Werk

Titel: Analysis (spezielle Differential- und Integralgleichungen s. a. Mechanik usw. bzw...

Jahr: 1935

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0011|log83

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Jeffery, R. L.: The derivates of arbitrary functions over arbitrary sets. Ann. of Math., II. s. **36**, 438—447 (1935).

The author proves the well-known Denjoy relations between the derived numbers for an arbitrary function with respect to an arbitrary set. An analogous result is established for approximate derived numbers; viz. let $f(x)$ be finite at each point of a set e. Then at all of e, except at most a null set, the four extreme approximate derived numbers of f over e exist and belong to one or the other of the four sets: (E_1) $AD_e f$ exists and is finite; (E_2) $AD_e f^+ = AD_e f_- \neq \infty$, $AD_e f_+ = -\infty$, $AD_e f_- = +\infty$; (E_3) $AD_e f_+ = AD_e f^- \neq \infty$, $AD_e f^+ = +\infty$, $AD_e f_- = -\infty$; (E_4) $AD_e f^+ = AD_e f^- = +\infty$, $AD_e f_+ = AD_e f_- = -\infty$. The extreme derived numbers $AD_e f^+$ etc. are defined by the author as follows: If there exists a number a such that for x a point of e we have $\overline{\lim_{\xi \to x}} [f(\xi) - f(x)]/(\xi - x) \leqq a$ for all ξ of e except a set of right hand density zero at x, and if $\lim_{\xi \to x} [f(\xi) - f(x)]/(\xi - x) = a$ for a set ξ of right hand density unity at x, then a is $AD_e^+ f$. (This definition is not quite clear to the reviewer.) *Saks* (Warszawa).

Riesz, Frédéric: Sur l'intégrale de Lebesgue comme l'opération inverse de la dérivation. Mat. fiz. Lap. **42**, 1—24 u. franz. Zusammenfassung 24 (1935) [Ungarisch].

Eine der Lebesgueschen äquivalente Theorie des Integrals wird auf dem Satze aufgebaut, daß eine monotone Funktion fast überall differentiierbar ist. Für diesen Satz selbst hat der Verf. einen einfachen Beweis [vgl. Acta math. **54**, 321—360 (1930) sowie dies. Zbl. **3**, 298; **4**, 296 u. **6**, 341] veröffentlicht. *Otto Szász* (Cambridge, Mass.).

Dunford, Nelson: Integration in general analysis. Trans. Amer. Math. Soc. **37**, 441—453 (1935).

Es handelt sich um die Verallgemeinerung der Lebesgueschen Integrationstheorie auf Funktionen, deren Werte nicht notwendig Zahlen, sondern allgemeiner Elemente eines vollständigen linearen Vektorraumes sind. In der vom Ref. aufgestellten Theorie (dies. Zbl. **7**, 109, 110) wird die Lebesguetheorie für positive Funktionen als bekannt vorausgesetzt und zum Ausgangspunkt der Verallgemeinerung genommen. Verf. geht etwas anders vor, indem er (die Lebesguesche Punktmaßtheorie und) das Riemannsche Integral für stetige Funktionen zum Ausgangspunkt einer auf der Benutzung von Cauchyschen Konvergenzfolgen fußenden Verallgemeinerung nimmt. Außerdem legt Verf. anstatt des Lebesgueschen das allgemeinere Radonsche Ausgangsmaß zugrunde. *Bochner* (Princeton).

Blanc, Eugène: Sur les correspondances multiformes monotones. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1828—1829 (1935).

Ein spezielles Beispiel für die in einer früheren Note [C. R. Acad. Sci., Paris **196** (1933); dies. Zbl. **7**, 57] definierten Stetigkeitseigenschaften allgemeiner Abbildungen. *W. Feller* (Stockholm).

Analysis.

● **Rothe, Rudolf: Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure. Tl. 3. Raumkurven und Flächen. Linienintegrale und mehrfache Integrale. Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen nebst Anwendungen. (Teubners math. Leitfäden. Bd. 23.)** Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1935. IX, 238 S. u. 170 Fig. RM. 6.60.

Selberg, Henrik L.: Einige Sätze über Exponentialpolynome und verwandte Funktionen. (*Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.*) 8. Skand. Mat.-Kongr., 354—355 (1935).

Wigert, S.: Sur la condition de continuité d'une fonction limite. (*Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.*) 8. Skand. Mat.-Kongr., 212—215 (1935).

Rey Pastor, J.: Sulla convergenza quasi continua di successioni di funzioni. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **21**, 481—484 (1935).

Es wird die quasistetige Konvergenz einer Funktionenfolge $f_n(x)$ in einem Punkte x_0 definiert; x_0 ist ein Punkt einer mehrdimensionalen Punktmenge C. Es ergibt sich der Satz: Konvergiert die Folge $f_n(x)$ gegen eine Funktion $f(x)$ in C, so ist für die Stetigkeit von $f(x)$ im Punkte x_0 notwendig und hinreichend, daß die Folge $f_n(x)$ quasistetig konvergiert in x_0. *Otto Szász* (Cambridge, Mass.).

Mahrenholz, J.: Application des propriétés de la fonction gamma au calcul d'une intégrale définie. Mathesis **49**, 88—89 (1935).

Neufeld, Jacob: On multiplication of operational expressions. Tôhoku Math. J. **40**, 449—450 (1935).

If we denote $\int_0^\infty e^{-pt} H_1(t)\,dt$ by $L_{H_1}(p)$ we may describe the result of the present paper as follows:

$$2\pi L_{H_1 H_2}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} L_{H_2}(i\omega)\, L_{H_1}(p - i\omega)\, d\omega .$$

The result is derived from the Fourier integral theorem. *Murnaghan* (Baltimore).

Bohr, Harald: The arithmetic and geometric means. J. London Math. Soc. **10**, 114 (1935).

Es seien n und q positiv ganz, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiv. Der polynomische Lehrsatz liefert

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^{qn} \geqq \frac{(qn)!}{(q!)^n}\, a_1^q a_2^q \ldots a_n^q .$$

Wegen $\frac{(qn)!}{(q!)^n} > \frac{n^{qn}}{(qn)^n}$ folgt hieraus durch Grenzübergang $q \to \infty$ der klassische Satz vom arithmetischen und geometrischen Mittel, allerdings ohne den Zusatz über die Gültigkeit des Gleichheitszeichens. *G. Szegö* (St. Louis, Mo.).

Geronimus, J.: Sur quelques inégalités pour les polynomes dont les premiers coefficients sont donnés. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1513—1514 (1935).

The Note gives (without proof) the precise minimum of

$$L(G) \equiv \int_0^{2\pi} |G(\theta)|\, d\theta, \quad \text{namely: } L(G) \geqq 4\,|c_s|, \; s \leqq \left[\frac{2n-1}{3}\right], \tag{1}$$

for a trigonometric polynomial $G(\theta)$, of order $\leqq n$, whose first coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_s$ are given. The particular case of $G(\theta)$ non-negative is also indicated, and the explicit expression of $G(\theta)$ realizing the minimum in (1) is given. The author further applies the above results to a polynomial $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k x^{n-k}$, and gives the asymptotic expression $(n \to \infty)$ for $\int_{-1}^{1} |Q(x)|\, dx$ assuming that the first s coefficients (s finite) are given, all of the same order of magnitude. *J. Shohat* (Philadelphia).

Frazer, H.: Further inequalities in the theory of functions. J. London Math. Soc. **10**, 143—150 (1935).

Im Anschluß an Resultate von Hardy und Littlewood aus dem Jahre 1925 bewies Verf. in einer früheren Arbeit [Proc. London Math. Soc., II. s. **33**, 77 (1931); dies. Zbl. **3**, 15]: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sei regulär in $|z| < 1$ und nehme daselbst keinen Wert mehr als p-mal an. Es sei q die Höchstzahl von Nullstellen, $0 \leqq q \leqq p$; dann gilt, $|z| = r < 1$,

$$|f(z)| \leqq \frac{A(p,q)}{(1-r)^{Ap(q+1)}} \cdot \mathrm{Max}(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_q|) .$$

Hier bedeutet $A(p, q)$ eine von p und q abhängende, A eine absolute Konstante. In der vorliegenden Arbeit wird der Exponent $Ap(q+1)$ durch Ap ersetzt. Auch für $|a_n|$ wird eine Abschätzung gegeben. [In einer nahezu gleichzeitig veröffentlichten

Arbeit — Math. Ann. **111**, 98 (1935); dies. Zbl. **10**, 362 — beweist M. L. Cartwright, wie Verf. bemerkt, daß Ap sogar durch $2p$ ersetzt werden kann.] *G. Szegö.*

Orts, J. M.[a]: Bemerkung zu der Arbeit: „Iteration symmetrischer Funktionen", Rev. mat. hisp.-amer. (Januar/Februar-Nr. 1934, S. 1.) Rev. mat. hisp.-amer., II. s. **10**, 82 (1935) [Spanisch].

L'auteur informe qu'après la publication de la Note citée dans le titre (v. ce Zbl. **9**, 245), il a appris que son procédé d'itération des fonctions symmétriques a déjà été étudié antérieurement par Schapira et a été appliqué à des questions plus générales par L. David (J. reine angew. Math. **135**, 62) et H. Geppert (voir ce Zbl. **5**, 289). *Vlad. Bernstein* (Milano).

Uspensky, J. V.: On the expansion of the remainder in the Newton-Cotes formula, Trans. Amer. Math. Soc. **37**, 381—396 (1935).

Der Rest R_n der Newton-Cotesschen Formel

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f\left(\frac{k}{n}\right) + R_n,$$

wobei für ein Polynom n-ten Grades $R_n = 0$ ist, wird in eine der Euler-Maclaurinschen ähnliche Reihe entwickelt. Der Ausgangspunkt ist die nach den Ergebnissen einer früheren Arbeit des Verf. [Bull. Amer. Math. Soc. **31**, 145 (1925)] für genügend große n gültige Gleichung

$$\operatorname{sg} A_k = \operatorname{sg} A_{n-k} = (-1)^{k-1}, \qquad 1 \leqq k \leqq \frac{n}{2}.$$

Integraldarstellung und eine genauere Diskussion der A_k führt zunächst zu der Gültigkeit dieser Gleichung für $n \geqq 8$, n gerade und $n \geqq 11$, n ungerade. Im Mittelpunkt der Arbeit steht jedoch die sodann bewiesene Entwicklung

$$R_n = \sum_{s=0}^{m-1} c_s \{f^{(2\nu+2s-1)}(1) - f^{(2\nu+2s-1)}(0)\} + c_m f^{(2\nu+2m)}(\xi), \quad 0 < \xi < 1, \quad \nu = \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

Hier sind die c_s gewisse von $f(x)$ unabhängige Konstanten, für welche $\operatorname{sg} c_s = (-1)^{s-1}$ gilt. Man hat übrigens

$$c_s = -\frac{1}{(2\nu+2s)!} \sum_{k=0}^{n} A_k B_{2\nu+2s}\left(\frac{k}{n}\right),$$

wo $B_m(x)$ das Bernoullische Polynom m-ten Grades bezeichnet. In dem Beweise der Vorzeicheneigenschaft spielt die Tatsache eine Rolle, daß der Ausdruck

$$\frac{t^{2\nu-1}}{2\nu-1} - \sum_{k \leqq nt} A_k \left(\frac{k}{n} - t\right)^{2\nu-2}$$

in $0 < t < 1$ genau einen Zeichenwechsel aufweist. Haben die Ableitungen gerader Ordnung $\geqq 2\nu$ von $f(x)$ alle das gleiche Vorzeichen in 0, 1, so hat das jeweilige Fehlerglied der obigen Entwicklung stets dasselbe Vorzeichen und ist von kleinerem Betrage als das letzte vernachlässigte Glied. [Vgl. auch Bull. Amer. Math. Soc. **40** (1934); dies. Zbl. **10**, 348.] *G. Szegö* (St. Louis, Mo.).

