Je me permets de faire remarquer que j'avais déjà considéré l'opérateur $\Lambda = -64N$ [cfr. B. Segre, Rend. Semin. mat. Roma, II. s., II. p. 7, n. 30 (1931); ce Zbl. 3, 213], ce qui paraît être échappé aux aa. du travail en question. Dans le Mémoire cité, j'avais incidemment signalé que $\Lambda[\varphi]:\{L[\varphi]\}^2$ est un covariant absolu de φ par rapport au groupe des transformations homographiques sur les deux variables complexes, ce qui fournit tout de suite l'invariance du signe de $\Lambda[\varphi] = -64N[\varphi]$. *Beniamino Segre* (Bologna).

Geometrie.

Calleri, Piera: Il calcolo geometrico ed i fondamenti della geometria elementare nell'opera di G. Thomsen. Period. Mat., IV. s. **15**, 73—86 (1935).

Kurzer Abriß der Untersuchungen von G. Thomsen, die Geometrie durch einen Gruppenkalkül methodisch zu begründen. (Über die drei diesbezüglichen Arbeiten von Thomsen siehe dies. Zbl. **3**, 408; **7**, 221; **7**, 361.) Insbesondere wird Thomsens Begründung der ebenen Elementargeometrie wiedergegeben. *R. Moufang.*

Heiseler, Artur: Die Würfelverdoppelung, Winkeldreiteilung und Rektifikation des Kreises durch elementare Näherungskonstruktionen. Acta Acad. Åboens. **8**, 11 S. (1935).

Es werden ungemein einfache und dabei sehr genaue Z.-L.-Konstruktionen angegeben, die die im Titel genannten Aufgaben lösen. Insbesondere wird auf die W.-3-Teilung genauer eingegangen und u. a. auch die Kopfsche (dies. Zbl. **8**, 269) etwas vereinfacht. *O. Neugebauer* (Kopenhagen).

Gibbins, N. M.: Hamilton's extension of Feuerbach's theorem. Math. Gaz. **19**, 34 bis 36 (1935).

On the generalization given by Baker (Principles of Geometry **2**, 58—60) of Hamilton's extension of Feuerbach's theorem. *O. Bottema* (Sappemeer).

Baidaff, B. I.: Randbemerkung zur homothetischen Transformation und zur Inversion. An. Soc. Ci. Argent. **118**, 92—97 (1934) [Spanisch].

● **Schilling, Friedrich: Die Pseudosphäre und die nichteuklidische Geometrie. Tl. 1 u. 2.** Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1935. VI, 215 S., 1 Taf. u. 142 Fig. geb. RM. 13.60.

Daß die hyperbolische Geometrie der Ebene auf einer Fläche konstanter negativer Krümmung eine euklidische Deutung findet, ist bekannt genug. Das vorliegende Werk stellt sich aber die Aufgabe, die euklidische Geometrie auf der Pseudosphäre so zu entwickeln, daß sie bis in Einzelheiten hinein als euklidisches Modell der hyperbolischen Geometrie der Ebene gelten kann. Im ersten Teile stehen die geodätischen Linien der Pseudosphäre im Vordergrunde. Eine geeignete Abbildung der halben Pseudosphäre auf einen Ebenenstreifen liefert die Pseudogeraden der hyperbolischen Maßbestimmung als die euklidischen Orthogonalkreise zur reellen Achse. Nunmehr läßt sich die Theorie der hyperbolischen Bewegungen als Ausschnitt aus der Möbiusschen Kreisgeometrie ableiten. Die Struktur der Bewegungsgruppe und ihrer Untergruppen mit ihren charakteristischen geometrischen Eigenschaften tritt deutlich und anschaulich hervor. Ein Gleiches gilt von der Trigonometrie, der Dreiecks- und Kreislehre in der hyperbolischen ebenen Maßbestimmung. Die gewonnenen Resultate finden hinterher ihre euklidische Deutung auf der Pseudosphäre. — Der zweite Teil ist der Untersuchung der geodätischen Kreise der Pseudosphäre gewidmet und dem weiteren Ausbau der geometrischen Beziehungen der Pseudosphäre zur hyberbolischen Geometrie der Ebene. Der geodätische Kreis der Pseudosphäre wird ebenso als Kurve konstanter geodätischer Krümmung wie als Kurve konstanten geodätischen Abstandes von einem Punkte behandelt, und es finden alle drei Arten geodätischer Kreise Berücksichtigung. Die Abwicklung der tangierenden Flächen längs geodätischer Kreise wird eingehend studiert. Sie verwandelt den geodätischen Kreis in einen euklidischen Kreis. Bei dieser Gelegenheit erscheinen manche Theoreme der Flächentheorie scharf veranschaulicht. — Die organische Einordnung der Konstruktionen und Rechnungen unter den geometrischen Grundgedanken und die Menge der geometrischen Gestalten geben dem Werke auch methodisch seine eigene Note. *Haenzel* (Karlsruhe).

Coxeter, H. S. M.: The functions of Schläfli and Lobatschefsky. Quart. J. Math., Oxford Ser. **6**, 13—29 (1935).

