Rademacher, Hans: Primzahlen reell-quadratischer Zahlkörper in Winkelräumen. Math. Ann. **111**, 209—228 (1935).

E. Hecke [Math. Z. **6**, 38, Formel (52) (1920)] hat folgendes bewiesen: Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal eines reell-quadratischen Zahlkörpers, $\eta_{\mathfrak{a}} > 1$ die totalpositive Grundeinheit mod $\mathfrak{a}$, μ, μ' konjugierte Körperzahlen, $w_{\mathfrak{a}}(\mu) = \log|\mu:\mu'|:2\log\eta_{\mathfrak{a}}$, ϱ eine feste ganze Körperzahl, $\pi_{\mathfrak{a}}(x;v)$ die Anzahl der mod $\mathfrak{a}$ nicht-assoziierten Primzahlen ω, die den Bedingungen

$$\omega > 0, \quad \omega \equiv \varrho (\mathrm{mod}\,\mathfrak{a}), \quad N(\omega) \leqq x, \quad w(\omega) - [w(\omega)] < v \leqq 1$$

genügen, so gilt:

$$\pi_{\mathfrak{a}}(x,v) \sim \frac{v}{h_0(\mathfrak{a})} \cdot \frac{x}{\log x},$$

wo $h_0(\mathfrak{a})$ die Anzahl der Idealklassen mod $\mathfrak{a}$ im engsten Sinne ist. — Der Verf. gibt eine Abschätzung des Restgliedes, indem er die Formel

$$\left|\pi_{\mathfrak{a}}(x;v) - \frac{v}{h_0(\mathfrak{a})}\,\mathrm{Li}\,x\right| \leqq Cxe^{-c\sqrt{\log x}}$$

gewinnt, wobei die Konstanten C, c nur vom Körper und von $\mathfrak{a}$ abhängen. — Dieses Ergebnis erhält der Verf. mit Hilfe der Abschätzung von $\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi\lambda^m)$ innerhalb eines Streifens, der für $\zeta(s,\chi\lambda^m) = \sum\limits_{(\hat{\mu})} \frac{\chi\lambda^m(\hat{\mu})}{|N(\hat{\mu})|^s}$ nullstellenfrei ist, wobei $\lambda^m(\hat{\mu})$, $\chi(\hat{\mu})$ gewisse Charaktere sind, die für sämtliche Einheiten ε der Gleichung $\chi(\varepsilon)\lambda^m(\varepsilon) = 1$ genügen. — In § 2 wird eine interessante Abschätzung von Summen von Charakteren über Primzahlen angegeben. *N. Tschebotaröw* (Kasan).

Gruppentheorie.

Garver, Raymond: A definition of group by means of three postulates. Amer. J. Math. **57**, 276—280 (1935).

Die drei Postulate sind: 1. Wenn $a, b, c, ab, bc, (ab)c$ und $a(bc)$ Elemente von G sind, so ist $(ab)c = a(bc)$. 2. Wenn a und b Elemente von G sind, so existiert ein x mit $ax = b$. 3. Es gibt ein Element e in G, so daß $ae = a$ für alle a von G. Aus den Postulaten wird zunächst gefolgert, daß e auch Linkseinheit ist [man bestimmt c aus $ec = a$ und d aus $ed = c$ und schließt $c = ed = (ee)d = e(ed) = ec = a$], sodann wird aus 2. die Existenz des Rechtsinversen a' mit $aa' = e$ gefolgert und in bekannter Weise $a'a = e$ bewiesen; schließlich wird bewiesen, daß ab in G liegt [man bestimmt f aus $a'f = b$ und g aus $ag = f$ und schließt $g = eg = (a'a)g = a'(ag) = a'f = b$, also $ab = ag = f$]., Die eindeutige Bestimmtheit von ab durch a und b wird stillschweigend vorausgesetzt. *van der Waerden* (Leipzig).

Mann, H.: Ein Satz über Normalteiler. Anz. Akad. Wiss. Wien **1935**, 49—50 (Nr 6).

