich sind und zeigt: (Th. 2) Es ist $L = S$ und $l = s$, falls L und l endlich sind und $\lim\limits_{n=\infty} \inf \min\limits_{n \leqq n' \leqq (1+\varepsilon)n} \{s_{n'} - s_n\} = o(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$. (Dieser Satz folgt aber, sogar für allgemeinere Limitierungsverfahren, aus den Noten des Ref., dies. Zbl. **7**, 245; **11**, 398.) — Bemerkenswert ist der Zusammenhang zwischen dem A- und (C, ∞)-Verfahren: (Th. 1a und 1b) Es ist $L = M$, falls m endlich ist; $l = m$, falls M endlich ist. An Beispielen wird gezeigt, daß in diesen Sätzen die Voraussetzungen der Endlichkeit von m bzw. M durch keine geringere ersetzt werden können. *Karamata* (Zemun).

Littlewood, J. E.: Note on the preceding paper. J. London Math. Soc. **10**, 309 bis 310 (1935).

Mit den Bezeichnungen des vorsteh. Ref. kann von den beiden Sätzen: Th. T. Ist eine Folge A-limitierbar und $\sigma_n^{(r)} > O(1)$, $n \to \infty$, so ist sie auch (C, r)-limitierbar, Th. t. Ist eine Folge (C, ∞)-limitierbar, so ist sie für großes r auch (C, r)-limitierbar, der Satz t aus T (wegen $m \leqq l \leqq L \leqq M$) unmittelbar, aber T aus t erst durch den Ramaswamischen Satz (Th. 1a) gefolgert werden. — Verf. bemerkt (zweifelnd), daß es von Interesse wäre, einen direkten, von der A-Limitierbarkeit freien Beweis des Satzes t zu geben, so daß, von diesem Satze ausgehend, über den Ramaswamischen Satz ein natürlicher Beweis des Satzes T zu erhalten wäre. *Karamata* (Zemun).

Lawrence, B. E.: The summability of double power series. Proc. London Math. Soc., II. s. **40**, 321—335 (1935).

The chief result of the paper is an extension, to double series, of Fatou's well-known theorem on the convergence of power series. If the function $f(x, y)$, defined for $|x| < 1$, $|y| < 1$ by the series $\sum\sum a_{mn}\, x^m y^n$, is regular for $x = 1$, $y = 1$, and if (I) $p_{mn} = \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_{m\nu} = o(1)$, (II) $q_{mn} = \sum\limits_{\mu=1}^{m} a_{\mu n} = o(1)$, (III) $a_{mn} = o(1)$ as $m + n \to \infty$, then the sum by rows, the sum by columns, and the Pringsheim sum of $\sum\sum a_{mn}$ all exist and are equal to $f(1, 1)$. *A. Zygmund* (Wilno).

Burkill, J. C.: The Cesàro scales of summation and integration. J. London Math. Soc. **10**, 254—259 (1935).

The author treats the Cesàro summability problem for Fourier series as an example of the application of the Cesàro-Perron scale of integrability, introduced by him in a note in Proc. London Math. Soc., II. s. **39**, 541—552 (1935); this Zbl. **12**, 204. He demonstrates the theorem: Let $f(t)$ be $C_i P$-integrable (where i is a positive integer) and periodic with period 2π and let $\varphi(t) = {}^1/_2\{f(x+t) + f(x-t) - 2s\} \to 0(C, j)$

as $t \to 0$. Then if $k > j \geqq i + 1$, the Fourier series of $f(t)$ is summable (C, k), for $t = x$, to the sum s. *J. Ridder* (Groningen).

Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:

Mandelbrojt, Szolem: Sur les droites J et les points singuliers des fonctions représentées par les séries de Dirichlet. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 1091—1093 (1935).

Voranzeige einiger Sätze über die singulären Stellen und die horizontalen J-Linien von Dirichletschen Reihen, die einige frühere Sätze von Mandelbrojt und Gergen (s. dies. Zbl. **1**, 22) verschärfen und einige bekannte Sätze von Ostrowski und Landau-Carlson als Spezialfälle enthalten. *Vlad. Bernstein* (Milano).

Ríos, Sixto: Über Reihen von Exponentialpolynomen und über die Überkonvergenz der Dirichletschen Reihen. Bol. Semin. mat. Argent. **4**, 51—54 (1935) [Spanisch].

Voranzeige einiger Sätze, die die Existenz Dirichletscher Reihen behaupten, deren geeignete Abschnittsfolgen gegen eine vorgegebene analytische Funktion in ihrem ganzen Existenzbereiche konvergieren. *Vlad Bernstein* (Milano).

Kovanko, A. S.: Sur quelques modes de convergence des suites de fonctions, à une variable réelle sur $(-\infty, +\infty)$. Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk **1**, 148—153 (1935).