Querry, J. W.: Osculatory mechanical quadrature. Skand. Aktuarie Tidskr. **18**, 108—121 (1935).

Johansen, Paul: Note on the preceding paper. Skand. Aktuarie Tidskr. **18**, 122 bis 125 (1935).

Durch Integration der Interpolationsformel von Markoff (Johansen, Skand. Aktuarie Tidskr. **1931**, 231; dies. Zbl. **3**, 267) folgt leicht die „oskulatorische" Quadraturformel

$$\int_c^d f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{m_\nu-1} \int_c^d Q_\nu(x)\,(x-a_\nu)^\mu\,dx \cdot \left(\frac{d}{da_\nu}\right)^\mu \frac{f(a_\nu)}{\mu!\,Q_\nu(a_\nu)} + R.$$

Hier ist $$Q_\nu(x) = \frac{(x-a_0)^{m_0}(x-a_1)^{m_1}\dots(x-a_n)^{m_n}}{(x-a_\nu)^{m_\nu}} = \frac{Q(x)}{(x-a_\nu)^{m_\nu}},$$

und der Rest R stellt sich in der Form $\int_c^d Q(x)\, f(x, a_0, a_0, \dots, a_1, a_1, \dots)\, dx$ dar. Der Faktor von $Q(x)$ ist die den Interpolationsstellen a_ν entsprechende „Steigung" höherer Ordnung, wobei die Stellen a_ν mit den den Zahlen m_ν entsprechenden Vielfachheiten vertreten sind. Verf. betrachtet den Rest in diversen Spezialfällen, wie $m_\nu = 2m$ für alle ν, die a_ν sind äquidistante Stellen usw. — Für den erstgenannten Spezialfall gibt Johansen einen kürzeren Beweis. *G. Szegö* (St. Louis, Mo.).

Reihen:

Miller, J. C. P.: A series identity. Math. Notes Nr **29**, VI—VIII (1935).

Die fragliche Identität lautet:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{\nu}^2 \frac{1}{2a+2\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{\nu}^2 \frac{1}{2a-2\nu+1}.$$

Sie ist gültig für beliebige positive ganze Werte von a. *G. Szegö* (St. Louis, Mo.).

Schmidt, Hermann: Über die Reihendarstellung implizit gegebener Funktionen von endlich oder unendlich vielen Veränderlichen. Math. Z. **40**, 266—278 (1935).

L'auteur donne en premier lieu une généralisation des séries classique de Lagrange et de Bürmann pour le cas de l'équation

$$g(w) - \sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu g_\nu(w) = 0 \tag{1}$$

où $g(w)$ et $g_\nu(w)$ sont toutes holomorphes dans un même voisinage de l'origines, $g(w)$ ayant à l'origine un zéro d'ordre n; r étant assez petit pour que $g(w)w^{-n}$ ne s'annule pas dans le cercle $C_r: |w| \leqq r$, on indique par M_ν le maximum de $|g_\nu(w)/g(w)w^{-n}|$ dans C_r, et l'on suppose que les valeurs des paramètres z_ν sont telles que $\sum_{\nu=1}^{\infty} |z_\nu| M_\nu < r^n$. Dans ces conditions, l'équation (1) a exactement n racines $w_1, w_2, \dots, w_n$, dans C_r, et $\psi(w)$ étant holomorphe dans C_r, $\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \psi(w_\nu)$ s'exprime à l'aide d'une série (absolument convergente) des puissances des paramètres z_ν (en nombre infini). Pour rendre l'exposé plus clair l'auteur commence par le cas où les paramètres sont en nombre fini. — L'auteur applique ensuite le résultat précédent à l'inversion des séries de Dirichlet. L'équation (en s) $z = \sum a_\nu e^{-\lambda_\nu s}$, où la série de Dirichlet possède un demi-plan de convergence absolue, et où z est situé dans un demi-plan convenable, possède une et une seule racine développable dans un certain demi-plan en série de Dirichlet absolument convergente. Si les a_ν sont positifs, on retombe sur un cas particulier du théorème de Bohr sur l'inversion des fonctions analytiques presque-périodiques, avec le complément que la série „inverse" a elle aussi dans ce cas un demi-plan de convergence absolue. *Vlad. Bernstein* (Milano).

Broggi, Ugo: Über die Eulersche Transformierte einer Reihe von komplexem Grad und Borelsche Integrale der Transformierten. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. **10**, 1—6 (1935) [Spanisch].

L'auteur donne un exemple explicite de série dont le domaine de sommabilité de Borel diffère du domaine de sommabilité de Borel de sa transformée d'Euler à paramètre complexe (cfr. le réf. suivant Rey Pastor). *Vlad. Bernstein* (Milano).

Rey Pastor, J.: Geometrische Theorie der Eulerschen und pseudo-Eulerschen Transformationen einer Reihe. Bol. Semin. mat. Argent. **4**, Nr 16, 17—20 (1934); u. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. **10**, 17—20 (1935) [Spanisch].

L'auteur montre comment plusieurs propriétés fondamentales de l'algorithme de sommation d'Euler (à paramètre réel ou complexe) s'obtiennent presque immédiate-

ment lorsque l'on considère la transformation d'Euler comme cas particulier (pour $z = 1$) de la relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-\lambda)^{n+1}} \sum_{h=0}^{h=n} \binom{n}{h} a_{n-h} (-1)^h \lambda^h ,$$

dont il suffit de considérer le domaine de validité. — En particulier, il indique qu'il ne convient pas d'abandonner le procédé d'Euler à paramètre complexe, car si celui ci ne satisfait pas toujours au principe de permanence, il permet néanmoins de sommer certaines séries qui ne peuvent pas l'être par le procédé à paramètre réel. — Une comparaison des domaines de validité de l'algorithme d'Euler et du procédé de Borel se trouve à la fin de la Note. *Vlad. Bernstein* (Milano).

Rey Pastor, J.: Die Transformation von Pincherle und die Summation divergenter Reihen. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. **10**, 26—29 (1935) u. Bol. Semin. mat. Argent. **4**, Nr 16, 26—29 (1934) [Spanisch].

L'auteur indique brièvement comment on peut établir de façon élémentaire la théorie de la transformation de Pincherle, qui a été établie par Pincherle lui-même à l'aide de la théorie générale des opérateurs normaux, et puis par Mambriani à l'aide de l'algèbre des suites (cfr. aussi Fantappiè, I funzionali analitici, Atti Accad. naz. Lincei, Mem., VI. s. **3**, 553, où la question est traitée à l'aide de la théorie des fonctionnelles analytiques. V. B.). Il donne après cela une généralisation de la transformation de Pincherle, savoir

$$S(t) = \sum s_r (-1)^r t^r \frac{\varphi^{(r)}(t)}{r!} , \tag{1}$$

qui fournit un algorithme régulier de sommation des suites $\{s_r\}$ lorsque la fonction analytique $\varphi(t)$ est soumise à certaines conditions. Il détermine aussi les domaines de convergence de (1) pour des suites $\{s_r\}$ bornées, ou quelconques. — L'algorithme (1) contient ceux d'Abel, de Borel, d'Euler, etc. *Vlad. Bernstein* (Milano).

Moore, Charles N.: On convergence factors for series summable by Nörlund means. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **21**, 263—266 (1935).

The author gives conditions necessary and sufficient that a set of convergence factors sum to the same value any series summable by Nörlund means of a certain type, generalizing previous results for series summable by Cesàro means.
C. R. Adams (Providence).

Kolmogoroff, A.: Zur Größenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen. Ann. of Math., II. s. **36**, 521—526 (1935).

Let

$$R_n(f, x) = f(x) - \tfrac{1}{2} a_0 - \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

where $f(x)$ is continuous and periodic together with its derivatives of order $\leqq p$ ($\geqq 1$). Then

$$|R_n(f, x)| \leqq C_n^{(p)} \max |f^{(p)}(x)| .$$

The author proves that

$$C_n^{(p)} = n^{-p} [4\pi^{-2} \log n + O(1)],$$

and if p is odd

$$C_n^{(p)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-p} \sin kx \right| dx .$$

The same bound is obtained if the $(p-1)$-st derivative merely satisfies a Lipschitz condition of order one. *E. Hille* (New Haven).

Takahashi, Tatsuo: Remarks on the Cesàro summability of Fourier series and its conjugate Fourier series. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **17**, 145—148 (1935).

Some results are obtained closely related to some of Bosanquet, Hardy and Littlewood, Pollard, Verblunsky, and others. Let $f(t)$ be integrable L over

$(0,2\pi)$ and periodic with period 2π. For a fixed s and x let

$$\varphi_\alpha(t) = \tfrac{1}{2}\{f(x+t) + f(x-t) - 2s\}, \quad \varphi_\alpha(t) = (\alpha/t)\int_0^t (1-u/t)^{\alpha-1}\varphi_0(u)\,du,$$

according as α is 0 or positve. It is shown that, if $0 \leqq \alpha$, $1 \leqq p$ and

$$\int_0^t |\varphi_\alpha(u)|^p\,du = O(t),$$

then the Fourier series of $f(t)$ is either summable $(C, \alpha+\delta)$ for $t = x$ and $0 < \delta$ or is not summable (A). A necessary and sufficient condition for summability to s is that $\varphi(t) \to 0$, (C, r) for $r > \alpha + 1/p$. An analogous result holds for the conjugate series. The above theorem reduces to one given by Bosanquet (see this Zbl. 8, 351) for $p = 1$. If (A) is replaced by (C) and $\varphi_\alpha(t)$ by the corresponding Hölder-Verblunsky mean, it reduces to one given by Verblunsky (this Zbl. 4, 108). Similar statements with regard to the conjugate series. *J. J. Gergen* (Rochester).

Wang, Fu Traing: On the summability of conjugate Fourier series by Riesz's logarithmic means. Tôhoku Math. J. **40**, 392—397 (1935).

Let $f(x)$ be a function integrable L and of period 2π; by $\bar{S}$ we shall denote the series $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cos nt - a_n \sin nt)$ conjugate to the Fourier series $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ of f. Let $g(t) = \frac{1}{\pi}\int_t^{\infty} \frac{f(x+u) - f(x-u)}{u}\,du$. By (R, k) we shall mean M. Riesz's means of order k and type $\log n$. The paper contains the following two theorems. (a) If $\alpha \geqq 0$ and $g(t) \to s(R, \alpha)$ as $t \to 0$, then $\bar{S}$ is summable $(R, \alpha+1)$, for $t = x$, to the sum s; (b) If $\bar{S}$ is summable $(R, \alpha+1)$, for $t = x$, to the sum s, then $g(t) \to s$ $(R, \alpha+2)$. *A. Zygmund* (Wilno).

Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:

Fenchel, W., und B. Jessen: Über fastperiodische Bewegungen in ebenen Bereichen und auf Flächen. Math.-fys. Medd., Danske Vid. Sels. **13**, H. 6, 1—28 (1935).

In einem (ebenen, durch endlich viele Kreise begrenzten) Gebiete G werden zwei Bewegungen $z = f(t)$, $z = g(t)$, $-\infty < t < \infty$, homotop genannt, wenn es in G eine Schar $z = h_\theta(t)$ gibt, $0 \leqq \theta \leqq 1$, die gleichförmig (in bezug auf t) stetig von θ abhängt, mit $h_0(t) = f(t)$, $h_1(t) = g(t)$. Das Hauptergebnis der Arbeit ist der Satz: Jede fastperiodische Bewegung $z = f(t)$ ist einer periodischen Bewegung $z = g(t)$ in G homotop; die Bewegungen der Schar $z = h_\theta(t)$ können fastperiodisch gewählt werden. Der Beweis besteht in der Konstruktion der universellen Überlagerungsfläche von G, die nach Einführung der nichteuklidischen Metrik als eine Ebene Φ betrachtet werden kann. Die durch $f(t)$ auf Φ induzierte Bewegung sei $F(t)$; dann ergibt sich die Existenz einer gleichförmigen Bewegung $G(t)$ auf einer Geraden a von Φ, so daß der Abstand $\varrho[F(t), G(t)]$ beschränkt (fastperiodisch) ist; $F(t)$ und $G(t)$ lassen sich ersichtlich durch eine Schar von Bewegungen verbinden; der Geraden a entspricht in G eine geschlossene Kurve, der Bewegung $G(t)$ also eine periodische Bewegung. Folgerung: Es sei $f(t)$ eine fastperiodische Funktion von der Beschaffenheit, daß $|f(t) - a_\mu| > k$ ausfällt, $\mu = 1, 2, \ldots, m$; nach einem Satze von H. Bohr [Comment. math. helv. **4**, 51—64 (1932); dies. Zbl. **5**, 63] ist $f(t) - a_\mu = |f(t) - a_\mu|\, e^{i\varphi_\mu(t)}$, $\varphi_\mu(t) = c_\mu t + \psi_\mu(t)$, c_μ konstant, ψ_μ fastperiodisch; da $f(t)$ einer periodischen Bewegung homotop ist, sind die Verhältnisse zwischen je zwei c_μ rational. — Der Beweis läßt sich auf fastperiodische Bewegungen in verschiedenen offenen und geschlossenen Flächen ausdehnen, insbesondere auf geschlossenen Flächen mit negativer Eulerscher Charakteristik; für die zweiseitige und einseitige Ringfläche gilt der Satz nicht; auf der Kugel und in der projektiven Ebene aber ist jede fastperiodische Bewegung einer Ruhelage homotop.

W. Stepanoff (Moskau).

Petersen, Richard: Sur la différentiation formelle du développement de Fourier d'une fonction presque periodique. Mat. Tidsskr. B **1935**, 37—41 [Dänisch].

Soit $f(t)$ une fonction p.p. telle que:

$$f(t) \sim \sum_1^\infty A_n e^{i\lambda_n t} \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

alors les deux développements:

$$\sum_{\lambda_n<0} A_n A_n e^{\lambda_n(\sigma+it)} (\sigma > 0); \quad \text{et:} \quad \sum_{\lambda_n>0} A_n A_n e^{\lambda_n(\sigma+it)} (\sigma < 0)$$

sont ceux de fonctions analytiques de $\sigma + it$, p. p. respectivement dans: $[0, +\infty)$ et $(-\infty, 0]$. Dans la démonstration, l'auteur évite le secours de la théorie des fonctions analytiques p. p. et de la théorie des fonctions harmoniques p. p. en considérant la fonction p. p.:

$$\lim_{\varrho\to\infty} \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\varrho}^{+\varrho} f(\sigma x + t) \frac{1}{(x+i)^2} dx .$$

J. Favard (Grenoble).

Petersen, Richard: Neuere Untersuchungen über fastperiodische analytische Funktionen. (*Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.*) 8. Skand. Mat.-Kongr., 289 bis 298 (1935).

Dans cette communication au 8-me Congrès des Mathématiciens Scandinaves, l'auteur expose brièvement (avec des résumés des démonstrations) quelques-uns de ses résultats antérieurs sur les fonctions presque-périodiques (ce Zbl. **6**, 199; **8**, 12; **9**, 252) et donne après cela un nouveau résultat qui complète les précédents. En usant des mêmes méthodes que dans le dernier des travaux cités, il démontre la possibilité de construire une fonction entière $F(s)$, qui soit presque périodique sur chacune des droites $\Re(s) = \text{const}$ que l'on obtient en enlevant d'une bande verticale donnée $\alpha < \Re(s) < \beta$ un ensemble fini ou dénombrable de bandes verticales données à l'avance, et qui ne soit certainement pas presque-périodique sur aucune autre droite $\Re(s) = \text{const}$.

Vlad. Bernstein (Milano).

Differentialgleichungen:

Herrmann, A.: Lineare Differentialsysteme und Matrixgleichungen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **38**, 394—401 (1935).

If the $n \times n$ matrix T satisfies the equation

$$T^\nu + A_1 T^{\nu-1} + \cdots + A_\nu = 0 \tag{1}$$

where $A_i = (a_{rsi})$, then e^{Tx} satisfies

$$\frac{d^\nu z_i(x)}{dx^\nu} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik1} \frac{d^{\nu-1} z_k(x)}{dx^{\nu-1}} + \cdots + a_{ik\nu} z_k(x) = 0 \tag{2}$$

and conversely. By setting $z_i' = z_{n+i}$, (2) can be written $Z'(x) = BZ(x)$ in matrices of order νn. By the method of successive approximations, e^{Bx} is found to be a solution.

$$e^{Bx} = \sum P_k e^{\varrho_k x}, \qquad P_k(x) = \sum_{\nu=0}^{q_k-1} \frac{(B - \varrho_k E)^\nu}{\nu!} x^\nu K_k$$

where the ϱ_k are the distinct characteristic roots of B, q_k is the maximum exponent of the elementary divisors involving ϱ_k, and the K_k are the Frobenius covariants. If the characteristic roots of B are distinct, the νn solutions $(z_1^{(k)}(x), \ldots, z_n^{(k)}(x))$, $z_i^{(k)}(x) = c_{ik} e^{\varrho_k}$ of (2) are obtained. The solutions T of (1) are the $n \times n$ matrices obtained from (c_{ik}) by suppressing columns. A modified process is used when the char. roots of B are not distinct.

MacDuffee (Columbus).

Chiellini, Armando: Alcune ricerche sopra le equazioni differenziali lineari omogenee. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari **5**, 17—23 (1935).

Sind $y_1, y_2, \ldots y_k$ Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit den Koeffizienten $1, p_1, p_2, \ldots, p_n$, so genügt die Funktion

$$z = y_1^m + y_2^m + \cdots + y_k^m$$

einer Differentialgleichung n k-ter Ordnung, die von den p_i und deren Ableitungen rational abhängt. Beispiele. *G. Cimmino* (Napoli).

Sommer, Herbert: Über die Lösungskurven nichtlinearer Differentialgleichungen 2. Ordnung vom Typus $\frac{d}{dx}\left[\varkappa(x)\frac{dy}{dx}\right] + \varphi(x)\cdot F(y(x)) = 0$. Darmstadt: Diss. 1934. 53 S.

In Verallgemeinerung der häufig behandelten Differentialgleichung $L(y) = 0$, wo

$$L(y) = \frac{d}{dx}\left[\varkappa(x)\frac{dy}{dx}\right] + \psi(x)y = 0$$

ist, wird die Differentialgleichung

$$L(y) + \varphi(x)F(y) = 0$$

auf den oszillatorischen Verlauf der Lösungen hin untersucht. Dabei wird vorausgesetzt, daß in einem gegebenen Intervall $\varkappa, \varphi, \psi$ stetig, $\varkappa > 0$, $F(y)$ stetig differenzierbar, $F(0) = 0$ und sonst $F(y) \neq 0$ ist. Die Untersuchung wird im wesentlichen mit den bekannten elementaren Mitteln durchgeführt und speziell auf den Typus $\varkappa = x^2$, $\psi = 0$, $\varphi = x^2$ angewendet und für diesen weitergeführt. Für diesen Typus ergibt sich z. B. im Falle $\operatorname{sgn} F(y) = \operatorname{sgn} y$ als hinreichende Bedingung für den oszillatorischen Verlauf: $F'(0) \neq 0$. Als Beispiele werden genauer diskutiert die Heckmann-Siedentopfsche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) + \lambda^2 x^2 y + c_1 x^2 e^{c_2 y} = 0,$$

die Differentialgleichung der isothermen Gaskugel

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) + x^2 e^y = 0$$

und die Hopfsche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(x^c\frac{dy}{dx}\right) + x^\lambda y^n = 0.$$

Kamke (Tübingen).

Petrovitch, Michel: Propriété arithmétique des intégrales d'une classe d'équations différentielles. Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr 2, 73—79 (1935).

Es handelt sich um folgende Fragen (alles reell): 1. Konstruktion von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche „algebraisch" in x, e^x, y, y', y'' und einem Parameter a sind und folgende Eigenschaft besitzen: Es existieren unbegrenzt viele, eine willkürliche Konstante enthaltende Lösungen, so daß $y(\infty) = \lim_{x\to\infty} y(x) = y(0)$ oder $\neq y(0)$ ist, je nachdem die positive ganze Zahl $(a+1)$ eine Primzahl ist oder nicht. — 2. Konstruktion von in x, y, y', y'', y''' und einem Parameter a algebraischen gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter Ordnung, deren Lösungen die gleiche Eigenschaft besitzen wie im ersten Falle. — 3. Feststellung, daß im Falle einer Differentialgleichung $y'' + \varphi(y)\,y'^2 + f(x)\,y' = 0$ bei passender Wahl von $\varphi(y)$ und für gewisse rationale $f(x)$ gilt: $y(\infty) = g(C + \omega\, s_m)$, wo C Integrationskonstante, ω Periode von g und s_m die Summe der reziproken ungeraden Primzahlen $\leqq m-1$ bedeutet (m hängt von $f(x)$ ab und g von φ). *Haupt* (Erlangen).

Petrovitch, Michel: Sur les extrêmums des intégrales des équations différentielles algébriques. Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr 2, 145—149 (1935).

Die reellen Maxima bzw. Minima der Lösungen $y = \varphi(x)$ einer gewöhnlichen Differentialgleichung heißen „beweglich" oder „fest", je nachdem sie sich bei Änderung der Integrationskonstanten selbst ändern oder nicht (im letzteren Falle sollen die zum Extremum gehörigen x und y fest sein). Für den Fall einer „algebraischen" Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$, wobei also f ein Polynom in x, y und y' ist, werden notwendige und zugleich hinreichende Bedingungen für feste Extrema gesucht; das Problem wird zurückgeführt auf die vom Verf. früher erledigte Frage nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Nullstellen einer alge-

braischen Differentialgleichung erster Ordnung „fest" sind. Außerdem wird eine hinreichende Bedingung angegeben einerseits für den Fall einer Differentialgleichung von erster und andererseits einer solchen von p-ter Ordnung. *Haupt* (Erlangen).