Unter Verschärfung eines Satzes von G. Frobenius (S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1895**, 170) wird bewiesen, daß ein Normalteiler $\mathfrak{N}$ vom Index s in einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ jede endliche Untergruppe von $\mathfrak{G}$ enthält, deren Ordnung zu s teilerfremd ist. Der Satz von Frobenius und die Nichtauflösbarkeit der alternierenden Gruppen $\mathfrak{A}_n$ für $n \geqq 5$ sind einfache Folgerungen hieraus. *Magnus* (Princeton).

Turkin, W. K.: Ein neues Kriterium der Einfachheit einer endlichen Gruppe. Math. Ann. **111**, 281—284 (1935).

Unter Verschärfung eines Satzes von G. Frobenius und I. Schur (S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1901**, 1216; **1902**, 1013) wird gezeigt: Ist Γ Untergruppe der Ordnung g in der Gruppe B mit der Ordnung gm, wobei m und g teilerfremd sind, und existiert in Γ ein Element A, das nicht in der Kommutatorgruppe P von Γ enthalten ist, derart, daß A schon in Γ mit jedem Element von Γ konjugiert ist, mit dem es in ganz B konjugiert ist, so hat B einen (echten) Normalteiler, dessen Ordnung durch m teilbar ist. Ist insbesondere $g = p^\alpha$ eine Primzahlpotenz und ist in B die Sylowgruppe Γ der Ordnung p^α abelsch und enthält Γ ein Element A, das im Zentrum des Normalisators von Γ enthalten ist, so enthält B einen Normalteiler, dessen Ordnung durch m teilbar ist. Hierin ist ein Satz von W. Burnside (Theory of groups of finite order, S. 327. Cambridge 1911) als Spezialfall enthalten. *Magnus* (Princeton).

Sinkov, Abraham: A property of cyclic substitutions of even degree. Amer. Math. Monthly **42**, 145—149 (1935).

Ist s eine zyklische Permutation der Symbole $a_1, a_2, \ldots, a_n$, so werde das Intervall zwischen a_i und a_j definiert als die (mod n genommene) Potenz von s, in der a_i dem a_j unmittelbar vorangeht. Es wird nun gezeigt: Sind s und t zwei zyklische Permutationen von $a_1, a_2, \ldots, a_n$, so gibt es mindestens ein Paar unter diesen Symbolen, die in beiden Permutationen durch dasselbe Intervall getrennt sind, falls $n = 2m$ eine gerade Zahl ist. Ist weiter p eine zu $2m$ teilerfremde Zahl, so gibt es stets ein x mit $0 < x < 2m$, so daß $s^x t^{-px}$ einen Grad $< 2m$ besitzt. Ist irgendein solches x prim zu $2m$, und erzeugen s und t eine nicht zyklische Gruppe G so enthält G eine invariante Untergruppe, die von $2m$ konjugierten Permutationen eines Grades $< 2m$ erzeugt wird.

Magnus (Princeton).

Sinkov, Abraham: A set of defining relations for the simple group of order 1092. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 237—240 (1935).

Hopkins, Charles: Metabelian groups of order p^m, $p > 2$. Trans. Amer. Math. Soc. **37**, 161—195 (1935).