Im Anschluß an die Stepanoffschen Verallgemeinerungen der fastperiodischen Funktionen betrachtet Verf. folgende Konvergenzbegriffe für Funktionen $f(x)$ in $-\infty < x < \infty$: 1. Es sei E eine meßbare Menge, $\delta E(a, b)$ das durch $b - a$ dividierte Maß der in $a < x < b$ liegenden Teilmenge von E und $\delta_S^e E = \underset{-\infty<a<\infty}{\text{obere Grenze}}\, \delta E(a, a+e)$. Eine Folge $f_n(x)$ von meßbaren Funktionen heißt konvergent „S en mesure", falls bei beliebigen $\varepsilon > 0$ und $e > 0$ die Ungleichung $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für alle hinreichend großen n (und alle p) außer in einer Menge $E_{n,n+p}$ mit $\delta_S^e E_{n,n+p} < \varepsilon$ besteht. 2. Es sei $D_{S\omega}^e[f(x), \varphi(x)] = \underset{-\infty<a<\infty}{\text{obere Grenze}}\, \frac{1}{e}\int_a^{a+e} |f(x) - \varphi(x)|^\omega\, dx$, wo $\omega \geqq 1$. Die Folge $f_n(x)$ heißt konvergent „S_ω en moyenne", falls bei beliebigen $\varepsilon > 0$ und $e > 0$ die Ungleichung $D_{S\omega}^e[f_{n+p}, f_n] < \varepsilon$ für alle hinreichend großen n (und alle p) besteht. Die bewiesenen Sätze entsprechen bekannten Sätzen für Funktionen in einem endlichen Intervall. *B. Jessen* (Kopenhagen).

Turing, A. M.: Equivalence of left and right almost periodicity. J. London Math. Soc. **10**, 284—285 (1935).

Nach v. Neumann (vgl. dies. Zbl. **9**, 349) heißt eine auf einer Gruppe $\mathfrak{G}$ definierte Funktion $f(x)$ rechts- bzw. linksfastperiodisch, wenn die Funktionenklasse $\{f(xh)\}$ bzw. $\{f(hx)\}$ (wo h alle Elemente von $\mathfrak{G}$ durchläuft) kompakt ist, und fastperiodisch schlechthin, wenn sie sowohl rechts- wie linksfastperiodisch ist. Verf. beweist äußerst einfach, daß die beiden Begriffe in der Tat äquivalent sind. *B. Jessen* (Kopenhagen).

Wintner, Aurel: Über die asymptotische Verteilung von fastperiodischen Funktionen mit linear unabhängigen Exponenten. Prace mat.-fiz. **43**, 55—62 (1936).

Im Anschluß an frühere Arbeiten (vgl. dies. Zbl. **6**, 162; **7**, 157) beweist Verf., daß die sog. Verschiebungsfunktion $e(\tau) = e(\tau; f) = \underset{-\infty<t<\infty}{\text{obere Grenze}}\, |f(t+\tau) - f(t)|$ einer fastperiodischen Funktion $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n (t - \delta_n)$ mit positiven a_n und linear unabhängigen λ_n eine asymptotische Verteilungsfunktion besitzt, die, genau wie die asymptotische Verteilungsfunktion von $f(t)$, beliebig oft differentiierbar ist; der Beweis wird auf Grund des Ausdrucks $e(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n |\sin(\frac{1}{2}\lambda_n \tau)|$ ganz ähnlich geführt. Verallgemeinerung auf Funktionen, die im Weylschen Sinne fastperiodisch sind.

B. Jessen (Kopenhagen).

Differentialgleichungen:

Ascoli, G.: Sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali lineari di 2° ordine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 234—243 (1935).

L'équation considérée est (1) $y''+A(x)\,y=0$, $A(x)>0$, $x_0 \leqq x < \infty$; $x_0, x_2, \ldots x_{2n}, \ldots$ sont les zéros successifs de l'intégrale $y(x)$, $x_1, x_3, \ldots$ ceux de la dérivée $y'(x)$; m_i désigne une valeur moyenne $\sqrt{A(\xi_i)}$, $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. On doit à A. Kneser les égalités [J. reine angew. Math. 117 (1897)]:

$$\frac{y'(x_{2n})}{y'(x_0)} = (-1)^n \frac{m_2 m_4 \ldots m_{2n}}{m_1 m_3 \ldots m_{2n-1}}\,; \quad \frac{y(x_{2n+1})}{y(x_1)} = (-1)^n \frac{m_2 m_4 \ldots m_{2n}}{m_3 m_5 \ldots m_{2n+1}}$$

L'aut. en déduit des conclusions plus précises que celles de Kneser, p.ex.: c) $A(x)$ étant monotone, $\lim\limits_{x\to\infty} A(x) = \alpha^2 > 0$, on a: $\lim\limits_{n\to\infty} |y(x_{2n+1})| = l > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} |y'(x_{2n})| = l' > 0$, $l' = \alpha l$. d) Les conclusions de c) ont encore lieu si $\log A(x)$ est à variation bornée dans (x_0, ∞). f) Les mêmes conclusions, s'il existe une suite indéfiniment croissante $\{\xi_n\}$, $\xi_{n+1} - \xi_n < \lambda$, telle que la somme des oscillations de $\log A(x)$ dans les intervalles (ξ_i, ξ_{i+1}) est finie. Pour l'équation $y'' + [A(x) + \eta(x)]\,y = 0$, $\eta(x)$ étant absolument intégrable dans (x_0, ∞), l'aut. établit que ses intégrales sont bornées, si les intégrales de (1) le sont. *W. Stepanoff* (Moskau).