Petrovitch, Michel: Une classe d'intégrales premières des équations différentielles du second ordre. Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr **2**, 159—162 (1935).

Die Auflösung der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = f(x; y; y')$ [zu Beginn der Arbeit steht $y' = f(x, y, y')$] läßt sich in der verschiedensten Weise zurückführen auf die Auflösung eines Systems von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$y_1' = f_1(x; y_1; y_2), \quad y_2' = f_2(x; y_1; y_2).$$

Es wird gezeigt, daß f_1 als von y_2 unabhängig gewählt werden kann. Und zwar werden verschiedene Ansätze besprochen, vermöge deren man eine solche Funktion f_1 erhält und an Beispielen erläutert. *Haupt* (Erlangen).

Tychonoff, A.: Über unendliche Systeme von Differentialgleichungen. Rec. math. Moscou **41**, 551—555 (1935).

Der Verf. beweist hier die Existenz der Lösung eines unendlichen Systems von Differentialgleichungen mit unendlich vielen Unbekannten

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n, \ldots); \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

falls die rechten Seiten vollstetig sind (im Sinne von Hilbert). Weitere Voraussetzungen sichern die Eindeutigkeit. *Schauder* (Lwów).

Lappo-Danilevskij, J. A.: Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires. II. Trav. Inst. phys.-math. Stekloff H. **7**, 1—210 (1935).

L'exposé du Vol. I contenant les mémoires I—III de L.-D. v. ce Zbl. **9**, 350. Le Vol. II contient encore quatre mémoires. — IV. Fonctions fondamentales des substitutions exposantes dans un voisinage des substitutions nulles pour le système régulier. Le problème de Riemann est traité ici pour les systèmes dits réguliers, étudiés dans le m. II. (Pour les notations voir l'exposé du Vol. I.) Cela revient au fait qu'on doit traiter les matrices intégrales non comme des fonctions des substitutions différentielles (point de vue de l'auteur dans le m. II), mais comme fonctions des substitutions exposantes. L'auteur donne des représentations explicites de la matrice métacanonique (c'est à dire de la matrice intégrale dont le facteur holomorphe au point a, est normé là) et des substitutions différentielles comme fonctions des points $a_1 a_2 \ldots$ et des substitutions exposantes $w_1, w_2 \ldots$ quand ces substitutions sont dans le voisinage des substitutions nulles. On a aussi quelques remarques au m. II, par ex. concernant l'unicité de la matrice métacanonique et des substitutions exposantes au point a_j, etc. — V. Théorie des matrices satisfaisantes à des systèmes d'équations différentielles à coefficients rationnels arbitraires. Un tel système se réduit à la forme

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{s} \frac{YU_j^{(r)}}{(x - a_j)^r}. \qquad (1)$$

Une matrice intégrale $Y(x)$ est nommée ici „matrice à définition rationnelle du rang $s - 1$ aux substitutions différentielles $V_j^{(r)}$, aux points singuliers $a_j''(V_j^{(r)}, a_j$ indépendants de x!). $Y(x)$ subit du côté gauche les „substitutions intégrales" V_j quand x entoure a_j. Le groupe des V_j est le groupe de monodromie du système (1). Quatre problèmes sont résolus ici. — (A) Le problème irrégulier de Poincaré: La représentation générale de $Y(x)$ valable dans tout le domaine de son existence par rapport à x et aux paramètres $U_j^{(r)}$, a_j et b (un point ordinaire où l'on peut normer Y), et la détermination analytique de son groupe de monodromie. On démontre que $Y(x)$ est une fonction également entière des substitutions différentielles donnée par la serie

$$I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{(1 \ldots m)} \sum_{r_1 \ldots r_\nu}^{(1 \ldots s)} U_{j_1}^{(r_1)} \ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} L_b(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu} | x),$$

où L_b sont des intégrales généralisant les hyperlogarithmes. Les expressions explicites des V_j comme fonctions également entières des $U_j^{(r)}$ sont aussi obtenues. Ce problème a été traité jusqu'à présent seulement dans le sens de la construction des représentations locales (v. Koch) ou asymptotiques (Poincaré) des matrices en question. La connexion de ces représentations et des représentations générales de l'auteur est exquissée dans le texte. — Les autres problèmes sont résolus à la condition que les substitutions données [différentielles dans (B) et (C), caracté-

ristiques dans (D)] se trouvent dans un voisinage du système des substitutions nulles. — (B) La matrice $Y(x)$ peut être mise sous forme d'une composition d'une matrice régulière (caractérisant la ramification de Y) et d'une matrice uniforme. Ainsi les calculs pour obtenir la représentation de Y et d'un groupe de monodromie d'un système irrégulier sont réduits (aux opérations rationnelles avec les arguments $x, a_1 \ldots a_m, b$ près) aux mêmes calculs pour un système régulier. — (C) On obtient la caractéristique analytique complète des singularités d'une matrice à définition rationnelle concernant sa ramification et les singularités essentielles de la composante uniforme. On introduit un système des „substitutions caractéristiques" $w_j^{(r)}$ $(j = 1 \ldots m, r = 1 \ldots s)$ telles que la matrice intégrale admet les représentations:

$$Y(x) = \theta(w_j^{(s)}, \ldots, w_j^{(1)}, a_j | x)\, \overline{\Phi^{(j)}}(U_1^{(1)}, \ldots, U_m^{(s)}, a_1, \ldots, a_m | x) \qquad (2)$$

où $\overline{\Phi^{(j)}}$ et les matrices inverses restent holomorphes de x autour des a_j. $w_j^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \log V_j$ est la „substitution exposante", les autres $w_j^{(2)} \ldots$ n'ont pas d'influence sur la ramification. On peut construire de même des matrices intégrales où la composante holomorphe autour de a_j soit normalisée à ce point — ces matrices seront nommées „matrices métacanoniques par rapport au point a_j". — (D) Problème de Riemann pour le système considéré: Détermination des substitutions différentielles $U_j^{(r)}$, les substitutions caractéristiques $w_j^{(r)}$ et la configuration des points singuliers a_j étant supposés données. Les expressions explicites pour $U_j^{(r)}$ en forme des séries des compositions représentant les fonctions également holomorphes des $w_j^{(s)}$ (dans un voisinage du système des substitutions nulles) sont données par l'auteur. — VI. Construction des invariants d'un groupe de monodromie d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients rationnels arbitraires. On étudie la substitution intégrale V_j au point a_j d'une matrice intégrale du système (1). Les invariants de cette substitution (indépendants de Y) sont les fonctions numériques entières des substitutions différentielles. Leurs représentations générales sont gagnés, après quoi on obtient aussi les expressions pour les nombres caractéristiques de V_j sous forme des racines d'une équation algébrique, dont les coefficients sont lesdits invariants (tandisque d'après v. Koch la construction des n. c. implique la résolution d'une équation transcendante, qu'on forme en égalant à 0 un déterminant infini). — VII. Prolongement analytique des séries des compositions. Il s'agit de compléter les résultats des m. II et IV en obtenant pour un système régulier la décomposition de la matrice métacanonique dans le problème de Poincaré et la résolution du problème de Riemann, pour les conditions plus larges (concernant les substitutions données) qu'auparavant. La notion des hypersubstitutions est nécessaire pour surmonter les obstacles ayant place sur cette voie: On nomme hypersubstitution (hy-sub.) du rang 1 un système de n^2 substitutions à n^2 éléments chacune, hy-sub. du rang 2 un système de n^2 hy-sub. du rang 1, etc. Les opérations de hyperaddition et hypercomposition des hy-sub. sont introduites ensuite et on étudie les séries des hypercompositions et les théorèmes fondamentaux nécessaires pour le calcul avec ces séries. On construit en forme des séries des hypercompositions: 1° la représentation de la matrice intégrale et des substitutions intégrales d'un système régulier à l'aide de la matrice intégrale et des substitutions différentielles d'un autre système régulier; 2° les représentations des matrices métacanoniques aux substitutions différentielles données (sous la suppositions que les nombres caractéristiques σ_i de chaque U_j satisfont aux inégalités $|Re(\sigma_i - \sigma_k)| < 1$); 3° les représentations locales des matrices métacanoniques et des substitutions différentielles par les séries d'hypercompositions des substitutions exposantes. — Comme dans le Vol. I Smirnoff et Kotchine ont fait beaucoup d'additions au matériel trouvé après le décès de L.-D., quelques démonstrations et même des paragraphes entiers faisant défaut dans les papiers. *Janczewski* (Leningrad).

Lewy, Hans: A priori limitations for solutions of Monge-Ampère equations. Trans. Amer. Math. Soc. **37**, 417—434 (1935).

Es wird bewiesen, daß man die dritten (und also auch die höheren) Ableitungen der Lösung einer Monge-Ampèreschen elliptischen Differentialgleichung

$$Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) = E$$

abschätzen kann, falls bereits die Schranken für die Funktion selbst und für die Ableitungen zweiter Ordnung bekannt sind. Alle Koeffizienten werden als in x, y, z, p, q analytisch vorausgesetzt. Das wesentlich Neue gegenüber den früheren Untersuchungen beruht auf folgendem: Die fraglichen Schranken werden hier nicht in Abhängigkeit von den Randwerten gewonnen, die in dieser Arbeit überhaupt keine Rolle spielen. Das Definitionsgebiet der Lösung kann ganz beliebig gewählt werden, es kann dies z. B. die ganze Ebene sein. Die Methode beruht in der Aufstellung von „charakteristischen" Gleichungssystemen vom hyperbolischen Typus und einer passenden Überführung ins Komplexe. *Schauder* (Lwów).

Saltykow, Nicolas: Équations aux dérivées partielles du second ordre à n variables indépendantes intégrables par un système de Charpit. Publ. Math. Univ. Belgrade **3**, 161—166 (1934).

Zur Integration der Gleichung $\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} z_{ik} + 2\sum_{i=1}^{n} D_i z_i + F = 0$ $\left(A_{ik} = A_{ki},\ A_{11} \neq 0,\ A_{ik},\ D_i\right.$ Funktionen der unabhängig Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, $F = F(x_1, \ldots, x_n; z)$, $z_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$, $\left. z_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}\right)$ wird die neue gesuchte Funktion w eingeführt durch $\sum_{i=1}^{n} L_i z_i = w$. Diese Gleichung zusammen mit $\sum_{i=1}^{n} L_i w_i = N$ soll nach geeigneter Bestimmung von $L_1, \ldots, L_n, N$ äquivalent mit der ursprünglichen Gleichung sein, was zur Forderung $\sum_{i=1}^{n} L_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{k=1}^{n} L_k z_k\right) - N = \lambda\left(\sum_{i,k} A_{ik} z_{ik} + 2\sum_{i=1}^{n} D_i z_i + F\right)$ führt. Unter einschränkenden Voraussetzungen über die Koeffizienten A_{ik}, D_i läßt sich diese Forderung erfüllen. Die Bestimmung der Koeffizienten L_i, N und Integration des neuen Systems wird durchgeführt. *Rellich* (Marburg, Lahn).