Eine Gruppe G der Ordnung p^m (p eine Primzahl > 2) heißt metabelsch, wenn ihre Faktorgruppe nach dem Zentrum Γ abelsch ist. Zwei Gruppen heißen konform, wenn sie für jede Zahl n die gleiche Anzahl von Elementen der Ordnung n enthalten. Es mögen zunächst die metabelsche Gruppe G und ihre Automorphismengruppe $I(G)$ in der üblichen Weise als Gruppen von Permutationen der Elemente von G dargestellt werden; die in $I(G)$ enthaltene Untergruppe H der inneren Automorphismen ist isomorph mit G/Γ; ist s ein Element von G, S dasjenige Element von H, das zu dem durch s induzierten inneren Automorphismus von G gehört, und definiert man den Operator θ_x durch $\theta_x s = sS^x$, so bilden die Permutationen $\theta_x s$ eine mit G konforme Gruppe, welche für $2x + 1 \equiv 0 \pmod{p^\nu}$ eine abelsche Gruppe A ist, wenn ν die maximale Ordnung der Elemente von G ist. Das Holomorph von A enthält alle metabelschen mit G konformen Gruppen als Untergruppen; die Automorphismengruppe von A enthält $I(G)$ als Untergruppe, und die Invarianten von A sind auch solche von G, nämlich die Ordnungen der Basiselemente einer sog. „U-Basis" von G. Dabei bilden $P_1, P_2, \ldots, P_\varrho$ eine U-Basis von G, wenn jedes Element von G sich auf eine und nur eine Weise in der Form $P_1^{x_1} P_2^{x_2} \ldots P_\varrho^{x_\varrho}$ mit $0 \leqq x_\lambda < p^{\delta_\lambda}$ und $P_\lambda^{p^{\delta_\lambda}} = 1$ ausdrücken läßt. [Die Existenz einer U-Basis ist für eine umfassendere Klasse von Gruppen von P. Hall, Proc. London Math. Soc. (2) **36**, 29—95 (1933); dies. Zbl. **7**, 291 bewiesen worden.] Die P_λ bilden eine „B-Basis" von G, wenn nur verlangt wird, daß die Darstellung des Einheitselementes in der Form $P_1^{x_1} P_2^{x_2} \ldots P_\varrho^{x_\varrho}$ nur auf eine Weise (alle $x_\lambda = 0$) möglich ist; ist $\sum p^{\delta_\lambda}$ ein Minimum, so bilden sie eine „MB-Basis". Die Existenz einer U- und einer MB-Basis für G kann zur Aufstellung von gewissen Normalformen von Systemen erzeugender Elemente und definierender Relationen für G benutzt werden. Weiterhin wird noch eine Darstellung von G als Kongruenzgruppe konstruiert, und es wird besonders eingehend der Fall behandelt, daß G eine „ω-Gruppe" ist; eine solche ist definiert als eine Gruppe G, für die jedes Element der Kommutatorgruppe C eine p-te Potenz ist.

Magnus (Princeton).

Kalašnikov, V., und A. Kuroš: Freie Produkte der Gruppen mit vereinigten Untergruppen der Zentren. C. R. Acad. Sci. URSS **1**, 285 u. dtsch. Text 286 (1935) [Russisch].

Gegeben sei eine Menge von Gruppen H_α [α durchlaufe eine beliebige Indexmenge]. Im Zentrum von jeder Gruppe H_α sei eine Untergruppe Z_α enthalten, so daß alle Z_α mit einer Gruppe Z isomorph sind. Man bilde nun nach O. Schreier [Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **5**, 164 (1927)] das freie Produkt G der H_α mit vereinigten

Untergruppen Z_α; das Zentrum von G ist dann mit Z isomorph. In Verallgemeinerung eines früher von A. Kurosch [Math. Ann. **109**, 647—660 (1934); dies. Zbl. **9**, 10] bewiesenen Satzes gilt dann: Jede Untergruppe F von G ist ebenfalls ein freies Produkt mit vereinigten Untergruppen von Untergruppen F_β von G. Alle F_β enthalten dabei eine mit einer Untergruppe Z' von Z isomorphe Untergruppe, welche zum Zentrum von F_β und sogar zum Zentrum von G gehört. Die F_β sind entweder in G mit Untergruppen der H_α konjugiert, oder sie sind direkte Produkte von Z' und einer unendlichen zyklischen Untergruppe von G. *Magnus* (Princeton).

Magnus, Wilhelm: Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring. Math. Ann. **111**, 259—280 (1935).