Montel, Paul: Sur quelques familles de fonctions harmoniques. Fundam. Math. 25, 388—407 (1935).

Verf. beweist hier eine Reihe von Eigenschaften der normalen Familien harmonischer Funktionen, die aus dem Poissonschen Integral gewonnen werden können. Die Resultate können in die Form von Schottky-Landau gebracht werden, und man erhält dann z. B. exakte Schranken für den Radius der größten Kugel, in der eine harmonische Funktion $a_0 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots + a_n x^n + \cdots$ mit gegebenen a_0, a_n dasselbe Vorzeichen behält. Schließlich wird ein Analogon zu dem Satz von Julia bewiesen. *L. Ahlfors* (Cambridge, Mass.).

Randolph, John F.: Carathéodory measure and a generalization of the Gauss-Green lemma. Trans. Amer. Math. Soc. 38, 531—548 (1935).

Der Ref. hat (Fundam. Math. 8) eine Theorie des Flächenmaßes und anschließend einen Beweis des Gauss-Greenschen Satzes für eine Klasse von beschränkten Gebieten G gegeben. Der Rand R mußte ein endliches Grosssches Flächenmaß $\Phi_0(R)$ besitzen und die Bedingung der „Normalität" erfüllen. Falls dann eine gewisse Ausnahmsmenge $S \subset R$ sich auf die xy-Ebene in eine Menge vom Lebesgueschen Maß Null projizierte, konnte eine Verallgemeinerung des Gauss-Greenschen Satzes in der Form

$$\iiint\limits_G \frac{\partial F}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_R F \dot{D}\, d\sigma$$

bewiesen werden, unter $\dot{D}$ ein signiertes geometrisches Vergrößerungsverhältnis verstanden. Aus der obigen Voraussetzung entnimmt man die Folgerung (α): $\dot{D} = 0$ fast überall in S. Der Verf. befolgt nun die Methode des Ref. und paßt sie dem Fall des linearen Carathéodoryschen Maßes (in der Ebene) an. Er erzielt Vereinfachungen durch Benutzung 1. der Hahnschen Modifikation des Carathéodoryschen fünften Maßaxioms der Regularität, 2. durch Beschränkung auf den Gauss-Greenschen Satz. Da nun weiter der Verf. die obige Folgerung (α) in eine Definition umändert, d.h. $\dot{D} \overset{df}{=} 0$ in S setzt (wodurch aber der geometrische Sinn des Vergrößerungsverhältnisses verloren geht), braucht er folglich im Falle des Carathéodoryschen Maßes $L(R)$ nicht mehr die obenerwähnte Voraussetzung über die Projektion von S. Der Ref. bemerkt noch, daß man mittels seiner Fundamenta-Arbeit, insb. S. 29—32 (das Symbol Φ ist dort im Kap. II fast überall durch Φ_0 oder ähnliches zu ersetzen), ein ähnliches Ergebnis leicht sogar für das Grosssche Maß erzielen könnte. — Den wesentlichen Fortschritt des Verf. sieht der Ref. in einigen Ergebnissen, die den Begriff der Normalität betreffen. Der Verf. leitet diesbezüglich ein Kriterium ab, wann eine Menge A für das Carathéodorysche Maß $L(A)$ normal ist, und gelangt auf Grund dessen zu dem überraschenden Ergebnis, daß Ränder R von einfach zusammenhängenden Gebieten normal sind, falls $L(R) < \infty$. *Schauder* (Lwów).

Giraud, Georges: Problèmes des types de Dirichlet et de Neumann dans certains cas où les données sont discontinues. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 925—928 (1935).

Ankündigung weiterer Resultate bezüglich der elliptischen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung $Fu = \sum a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f$, falls die Koeffizienten a_{ik} einer verallgemeinerten Dinischen Bedingung genügen. Das Dirichletsche wie auch das Neumannsche Problem kann für solche Differentialgleichungen auch dann gelöst werden, wenn die Koeffizienten b_j, c und das freie Glied in der Umgebung einer endlichen Anzahl von höchstens $m-1$ dimensionalen Hyperflächen (m die Anzahl der unabhängigen Variablen) von einer vom Verf. genau bestimmten Ordnung unendlich werden. Eine vom Verf. früher angekündigte „a priori"-Abschätzung für nichtlineare elliptische Differentialgleichungen wird dabei widerrufen (vgl. dies. Zbl. **10**, 113). *Schauder* (Lwów).

Germay, R. H. J.: Sur la méthode de Cauchy-Lipschitz et la dérivation de l'intégrale d'une équation différentielle normale considérée comme fonction des valeurs initiales x_0 et y_0. Mathesis **49**, 272—280 (1935).