Colombo, B.: Ancora sopra un'equazione a derivate parziali del quarto ordine Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **21**, 475—480 (1935).

Eindeutigkeit und Existenz der Lösung von $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, die auf den vier Geraden $x = 0$, $y = 0$, $y = x$ und $y = \alpha x$ vorgeschriebene Werte annimmt. *Rellich* (Marburg, Lahn).

Herrmann, Horst: Beziehungen zwischen den Eigenwerten und Eigenfunktionen verschiedener Eigenwertprobleme. Math. Z. **40**, 221—241 (1935).

Zusammenstellung von Sätzen über Eigenwerte und Eigenfunktionen homogener, quadratischer Funktionale. Es wird die Minimumdefinition zugrunde gelegt, und es wird vorausgesetzt, daß nur Punkteigenwerte auftreten, die sich im Unendlichen häufen. Also Probleme vom Typus $\iint_G (u_x^2 + u_z^2)\, dx\, dy = \text{Min}$, $\iint_G u^2\, dx\, dy = 1$, $u = 0$ auf dem Rande von G. Ohne Benutzung der Vollständigkeit der Eigenfunktionen wird gezeigt, daß unter den Eigenwerten im Sinne der Minimumdefinition alle Eigenwerte im Sinne der Eulerschen Differentialgleichung vorkommen. — Sind $G_1, G_2, \ldots G_l$ Teilgebiete von G, die keine inneren Punkte gemeinsam haben, $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \ldots$ die zu G_i gehörigen Eigenwerte des zugrunde gelegten Problems (mit Randwerten Null) und ordnet man alle $\lambda_{i,k}$ in einer aufsteigenden Reihe $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots$, so ist $\lambda_n \leqq \lambda_n^*$, wobei λ_n der n-te Eigenwert des Gesamtgebietes G bedeutet. Für das Auftreten des Gleichheitszeichens werden notwendige Bedingungen und hinreichende Bedingungen angegeben. *Rellich* (Marburg, Lahn).

Rosenblatt, Alfred: Sur la fonction de Green d'un domaine borné de l'espace euclidien à trois dimensions. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 22—24 (1935).

Giraud, Georges: Sur certaines opérations du type elliptique. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1651—1653 (1935).

Es werden weitere Fälle untersucht, in welchen die Existenz (und Unizität) von Fundamentallösungen $G(X, \mathsf{E})$ einer linearen elliptischen Differentialgleichung behauptet werden kann. Insbesondere genügt es, von den Koeffizienten a_{ik} bei den zweiten Ableitungen der Lösung eine Hölderbedingung vorauszusetzen sowie ein gewisses Verhalten im Unendlichen. Noch allgemeiner beweist der Verf. die Existenz der Fundamentallösungen, falls der Kontinuitätsmodul der a_{ik} gewissen Bedingungen genügt. Ist $\omega_0(t)$ eine wachsende Funktion, für welche die beiden Integrale

$$\omega_1(\tau) = \int_0^{\tau} \frac{\omega_0(t)}{t}\, dt, \qquad \omega_2(\tau) = \int_0^{\tau} \frac{\omega_1(t)}{t}\, dt$$

vorhanden sind, so besteht (ungenau gesagt) die fragliche Bedingung in einer Abschätzung der Kontinuitätsmoduln der a_{ik} durch die Funktion ω_1 und der Beschreibung

des Verhaltens im Unendlichen durch die Funktion ω_0. Ähnliche Voraussetzungen werden auch bei den anderen Koeffizienten gemacht. *Schauder* (Lwów).

Soboleff, S. L.: La théorie générale de la diffraction des ondes sur les surfaces de Riemann. Trav. Inst. math. Stekloff **9**, 39—105 (1935) [Russisch].

L'auteur étudie les solutions-limites de l'équation

$$\Box w \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

Ce sont des fonctions $u(x, y, t)$ telles que $\iiint_D |u_n(x, y, t) - u(x, y, t)|\, d\tau \to 0$, $\Box u_n = 0$, les u_n étant continues avec ses dérivées secondes (D un domaine des variables x, y, t). La condition $\iiint_G u \Box v\, d\tau = 0$ — G étant un domaine quelconque $\subset D$ et v une fonction continue avec ses dérivées secondes s'évanouissant avec ses dérivées premières sur le contour de G — est nécessaire et suffisante pour qu'une fonction u soit une solution-limite de (1). Cette condition est obtenue à l'aide de l'introduction des fonctions-moyennes, analogues à celles que M. Gunther (ce Zbl. **3**, 396) à utilisé pour la solution de divers problèmes de la physique mathématique. L'auteur appelle une solution-limite régulière, si elle est continue avec ses dérivées premières sauf sur un nombre fini de surfaces et si lesdites surfaces et les discontinuités sont soumises aux quelques conditions „cinématiques" et „dynamiques". Il obtient pour ces solutions la formule de Green généralisée à l'aide de laquelle est résolu aussi le problème généralisé de Cauchy. Si l'on a une famille de solutions-limites dépendante d'un paramètre λ, alors l'intégration par rapport à λ donne encore une solution-limite. On étudie ensuite la connexion de ces solutions et des solutions complexes de (1), introduites par l'auteur dans ses travaux antérieurs (ce Zbl. **4**, 279; **9**, 209). — La seconde partie de ce mémoire contient l'application au problème de la diffraction des ondes sur les surfaces de Riemann, déjà étudié par l'auteur par une méthode différente (ce Zbl. **6**, 118). On construit les solutions-limites donnant sur la surface logarithmique un ensemble des ondes planes qui se propagent dans les directions diverses et telles que le front de chaque onde passe pour $t = 0$ par un point fixé (ϱ_0, ϑ_0), etc. Le problème de Cauchy généralisé est résolu aussi sur la surface de Riemann et on étudie les ramifications, des solutions desdites problèmes. *Janczewski* (Leningrad).

Schauder, J.: Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in beliebiger Anzahl von unabhängigen Veränderlichen. Fundam. Math. **24**, 213—246 (1935).

Eine Differentialgleichung

$$\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = F \tag{1}$$

für eine Funktion u der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ heißt quasilinear, wenn die A und F außer von $x_1, \ldots, x_n$ noch von u und den ersten Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ abhängen. Auf einem Anfangsgebiet b_{n-1} der Ebene $x_n = 0$ seien die Anfangswerte $u = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $\frac{\partial u}{\partial x_n} = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ so vorgegeben, daß die Gleichung (1) dort hyperbolisch ist. Dann ist zu zeigen, daß in einem an b_{n-1} anschließenden Gebiet P_n des $(x_1, \ldots, x_n)$-Raumes genau eine Funktion u existiert, die der Gl. (1) und den Anfangsbedingungen genügt. Wesentlich ist dabei, daß die Vorgaben *nicht* als *analytisch* angenommen werden. — Dieses Anfangsproblem wird in der vorliegenden Arbeit gelöst unter der Voraussetzung, daß die A, F, φ, ψ genügend (aber nur endlich) oft nach ihren Argumenten stetig differenzierbar sind; die Lösung u erweist sich als $n+2$mal stetig differenzierbar. Als Gebiet P_n wird ein Pyramidenstumpf $0 \leqq x_n \leqq h$, $|x_1| - \varkappa x_n \leqq \varepsilon, \ldots,$ $|x_{n-1}| - \varkappa x_n \leqq \varepsilon$ genommen mit dem Anfangsgebiet b_{n-1}: $|x_1| \leqq \varepsilon, \ldots, |x_{n-1}| \leqq \varepsilon$;

dabei sind die positiven ε, $\frac{1}{\varkappa}$, h noch genügend klein zu wählen. — Um dies Problem zu lösen, entwickelt Verf. zunächst eine Reihe von Tatsachen über lineare hyperbolische Differentialgleichungen

$$\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = F, \tag{2}$$

wo die A, B, C, F gegebene Funktionen der x sind. Aus bekannten Energieintegralrelationen für solche D.Gl. gewinnt er im Anschluß an Friedrichs und Lewy Abschätzungen für die Integrale der Quadratsummen von u samt Ableitungen bis zur $n+2$-ten Ordnung, erstreckt über P_n und über die Schnitte von $x_n = \text{konst.}$ mit P_n. Entscheidend sind dabei die geringen Beschränktheitsvoraussetzungen für die A, B, C, F samt Ableitungen, mit denen Verf. auskommt. — Sodann wird die Lösung des Anfangsproblems der linearen Gl. (2) mit Hilfe der klassischen Majorantenmethode konstruiert, nachdem zunächst doch vorausgesetzt wird, daß die $A, B, C, F, \varphi, \psi$ analytisch sind. — Um die Lösung der quasilinearen Gl. (1) zu gewinnen, wird eine Funktionaloperation $Z(z)$ eingeführt, die jeder Funktion $z(x_1, \ldots, x_n)$ einer gewissen Funktionenklasse $\mathfrak{B}$ eine Funktion Z zuordnet als Lösung des Anfangsproblems der linearen D.Gl., die aus (1) entsteht, wenn man z und $\frac{\partial z}{\partial x}$ in die A und F einführt. Auf Grund der erwähnten Abschätzungen wird gezeigt, daß Z wieder der Klasse $\mathfrak{B}$ angehört. Nun ergibt sich die Lösung des Anfangsproblems von (1) unmittelbar als Fixpunkt $z = Z(z)$ der Funktionaloperation $Z(z)$. — Zum Schluß befreit sich Verf. von der bisher gemachten Voraussetzung, daß die A, F, φ, ψ analytisch sind; daß das möglich ist, beruht darauf, daß die Funktionen der Klasse $\mathfrak{B}$ samt Ableitungen bis zur $n+2$-ten Ordnung sich durch Konstante abschätzen lassen, die im wesentlichen nur von Schranken für die Werte der A, F, φ, ψ samt Ableitungen bis zu einer endlichen Ordnung abhängen.

K. Friedrichs (Braunschweig).

Gogoladze, W. G.: Generalized wave equation in a heterogeneous anisotrope medium. Trav. Inst. math. Stekloff **9**, 107—166 (1935) [Russisch].

Detailed proofs of some formulas concerning the theory of the function $\sigma(u, u_0)$ and the generalized retarding potential, stated in the previous notes of the author (this Zbl. **8**, 313; **10**, 113). Detailed solution by means of these functions of the Cauchy's problem for the generalized wave equation with the initial conditions

$$u\Big|_{t=0} = f(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x, y, z)$$

(also stated in the former note). More general results of the author see Zbl. **8**, 357.

Janczewski (Leningrad).

Winants, Marcel: Résolution du problème (a_0, IV, 1). Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **21**, 376—384 (1935).

Verallgemeinerung der in dies. Zbl. **11**, 210 referierten Frage: Verf. betrachtet hier den Fall, daß das rechte Glied der Gleichung nicht nur von x, y, z, sondern auch von p, q, s abhängt.

G. Cimmino (Napoli).

Winants, Marcel: Résolution de quelques nouveaux problèmes pour certaines équations semi-paraboliques du troisième ordre. Bull. Sci. math., II. s. **59**, 141—160 (1935).

Weitere Probleme für die Gleichung

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f(x, y, z, p, q, r, s)$$

werden im kleinen durch die Methode der sukzessiven Approximationen gelöst.