Es handelt sich um eine Methode zur Behandlung von diskontinuierlichen Gruppen. Dieselbe besteht darin, daß die Gruppe G in die multiplikative Gruppe eines Ringes R eingebettet wird. Durch Restklassenbildung nach Idealen, die zum Bild von G in R fremd sind, lassen sich dann Aussagen über Faktorgruppen von G erzielen. Dieser Gedankengang wird für die freie Gruppe F in der folgenden Weise benützt: F habe die Erzeugenden a_i, dann wird der Ring R betrachtet, der von einem Einheitselement 1 und assoziativen Größen s_i erzeugt wird, wobei $a_i = 1 + s_i$, $a_i^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k s_i^k$ gesetzt wird, und es wird bewiesen, daß man damit eine treue Darstellung von F in R erhält. Jedes Element von F gestattet in R eine Entwicklung 1 + ganzzahlige Vielfache von Potenzprodukten der s_i. Die kleinste unter diesen Potenzprodukten auftretende Dimension wird die Dimension des Elementes genannt. Die Elemente von einer Dimension $\geqq n$ bilden eine invariante Untergruppe $F^{(n)}$ von F, welche bei jedem Homomorphismus in sich übergeht (Vollinvarianz). Demzufolge geben die $F^{(n)}$ Anlaß zur Definition charakteristischer Untergruppen $G^{(n)}$ einer beliebigen durch Erzeugende und Relationen definierten Gruppe G. Verf. vermutet, daß $G^{(n)}$ mit der n-ten Untergruppe G_n der sog. „lower central series" [siehe P. Hall, Proc. London Math. Soc. (2) **36** (1933); dies. Zbl. **7**, 291] übereinstimmt, beweist aber nur, daß $G_n \subset G^{(n)}$. Eine spezielle Darstellung von F und R durch unendliche Matrizen ermöglicht es, den Faktorgruppen $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ Darstellungen der linearen Gruppen zuzuordnen. Dies wird insbesondere angewendet auf Gruppen G mit k Erzeugenden, bei welchen die Faktorgruppe nach der Kommutatorgruppe ebenfalls k Erzeugende unendlicher Ordnung besitzt. G wird in der folgenden Weise eine lineare Gruppe L_G zugeordnet: G ist Faktorgruppe einer freien Gruppe F mit k Erzeugenden, wobei die G definierenden Relationen in $F^{(2)}$ liegen mögen. Jedem Automorphismus von G entspricht dann eindeutig ein solcher von $G/G^{(2)}$, der sich gemäß den Voraussetzungen über G durch eine ganzzahlige Matrix charakterisieren läßt. Diese Matrizen bilden bei Multiplikation die Gruppe L_G. Für $G = F$ ist L_F nach J. Nielsen die volle Gruppe aller ganzzahligen Substitutionen von k Variablen mit der Determinante ± 1. Für $G \neq F$ wird nun bewiesen, daß L_G im allgemeinen eine echte Untergruppe von L_F ist. Hat die Gruppe insbesondere nur 1 Relation und ist diese ein Element von $F^{(n)}$ $(n > 1)$, aber nicht von $F^{(n+1)}$, so läßt sich sogar zeigen, daß L_G höchstens dann gleich L_F ist, wenn n ein Vielfaches von k ist. — Mit Hilfe dieses Verfahrens wird u. a. nachgewiesen, daß freie Gruppen und allgemeine Gruppen mit endlichvielen Erzeugenden, für die der Durchschnitt aller $G^{(n)}$ nur das Einheitselement ist, nicht mit einer ihrer echten Faktorgruppen isomorph sein können [für freie Gruppen konnte man dies schon früher aus einem Satz von F. Levi, vgl. Math. Z. **37** (1933); dies. Zbl. **6**, 246, erschließen]. Das allgemeine Problem, ob eine Gruppe mit endlichvielen Erzeugenden zu einer echten Faktorgruppe isomorph sein kann, geht auf H. Hopf zurück. Neben verschiedenen Bemerkungen über Gruppen von Primzahlpotenzordnung wird schließlich der für zahlentheoretische Zwecke wichtige Satz bewiesen: Die abelsche Gruppe vom Typus (3, 3, 3) kann Faktorgruppe nach der Kommutatorgruppe in beliebig hochstufigen Gruppen, deren Ordnung eine Potenz von 3 ist, sein. — Druckfehler S. 273, Zeile 13 v. u. n statt k. *Taussky.*