Das Volumen des zweifach rechtwinkligen Tetraeders wurde im sphärischen (elliptischen) Raume von Schläfli und im hyperbolischen von Lobatschewsky angegeben. Das Ziel der Arbeit ist, die beiden Resultate aus gemeinsamer Quelle abzuleiten. Zu diesem Zweck betrachtet Verf. die Reihe

$$S(\alpha,\beta,\gamma)=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-X)^n}{n^2}(\cos 2n\alpha-\cos 2n\beta+\cos 2n\gamma-1)-\alpha^2+\beta^2-\gamma^2,$$

wo

$$X=\frac{\sin\alpha\sin\gamma-D}{\sin\alpha\sin\gamma+D}\quad\text{und}\quad D=\sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\gamma-\cos^2\beta},$$

wo

$$0\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2};\qquad 0\leqq\beta\leqq\pi;\qquad 0\leqq\gamma\leqq\frac{\pi}{2}$$

die passend bezeichneten Winkel des Tetraeders sind. $S(\alpha,\beta,\gamma)$ ist im wesentlichen die Schläflische Funktion $f(\alpha,\beta,\gamma)$:

$$S(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\pi^2}{2}f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha,\beta,\frac{\pi}{2}-\gamma\right).$$

Im sphärischen Falle, wo $\cos^2\alpha\cos^2\gamma\geqq\cos^2\beta$, ist demnach $\frac{1}{4}S(\alpha,\beta,\gamma)$ das Volumen des Tetraeders. Durch die Werte von $S\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi^2}{15}$, $S\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi^2}{48}$, $S\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi^2}{144}$ und $S\left(\frac{3\pi}{10},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi^2}{1800}$ erhält man als Korollar die Ordnungen der Gruppen

$$[3,3,3],\ [3,3,4],\ [3,4,3]\ \text{und}\ [3,3,5].$$

Im hyperbolischen Fall, wo $\cos\alpha\cos\gamma<\cos\beta$, muß man $S(\alpha,\beta,\gamma)$ mit dem Lobatschewskischen Integral

$$L(x)=-\int_0^x\log\cos x\,dx$$

in Zusammenhang bringen. Der Weg führt über die Abelsche Funktion $\psi(x)=\sum_1^\infty\frac{x^n}{n^2}$ und liefert

$$iS(\alpha,\beta,\gamma)=L(\delta+\alpha)+L(\delta-\alpha)-L(\delta+\beta)-L(\delta-\beta)+L(\delta+\gamma)+L(\delta-\gamma)-2L(\delta),$$

wo δ durch $X=e^{-2i\delta}$ festgelegt ist. Für das Volumen obigen Tetraeders findet man somit $\frac{i}{4}S(\alpha,\beta,\gamma)$. Zum Schluß werden die Ergebnisse auf die regulären Polyeder im absoluten hyperbolischen Raum angewendet. *J. J. Burckhardt* (Zürich).

Wilson, W. A.: On the imbedding of metric sets in Euclidean space. Amer. J. Math. **57**, 322—326 (1935).

Man sagt (nach Menger, Untersuchungen über allgemeine Metrik. II. Math. Ann. **100**), ein halbmetrischer Raum hat die n-Punkteigenschaft, wenn es zu jedem n-Tupel von Punkten ein kongruentes in einem E_m gibt. Das von Menger, l. c., angegebene Determinantenkriterium für die Gültigkeit der n-Punkteigenschaft läßt sich durch folgendes Winkelkriterium ersetzen: Zu $n+1$-Punkten gibt es im E_n ein kongruentes n-Tupel, wenn niemals für $k+3$ $(1\leqq k\leqq n-2)$ dieser Punkte $a_1,\ldots,a_{k+3}$ die Summe der Winkel mit der „Kante" $a_1\ldots a_k$ und den „Seiten" $a_1\ldots a_k a_r a_s$ $(r,s=k+1,k+2,k+3)$ größer als 2π wird. Dabei sind die Winkel mit Hilfe ihrer Kosinusse und diese mit Hilfe der verschiedenen Kosinussätze sukzessiv zu definieren. *H. Busemann* (Kopenhagen).

Algebraische Geometrie:

Mercogliano, D.: Sul numero delle equazioni quadratiche sufficenti a rappresentare una curva razionale normale C^r. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **21**, 82—84 (1935).

L'a. prouve que le nombre des équations quadratiques suffisantes pour représenter de façon complète une courbe rationnelle normale du S_r $(r\geqq 3)$, est r; la démonstration pourrait être notablement simplifiée. *Beniamino Segre.*

Maroni, Arturo: Sulla struttura e la costruzione delle serie di equivalenza incomplete, sopra una curva algebrica riducibile. Rend. Semin. mat. Univ. Padova **5,** 160 bis 170 (1934).

Etude des séries d'équivalence incomplètes sur une courbe algébrique réductible. Une telle série étant désignée par g_n^r, l'auteur utilise pour les raisonnements une image de la série dans un espace S_r. Il donne notamment des définitions invariantes des groupes exceptionnels de première et deuxième espèce. *P. Dubreil* (Nancy).

Piazzolla-Beloch, Margherita: Sulle proprietà metriche delle curve algebriche piane e in particolare sulla ricerca effettiva degli assi di simmetria. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **21,** 77—81 (1935).

Verf. geht aus von der wohlbekannten Newtonschen Definition des einer gegebenen Richtung konjugierten Durchmessers einer gegebenen ebenen algebraischen Kurve. Sie gibt die Gleichungen der Hauptdurchmesser, welche zu den ihnen konjugierten Richtungen senkrecht sind, und der autokonjugierten Durchmesser, welche zu ihren eigenen Richtungen konjugiert sind. Die letzteren sind die Asymptoten der Kurve in denjenigen ihrer unendlich fernen Punkte, worin die Kurve die unendlich ferne Gerade nicht berührt. Dann findet sie die folgende Erweiterung eines Steinerschen Resultates. Es gibt, wenn $n > 2$ ist, für eine ebene algebraische Kurve n-ter Ordnung $\frac{n(n-3)}{2} + 1$ Paare von konjugierten Durchmessern. Schließlich gibt sie zwei Methoden zur effektiven Bestimmung der eventuellen Symmetrieachsen einer gegebenen ebenen algebraischen Kurve bzw. gerader und ungerader Ordnung. *G. Schaake* (Groningen).

Severi, F.: Un'altra proprietà fondamentale delle serie di equivalenza sopra una superficie. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **21,** 3—5 (1935).

Eine Äquivalenzschar von Punktgruppen auf einer algebr. Fläche F, definiert als Differenz von Summen von „elementaren Scharen", die durch Schnitt von linearen Kurvenscharen entstehen, kann auch erhalten werden durch Schnitt von F mit einer stetigen Schar von effektiven Mannigfaltigkeiten M_{r-2} des Raumes S_r, abgesehen von einer festen Gruppe und einer Schar von Punktgruppen auf einer festen irreduziblen Kurve von F. Der Beweis wird nur angedeutet. *van der Waerden* (Leipzig).

