## Werk

**Titel:** Algebra, Zahlentheorie (algebraische Geometrie s. a. Geometrie; algebraische Funk...

**Jahr:** 1935

**PURL:** https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0010|log82

## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

10. Band, Heft 8 **UND IHRE GRENZGEBIETE** S. 337—384


## Algebra und Zahlentheorie.

**Craig, J. I.: The numerical calculation of the roots of an algebraic equation.** Bull. Inst. Egypte **16,** 139—152 (1934).

Ergänzungen zur Abhandlung in ders. Zeitschr. **15,** 207—230; dies. Zbl. **8,** 145. Die Anwendung des Verfahrens zur Auffindung quadratischer Faktoren auf die kubische Gleichung liefert die Cardanische Auflösung, ähnlich bei der biquadratischen Gleichung. — Eine Ergänzung und Richtigstellung zum zweiten Verfahren der genannten Abhandlung. — Ein Verfahren zur Verbesserung der Ausgangswerte für die Annäherung, mit geometrischer Deutung. — Zurückführung auf eine Gleichung mit zwei rein imaginären, entgegengesetzt gleichen Wurzeln. *L. Schrutka* (Wien).

**Craig, J. I.: Further note on the arithmetical calculation of complex roots of algebraic equations.** Bull. Inst. Egypte **16,** 207—209 (1934).

Wiedergabe einer Stelle aus einem Brief von E. H. Neville, Reading, an den Verf. Die wiederholten Annäherungen des Verfahrens von Craig (s. d. vorige Referat) werden bequemer, wenn auch etwas langsamer konvergent, wenn die Koeffizienten beim Newtonschen Verfahren nicht immer neu gerechnet werden, so daß ein reines Iterationsverfahren entsteht. *L. Schrutka* (Wien).

**Heilbronn, H., and E. H. Linfoot: On the imaginary quadratic corpora of class-number one.** Quart. J. Math., Oxford Ser. **5,** 293—301 (1934).

The authors prove that there are at most ten negative fundamental discriminants $d$ for which $h(d) = 1$. Nine being known (the largest $d = -163$), at most one remains undiscovered, and that $< -5.10^8$. Necessarily $-d$ is a prime $p$. Assuming $p$ and $P$ are primes $4n + 3$ such that $10^4 < p < P$, $h(-p) = h(-P) = 1$, it is desired to obtain a contradiction. Writing $L_p(s) = \sum(-p|n)n^{-s}$, $L_{pP}(s) = \sum(pP|n)n^{-s}$, it is found by clever approximations to $\zeta(s)L_p(s)$ and $L_p(s)L_{pP}(s)$, that $P$ is both greater and less than $8p^{10/9}$. *G. Pall* (Montreal).

**Chowla, S.: The class-number of binary quadratic forms.** Quart. J. Math., Oxford Ser. **5,** 302—303 (1934).

If $-d_1, \ldots$ are the negative discriminants of class-number unity, $d_{m+1} > \exp(cd_m)^{1/2}$. *G. Pall* (Montreal).

**Chowla, S.: An extension of Heilbronn's class-number theorem.** Quart. J. Math., Oxford Ser. **5,** 304—307 (1934).

The number of classes in each genus of discriminant $d$ tends to infinity as $d \to -\infty$ (see this Zbl. **10,** 152). *G. Pall* (Montreal).

**Scholz, Arnold: Die Kreisklassenkörper vom Primzahlpotenzgrad und die Konstruktion von Körpern mit vorgegebener zweistufiger Gruppe. II.** Math. Ann. **110,** 633—649 (1935).

Verf. beweist die Existenz von absolut galoisschen Körpern mit beliebiger zweistufiger Gruppe aus zwei Erzeugenden. Nach früheren Ergebnissen des Verf. kann man sich hierzu auf den Fall beschränken, daß die Körper Primzahlpotenzgrad haben. Überdies sind alle zweistufigen Körper von Primzahlpotenzgrad $l^h$ als Unterkörper in Körpern mit Zweiggruppen enthalten. Eine zweistufige Zweiggruppe $\mathfrak{G}$ mit zwei Erzeugenden hat folgende Struktur: Ist $\mathfrak{G}'$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$, so hat die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ zwei Erzeugende $S_1\mathfrak{G}'$, $S_2\mathfrak{G}'$, wobei sich die Elemente $S_1, S_2$ so auswählen lassen, daß $S_i\mathfrak{G}'$ dieselbe Ordnung $l^{h_i}$ hat wie $S_i$. Außerdem sollen die Kommutatoren von $\mathfrak{G}$ nur den zwangsläufigen Relationen genügen. Die Zweiggruppe ist daher durch die Ordnungen $l^{h_1}$, $l^{h_2}$ und die Ordnung $l^k$ des Kommutators von $S_1$ und $S_2$ eindeutig bestimmt. Zur Konstruktion eines Zweigkörpers vom Typus $(l^{h_1}, l^{h_2}; l^k)$