En partant de la formule ($f(x)$ continue, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$)

$$\lim_{\max(x_{i+1}-x_i)\to 0} \prod_{i=0}^{n-1} \{1 \pm (x_{i+1} - x_i) f(x_i)\} = \exp\{\pm \int_a^b f(x)\,dx\},$$

l'auteur démontre directement par le procédé de Cauchy-Lipschitz, $\psi(x, x_0, y_0) \equiv I(x)$ étant l'intégrale de l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ passant par le point (x_0, y_0):

$$e^{I(x)} = \lim_{\max(x_{i+1}-x_i)\to 0} e^{y_0} \prod_{i=0}^{n-1} \{1 + (x_{i+1} - x_i) f(x_i, y_i\}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y_0} = \lim \prod \{1 + (x_{i+1} - x_i) f'_y(x_i, y_i)\}$$

$$= \exp\left\{\int_{x_0}^{x} f'_y(t, \psi(t, x_0, y_0))\,dt\right\}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_0} = \lim\{-f(x_0, y_0) \prod \{1 + (x_{i+1} - x_i) f'_y(x_i, y_i)\}$$

$$= -f(x_0, y_0) \exp\left\{\int_{x_0}^{x} f'_y(t, \psi(t, x_0, y_0))\,dt\right\}.$$

W. Stepanoff (Moskau).

Sobolev, S. L.: Le problème de Cauchy dans l'espace des fonctionnelles. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **3**, 291—294 (1935).

Soit donnée l'équation du type hyperbolique

$$Lu \equiv \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F$$

(aux coéfficients analytiques) avec les conditions initiales $u\Big|_{t=0} = u^{(0)}$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u^{(1)}$. L'auteur envisage u comme une fonctionnelle dans un espace linéaire choisi d'une façon appropriée. L'opération L^*, adjointé à L, est définie encore et il s'ensuit que chaque opération linéaire sur les fonctions a une opération adjointe portant sur les fonctionnelles. A l'aide de l'opération adjointe la construction de la fonctionnelle u satisfaisant à l'équation $Lu = \varrho$ (ϱ étant une fonctionnelle donnée) se réduit aux opérations développées par l'auteur dans ses notes précédentes sur le problème de Cauchy (ce Zbl. **8**, 357). — Ces résultats vont être publiés encore plus en détail. *Janczewski* (Leningrad).

Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

Beltraminelli, Vitellia: Sulle equazioni integrali di Fredholm a nucleo simmetrico generalizzato. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. **73**, 33—48 (1935).

This paper works out in detail the rather obvious and well known extension of the Hilbert-Schmidt theory of integral equations of the second kind for the case in which the kernel is Hermitian: $K(x, y) = \overline{K}(y, x)$. *Hildebrandt* (Ann Arbor).

Krein, Mark: Sur les vibrations propres des tiges dont l'une des extrémités est encastrée et l'autre libre. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. **12**, 3—10 (1935).

L'auteur donne quelques applications nouvelles des noyaux de Kellogg (suite d'un mémoire précédent — ce Zbl. **12**, 168). Il démontre par ex. que la fonction d'influence de la tige, dont l'une des extrémités est encastrée et l'autre libre (resp. l'une encastrée et l'autre élastiquement appuyée) — est un noyau de Kellogg. *Janczewski* (Leningrad).

Dantzig, D. van: La notion de dérivée d'une fonctionnelle. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 1008—1010 (1935).

Sei $f(x)$ eine in einem endlichen Intervall erklärte Funktion, $F[f]$ ein Funktional bei veränderlichem $f(x)$. Nach Volterra wird durch

$$F'[f, \xi] = \lim_{\nu \to \infty} \frac{F[f + \eta_\nu] - F[f]}{\int\limits_{\xi - k_\nu}^{\xi + k_\nu} \eta_\nu \, dx} \tag{1}$$

die Ableitung von F für f im Punkte ξ erklärt. Hier ist $k_\nu \to 0$, $\operatorname{Max}|\eta_\nu| \to 0$, wobei noch $\eta_\nu(x) = 0$ für $|x - \xi| \geqq k_\nu$. Diese Definition der Ableitung hat gewisse Nachteile, von denen die folgenden hervorzuheben sind: a) Sie ist nicht invariant gegenüber topologischen Abbildungen des Intervalls der x. b) Schon das einfachste Funktional $F[f] = f(x_0)$ besitzt keine Ableitung im Sinne von Volterra. Verf. definiert nun eine invariante Ableitung. Diese Ableitung ist nicht mehr eine „Funktion" des Punktes ξ [vgl. (1)]. Sie ist — was Verf. hervorhebt — eine additive Mengenfunktion $F'[f, E]$ in bezug auf die Punktmengen E der ξ. Die in Betracht kommenden Funktionen f sind stetige Funktionen $y = f(x)$, wobei x eine kompakte Menge M von endlicher Dimension durchläuft (y soll wahrscheinlich reell sein). Diese invariante Ableitung existiert immer, wenn die Volterrasche existiert. Für lineare Funktionale $L(f)$ hat man nach F. Riesz bekanntlich $L(f) = \int\limits_M f(x)\, l_{\Delta x}$, unter l_E eine additive Mengenfunktion verstanden. Nun ist $L'_E = l_E$. Die Note schließt mit einigen Folgerungen betreffend des Mittelwertsatzes und der Differenzierbarkeit (nach Gateau, Fréchet) im Raume der stetigen Funktionen. *Schauder* (Lwów).