Plamitzer, A.: Fläche 5. Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve. Prace mat.-fiz. **42,** 109—130 u. dtsch. Zusammenfassung 130—132 (1935) [Polnisch].

Sei (W) die Gesamtheit der Tangentialebenen einer allgemeinen Fläche 2. Ordnung. Sei λ eine feste Tangentialebene derselben Fläche. Jeder Ebene W der Gesamtheit (W) ordne man diejenige Ebene W' zu, die die Schnittgerade von W und λ mit einem festen Punkt verbindet. Es entsteht so eine eineindeutige Verwandtschaft zwischen der Gesamtheit (W) und dem Ebenenbündel (W'). Seien (W_1) und (W_2) zwei weitere mit (W') kollinearverwandte Ebenenbündel. Der geometrische Ort der Schnittpunkte entsprechender Ebenen von (W), (W_1) und (W_2) bildet eine Fläche 5. Ordnung Ψ^5 mit einer doppelten kubischen Raumkurve. Auf Grund dieser Erzeugung werden Eigenschaften der Fläche Ψ_5 untersucht. Vgl. die gleichbetitelte Abhandlung des Verf. (Prace mat.-fiz. **38,** 79—128; dies. Zbl. **2,** 149), wo die Fläche Ψ^5 auf Grund einer anderen Erzeugung untersucht wurde. *Čech* (Brno).

Fadini, Angelo: Una proprietà della rigata gobba di quarto grado con cubica nodale. Boll. Un. Mat. Ital. **14,** 92—93 (1935).

Hollcroft, T. R.: The web of quadric hypersurfaces in r dimensions. Bull. Amer. Math. Soc. **41,** 97—103 (1935).

Einige Untersuchungen über ∞^3 Linearsysteme von Quadriken in einem Raume S_r: Jacobische Fläche des Systems und ihre Charaktere; Abbildung der Quadriken des Systems auf die Ebenen eines Raumes S_3, und Charaktere der Fläche, die so jener Jacobischen Fläche entspricht; Berührungen verschiedener Arten zwischen Quadriken des Systems usw. *E. G. Togliatti* (Genova).

Linsman, M.: Sur les points de contact des surfaces d'un système homaloïdal. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **4**, 54—56 (1935).

L'auteur considère un système homaloïdal dont les surfaces ont entre elles en un point simple un contact d'un ordre déterminé r, et la transformation birationnelle obtenue en rapportant projectivement les surfaces de ce système aux plans de l'espace. Comme l'a montré Cremona [Traformazioni razionali nello spazio. Ann. di Matem. **5**, 2 (1871)], au point considéré est associée une surface d'ordre $r+1$. L'auteur montre que cette surface est un cône sur lequel est située une courbe fondamentale dont il détermine la surface fondamentale associée. *P. Dubreil* (Nancy).

Godeaux, Lucien: Sur une surface algébrique qui est, de plusieurs manières, enveloppe de systèmes de surfaces. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **4**, 106—109 (1935).

Man habe eine quadratische ein-eindeutige Verwandtschaft zwischen zwei linearen Flächenbündeln, die bzw. aus Flächen m-ter und n-ter Ordnung bestehen. Die Schnittkurven zugeordneter Flächen bilden eine Kongruenz zweiter Ordnung. Verf. zeigt, daß die Fokalfläche F dieser Kongruenz die Einhüllende ist von verschiedenen Systemen vom Index zwei, welche aus Flächen $(m+n)$-ter Ordnung bestehen. Die Mitteilung enthält auch eine Betrachtung der Berührungskurven von F mit den Flächen der genannten Systeme. *G. Schaake* (Groningen).

Burniat, Pol: Sur les transformations birationnelles de l'espace ayant deux points fondamentaux associés isolés. (III. comm.) Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **21**, 48—65 (1935).

Suite des travaux de même titre [Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **20**, 753—766 et 887—901 (1934); ce Zbl. **10**, 78 et 221]. Etude détaillée des transformations T_3 et T_4. *P. Dubreil* (Nancy).

Stevens, Michel: Sur la structure des points unis des homographies planes cycliques non homologiques. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **4**, 127—132 (1935).

Die ebene zyklische Homographie $x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^3 x_3$, wo ε eine p-te primitive Einheitswurzel ist und $p > 3$ eine Primzahl bedeutet, erzeugt in der Ebene eine Involution I der Ordnung p. Ein geeignetes, mit I zusammengesetztes Linearsystem führt zu einer rationalen Fläche, deren Singularitäten untersucht werden, um die Art des Doppelpunktes (100) der Homographie zu bestimmen. Es werden die beiden Fälle $p = 6n+1$, $p = 6n+5$ unterschieden. *E. G. Togliatti* (Genova).

Lacremans, L.: Sur une transformation birationnelle de l'espace considérée par Caporali. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **21**, 299—306 (1935).

L'auteur reprend et complète l'étude d'une transformation birationnelle introduite par Caporali [Sulla Superficie del quinto ordine dotata di una curva doppia del quinto ordine. Ann. di Matem. **7**, 2 (1875)]. *P. Dubreil* (Nancy).

Differentialgeometrie:

Kanitani, Jôyô: Sur les particularisations du repère attaché à une courbe dans un espace projectifs à n dimensions. Mem. Ryojun Coll. Engrg **8**, 47—66 (1935).