G. Cimmino (Napoli).

Krasny-Ergen, Wilhelm: Das durch Joulesche Wärme entstehende Temperaturfeld einer Kugel im homogenen elektrischen Feld. Ann. Physik, V. F. **23**, 277—284 (1935).

Der Verf. geht von der bekannten Aufgabe aus, das elektrische Feld zu berechnen, wenn in ein homogenes Wechselfeld eine Kugel von anderer Leitfähigkeit gebracht wird. Ist φ das entsprechende Potential, φ^* das komplex konjugierte, so genügt die durch Joulesche Wärme entstehende stationäre Temperaturverteilung der Gleichung:

$$\Delta T = -k(\operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\varphi^*),$$

wobei k im Innern und Äußern der Kugel verschiedene Werte hat. Diese Gleichung läßt sich durch Kugelfunktionen 0-ter und 2-ter Ordnung integrieren, wobei noch entsprechende Randbedingungen zu berücksichtigen sind. — Die Aufgabe hat Bedeutung z. B. für die Kurzwellentherapie. *F. Noether* (Tomsk).

Germay, R.-H.-J.: Sur une application de la méthode des approximations successives à l'intégration des systèmes d'équations intégro-différentielles normales dont les termes intégraux contiennent les dérivées des inconnues. I. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **4**, 39 bis 44, 109—113 u. 153—155 (1935).

Weitere Verallgemeinerung früherer Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. **10**, 169, 300, 400, 401). *G. Cimmino* (Napoli).

Germay, R.-H.-J.: Sur des équations intégro-différentielles à deux variables indépendantes généralisant les équations aux dérivées partielles de M. Ét. Delassus. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **4**, 44—49, 114—119 u. 156—157 (1935).

Anwendung der Methode der sukzessiven Approximationen auf eine partielle Integro-Differentialgleichung vierter Ordnung. *G. Cimmino* (Napoli).

Spezielle Funktionen:

Varma, R. S.: On a certain polynomial analogous to Lommel's polynomial. J. Indian Math. Soc., N. s. **1**, 115—118 (1934).

Designating by $R_{n,m}(x)$ the polynomial introduced by S. C. Mitra [Indian Phys.-Math. J. **3**, 9—13 (1932); this Zbl. **4**, 6], which satisfies the recurrence relation

$$R_{n,m}(x) + xR_{n,m-1}(x) + (m + n + 1)\,R_{n,m-2}(x) = 0\,,$$

the author evaluates the integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} H_p(x)\,R_{n,m}(x)\,dx\,,$$

where $H_p(x)$ is Hermite's polynomial, and also the sum

$$(y - x)\sum_{p=1}^{m}[R_{n,p-1}(y)\,R_{n,p-1}(x)]/(p + n + 1)!$$

H. T. Davis (Bloomington, Indiana).

Popov, A. I.: Über einige Reihen. C. R. Acad. Sci. URSS **2**, 94—95 u. dtsch. Zusammenfassung 96 (1935) [Russisch].

Aus einer Transformationsformel der θ-Reihen erhält der Verf. die Identität

$$1 + \sum_1^{\infty} M(n)\,e^{-n\pi z} = \frac{1}{z\sqrt{D}}\left\{1 + \sum_1^{\infty} M(n)\,e^{-\frac{\pi n}{Dz}}\right\};$$

durch weitere Umformungen und Integration parallel zur imaginären Achse gelangt er zur Formel

$$\frac{\pi^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\left[x^{\nu-1} + \sum_{n\leqq x}{}'(x - n)^{\nu-1}M(n)\right] = \frac{\pi^\nu x^\nu}{\sqrt{D}\,\Gamma(\nu+1)} + x^{\frac{\nu}{2}} D^{\frac{\nu-1}{2}} \sum_1^{\infty} \frac{M(n)}{n^{\nu/2}} J_\nu\left(2\pi\sqrt{\frac{nx}{D}}\right)$$

für $\Re(\nu) \geqq 1$; $M(n)$ ist die Anzahl der Darstellungen der Zahl n durch die Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ mit negativer Diskriminante $-D$. Weitere ähnliche Formeln.

W. Stepanoff (Moskau).

Popov, A. I.: Über die zylindrische Funktionen enthaltenden Reihen. C. R. Acad. Sci. URSS **2**, 96—99 u. dtsch. Zusammenfassung 99 (1935) [Russisch].

An seine früheren Arbeiten anknüpfend [Bull. Acad. Sci. URSS **6** (1934); dies. Zbl. **10**, 401, s. auch das vorsteh. Ref., auch wegen der Bezeichnungen] leitet der Verf. verschiedene Summationsformeln ab wie z. B.

$$\frac{\Gamma(1+\nu)}{\pi^{1+\nu}}\left\{1+x^{\nu+1}\sum_1^\infty \frac{M(n)}{(n+x)^{\nu+1}}\right\}=\frac{x}{\sqrt{D}}\left\{\frac{\Gamma(\nu)}{\pi^\nu}+2\left(\frac{x}{D}\right)^{\frac{\nu}{2}}\sum_1^\infty M(n)n^{\frac{\nu}{2}}K_\nu\left(2\pi\sqrt{\frac{nx}{D}}\right)\right\},\quad \Re(\nu)>0$$

deren Spezialfall für $\nu=\frac{1}{2}$ von Hardy aufgestellt ist. *W. Stepanoff* (Moskau).

Meijer, C. S.: Integraldarstellungen für Lommelsche und Struvesche Funktionen. I. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **38**, 628—634 (1935).

Die beiden Lommelschen Funktionen werden definiert durch:

$$\left.\begin{aligned} s_{\mu,\nu}(z) &= \frac{z^{\mu+1}}{(1+\mu+\nu)(1+\mu-\nu)}\,{}_1F_2\left(1;\frac{3}{2}+\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2},\frac{3}{2}+\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2};-\frac{z^2}{4}\right)\\ S_{\mu,\nu}(z) &= s_{\mu,\nu}(z)+2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\\ &\quad\times\left\{J_\nu(z)\sin\tfrac{1}{2}(\mu-\nu)\pi-Y_\nu(z)\cos\tfrac{1}{2}(\mu-\nu)\pi\right\}. \end{aligned}\right\}\begin{matrix}\mu+\nu\\ \mu-\nu\end{matrix}\neq -1,-3,-5\ldots$$

Für $\mu=\pm\nu-2h-1$ (h ganz $\geqq 0$) wird $S_{\mu,\nu}(z)$ definiert durch:

$$S_{\pm\nu-2h-1,\nu}(z)=\lim_{\mu\to\pm\nu-2h-1}S_{\mu,\nu}(z).$$

Ferner ist:

$$\varphi_{\mu,\nu}(z)=\frac{z^{2\mu+2}}{2^{3\mu+3}}\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m z^{4m}}{2^{4m}\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+m\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}+m\right)}$$

$$=\frac{2^{-2\mu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}\right)}\cdot s_{\mu,\nu}\left(\frac{z^2}{2}\right)$$

und

$$\Phi_{\mu,\nu}(z)=\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}\right)S_{\mu,\nu}(z^2).\qquad \begin{matrix}\mu+\nu\\ \mu-\nu\end{matrix}\neq 1,3,5\ldots$$

Der Verf. leitet für die Funktion $\Phi_{\mu,\nu}(z)$ die folgenden sechs Integraldarstellungen ab:

$$\Phi_{\mu,\nu}(z)=2\pi\int_0^\infty\varphi_{-\mu-1,\nu}(v)K_{2\nu}(2^{\frac{1}{2}}zv)\,v\,dv,\qquad \Re(\mu+\nu)<1 \text{ und } \Re(\mu-\nu)<1$$

$$=\frac{\pi}{2^{\frac{1}{2}}z}\int_0^\infty\varphi_{-\mu-2,\nu+1}(v)K_{2\nu+1}(2^{\frac{1}{2}}zv)\,v^2\,dv,\qquad \Re(\mu+\nu)<0 \text{ und } \Re(\mu-\nu)<1$$

$$=\frac{\pi}{4z^2}\int_0^\infty\varphi_{-\mu-3,\nu}(v)K_{2\nu}(2^{\frac{1}{2}}zv)\,v^3\,dv,\qquad \Re(\mu+\nu)<0 \text{ und } \Re(\mu-\nu)<0$$

$$=(2\pi)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty\varphi_{-\mu-\frac{3}{2},\frac{1}{2}}(v)K_\nu\left(zve^{\frac{\pi}{4}i}\right)K_\nu\left(zve^{-\frac{\pi}{4}i}\right)v^2\,dv,\ \Re(\mu+\nu)<1 \text{ und } \Re(\mu-\nu)<1$$

$$=2^{3\nu+\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}z^{2\nu}\int_0^\infty\varphi_{2\nu-\mu-\frac{3}{2},\frac{1}{2}-\nu}(v)K_{2\nu}\left(zve^{\frac{\pi}{4}i}\right)K_{2\nu}\left(zve^{-\frac{\pi}{4}i}\right)v^{2-2\nu}\,dv,$$

$$\Re(\mu+\nu)<1 \text{ und } \Re(\mu-3\nu)<1$$

$$=2^{3\nu-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}z^{2\nu-2}\int_0^\infty\varphi_{2\nu-\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\nu}(v)K_{2\nu-1}\left(zve^{\frac{\pi}{4}i}\right)K_{2\nu-1}\left(zve^{-\frac{\pi}{4}i}\right)v^{4-2\nu}\,dv,$$

$$\Re(\mu+\nu)<1 \text{ und } \Re(\mu-3\nu)<-1.$$

In diesen Beziehungen wird $|\arg z|<\frac{\pi}{2}$ vorausgesetzt. *S. C. van Veen* (Dordrecht).

Differenzengleichungen:

Herzog, Fritz: Systems of algebraic mixed difference equations. Trans. Amer. Math. Soc. **37**, 286—300 (1935).

Ritt (see this Zbl. 5, 394—396) has developed a decomposition theory for systems of algebraic differential equations, showing that every system is equivalent to one and essentially only one finite set of "irreducible" systems. Analogous results for algebraic difference equations have been given by Ritt and Doob (see this Zbl. 8, 18—19). Following similar lines, the present author obtains the same sort of decomposition theorem for equations which contain algebraically one or more unknown functions $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, together with their "transforms" $y_i(x + j)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots;$ all $i)$ and the derivatives of these transforms. An example is given of a pure differential equation which, although irreducible in the domain of differential equations, is reducible in the domain of mixed equations. *C. R. Adams* (Providence).

Onofri, L., e A. Mambriani: Sul algoritmi infinite generati da certe equazioni ricorrenti. Boll. Un. Mat. Ital. **14**, 71—78 (1935).