Maeda, Fumitomo: Kernels of transformations in the space of set functions. J. Sci. Hiroshima Univ. A **5**, 107—116 (1935).

Let $\mathfrak{C}_2(\beta)$ be a Hilbert space of complex functions defined over an abstract class L and possessing integrable square moduli relative to a measure β. Those set functions expressible (necessarily uniquely) in the form $\varphi(E) = \int\limits_E f[\varphi] d\beta$, where $f[\varphi]$ is in $\mathfrak{C}_2(\beta)$ constitute a Hilbert space isomorphic to $\mathfrak{C}_2(\beta)$, and denoted also by $\mathfrak{C}_2(\beta)$, when the inner product is defined by $(\varphi, \psi) = \int\limits_L f[\varphi] f[\psi] d\beta$. The linear manifold generated in $\mathfrak{C}_2(\beta)$ by the set functions $\beta(EE')$, where E' is a parameter, is everywhere dense in $\mathfrak{C}_2(\beta)$; it is denoted by $\mathfrak{C}'_2(\beta)$. The author studies the integral operator $T_{\mathfrak{K}}$ defined by a kernel $\mathfrak{K}(E, E')$, in $\mathfrak{C}_2(\beta)$ for fixed E and also for fixed E', through the relation $T_{\mathfrak{K}}\varphi(E) = \int\limits_L f[\mathfrak{K}(E, A)] f[\varphi(A)] d\beta(A)$. Kernels $\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}^*$, and $\mathfrak{K}_T$ are introduced through the relations $\mathfrak{K}(E, E') = \int\limits_L f[\mathfrak{K}_1(E, A)] f[\mathfrak{K}_2(A, E')] d\beta(A)$,

$\mathfrak{K}^*(E, E') = \overline{\mathfrak{K}(E', E)}$, $\mathfrak{K}_T(E, E') = T\beta(EE')$ respectively, where in the last T is an arbitrary linear operator such that the domains of T and T^* contain $\mathfrak{C}_2'(\beta)$ and T operates on $\beta(EE')$ considered as a set function with argument E. The author proves that $T_{\mathfrak{K}}$ is a closed linear operator which has domain including $\mathfrak{C}_2'(\beta)$ and which has the properties: $T_{\mathfrak{K}}^* \subseteq T_{\mathfrak{K}^*}$; $T_{\mathfrak{K}_1} T_{\mathfrak{K}_2} \subseteq T_{\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2}$; and, for $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_T$, $T \subseteq T_{\mathfrak{K}}$ and $T^* \subseteq T_{\mathfrak{K}^*}$. The results are specialized for the cases where the operators are bounded or self-adjoint. Further the kernels associated with unitary operators are shown to be characterized by the relations $(\mathfrak{K}(A, E), \mathfrak{K}(A, E')) = (\mathfrak{K}^*(A, E), \mathfrak{K}^*(A, E')) = \beta(EE')$, a generalization of a theorem of Bochner (this Zbl. 9, 116). *M. H. Stone.*

Ogasawara, Tôzirô: Resolution of identity. J. Sci. Hiroshima Univ. A **5**, 117 bis 130 (1935).

In this paper the author considers the definition and properties of the projection $E(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda, U)\, dE(\lambda)$, where $F(\lambda, U)$ is the characteristic of the point set U and $E(\lambda)$ is a given resolution of the identity in a complex Euclidean space (in particular, in Hilbert space). The result is extended to complex resolutions of the identity — that is, to pairs of mutually permutable resolutions of the identity. Finally application is made to v. Neumann's spectral resolution of unitary operators and the resulting spectral resolution of self-adjoint operators. The method and results are not markedly different from those obtaining in Hilbert space and set forth in Chapters VI and VIII of the reviewer's "Linear Transformations in Hilbert Space" (New York, 1932), without restricting F to be a characteristic function but without indicating the simplifications resulting from such restriction. *M. H. Stone* (Cambridge, Mass., U.S.A.).

Tseng, Yuan-Yung: Spectral representation of self-adjoint functional transformations in a non-Hilbertian space. Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Peiping A **3**, 113 bis 125 (1935).

The author considers a space $\mathfrak{C}$ which is a generalization of Hilbert space in two senses: scalar multiplication is extended to include multiplication by quaternions as well as by complex numbers; and all dimensionality restrictions are dropped. Thus the space $\mathfrak{C}$ may be described as a quaternionic vector space or module which possesses a quaternion-valued Hermitian symmetric bilinear inner product (f, g) and which is complete in terms of the metric $|f - g| = (f - g, f - g)^{1/2}$. In his dissertation (University of Chicago, 1933), the author discussed the geometry of such spaces and the theory of bounded self-adjoint operators therein. In the present paper he obtains the spectral theory for general, not necessarily bounded, self-adjoint operators A. Using the product space $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ in a manner similar to that of v. Neumann (this Zbl. 4, 216), he constructs the bounded self-adjoint operator $(A - tI)(I + A^2)^{-1}$, where t is real, and shows that its spectral resolution yields that of A. The results thus generalize completely those already known in the case of Hilbert and complex Euclidean spaces. *M. H. Stone* (Cambridge, Mass., U.S.A.).