Eine Raumkurve werde statt auf ein gewöhnliches begleitendes Dreikant auf ein begleitendes allgemeines Tetraederkoordinatensystem bezogen, in dem die Kurvengleichungen unhomogen geschrieben werden. In einer früheren Arbeit wurde gezeigt, daß ein solches Koordinatensystem stets so gewählt werden kann, daß die Gleichungen die Gestalt $2x_2 = x_1^2 + a x_1^5 + \cdots$ bzw. $6x_3 = x_1^3 + b x_1^6 + \cdots$ annehmen (dies. Zbl. **7**, 364; durch ein Versehen des Ref. ist hier von schiefwinkligen Koordinaten, statt von Tetraederkoordinaten die Rede). — In der vorliegenden Arbeit wird nun gezeigt, daß man allgemein in n Dimensionen durch passende Koordinatenwahl erreichen kann, daß gewisse Koeffizienten verschwinden, und zwischen einigen anderen gewisse, ziemlich komplizierte Linearkombinationen bestehen, deren Sinn Ref. nicht klargeworden ist. *W. Feller* (Stockholm).

Bachvaloff: Sur un couple de surfaces applicables. Bull. Sci. math., II. s. **59,** 72—84 (1935).

Un couple de surfaces applicables (M_1), (M_2), soit attaché à une surface (M), les points homologues M_1, M_2 invariablement liés avec l'élément de contact du point M de (M). L'auteur examine les surfaces (M) dont la déformation arbitraire transforme à chaque instant (M_1), (M_2) en un autre couple de surfaces applicables. 1° La surface (M) est développable. (M) devenu plan, M_1, M_2 sont situés dans un plan parallèle à (M) symmétriquement par rapport à la normale de (M) à la distance arbitraire constante de M. 2° (M) est applicable sur une surface de révolution. M_1, M_2 sont situés sur la tangente à la parallèle virtuelle à la distance arbitraire constante de M. 3° Le même couple (M_1) (M_2) est attaché à une autre surface (M) applicable sur une surface de révolution qui forme avec la surface (M) de 2° deux nappes de la surface de centres d'une surface W. M_1 et M_2 sont situés sur la normale de (M). Un appendice (de Vincensini) déduit les couples de 2°, 3° de la surface (x, y, z) applicable sur une surface de révolution et de la surface $\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$ qui lui correspond par orthogonalité des éléments linéaires. *S. Finikoff* (Moscou).

Vincensini, P.: Transformation de Ribaucour des surfaces de Guichard. Réseaux cycliques. Nouvel aspect de la transformation d'Eisenhart. C. R. Acad. Sci., Paris **200,** 1266—1268 (1935).

Les surfaces (G), (G_1) de Guichard sont les nappes focales d'une congruence dont les réseaux focaux (G), (G_1) sont formés de lignes de courbure. Une congruence MR harmonique au réseau (G) est cyclique. L'auteur affirme qu'il existe parmi les ∞' réseaux orthogonaux dont les points homologues forment un cercle à l'axe MR et dont les tangentes concourent aux points M et R, un réseau (G') de Guichard autre que le réseau (G) donné. D'où suit la transformation des surfaces de Guichard. Comme les normales de (G) et (G') concourent, les surfaces de centres de courbure de (G), (G') (qui sont les surfaces de Voss à réseau conjugué formé de géodésiques) sont en transformation d'Eisenhart. La congruence MR possède cette propriété que sa transformée de Laplace est une congruence cyclique également. *S. Finikoff* (Moscou).

Rossinski, Serge: Sur la déformation des surfaces avec réseau conjugué persistant. C. R. Acad. Sci., Paris **200,** 1268—1270 (1935).

L'auteur examine la déformation d'une surface S à réseau conjugué persistant au cours de laquelle S conserve la propriété d'être l'enveloppée moyenne d'une congruence C, invariablement liée à S. La surface S donnée, il existe ∞ congruences C associées. Inversement, les formules d'auteur montrent que la déformation continue de S douée de la propriété citée est une déformation à réseau conjugué persistant à moins que S ne soit applicable sur une surface spirale dont la déformation arbitraire repond à la condition posée. *S. Finikoff* (Moscou).

X ● **Schouten, J. A., und D. J. Struik: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie. Bd. 1. Schouten, J. A.: Algebra und Übertragungslehre. 2. vollst. umgearb. Aufl.** Groningen u. Batavia: P. Noordhoff N. V. 1935. XII, 203 S. fl. 6.—.

Mit der ersten Auflage hat dieses Buch wohl nur den Namen gemeinsam. Im ersten (algebraischen) Teil sind folgende Betrachtungen zu erwähnen, die bisher in den — dem Ref. zugänglichen — Lehrbüchern noch nicht konsequent eingeführt wurden: Die Behandlung der „gemischten" Komponenten (d. i. Komponenten, die auf verschiedene Koordinatensysteme bezogen werden) und die unitäre algebraische Geometrie des Tensorkalküls. Außerdem haben die Autoren diese Gelegenheit benützt, um verschiedene Probleme der algebraischen Geometrie (z. B. die Elementarteilertheorie usw.) von einem einheitlichen Punkt aus darzulegen. Es ist noch zu erwähnen, daß die Einführung der gemischten Komponenten nicht nur formal sehr praktisch ist, sondern auch prinzipiell wichtig, da sie einen tieferen Einblick in die Definition der Größen (und die damit zusammenhängenden Möglichkeiten der Unterscheidung der Größen, wie z. B. des Einheitsaffinors und des Kroneckerschen δ) bietet. — Im zweiten Teile (Übertragungslehre) werden (nach Wissen des Ref.) zum ersten Male in einem Lehrbuch (das dem Tensorkalkül ausschließlich gewidmet wurde) folgende Begriffe behandelt: Die weittragende D-Symbolik, die sich insbesondere im Bd. 2 fast als unentbehrlich bei der Behandlung der Einbettungsprobleme erweisen wird (und die als eine Konsequenz der Existenz der gemischten Komponenten sich darstellt), die Deformationsprobleme, die unitäre Übertragungslehre usw. Besonders ist hervorzuheben, daß es dem Autor (durch die einheitliche Arbeitsmethode mit den holonomen oder anholonomen Koordinaten) gelungen ist, den Übergang vom Tensorkalkül zu der fruchtbaren Cartanschen Symbolik wesentlich zu erleichtern. — Mit Ausnahme von den Arbeiten in der Richtung von Vitali, Berwald-Finsler (und der neuen japanischen Schule) werden hier alle wichtigen neuen Probleme mehr oder weniger behandelt, z. B. der Cartansche Satz über die Erhaltung der Krümmung und Torsion, die grundlegende Arbeit von Schlesinger über die Parallelverschiebung und Krümmung, die Schouten-Hlavatýsche Behandlung der Pseudogrößen, die (amerikanischen) Normalkoordinaten und ihre Verallgemeinerung, sowie auch zahlreiche Probleme, deren Lösung die Autoren schon früher in einer Reihe von Arbeiten gebracht haben. — Jedem Fachmann wird das Buch als unentbehrliches Nachschlagebuch dienen können, während der Anfänger hier neben vielen (gelösten) Aufgaben zahlreiche Anregungen findet. — Aufzählung der Abschnitte: Koordinatensysteme und Gruppen. Die algebraische Geometrie der E_n. Affinoren der Valenz Zwei in E_n. Die algebraische Geometrie der R_n. Die algebraische Geometrie der U_n. Bezugssysteme. Die linearen Übertragungen. Die Übertragung, ausgedrückt in $a_{\lambda\mu}$, $\nabla_\mu a^{\lambda\nu}$ und $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$. Die D-Symbolik von van der Waerden-Bortolotti. Geodätische Gebilde. Krümmung. Variation und Deformation. *Hlavatý* (Praha).