ist es notwendig, einen abelschen Körper, der direktes Produkt zweier zyklischer Körper von den Graden $l^{h_1}$, $l^{h_2}$ ist, zu einem zweistufigen Körper zu erweitern. Verf. wählt den zyklischen Körper vom Grad $l^{h_i}$ als Unterkörper $K_{p_i}^{l^{h_i}}$ des Kreiskörpers der $p_i$-ten Einheitswurzeln, wobei $p_i$ eine Primzahl $\equiv 1 (l^{h_i})$ ist, und er beweist: Für $l > 2$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß sich der Körper $K_{p_1}^{l^{h_1}} \cdot K_{p_2}^{l^{h_2}}$ zu einem Zweigkörper vom Typus $(l^{h_1}, l^{h_2}; l^k)$ erweitern läßt, daß $p_2$ ein $l^{h_1}$-ter Potenzrest mod $p_1$ und $p_1$ ein $l^{h_2}$-ter Potenzrest mod $p_2$ ist. Da man stets Primzahlen $p_1, p_2$ finden kann, welche diese Potenzrestbedingungen erfüllen, ist damit die Existenz von Zweigkörpern mit zwei Erzeugenden bewiesen. Die Ordnung $l^k$ des Kommutators kann überdies beliebig vorgegeben werden. Für $l = 2$ müssen die Bedingungen etwas verschärft werden. Notwendige Bedingungen hat Verf. schon früher (dies. Zbl. 8, 103; 9, 5) bewiesen. Die Ursache für diese Bedingungen für $p_1$ und $p_2$ und die Ausnahmestellung für $l = 2$ wird klar durch den folgenden allgemeinen Satz: Das direkte Produkt $K^0 = K_1 \cdot K_2$ zweier relativ-zyklischer Körper $K_1$, $K_2$ von den Graden $l^{h_1}$, $l^{h_2}$ in bezug auf einen die $l$-ten Einheitswurzeln nicht enthaltenden Grundkörper läßt sich dann und nur dann zu einem Zweigkörper vom Typus $(l^{h_1}, l^{h_2}; l^k)$ verzweigungsfremd zu $K^0$ erweitern, wenn alle Diskriminanten teils von $K_1$ in $K_2$ voll zerfallen und umgekehrt.

*Taussky* (Bryn Mawr, Pa.).

**Rédei, László: Eine obere Schranke der Anzahl von den durch 4 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper.** Mat. természett. Értes. **51,** 219—224 u. dtsch. Zusammenfassung 225—226 (1934) [Ungarisch].

Anschließend an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 8, 195) wird hier eine obere Schranke für $e_4$, die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe in einem beliebigen quadratischen Zahlkörper $k$ gegeben. Die Diskriminante $D$ von $k$ ist eindeutig in der Form $d_1 d_2 \ldots d_t$ darstellbar, wobei die $d_\nu$ paarweise relativ prime Fundamentaldiskriminanten sind (das sind die Zahlen $-4$, $8$, $-8$ und die positiven und negativen Primzahlen der Gestalt $4n + 1$); unter den $d_\nu$ sei $r_1$ die Anzahl der positiven und $2r_2 - v$ die Anzahl der negativen, wobei $r_1, r_2$ nichtnegative Zahlen und $v = 0$ oder $1$; $t$ ist die Anzahl der verschiedenen rationalen Primfaktoren von $D$. Dann gilt $e_4 \leqq r_1 + r_2 - 1$, und für unendlichviele $k$ kann hier auch das Gleichheitszeichen gelten.

*O. Szász* (Cambridge, Mass.).

**Rédei, László: Über die Grundeinheit und die durch 8 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper.** Mat. természett. Értes. **51,** 227 bis 254 u. dtsch. Zusammenfassung 255—259 (1934) [Ungarisch].