Funktionentheorie:

Priwaloff, I. I.: Gegenwärtige Probleme der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk. **1**, 107—119 (1935) [Russisch].

Verf. gibt eine Übersicht der neueren Richtungen in der Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen im komplexen Gebiet. *Autoreferat.*

Montel, P.: L'itération. Wiadom. mat. **40**, 217—230 (1935) [Polnisch].

Résumée succinct des résultats connus sur l'itération. Mentionons en particulier les résultats de M. Montel concernant les fractions rationnelles à termes entrelacés et les fonctions méromorphes qui sont limites de fractions à termes entrelacés sur l'axe réel [voir par exemple: Montel, Mathematica **5** (1931); ce Zbl. **2**, 400].

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Kössler, M.: Über Potenzreihen mit beschränktem Imaginärteile. Sonderdruck aus: Mém. Soc. Roy. sci. Bohême **1935,** 8 S.

Es sei $0 < b < \pi$. Eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$, $f(0) = 0$, erfüllt die Bedingung $0 \leqq \mathfrak{J} f(z) + b \leqq \pi$ dann und nur dann, wenn

$$f(z) = \frac{iz}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(t)\,dt}{e^{it} - z}$$

gilt. Hier bezeichnet $\psi(t)$ eine reelle Funktion der ersten Baireschen Klasse, welche in $0 \leqq t \leqq 2\pi$ bis auf eine Nullmenge definiert ist und den Bedingungen

$$0 \leqq \psi(t) \leqq \pi, \qquad \int_0^{2\pi} \psi(t)\,dt = 2\pi b$$

genügt. *G. Szegö* (St. Louis, Mo.).

Golusin, G. M.: Zur Theorie der schlichten konformen Abbildungen. Rec. math. Moscou **42,** 169—189 u. deutsch. Zusammenfassung 189—190 (1935) [Russisch].

Soit $R_k^{(n)}$ la borne supérieure des quantités $\varrho < 1$ telles que toute fonction $\sum_{p=0}^{\infty} a_{pn+1} z^{pn+1}$ $(a_0 = 1)$ univalente dans $|z| < 1$ transforme le cercle $|z| \leqq \varrho$ en un domaine convexe. On a

$$R_k^{(n)} = \sqrt[n]{n + 1 - \sqrt{n^2 - 2n}}. \qquad (n \geqq 1)$$

Une inégalité est donnée pour le cas de la série $\frac{1}{z} + \sum_{p=1}^{\infty} a_{pn-1} z^{pn-1}$. Soit D_n la borne supérieure des rayons ϱ' tels que toute fonction univalente $\sum_1^{\infty} a_n z^n$ $(a_1 = 1)$ dans $|z| < 1$ représente le cercle $|z| \leqq \varrho'$ sur un domaine dont chaque point peut être relié à l'origine par une ligne brisée composée de n segments rectilignes au plus, tous compris dans le domaine. On a $D_n > \operatorname{th} \frac{n\pi}{4} > 1 - 2e^{-\frac{n\pi}{2}}$ $(n \geqq 1)$. Citons encore le théorème suivant: si $f(z) = z + \sum_{p=1}^{\infty} a_{n+p} z^{n+p}$ $(n \geqq 1)$ est une fonction convexe dans $|z| < 1$, quelles que soient les constantes réelles A, B on a:

$$\frac{2}{n} \int_0^{pn} \frac{Ar - \sqrt{A^2 + B^2 - B^2 r^2}}{1 - r^2} \leqq A \log |f'(z)| + B \arg \leqq f'(z) \leqq \frac{2}{n} \int_0^{pn} \frac{Ar + \sqrt{A^2 + B^2 - B^2 r^2}}{1 - r^2}\, dr.$$

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Cotton, Émile: Sur l'étude locale des fonctions holomorphes et des fonctions algébroïdes de plusieurs variables (extension d'une méthode de Puiseux). Ann. École norm., III. s. **52,** 131—182 (1935).