Manarini, M.: Interpretazione vettoriale assoluta dei tensori lineari del terzo ordine e applicazione al compo elettromagnetico stazionario. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **21**, 173—178 (1935).

Für $\nabla_{(\mu} v_{\lambda\nu)}$ (v beliebig) wird in der direkten italienischen Symbolik ein neues Symbol eingeführt. *Hlavatý* (Praha).

Manarini, M.: Interpretazione vettoriale assoluta dei tensori lineari del terzo ordine e applicazione al campo elettromagnetico stazionario. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **21**, 277—283 (1935).

(Vgl. I. vorsteh. Referat.) Für $v_{\lambda\mu} = \nabla_{[\mu} u_{\lambda]}$ ist $\nabla_{(\omega} v_{\mu\lambda)} = 0$. Diese Formel ermöglicht dem Verf., das elektromagnetische Feld mittels der direkten italienischen Symbolik zu behandeln. *Hlavatý* (Praha).

Perepelkin, D.: Sur les variétés parallèles dans un espace Euclidien (ou Riemannien). X
C. R. Acad. Sci. URSS **1**, 593—598 u. franz. Text 596—598 (1935) [Russisch].

Die parallelen V_m in R_n werden hier gerade so definiert, wie in dem gewöhnlichen Falle einer V_2 in R_3. Eine leichte Überlegung zeigt, daß zu einer V_m dann und nur dann eine Parallele konstruiert werden kann, wenn die Integrabilitätsbedingungen der parallelen Übertragung der zu V_m orthogonalen Vektoren erfüllt sind. Ganz ähnlich verhält sich das Problem in V_n (statt in R_n), wenn man sich auf unendlich benachbarte (parallele) V_m beschränkt. *Hlavatý* (Praha).

Veblen, Oswald: Formalism for conformal geometry. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **21**, 168—173 (1935).

Der Verf. zeigt, daß man konforme Geometrie in einer n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit treiben kann, indem man ein Bezugssystem von $n+2$ Variablen mit gegebener Koordinaten- und Eichungstransformation einführt. In diesem System werden konforme Tensoren als geometrische Objekte definiert, wodurch es möglich wird, die konformen Übertragungsparameter, die konforme Differentiation und die konforme Ableitung einzuführen. Man kann eine solche Symbolik auch geometrisch deuten, indem der kontravariante konforme Vektor mit $n+2$ Bestimmungszahlen als Punkt in einem projektiven $n+1$-dimensionalen Raume gedeutet wird. Dadurch treten die Beziehungen zu der durch den Verf. schon früher entwickelten projektiven Differentialgeometrie klar zutage. *Struik* (Cambridge, Mass.).

Hlavatý, V.: Zur Konformgeometrie. I. Eichinvariante Konnexion. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **38**, 281—286 (1935).

In dieser Arbeit werden die verschiedenen Wege, die man in der konformen Geometrie einschlagen kann, angegeben. 1. Im reellen definiten Falle kann man einen

Skalar (für $n > 3: C_{\nu\mu\lambda\varkappa}C^{\nu\mu\lambda\varkappa}$, wenn $C_{\nu\mu\lambda\varkappa}$ der Konformkrümmungsaffinor ist) finden, der benutzt werden kann, den bis auf einen beliebigen multiplikativen Faktor gegebenen Fundamentaltensor $g_{\lambda\varkappa}$ zu normieren. Die Christoffelschen Symbole in bezug auf diesen normierten Tensor bestimmen eine Konnexion. Diese Methode kann nur angewandt werden, wenn $C_{\nu\mu\lambda\varkappa}$ nicht verschwindet. 2. Aus $g_{\lambda\varkappa}$ bildet man eine Tensordichte vom Gewicht $-\frac{2}{n}$, die sich nicht ändert, wenn $g_{\lambda\varkappa}$ einen Faktor bekommt. Die Christoffelsymbole in bezug auf diese Dichte sind die Thomasschen Koeffizienten [Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **12**, 352—359 (1926)]. Sie bilden im allgemeinen keine Konnexion. 3. $g_{\lambda\varkappa}$ wird als Pseudotensor der Klasse 1 aufgefaßt (vgl. Schouten-Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie. S. 87). Es wird nun verlangt, daß die kovariante Ableitung dieses Pseudotensors verschwindet. Dadurch ist die Konnexion aber noch nicht festgelegt.

Haantjes (Delft).

Levine, J.: Conformal-affine connections. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **21**, 165 bis 167 (1935).