Verf. erweitert hier seine früheren Resultate (dies. Zbl. 9, 293—294); die Beweise sind elementar. Unter anderem wird folgendes bewiesen: Es sei $D$ die Diskriminante eines quadratischen Zahlkörpers $k$ über dem Körper der rationalen Zahlen, $e_{2^n}$ die Anzahl der durch $2^n$ teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe von $k$. Ist $D < 0$, ist ferner $e_4 = 1$ und ist die dann vorhandene einzige eigentliche $D$-Zerfällung 2. Art $D', D''$ so beschaffen, daß auch $D', D''$ ähnlicher Art sind wie $D$, und ist diese $D$-Zerfällung verschieden von $-4$, $-\frac{1}{4}D$, so ist dazu, daß $D', D''$ von der 3. Art, d. h. $e_8 = 1$ sei, notwendig und hinreichend, daß von den Gleichungen $\left(\frac{D'}{D''}\right) = 1$, $\left(\frac{D''}{D'}\right) = 1$ die eine, und zwar die mit positivem „Nenner" stattfindet. Analoges gilt für $D > 0$.

*O. Szász* (Cambridge, Mass.).

**Davenport, H., und H. Hasse: Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen in gewissen zyklischen Fällen.** J. reine angew. Math. **172,** 151—182 (1934).

Für besondere zyklische Funktionenkörper $Z$ über einem rationalen Funktionenkörper $k(x) = K$ mit einem Galoisfeld $k$ der Elementezahl $q$ und der Charakteristik $p$ als Konstantenbereich werden die Nullstellen der zugehörigen Zetafunktionen untersucht. Es handelt sich um zwei Typen von Körpern $Z$: 1. $Z$ definiert durch die Gleichung $y^p - y = x^m$, wo $m \mid (q - 1)$, 2. $Z$ definiert durch $y^m = 1 - x^m$, wo $m \mid (q - 1)$, $n \mid (q - 1)$. Im Falle 1 kann $Z$ auch erzeugt werden, indem zum rationalen Funktionenkörper $k(t)$ die beiden fremden zyklischen

Körper $K$ bzw. $K'$ adjungiert werden, die durch $x^m - t = 0$ bzw. $y^p - y - t = 0$ definiert werden; im Falle 2 ist $Z$ das Kompositum der beiden fremden zyklischen Körper zu $x^m - t = 0$ und $y^n - 1 + t = 0$. Dieser Erzeugung von $Z$ gemäß wird die Zetafunktion $\zeta_z(s)$ von $Z$ das Produkt von $pm$ bzw. $nm$ $L$-Funktionen:

$$\zeta_Z(s) = \prod_{\chi, \psi} L(s, \chi\psi).$$

$\chi$ durchläuft die Charaktere der Divisorenklasseneinteilung von $k(t)$, zu der $K$ Klassenkörper ist, $\psi$ die Charaktere von $K'/k(t)$. Die Charaktere $\chi\psi$ sind immer zu eigentlichen Charakteren zu ergänzen. — In der Arbeit von H. Hasse [Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper. J. reine angew. Math. **172**, (1934); dies. Zbl. **10**, 5] sind die $\chi$ und $\psi$ berechnet worden, die $\chi$ sind die Potenzrestsymbole

$$\left(\frac{t^\mu}{\mathfrak{a}}\right)_m, \quad \mu = 0, 1, \ldots, m-1;$$

die $\psi$ sind die additiven Potenzrestsymbole

$$\left(\frac{\varkappa t}{\mathfrak{a}}\right)_p, \quad \varkappa = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Dementsprechend ist

$$\zeta_Z(s) = \prod L_{\mu\varkappa}(s)$$

mit

$$L_{\mu\varkappa}(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \left(\frac{t^\mu}{\mathfrak{a}}\right)_m \left(\frac{\varkappa t}{\mathfrak{a}}\right)_p N\mathfrak{a}^{-s}.$$