Substituiert man in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x, y, z) = \sum A_{abc}\, x^a y^b z^c$ von 3 (oder mehr) Variablen, in der das konstante Glied und beliebig viele weitere fehlen, die Ausdrücke $x = At^\alpha$, $y = Bt^\beta$, $z = Ct^\gamma$ (oder allgemeiner Potenzreihen von t mit den Anfangsgliedern At^α, Bt^β, Ct^γ) $(\alpha, \beta, \gamma$ natürliche Zahlen), so entsteht die Aufgabe, in der sich ergebenden Potenzreihe von t den niedrigsten auftretenden Exponenten in seiner Abhängigkeit von α, β, γ (und darüber hinaus von A, B, C) zu bestimmen. An die Stelle des Newtonschen Polygons, mit dessen Hilfe die entsprechende Aufgabe für 2 Variable behandelt wird, tritt hier ein gewisses konvexes Polyeder (die konvexe Hülle aller Punkte $(a + p, b + q, c + r)$, wo p, q, r alle nichtnegativen ganzen Zahlen durchlaufen); die Punkte (a, b, c), welche die zur Richtung (α, β, γ) normale Stützebene mit dem Polyeder gemein hat, liefern die gesuchten Reihenglieder, deren Summe im folgenden mit $F(x, y, z)$ bezeichnet wird. Hieran anschließend wird (Kap. 2) die durch $\mathfrak{P} = 0$ definierte algebroide Funktion y von x und z, insbesondere die Verzweigung derselben näher untersucht. Enthält z. B. jene Stützebene eine Kante des Polyeders, so gibt es eine Zerlegung $F(x, y, z) = x^{a'} y^{b'} z^{c'} \Phi(x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}})$ (wo Φ ein Polynom und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ eine einfache geometrische Bedeutung besitzen). Zwischen den beiden Flächen $\mathfrak{P} = 0$ und $x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}} = \tau$ (= Wurzel von $\Phi(\vartheta) = 0$) läßt sich dann eine eindeutige und stetige Zuordnung herstellen, mit Hilfe deren eine Parameterdarstellung der ersteren (genauer: je eines gewissen Bestandteils derselben):

$$x = \lambda^{\alpha_1} \mu^{\alpha_2}, \quad y = c[1 + \varphi(\lambda, \mu)] \lambda^{\beta_1} \mu^{\beta_2}, \quad z = \lambda^{\gamma_1} \mu^{\gamma_2}$$

aufgestellt wird (φ wieder Potenzreihe ohne konstantes Glied). Die hieran anschließende weitere Untersuchung (Herstellung von Regularitätsgebieten der algebroiden Funktion und Verhalten der letzteren in den Restgebieten) gestaltet sich, da mehrfache Fallunterscheidungen und Iterationen des Verfahrens erforderlich werden, ziemlich weitläufig. — Im 3. Kap. wird die vorher auseinandergesetzte Methode auf die Untersuchung der durch zwei Gleichungen $\mathfrak{P}_1(x, y, z) = 0$, $\mathfrak{P}_2(x, y, z) = 0$ definierten algebroiden Funktionen y und z von x angewandt, im 4. Kap. einige spezielle Fälle behandelt. *F. Hartogs* (München).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Kolmogoroff, A.: Zur Theorie der Markoffschen Ketten. Math. Ann. **112**, 155—160 (1935).

$E_1, E_2, \ldots, E_n$ seien die möglichen Zustände eines physikalischen Systems; $Q_k(s)$ $(1 \leqq k \leqq n, -\infty < s < +\infty)$ sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das System zur Zeit s im Zustand E_k befindet; $P_{ik}(t, s)$ $(1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq k \leqq n,\ -\infty < t < s < +\infty)$ sei die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das System zur Zeit s im Zustand E_k befindet, unter der Voraussetzung, daß es zur Zeit t im Zustand E_i war. Verf. beweist: 1. Zu beliebig vorgegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{ik}(t, s)$ lassen sich mindestens auf eine Weise zugehörige „absolute" Wahrscheinlichkeiten $Q_k(s)$ bestimmen. 2. Damit die Festlegung der $Q_k(s)$ eindeutig sei, ist notwendig und hinreichend, daß $P_{ik}(t, s)$ bei festen i, k, s und bei $t \to -\infty$ gegen einen von i unabhängigen Grenzwert $Q_k^*(s)$ konvergiert; die Grenzwerte $Q_k^*(s)$ geben dann gerade die gesuchten absoluten Wahrscheinlichkeiten. — Ist ein festes System $Q_k(s)$ von absoluten Wahrscheinlichkeiten gewählt, und ist $Q_k(s) > 0$ $(1 \leqq k \leqq n,\ -\infty < s < +\infty)$, so lassen sich leicht die „umgekehrten" Übergangswahrscheinlichkeiten $\Pi_{ik}(t. s)$ (Wahrscheinlichkeit des Zustandes E_i zur Zeit t unter der Voraussetzung, daß in einem späteren Zeitpunkt s der Zustand E_k eintritt) eindeutig berechnen. Unter der Voraussetzung, daß $P_{ik}(t, s) = P_{ik}(s - t)$ nur von der Differenz $s - t$ abhängt (Stationaritätsbedingung), beweist Verf.: 3. Damit $\Pi_{ik}(r) = P_{ki}(r)$ $(1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq k \leqq n,\ -\infty < r < +\infty)$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß für beliebige $r, q, k_1, k_2, \ldots, k_q$

$$P_{k_1 k_2}(r)\, P_{k_2 k_3}(r) \ldots P_{k_{q-1} k_q}(r)\, P_{k_q k_1}(r)$$
$$= P_{k_1 k_q}(r)\, P_{k_q k_{q-1}}(r) \ldots P_{k_3 k_2}(r)\, P_{k_2 k_1}(r)$$

gilt; insbesondere ist also die Symmetriebedingung $P_{ik}(r) = P_{ki}(r)$ hinreichend. — Zum Schluß wird ein physikalisches Beispiel diskutiert, das in einer gewissen Beziehung zu den bekannten Untersuchungen Schrödingers über die Umkehrung der Naturgesetze (dies. Zbl. 1, 375) steht. *A. Khintchine* (Saratow).