Aus der Transformationsweise der Thomasschen Koeffizienten K^c_{ab} [T. Y. Thomas, „On conformal geometry", Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **1926**, 352—359, und auch „Differential Invariants of generalized Spaces", Cambridge Univ. Press. (1934); dies. Zbl. **9**, 85] erhellt sofort, daß man mit Hilfe einer konforminvarianten Skalardichte eine konforminvariante Konnexion aufbauen kann, ausgehend von K^c_{ab}. Eine solche Dichte läßt sich im Falle eines nicht konform-euklidischen Raumes (für $n > 3$) mittels der Weylschen Konformkrümmungsgröße ausfindig machen (während für $n = 3$ man zur Konstruktion den bekannten konforminvarianten Tensor dritter Stufe benützen kann). Der Reduktionssatz angewandt auf die oben erwähnte konforminvariante Konnexion liefert dann das komplette System der Konforminvarianten. — Bem. des Ref.: Um zu einer konforminvarianten Konnexion zu gelangen, braucht man nicht notwendig von einer Skalardichte auszugehen. Man gelangt leicht zu einer konforminvarianten Riemannschen Konnexion, die sich in bezug auf den Fundamentaltensor als eine Abart der Weylschen Konnexion benimmt. Vgl. dazu die Arbeit des Ref. „Zur Konformgeometrie. I. Eichinvariante Konnexion". (Vorsteh. Referat.)

Hlavatý (Praha).

Craig, H. V.: On a generalized tangent vector. Amer. J. Math. **57**, 457—462 (1935).

Für $F = F\left(x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^m x}{dt^m}\right)$ und $m = 2$ hat der Verf. schon früher bewiesen, daß

$$T_\mu = \sum_1^m (-1)^{u-1}\, u\, \frac{d^{u-1}}{dt^{u-1}} \frac{\partial F}{\partial \frac{d^u x^\mu}{dt^u}},$$

$$E_\mu = \sum_0^m (-1)^{u+1} \frac{d^u}{dt^u} \frac{\partial F}{\partial \frac{d^u x^\mu}{dt^u}}$$

Vektoren sind (dies. Zbl. **1**, 167). (Bekanntlich ist E der Eulersche Vektor, der dem Problem $\int_{t_1}^{t_2} F\,dt$ adjungiert ist.) In dieser Arbeit wird der Beweis für m beliebig mittels Induktion erbracht. Es zeigt sich, daß die notwendige Bedingung für die Invarianz von F in bezug auf die Parametertransformation sich in der Form $T_\mu \frac{dx^\mu}{dt} = F$ schreiben läßt. Der Anschluß an die ursprüngliche Berwald-Taylor-Syngesche Theorie sowie auch an die Kawaguchischen Arbeiten (dies. Zbl. **8**, 33; **2**, 158; **5**, 414; **6**, 32) wird gegeben.

Hlavatý (Praha).

Topologie:

Ostrowski, Alexander: Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente. I. Über eine topologische Verschärfung des Rolleschen Satzes. Compositio Math. 2, 26—49 (1935).

Ist zwischen zwei Punkten A, B ein einfacher Kurvenbogen b mit stetiger Tangente gezogen, so wird unter der Tangentenrichtungsfunktion diejenige stetige Funktion $\theta(P)$ verstanden, die den Winkel angibt, den die Tangente in P mit einer festen Nullrichtung bildet. Die Bedingung der Stetigkeit von $\theta(P)$ zieht nach sich, daß man die Funktion θ im allgemeinen nicht auf ein Intervall der Länge 2π beschränken kann, daß vielmehr die Funktionswerte θ, die zu parallelen Tangenten gehören, sich im allgemeinen um ein Vielfaches von 2π unterscheiden werden. Die Funktion $\theta(P)$ ist vollkommen bestimmt, wenn man für eine einzige Tangente den Wert θ willkürlich vorgibt, z. B. kann man $\theta(A) = 0$ vorschreiben. Betrachtet man an Stelle der Tangenten alle möglichen Sehnen $\overrightarrow{QP}$ von b, so läßt sich auf analoge Weise eine stetige Sehnenrichtungsfunktion $\theta(Q, P)$ definieren. Es wird dann der folgende „Sehnenrichtungssatz" bewiesen, der offenbar eine Verallgemeinerung des Rolleschen Satzes darstellt: Der Wertevorrat der Sehnenrichtungsfunktion $\theta(Q, P)$ ist in dem Wertevorrat der Tangentenrichtungsfunktion $\theta(P)$ enthalten. Zugleich wird dieser Satz auf Kurven mit Ecken und Spitzen erweitert. Der Beweis beruht auf dem zuerst von G. N. Watson [Proc. London Math. Soc. (2) **15**, 227—242 (1916)] bewiesenen „Umlaufsatz": Der Tangentenrichtungszuwachs beim Umlaufen einer einfachen geschlossenen Kurve ist gleich $\pm 2\pi$ (und nicht ein Vielfaches von 2π). *H. Seifert* (Dresden).

Hopf, Heinz: Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven. Compositio Math. 2, 50—62 (1935).

Es werden für den Umlaufsatz und den Sehnenrichtungssatz (vgl. vorst. Ref.) sehr einfache Beweise angegeben, die ohne Approximation der Kurven durch Polygone auskommen. Der Umlaufsatz ergibt sich z. B., wenn man neben der Tangentenrichtungsfunktion $\theta(P)$ die zugehörige Sehnenrichtungsfunktion $\theta(Q, P)$ betrachtet. Die gesuchte Winkeländerung ist dann $\theta(B,B) - \theta(A,A) = \theta(B,B) - \theta(A,B) + \theta(A,B) - \theta(A,A)$. $\theta(A,B) - \theta(A,A)$ ist die Änderung der Sehnenrichtung, wenn man den Anfangspunkt A der Sehne fest läßt und den Endpunkt die geschlossene Kurve durchlaufen läßt. Analog ist $\theta(B,B) - \theta(A,B)$ die Änderung der Sehnenrichtung bei festem Endpunkt und beweglichem Anfangspunkt. Da beide Änderungen $=\pi$ sind, ergibt sich 2π als Gesamtänderung der Tangentenrichtung. *H. Seifert* (Dresden).