Consider the difference equation

(*) $c_\nu^n + c_{\nu+1} = \lambda$ (n positive odd integer; λ real, given arbitrarily; $\nu = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$),

the solutions of which $\ldots c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2 \ldots$ are uniquely determined, given any one of them, say, $c_0 =$ initial value. (*) leads to two infinite algorithms:

$$c_0, c_1 = \sqrt[n]{\lambda - c_0}, c_{-2} = \sqrt[n]{\lambda - \sqrt[n]{\lambda - c_0}}, \ldots \text{ — radical algorithm I,} \qquad (\alpha)$$

$$c_0, c_1 = \lambda - c_0^n, c_2 = \lambda - (\lambda - c_0)^n, \ldots \text{ — exponential algorithm II.} \qquad (\beta)$$

The present Note gives necessary and sufficient conditions for the convergence of one or both the above algorithms. A leading part in the discussion is played by the equation $x^n + x = \lambda$, whose (only) real root x_0 evidently yields a solution of (*):

$$c_\nu \equiv x_0 \qquad (\nu = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots).$$

By considering the three sequences $\{c_{\nu+1} - c_\nu\}$, $\{c_{\nu+2} - c_\nu\}$, $\{x_0 - c_\nu\}$ it is shown that limits $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$, finite or infinite, exist resp. for the sequences

$$\{c_{-2\mu}\}, \{c_{2\mu}\}, \{c_{-2\mu-1}\}, \{c_{2\mu+1}\} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Each pair $(\alpha_0, \alpha_1), (\beta_0, \beta_1)$, assumed to be finite, is a real solution of the system

$$x^n + y = \lambda, \quad x + y^n = \lambda.$$

This leads to a discussion of the real roots

$$\cdots x_2 < x_1 < x_0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots$$

of the equation

$$f(x) \equiv (x^n - \lambda)^n - x + \lambda = 0,$$

and finally yields the main results. (I) Both algorithms (α, β) converge simultaneously for any λ if and only if $c_0 = x_0$. (II) In case $c_0 \neq x_0$, then: (α) converges only if $|\lambda| > (n+1) : \sqrt[n]{n^{n-1}}$ and $x_1 < c_0 < \xi_1$, (β) converges only if $|\lambda| \leqq (n+1) : \sqrt[n]{n^{n-1}}$ and $x_1 < c_0 < \xi_1$. (III) Either of the said algorithms yields, if convergent, the value x_0. *J. Shohat* (Philadelphia).

Variationsrechnung:

●**Carathéodory, Constantin: Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.** Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1935. XI, 407 S. u. 31 Fig. geb. RM. 22.—.

This book is concerned only with one-dimensional variation problems. As the author explains in the preface, multiple integral problems had to be omitted in order to keep the size and the price of the book within reasonable limits. On the other hand, the twelve pages of hints on the use of literature at the end of the book give a very up-to-date list of references, covering the multiple integral problems also. As indicated by the title, the book stresses the relationships between Calculus of Variations and partial differential equations

of the first order. While Hamilton and Jacobi had already observed these relationships, this aspect of the theory has not been fully developed and appreciated in the modern texts. It is one of the purposes of the book to convince the reader that by conscious and systematic use of the theory of partial differential equations of the first order sufficient gains in simplicity and insight are made to make up for the loss in self-sufficiency. As a result, the presentation is throughout novel, and even the discussion of the standard parts of the theory should make interesting reading for the expert, while, on the other hand, the applications of different mathematical theories to each other are always stimulating for the beginner. In a general way, the book abounds in details of fascinating elegance and intriguing cleverness. As the development of the Calculus of Variations, possibly more than that of any other field in Mathematics, proceeded from the study of important special questions to general considerations, the detailed discussion of many important and interesting special problems in the book should be greatly appreciated by the reader. While, in the face of recent intensive work in Calculus of Variations, the presentation is necessarily incomplete, still the discussion is carried far enough to enable the reader to take up the study of the literature listed at the end of the book. In conclusion, we list the topics considered in the book. The first part (pp. 1 to 163) gives a simple and concise presentation of the theory of partial differential equations of the first order. The second part (pp. 164—388) develops the Calculus of Variations under the following headings. Ordinary maxima and minima. Quadratic forms. The non-parametric problems in the small. The parametric problem. Positive definite problems. Quadratic problems. Theory of the second variation. The boundary value problem and the problem of the absolute minimum. Closed extremals. Periodic problems. The problem of Lagrange.

Tibor Radó (Columbus, Ohio).

Géhéniau, Jules: Généralisation de la formule d'excès de Weierstrass, déduite du théorème d'indépendance de Hilbert-De Donder. (II. comm.) Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **21**, 504—509 (1935).

I. vgl. dies. Zbl. **11**, 258.

Salvadori, M.: Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **21**, 142—144 (1935).

The problem considered is that of minimizing an integral

$$\iint_R f(x, y, z(x, y), z'(x, y))\, dx\, dy,$$

where R is a rectangle, z' denotes $\partial^2 z/\partial x\, \partial y$, and the values of z on the boundary of R are assigned. The Euler and Legendre conditions are exact analogues of those for the ordinary single-integral problem; the Jacobi condition is stated in terms of a boundary-value problem. Sufficient conditions for a weak relative minimum are stated.

E. J. McShane (Princeton).

Miranda, C.: Teoremi di esistenza e di unicità delle superficie di assegnato bordo verificanti un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine e applicazione al problema di minimo per gli integrali doppi in forma parametrica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **21**, 253—260 (1935).

The author seeks conditions under which a given surface of class $C^{(2)}$, defined by equations $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, (u, v) on Γ (Γ a finitely connected region bounded by analytic curves), shall furnish a strong relative minimum for an integral $\iint_\Gamma F(x, y, z, A, B, C)\, du\, dv$, where A, B, C are the Jacobians of (x, y, z) with respect to (u, v). The Euler condition and analogues of the strengthened Legendre and Weierstrass conditions are assumed. However, the existence of a field is not assumed. Instead, a differential equation, called the "equation of variation" of the Euler equation, is constructed; and it is assumed that this equation of variation has a positive-valued solution. It is then possible to show that the given surface can be imbedded in a field of extremals, and the minimizing property follows at once.

E. J. McShane (Princeton).

Morse, Marston, and George B. van Schaack: Abstract critical sets. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **21**, 258—263 (1935).

The theory of critical points is extended to the case of an arbitrary metric space, with the conditions that the function f be continuous, admit a finite minimum, and

that if $f = c$ at any point then the locus $f \leqq c$ be compact. Roughly, a point P is ordinary if the loci $f = \text{const}$ near P fill out a locus homeomorphic with the product of one of them by a line segment. Otherwise it is a critical point. Spannable and critical k-cycles are defined as in Morse's Colloquium Lectures, p. 152, and by means of them type numbers are assigned to the critical sets. Families of excess new k-cycles and newly-bounding k-cycles corr VW and of absolute new k-cycles corr VW are introduced by rather long definitions which we do not repeat, and to each is assigned a count. These lead to the definitions of k-th excess subtype number and k-th absolute subtype number, as well as k-th excess type number and k-th absolute type number. A complete critical set is the set of all points at which f assumes a critical value c. Theorem 2. Let (σ) be an ensemble of complete critical sets with distinct critical values and with finite excess subtype number sums $m_0, m_1, \ldots$. There exists a set $(\sigma') > (\sigma)$ of complete critical sets with distinct critical values and with finite k-th excess subtype number sums $M_k \geqq m_k$ such that

$$(-1)^n[M_0 - M_1 + \cdots + (-1)^n M_n] \geqq 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \quad (2)$$

Theorem 4. Let E_k be the k-th excess type number sum of f. If the numbers $E_0, E_1, \ldots$ are finite they satisfy (2). If the first $r+1$ of them are finite they satisfy the first $r+1$ relations (2). Theorem 5. Let T_k be the k-th type number sum of f and R_k the k-th connectivity of R. If T_k and R_k are finite the numbers $M_k = T_k - R_k$ satisfy (2). The theory is then applied to the case of a function on a regular manifold, in particular a euclidean space. It is assumed to have first partial derivatives satisfying Lipschitz conditions. Call critical points as defined above abstract, and the usual ones ordinary. An abstract critical point is always an ordinary critical point, but not conversely. If σ is a given ordinary critical set, the set of abstract critical points of σ forms an abstract critical set σ' which has the same type numbers as σ. The result obtained is the general theorem of the paper of Morse and van Schaack in Ann. of Math. **35**, 571 (1934). The paper concludes with a discussion of the material from the group theory viewpoint. The results, given in outline, will be published in full later. (See this Zbl. **10**, 28 [Morse and van Schaack].) *A. B. Brown* (New York).

Funktionentheorie:

● **Bieberbach, Ludwig: Lehrbuch der Funktionentheorie. Bd. 1. Elemente der Funktionentheorie. 4., neubearb. Aufl.** Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1934. XIV, 322 S. u. 77 Fig. geb. RM. 17.—.

Gabriel, R. M.: Concerning integrals of moduli of regular functions along convex curves. Proc. London Math. Soc., II. s. **39**, 216—231 (1935).

Es seien K und k konvexe Kurven, wobei k im Innern von K liegt. Dann gilt, wenn $f(z)$ innerhalb von K regulär und $\lambda > 0$ ist,

$$\int_k |f(z)|^\lambda |dz| \leqq A \int_K |f(z)|^\lambda |dz|,$$

wobei A eine absolute Konstante bezeichnet. Dieser von Littlewood vor längerer Zeit vermutete Satz wird in der vorliegenden Arbeit bewiesen. Für A ergibt sich der Wert $\pi(e+1)+e$. (Es wird als bestmöglicher Wert $A = 2$ vermutet.) Verf. benutzt Polygonapproximation und stützt sich auf die Resultate einer früheren Arbeit [Proc. London Math. Soc., II. s. **28**, 121 (1928)]. Er beweist auch einen allgemeineren Satz analoger Art, in der die Konvexität von K nicht gefordert wird. *G. Szegö.*

Cartwright, Mary L.: On analytic functions regular in the unit circle. II. Quart. J. Math., Oxford Ser. **6**, 94—105 (1935).

L'auteur complète ses résultats sur le module des fonctions régulières dans un cercle et dont la partie réelle vérifie une condition de croissance (voir ce Zbl. **8**, 118): Si $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ est fonction holomorphe de $z = re^{i\theta}$ pour $r < 1$,

si $f(0)=0$, si $u_+ = u$ lorsque $u>0$ et $=0$ si $u\leqq 0$, et si l'on pose

$$M_p(r,u)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(r,\theta)|^p\,d\theta\right\}^{1/p},\quad p>0,$$

l'inégalité $M_p(r,u_+)<A(1-r)^{-\alpha}$ (*) où $p\geqq 1$, $\alpha>1$, $r<1$, entraîne $M_p(r,f)<K(\alpha,p)\,A(1-r)^{-\alpha}$ pour $r<1$, $K(\alpha,p)$ ne dépendant que de α et p. La démonstration, qui est assez analogue à celle du mémoire précédent, repose surtout sur des résultats de Hardy et Littlewood (Math. Z. **28**, **34**) et sur une formule de Carleman; elle nécessite une série de propositions intermédiaires intéressantes, par exemple: si $p\geqq 1$, $\alpha>0$ et si (*) est vérifié, $p\geqq 1$, $\alpha>0$, si $q\geqq 1$, on a $M_q(r,f)<K(\alpha,p,q)\,A(1-r)^{-\alpha-1+1/q}$, qui peut être remplacé par des inégalités plus précises si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$. *G. Valiron* (Paris).

Warschawski, Stefan: Zur Randverzerrung bei konformer Abbildung. Compositio Math. **1**, 314—343 (1935).