Guldberg, Alf: Eine Anwendung der Differenzengleichungen in der theoretischen Statistik. Aktuár. Vědy **5**, 116—128 (1935).

Mit Hilfe von Differenzengleichungen werden die Momente und Halbinvarianten für die Pólya-Eggenbergersche Verteilung in einer und zwei Dimensionen berechnet (vgl. auch dies. Zbl. **11**, 408). *W. Feller* (Stockholm).

Guldberg, Sven: Recurrences formulae for the semi-invariants of some discontinuous frequency functions of n variables. Skand. Aktuarie Tidskr. **18**, 270—278 (1935).

Vgl. dies. Zbl. **12**, 113.

Linder, Arthur: Über die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten unabhängiger Ordnungen aus den Beobachtungszahlen. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. H. **30**, 35—52 (1935).

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten aus den Beobachtungszahlen erfolgt für die Absterbeordnung meist nach der Formel

$$q_x = \frac{T}{B + \frac{1}{2}(E - A)}.$$

Verf. leitet eine genauere Formel ab und erhält

$$q_x = 1 - \prod_{t=1}^{z}\left(1 - \frac{d_t}{l_x + \sum_{i=1}^{t-1}(\gamma_i - d_i)}\right).$$

Zur Ableitung dieser Formel denkt er sich das Jahr in z Teile zerlegt und macht die beiden folg. Voraussetzungen: 1. Die Zahl der Sterbefälle und der Mehrzugezogenen oder Weggezogenen ist bekannt. 2. Die Ein- und Austritte erfolgen am Ende eines jeden der z Jahresteile. — d_i ist die Anzahl der Sterbefälle im i-Intervall und γ_i die Anzahl der Mehrzugezogenen oder Weggezogenen am Ende des i-Intervalles. — Außerdem wird noch eine von Insolera abgeleitete Näherungsformel dargestellt. *Löer.*

Thompson, William R.: On a criterion for the rejection of observations and the distribution of the ratio of deviation to sample standard deviation. Ann. math. Statist. **6**, 214—219 (1935).

Zwinggi, E.: Zur Frage des Beharrungszustandes. Metron **12**, Nr 3, 91—100 (1935.)

Unter gewissen Voraussetzungen wird die Änderung der Sterblichkeit einer rein weiblichen Bevölkerung berechnet, die notwendig ist dafür, daß der Bevölkerungszustand stationär bleibt, während sich die Fruchtbarkeit verändert, und zwar in allen Altersklassen relativ gleich stark. *W. Feller* (Stockholm).

Castellano, V.: Recente letteratura sugli indici di variabilità. Metron **12**, Nr 3, 101 bis 131 (1935).

Robbins, Rainard B.: Actuarial note: Osculatory curve of minimum degree using method of Lidstone's demonstration. Trans. Actuar. Soc. Amer. **35**, 244—247 (1934).

Koeppler, Hans: Die Anwendung der Integralgleichungen von Volterra in der Lebensversicherung. Giorn. Mat. Finanz., II. s. **5**, 86—118 (1935).

Im ersten Teile dieser Arbeit wird die Lösung der Volterraschen Gleichungen zweiter Gattung mit der einfachen in der Versicherungsmathematik üblichen Form der iterierten Kerne angeführt und besonders die Lösung der sogenannten prospektiven Gleichung

$$\varphi(x) = f(x) \pm \int_x^k K(\xi, x)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

unter der Annahme

$$K(\zeta, x) = \frac{\lambda(\xi)}{\lambda(x)}\mu_\xi$$

abgeleitet. In der retrospektiven Integralgleichung hat man den Integrationsbereich von 0 bis x. Es zeigt sich bei der Umformung der Kerne eine Neutralisation derselben in bezug auf die Integralgrenzen, und die Lösung dieser Gleichungen mit neutralem Kern kann leicht durch Iteration ohne Anwendung des Satzes von Dirichlet durchgeführt werden. Dann werden die Lösungen dieser Integralgleichungen mittels der Formel

$$z(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \int_0^x \frac{du(x)}{v(x)} - \int_0^x \frac{u(x)\,dv(x)}{v^2(x)} + z_0,$$

die als Vorstufe der von Loewy (vgl. dies. Zbl. **1**, 345, 346) verwendeten Formel anzusehen ist, sowie der Formel, die durch partielle Integration der Beziehung $z(x) = u(x) \cdot v(x)$ hergestellt wird, angegeben. Durch weitere Untersuchungen gelangt der Verf. zur Ansicht, daß es vollkommen genügt und zweckmäßiger ist, die Differentialgleichung der Prämienreserve, die man meist zur Aufstellung der zugehörigen Integralgleichung kennen muß, richtig zu integrieren. Zum Schluß wird die