Charpentier, Marie: Sur des courbes fermées analogues aux courbes de M. Birkhoff. J. Math. pures appl., IX. s. **14**, 1—48 (1935).

Beispiel einer geschlossenen Kurve C = gemeinsamer Grenze von zwei ebenen Gebieten, die 1. unzerlegbar ist, 2. invariant gegenüber einer topologischen Abbildung ist, die die von außen und von innen erreichbaren Punkte der Kurve in zwei verschiedenen Richtungen transformiert, 3. jeder zu C äußere (bzw. innere) Punkt ist erreichbar aus ∞ (bzw. aus dem Nullpunkt) durch einen einfachen differenzierbaren Bogen, dessen Tangente in einem beliebigen Punkte P mit dem Radiusvektor $\overrightarrow{PO}$ (bzw. $\overrightarrow{OP}$) einen positiven (in einem gewissen Sinne definierten) Winkel bildet. Der erste Teil der Arbeit enthält die Konstruktion der Kurve, der zweite ist dem Existenzbeweise der betreffenden Abbildung gewidmet. Die Kurve C besitzt einen Teil der Eigenschaften von Kurven, die von Birkhoff [Bull. Soc. Math. France **60**, 1—26 (1932); dies. Zbl. **5**, 220] betrachtet sind. *J. Rôżańska* (Moskau).

Burau, Werner: Über Verkettungsgruppen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **11**, 171—178 (1935).

Ist eine Gruppe $\mathfrak{G}$ mit einer invarianten Untergruppe $\mathfrak{J}$ gegeben, deren Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{J}$ eine freie Abelsche Gruppe ist, so kann man auf zwei Weisen kommutative

Gruppen mit Operatoren erklären, die in charakteristischer Weise mit $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{J}$ zusammenhängen. Das eine Mal macht man die Elemente von $\mathfrak{J}$ vertauschbar und nimmt als Operatoren der so entstandenen kommutativen Gruppe $\mathfrak{J}'$ die Automorphismen, welche durch innere Automorphismen von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{J}'$ induziert werden. Das zweite Mal sei $\mathfrak{F}$ eine zu $\mathfrak{G}/\mathfrak{J}$ einstufig isomorphe Gruppe und $\mathsf{A}(G) = F$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{F}$, welcher $\mathfrak{J}$ auf die Identität abbildet. Wir bilden das freie Produkt $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ und hierin die invariante Untergruppe der Elemente $G \cdot \mathsf{A}(G^{-1})$; dieselbe werde vertauschbar gemacht und dieser kommutativen Gruppe $\mathfrak{J}''$ die Operatoren aufgeprägt, die durch innere Automorphismen von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{J}''$ induziert werden. Sind nun $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$ die L-Polynommatrizen, welche bzw. die definierenden Relationen von $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{J}''$ liefern, so sind die Elementarteiler von $\mathfrak{M}'$ und von $\mathfrak{M}''$ dieselben.

Reidemeister (Marburg, Lahn).

Burau, Werner: Über Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **11**, 179—186 (1935).

Es wird der von Bankwitz vermutete Satz bewiesen, der besagt, daß das L-Polynom eines Knotens, der sich als gleichsinnig verdrillter Zopf aus n Fäden mit m Überkreuzungen legen läßt, den Grad $m - n + 1$ besitzt. Es gibt danach nur endlich viele solche Knoten, wenn der Grad des L-Polynoms gegeben ist. Der Beweis des Satzes erfolgt mittels Darstellung der Zopfgruppe durch Matrizen aus L-Polynomen in einer Veränderlichen. Wie sich die Knotengruppe eines geschlossenen Zopfes aus dem zugehörigen Wort der Zopfgruppe, so läßt sich das L-Polynom des Knotens aus der zugehörigen L-Polynom-Matrix der Darstellung ermitteln. Die besonderen Eigenschaften der Matrizen der gleichsinnig verdrillten Zöpfe ergeben sich durch Induktion, wobei es wichtig ist, daß diese Eigenschaften auch für Zöpfe formuliert werden, die zu Verkettungen gehören. *Reidemeister* (Marburg, Lahn).

Seifert, H.: Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **11**, 84—101 (1935).

In jedem Knoten läßt sich eine singularitätenfreie orientierbare Fläche $\mathfrak{F}$ vom Geschlecht h einspannen, deren Rand der Knoten ist; $\mathfrak{F}$ läßt sich als ein Elementarflächenstück mit $2h$ Bändern auffassen; unter Γ werde die $2h$-reihige Matrix der Überkreuzungszahlen dieser Bänder verstanden. Aus Γ lassen sich sowohl die Homologiegruppen (dies. Zbl. **10**, 133) wie die Verschlingungsinvarianten (dies. Zbl. **8**, 181) der endlichen zyklischen Überlagerungsräume des Knotens bestimmen. Verstehen wir unter E die $2h$-reihige Einheitsmatrix und unter Δ die schiefsymmetrische $2h$-reihige Matrix mit $\delta_{2i,2i-1} = -\delta_{2i-1,2i} = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$ sonst $\delta_{ik} = 0$, so ist — nach geeigneter Wahl der Erzeugenden — die Matrix für die Relationen der Homologiegruppe der g-fachen zyklischen Überlagerung $\Gamma^g - (\Gamma - \mathsf{E})^g$ und die Matrix der Schnittzahlen — aus denen sich die Verschlingungszahlen durch lineare Rechnung ergeben — ist $(\Gamma - \mathsf{E})^g \Delta$. — Zur Behandlung der zweifachen Überlagerung braucht $\mathfrak{F}$ nicht als orientierbar vorausgesetzt zu werden. Es ergibt sich daher hier im Zusammenhang mit der quadratischen Form eines Knotens, welche ja mit Hilfe eines ein- oder zweiseitigen Bandes erklärt wird. Und zwar ist — bei geeigneter Wahl der Erzeugenden — die Matrix der Verschlingungszahlen gleich $\pm\mathsf{N}^{-1}$, wenn N die Matrix der quadratischen Form ist. Trotzdem sind die genauen Beziehungen zwischen den Verschlingungsinvarianten und den Minkowski-Einheiten der quadratischen Form nicht bekannt. Jedenfalls sind aber die ersteren nicht durch die letzteren bestimmt: der Knoten 6_1 der Tabelle von Alexander und Briggs läßt sich von seinem Spiegelbilde durch eine Verschlingungsinvariante des zweifachen Überlagerungsraumes unterscheiden, obgleich er in den Minkowski-Einheiten mit ihm übereinstimmt. *Reidemeister* (Marburg, Lahn).