Nach den Sätzen über $L$-Funktionen bei Hasse, l. c. § 6, wird $L_{00}(s) = \zeta_0(s)$ die Zetafunktion des Geschlechtes Null, ferner

$$L_{\mu 0}(s) = 1 \quad \text{für} \quad \mu \neq 0,$$

$$L_{0\varkappa}(s) = 1 \quad \text{für} \quad \varkappa \neq 0$$

und

$$L_{\mu\varkappa}(s) = 1 - \tau_\varkappa(\chi^\mu)\, q^{-s}$$

sonst. Dabei bedeutet $\tau_\varkappa(\chi^\mu)$ die verallgemeinerte Gaußsche Summe

$$\tau_\varkappa(\chi^\mu) = -\sum_{\substack{a \neq 0 \\ \text{in } k}} \chi^\mu(a)\, e^\varkappa(a), \qquad \mu \neq 0, \qquad \varkappa \neq 0.$$

$\chi(a)$ ist dabei ein fester Charakter der Ordnung $m$ der Multiplikativgruppe, $e(a) = e^{\frac{2\pi i}{p} Sp(a)}$ ein Charakter $p$-ter Ordnung der Additivgruppe von $k$ (vgl. Hasse, l. c.). — Die Nullstellen $\varrho$ von $\zeta_Z(s)$ sind also durch $q^\varrho = \tau_\varkappa(\chi^\mu)$ definiert. Eine elementare Rechnung ergibt für $|\tau_k(\chi^\mu)|^2 = \tau_k(\chi^\mu)\,\overline{\tau_k(\chi^\mu)}$ den Wert $q$. Daher ist der Realteil von $\varrho$ gleich $\frac{1}{2}$: Riemannsche Vermutung für $\zeta_z(s)$. — Im Falle 2 wird eine ähnliche Betrachtung durchgeführt. Die $\chi$ sind die Potenzrestsymbole $\left(\frac{t^\mu}{\mathfrak{a}}\right)_m$, die $\psi$ sind die $\left(\frac{(1-t^\nu)}{\mathfrak{a}}\right)_n$.

Es wird

$$\zeta_Z(s) = \prod L_{\mu\nu}(s),$$

$$L_{\mu\nu}(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \left(\frac{t^{\mu n_0}(1-t^\nu)^{\nu m_0}}{\mathfrak{a}}\right)_l N\mathfrak{a}^{-s},$$

wo

$$n_0 = \frac{n}{(m,n)}, \qquad m_0 = \frac{m}{(m,n)}, \qquad l = \frac{mn}{(m,n)}.$$

Wieder ist

$$L_{00}(s) = \zeta_0(s), \qquad L_{\mu 0}(s) = L_{0\nu}(s) = 1,$$

aber auch

$$L_{\delta m_0, ((m,n)-\delta) n_0}(s) = 1, \qquad \delta = 1, \ldots, n-1,$$

sonst

$$L_{\mu\nu}(s) = 1 - \pi(\chi^\mu, \psi^\nu)\, q^{-s},$$

wo

$$\pi(\psi^\mu, \psi^\nu) = -\sum_{a \subset k} \chi^\mu(a)\, \psi^\nu(1-a),$$

$\psi$ fester Charakter der Ordnung $n$ der Multiplikativgruppe von $k$. Für die $\pi$ gilt

$$\pi(\chi^\mu, \psi^\nu) = \frac{\tau(\chi^\mu)\,\tau(\psi^\nu)}{\tau(\chi^\mu\psi^\nu)},$$

daher gilt auch im Falle 2 die Riemannsche Vermutung. — Wenn der Konstantenkörper $k$ zum Körper $r$-ten Grades $k^{(r)}$ über $k$ erweitert wird, so gehen $Z$, $K$ und $K'$ über in Körper $Z^{(r)}$, $K^{(r)}$, $K'^{(r)}$. Die $L$-Funktionen von $Z^{(r)}/k^{(r)}(t)$ lassen sich in Produkte von $L$-Funktionen von $Z^{(r)}/k(t)$ zerlegen ($Z^{(r)}$ ist das Kompositum der fremden abelschen Körper $Z/k(t)$, $k^{(r)}(t)/k(t)$!), diese Zerlegungen reduzieren sich offenbar auf Relationen zwischen Gaußschen Summen $\tau$ bzw. Ausdrücken $\pi$. Im Falle 1 ergibt sich die Relation

$$\tau_\varkappa(\chi_r^\mu) = \tau_\varkappa(\chi^\mu)^r; \qquad \mu = 1, \ldots, m-1; \; k = 1, \ldots, p-1. \tag{1}$$