Let C be a closed Jordan curve in the extended w-plane ($u+iv=w$) which passes through $w=\infty$. If $\lim_{w\to\infty}\arg w$ when w describes C in one direction is $\frac{\pi}{2}$ and in the opposite direction $-\frac{\pi}{2}$, the curve C is said to have the v-axis as tangent in $w=\infty$. Assuming this, let G be the region to the right of C and map it conformally on the half plane $\Re z>0$ by means of the analytic function $w(z)$ so that $z=\infty$ and $w=\infty$ correspond. The chief purpose of the author is to investigate the question: After establishing that $\lim_{z\to\infty}\frac{w(z)}{z}$ exists and is independent of the path of approach and normalizing the mapping function so that $\lim_{z\to\infty}\frac{w(z)}{z}=w'(\infty)=1$, under what conditions will $\lim_{z\to\infty}(w(z)-z)$ exist and be independent of the path of approach? In the formulation of such a condition a new concept is introduced: Let $\delta>0$ and a real. C will be said to satisfy the curvature condition in $w=\infty$ for δ with the measure of curvature a when the following property holds for C: If one draws through any two points w_1 and w_2 of C with $|w_1-w_2|\geqq\delta$ a straight line, then for the intercept ξ of this line on the u-axis $\lim\xi=a$ if w_1 and w_2 both tend to infinity along the same branch of C. The principal result of the paper may be formulated as follows: Let C be a closed Jordan curve through $w=\infty$ with the properties: 1. There exists a parametric representation of C $w=W(t)=U(t)+iV(t)$, $-\infty<t<\infty$, with $\lim_{t\to\infty}(W(t)-it)=0$; 2. If $\varphi(t)=\operatorname{Max}_{\tau\geqq t}|U(\tau)-U(-\tau)|$ for $t>0$, the integral $\int_1^\infty\frac{\varphi(t)}{t}dt$ converges; 3. C satisfies in $w=\infty$ in both directions the curvature condition with the measure of curvature 0 for every $\delta>0$. If $w(z)=u+iv$, $z=x+iy$, maps the region G to the right of C so that $z=\infty$, $w=\infty$ correspond and $w'(\infty)=1$, then $\lim_{z\to\infty}(w(z)-z)$ exists and is independent of the path. Furthermore, if $\psi(y)=\operatorname{Max}_{\eta\geqq y}|u(i\eta)-u(-i\eta)|$, $y>0$, then the integral $\int_1^\infty\frac{\psi(y)}{y}dy$ converges. The author also considers the quotient $\frac{w(z)}{z}$ and investigates conditions under which it is possible to assert the existence and independence of the path of approach of $\lim_{z\to\infty}\frac{w(z)}{z}$.

W. Seidel (Cambridge, Mass.).

Aumann, Georg: Über die Struktur der analytischen Konvexitäten. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. **1935**, 71—80 (H. 1).

Vgl. dies. Zbl. **9**, 173. Das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit besteht in einer neuen Charakterisierung der quasiarithmetischen Mittel: Ein analytisches Mittel M

ist dann und nur dann quasiarithmetisch, wenn jedes im kleinen M-konvexe Kontinuum M-konvex ist. Dabei heißt eine Menge A im kleinen M-konvex, wenn sich um jeden Punkt P von A eine M-konvexe Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt P legen läßt, deren Durchschnitt mit A ebenfalls M-konvex ist. Zum Beweis werden einige auch für sich bemerkenswerte Sätze hergeleitet, die sich auf „entzerrte" Mittel beziehen. Ein analytisches Mittel $M(z_1, \ldots, z_n)$ heißt entzerrt, wenn alle zweiten partiellen Ableitungen an sämtlichen Stellen $z_1 = \cdots = z_n$ des Definitionsgebiets verschwinden. Die entzerrten Kreismittel haben die Eigenschaft, daß jedes M-konvexe Kontinuum im gewöhnlichen Sinne konvex ist. Jedes Kreismittel läßt sich durch konforme Abbildung in ein entzerrtes Mittel überführen. Ist M ein analytisches, Q ein quasiarithmetisches Mittel im selben Gebiet, und ist jedes Q-konvexe Kontinuum zugleich M-konvex, so ist $M = Q$. Als Korrolar dieser Sätze ergibt sich noch: Zu jedem Kreismittel M gibt es ein und nur ein quasiarithmetisches Q_M derart, daß jedes M-konvexe Kontinuum zugleich Q_M-konvex ist. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Dörge, Karl: Zu der von R. v. Mises gegebenen Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. II. Mitt. Allgemeine Wahrscheinlichkeitstheorie. Math. Z. **40**, 161 bis 193 (1935).

Das Ziel des Verf. ist, unter möglichst weitgehender Aufrechterhaltung der v. Miseschen Ansätze die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu axiomatisieren. Die leitende Idee des Verf. ist dabei, daß man nicht das einzelne „Kollektiv", sondern den Bereich aller „Grundkollektive" und die „zulässigen Auswahlen" axiomatisieren muß. Insbesondere kann man damit „unabhängige" Kollektive definieren und die Multiplikationsregel für solche Kollektive beweisen. Um, nach seiner Meinung unwesentliche, Weitläufigkeiten zu vermeiden, beschränkt sich Verf. auf Kollektive mit endlich vielen „Merkmalen". Eine Kenntnis der ersten Mitteilung des Verf., welche dem Spezialfall der Glücksspiele gewidmet ist [Math. Z. **32**, 232—258 (1930)], ist für das Verständnis der Abhandlung nicht erforderlich. *A. Kolmogoroff* (Moskau).

Kuznecov, E.: La loi de probabilité d'un vecteur aléatoire. C. R. Acad. Sci. URSS **2**, 187—190 u. franz. Text 190—193 (1935) [Russisch].

Soit ϱ la valeur absolue d'un vecteur qui dépend du hasard, θ l'angle que ce vecteur fait avec l'axe OX; x, y les composantes du vecteur; σ_x, σ_y les écarts moyens quadratiques de x et de y; r le coefficient de corrélation entre x et y. Posons

$$K = \sigma_x^2 + \sigma_y^2, \quad L = \sigma_x \sigma_y \sqrt{1 - r^2}.$$

Si le vecteur moyen est égal à zéro (valeurs moyennes de x, de y et de ϱ égales à zéro), la probabilité pour que l'extrémité du vecteur soit située dans le quadrangle $(\varrho, \varrho + d\varrho, \theta, \theta + d\theta)$ a pour l'expression

$$\frac{1}{2\pi L} e^{-\frac{\varrho^2}{2L^2}(\sigma_x^2 \sin^2\theta - 2r\sigma_x\sigma_y \sin\theta\cos\theta + \sigma_y^2\cos^2\theta)} \varrho\, d\varrho\, d\theta.$$

Le loi de probabilité de ϱ s'obtient en intégrant cette expression par rapport à θ de 0 à 2π; elle s'exprime au moyen de fonction J_0 de Bessel. L'auteur cite les travaux de A. Wagner, Ch. M. Schols, H. Ertel qui contiennent des formules relatives aux cas particuliers. Il donne aussi les formules pour le cas général où le vecteur moyen n'est pas égal à zéro. — La loi de Maxwell (répartition des vitesses de molécules dans le plan) se présente comme un cas particulier (vecteur moyen égal à zéro, $\sigma_p = \sigma_y$, $r = 0$). *B. Hostinský* (Brno).

Lurquin, C.: Sur la loi générale des écarts fortuits. Mathesis **49**, 170—176 (1935).

Vaulot, Émile: Sur l'application du calcul des probabilités à la théorie du trafic téléphonique. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1815—1818 (1935).

Als wesentliche Voraussetzungen braucht Verf. die Hypothese des statistischen Gleichgewichts und die exponentiale Verteilung der Abfertigungszeit. Die Regellosig-

keit des Erscheinens einzelner Klienten vor den Schaltern ist dagegen nicht vorausgesetzt. Verf. bezeichnet mit $f(t)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im Laufe einer Zeitstrecke $(t, t+\tau)$ kein Erscheinen von neuen Klienten stattfindet. Mit Hilfe dieser Funktion $f(t)$ lassen sich mehrere weitere wichtige Größen einfach ausdrücken, z. B. ist die mittlere Anzahl von Klienten, welche mit Hilfe eines Schalters ohne Warten nicht befriedigt werden können, $\int_0^\infty f''(t)\, e^{-t}\, dt$. Verf. gibt die Lösung analoger Fragen auch im Falle einer beliebigen Anzahl von Schaltern. *A. Kolmogoroff* (Moskau).

Midutani, Kazuo Kimio: Ein neues Summenverfahren zur Berechnung der Momente. Mh. Math. Phys. **42**, 49—56 (1935).

The method for the calculation of moments here exposed is essentially the well-known process of computing factorial moments by repeated summation. The necessary formulae, allowing the use of an arbitrary origin, are given for finding the ordinary moments from these. It is also shown how the method may be adapted to the calculation of product moments. *C. C. Craig* (Ann Arbor, Mich.).

Gumbel, E. J.: Les valeurs extrêmes des distributions statistiques. Ann. Inst. H. Poincaré **5**, 115—158 (1935).

The author generalizes and coordinates numerous results previously secured in special cases through specialized method by the writers to whose work this author makes detailed acknowledgment namely, von Bortkiewicz, L. C. H. Tippett, Tricomi, de Finetti, E. L. Dodd, M. Fréchet and R. A. Fisher. A single major hypothesis made here is that each universe considered has a distribution $w(x)$ of exponential type, meaning thereby that $W(x)$, the probability of a variate being less than x exists and satisfies the following asymptotic conditions, suggested by use of the rule of l'Hopital, $w(x)/[1-W(x)] \sim -w'(x)/w(x)$ for $x \to \infty$, and $w(x)/W(x) \sim w'(x)/w(x)$ for $x \to -\infty$. Of this type in particular are the normal curve and the function, $w(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$. The author considers a random sample of N elements in the universe of $w(x)$, and examines the asymptotic distribution of several variates characterized in the samples, such as, (I) the extreme elements in the sample; (II) for a given m, the element which in order of magnitude is in the m-th place from the last or from the first; (III) the elements which in order of magnitude occupy the places, m-th from the median, etc. Properties of these as functions of m, and relations among these are obtained. Five numerical tables (to 5 significant places) and associated graphical diagrams are presented. Finally the author points out applications, past and prospective, documented by extensive references to actuarial and general biometrical data.
Albert A. Bennett (Providence).

Dieulefait, Carlos E.: Généralisation des courbes de K. Pearson. Metron **12**, Nr 2, 95—104 (1935).

Tschebychew's method of using orthogonal polynomials for interpolation and approximation is applied to Pearson's frequency curves following the precedent of Charlier and of V. Romanovsky, Atti Congr. Int. d. Matematici, Bologna 1928, Vol. 6 (1932), 107—110, and earlier papers. In particular, Types V and VI are treated here, systems of orthogonal functions suitable for these types being exhibited explicitly. The author acknowledges in a subsequently appended footnote the priority of V. Romanovsky in dealing with this topic by a different method.
Albert A. Bennett (Providence).

Zoch, Richmond T.: Some interesting features of frequency curves. Ann. math. Statist. **6**, 1—10 (1935).

In this paper it is demonstrated that in all the bell-shaped members of the Pearson system of frequency curves the two points of inflection are equidistant from the mode. It is also shown that in general for bell-shaped curves arising from solutions of a differential equation of the Pearson type in which the denominator is a poly-