Whitehead, J. H. C.: Three-dimensional manifolds (Corrigendum). Quart. J. Math., Oxford Ser. **6**, 80 (1935).

Berichtigung der Arbeit Quart. J. Math., Oxford Ser. **5**, 308—320 (1934); dies. Zbl. **10**, 275. *H. Seifert* (Dresden).

Richardson, Moses: On the homology characters of symmetric products. Duke math. J. **1**, 50—69 (1935).

In einem simplizialen Komplex K wird eine endliche Gruppe von topologischen Selbstabbildungen betrachtet. Durch Identifizieren aller hinsichtlich der Gruppe äquivalenten Punkte von K ergibt sich der Diskontinuitätsbereich k. Weiß man nun, wie sich bei den einzelnen Transformationen der Gruppe die Zyklen einer Homologiebasis in K substituieren, so lassen sich hieraus die Bettischen Zahlen von k berechnen, und zwar geschieht dies für den ganzzahligen Koeffizientenbereich sowie für den Bereich der ganzen Zahlen mod π^n, wo π eine Primzahl ist, die nicht in der Ordnung der Gruppe enthalten ist. Diese Ergebnisse werden auf die q-fach symmetrischen Produkte angewendet. Das q-fach symmetrische Produkt eines Komplexes A besteht aus der Gesamtheit der Systeme von je q (nicht geordneten) Punkten von A, entsteht also aus dem topologischen Produkt von q Exemplaren von A dadurch, daß man darauf die symmetrische Gruppe der Ordnung $q!$ von topologischen Selbstabbildungen ausübt und äquivalente Punkte identifiziert. Es wird ein Verfahren angegeben, das die Bettischen Zahlen des q-fach symmetrischen Produktes von A zu berechnen gestattet. Insbesondere werden für die Fälle $q = 2$ und 3 die Bettischen Zahlen des symmetrischen Produktes explizit durch diejenigen von A ausgedrückt. Für die 2fach symmetrischen Produkte wurden die Bettischen Zahlen mod 2 bereits von P. A. Smith (vgl. dies. Zbl. **7**, 82) gefunden. *H. Seifert* (Dresden).

Čech, Eduard: Les théorèmes de dualité en topologie. Čas. mat. fys. **64**, 17—25 (1935).

Ein Bericht über die wichtigsten Resultate auf dem Gebiete der topologischen Dualitätssätze. Dem Bericht geht eine kurze Einleitung voran, in welcher der Verf. seinen Standpunkt die mengentheoretischen und die kombinatorischen Methoden in der Topologie betreffend auseinandersetzt. *P. Alexandroff* (Moskau).

Kempisty, Stefan: Sur des opérations de la topologie générale. Mathematica, Cluj **10**, 137—156 (1935).

A study of properties of various operations, themselves unspecified except through prescribed properties — these operations upon subsets A of a fundamental set E. This study anticipates a variety of different topological theories. Φ is an operation in E if it uniquely associates with every subset A of E a subset $\Phi(A)$ of E. Φ and Ψ are conjugate if $\Phi(E - A) + \Psi(A) = E$ and $\Phi(E - A) \cdot \Psi(A) = 0$. A is open of type Φ if $A \subset \Phi(A)$, closed of type Φ if $\Psi(A) \subset A$. With the aid of these notions, connectivity of type Φ and continuity of type Φ_1/Φ_2 are defined. This generalization of continuity comprises approximate continuity of different kinds. A continuous image of type Φ_1/Φ_2 of a connected set of type Φ_1 is a connected set of type Φ_2. Φ is non-decreasing if for every $A \subset B$ we have $\Phi(A) \subset \Phi(B)$; similarly for non-increasing. Definitions of semi-additivity; semi-continuity of type Φ; kernel, envelope relative to Φ; completed, reduced operations. Generalization, in relation to Φ, of dense everywhere and nowhere dense. Φ is inferior if $\Phi(A) \subset A$; similarly for superior; recurrent if $\Phi\Phi(A) = \Phi(A)$; additive if $\Phi(A) + \Phi(B) = \Phi(A + B)$; multiplicative if $\Phi(A) \cdot \Phi(B) = \Phi(AB)$. Generalization of Hahn's Einschiebungssatz, of Sierpiński's rings. Relativization. *Blumberg* (Columbus).

Kaufmann, B., and H. D. Ursell: A note on reducible and irreducible dissections. Quart. J. Math., Oxford Ser. **6**, 69—73 (1935).

Es existieren absolute Gebietsgrenzen F (d. h. Kontinua, welche den R^n in zwei und nur zwei Gebiete zerlegen und die gemeinsame Begrenzung dieser Gebiete bilden) mit der folgenden Eigenschaft: F enthält keinen Teil, welcher eine (durch F zerlegte) Vollkugel irreduzibel zerlegt (insbesondere enthält also F keine absolute Gebietsgrenze in bezug auf eine gegebene Vollkugel). Die Verff. konstruieren hierfür ein Beispiel sogar für $n = 2$. *P. Alexandroff* (Moskau).