Dabei ist $\chi_r$ der durch

$$\chi_r(\mathfrak{a}_r) = \chi(N_{k^{(r)}/k}(\mathfrak{a}_r))$$

definierte Charakter der Multiplikativgruppe von $k^{(r)}$. — Im Falle 2 ergeben sich die Relationen:

$$\prod_{\mu=0}^{m-1} \tau(\chi^\mu \psi) = \tau_m(\psi^m) \prod_{\mu=0}^{m-1} \tau(\chi^\mu). \tag{2}$$

Die Größen $\pi$ sind schon von Kummer in Zusammenhang mit der Zerlegung der Primzahlen im Körper $K_l$ der $l = \frac{m\,n}{(m, n)}$-ten Einheitswurzeln betrachtet worden. Die verallgemeinerten Gaußschen Summen $\tau$ sind von Stickelberger eingeführt worden, der ihre Primfaktorzerlegung im Kreiskörper $K_{mp}$ bestimmte und eine arithmetische Charakterisierung angab. Das bedeutet Angabe der Primfaktorzerlegung, Angabe der Beträge der Konjugierten — dadurch ist eine algebraische Zahl bis auf eine Einheitswurzel festgelegt —; die Festlegung dieser Einheitswurzel kann durch Kongruenzangaben, Angaben über das Verhalten bei Antomorphismen erfolgen. Mittels dieser Charakterisierung können arithmetische Beweise für (1) und (2) geführt werden. Der Stickelbergersche Beweis für die arithmetische Charakterisierung der verallgemeinerten Gaußschen Summen wird in einem Anhang in vereinfachter Form dargestellt. — Die Theorie des durch $x^m + y^n = 1$ definierten Funktionenkörpers (Fall 2) kann leicht auf $a x^m + b y^n = c$ ausgedehnt werden. Die Nullstellen der Zetafunktion werden

$$\pi_{a,b,c}(\chi^\mu, \psi^\nu) = -\sum_{au+bv=c} \chi^\mu(u)\,\psi^\nu(v) = \frac{\tau_a(\chi^\mu)\,\tau_b(\psi^\nu)}{\tau_c(\chi^\mu\psi^\nu)}. \qquad \begin{pmatrix} \chi^\mu \neq 1, \ \psi^\nu \neq 1 \\ \chi^\mu\psi^\nu \neq 1 \end{pmatrix}$$

Nach Hasse, l. c. (13), ergibt sich daraus für die Anzahl $N_1$ der Primdivisoren ersten Grades

$$N_1 = (q+1) - \sum \pi_{a,b,c}(\chi^\mu \psi^\nu)$$

also wegen $|\pi| = \sqrt{q}$:

$$|N_1 - (q+1)| \leqq ((m-1)(n-1) - (d-1))\sqrt{q},$$

$N_1$ hängt zusammen mit der Anzahl $N$ der Lösungen von $a x^m + b y^n = c$ in $k$. Für $N$ erhält man

$$N = N_1 - \sum_{\delta=0}^{d-1} \psi^{\delta n_0}\left(-\frac{a}{b}\right) = N_1 - \begin{cases} d = (m, n) \text{ falls } -\frac{a}{b} \text{ eine } d\text{-te Potenz in } k, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

*Deuring* (Leipzig).

**Wigert, S.: Sur quelques formules asymptotiques de la théorie des nombres. II.** Ark. Mat. Astron. Fys. 25 B, Nr 3, 1—6 (1934).

Verf. beweist die Formel

$$\sum_{n \leqq x} \mu^2(n)\, 2^{\nu(n)} = A\,x \log x + B\,x + O(x^{\frac34 + \varepsilon}),$$

wo $\mu(n)$ die Moebiussche Funktion und $\nu(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von $n$ ist. Der Beweis beruht auf der klassischen Darstellung der Koeffizientensummen Dirichletscher Reihen durch Integrale. Es ist Verf. offenbar entgangen, daß man mit elementaren Methoden die obige Formel mit dem besseren Restglied $O(x^{\frac12+\varepsilon})$ beweisen kann. — Ähnliche Formeln werden für $\sum_{n \leqq x} \mu^2(n) k^{\nu(n)}$ bei ganzem $h > 2$ gegeben. (I. vgl. dies. Zbl. 4, 103.)

*Hans Heilbronn* (Bristol).

**Zurl, Erna: Theorie der reduziert-regelmäßigen Kettenbrüche.** Math. Ann. **110**, 679—717 (1935).

The paper gives a systematic study of „reduced-regular" continued fractions ($= CF$)

$$b_0 - \frac{1|}{|b_1} - \cdots - \frac{1|}{|b_\nu} - \cdots \equiv (b_0, b_1 \ldots) \qquad (b_\nu \text{ integer} \geqq 2, \ \nu \geqq 1); \tag{1}$$

infinitely many $b_\nu \geqq 3$, if the $CF$ is infinite), supplementing that given by Perron in his well known book "Die Lehre von den Kettenbrüchen" for "semiregular" $CF$, of which (1) is a special case. As such, (1) exhibits certain properties which we do not find in the general case, analogous to those possessed by „regular" $CF$

$$b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \cdots + \frac{1|}{|b_\nu} + \cdots \qquad (b_\nu \text{ integer}, \ b_\nu > 0 \text{ for } \nu \geqq 1).$$

This is illustrated by "purely periodic" reduced regular $CF$, as representing "quasi-reduced" quadratic irrationalities (by definition, it is $> 1$ and its conjugate lies between 0 and 1). — In Ch. I, II we find a discussion of the general properties of convergents, among others — a sufficient criterion that the fraction $p/q$ be such a convergent, the irrational character of an infinite reduced regular *CF*, the degree of approximation furnished by the convergents (upper and lower bound), representation of equivalent numbers by such *CF*. — Ch. III deals with ("pure" and "mixed") periodic *CF* and gives some new properties. Here the author is enabled to discuss negative square roots $-\sqrt{d}$ ($d$ positive rational, $\gtrless 1$, not a perfect square) and obtains interesting results concerning the nature of the period in question. We also find here a study of the partial quotients involved and of "inverted" periods. — The last Ch. IV gives an application of the *CF* in question to the solution in integers of the equation

$$x^2 - Dy^2 = \pm L \quad (D \text{ positive integer, not a perfect square}).$$

Here the use of "reduced regular" *CF* enables us to take $0 < L < 2\sqrt{D}$ (and not $0 < L < \sqrt{D}$, as when using regular *CF*). [The presentation in places could have been shortened. Thus, for ex., formula (4) (p. 683) $A_{\nu-1}B_\nu - A_\nu B_{\nu-1} = 1$ needs no proof, its being but a special case of a fundamental formula in the general theory of *CF*; the same applies to Th. 14 (p. 694) on periodic *CF*, for it is given by Perron. On the other hand, the reader is interested to learn something about the analogon; in the theory under discussion, of Serret's theorem on the *CF* representation of conjugate quadratic irrationalities (whether such analogon exists or not). He would also like to learn more details about the *CF* representation of $\sqrt{d}$, where $d$ is an integer. Ref.] *J. Shohat.*

**Khintchine, A.: Metrische Kettenbruchprobleme.** Compositio Math. **1**, 361—382 (1935).

„Die metrische Theorie der Kettenbrüche ist die Gesamtheit aller Sätze, welche das Maß von Mengen aller durch eine bestimmte Eigenschaft ihrer regelmäßigen Kettenbruchentwickelungen gekennzeichneten Irrationalzahlen abzuschätzen erlauben." Im folgenden bedeutet $\alpha$ eine Zahl zwischen 0 und 1, ihre regelmäßige Kettenbruchentwickelung sei

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}} = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots].$$

Der erste Satz in der oben vom Verf. charakterisierten Richtung, von Gauß ausgesprochen, im Jahre 1928 von Kuzmin bewiesen (mit einer Abschätzung des Restgliedes) lautet: wenn $z_n(\alpha) = [a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$ und $m_n(x)$ das Maß der Menge der Zahlen $\alpha$ mit $z_n(\alpha) < x$ ist $(0 \leqq x \leqq 1)$, so existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} m_n(x) = \frac{\lg(1+x)}{\lg 2}.$$

In der vorliegenden Arbeit erforscht der Verf., seine früheren Untersuchungen [z. B. Math. Ann. **92**, 115 (1924)] fortsetzend, das asymptotische Verhalten einiger Mittelbildungen der Teilnenner.

Bezeichnungen: $E\binom{n_1, n_2, \ldots, n_k}{r_1, r_2, \ldots, r_k}$ ist die Menge der Zahlen $\alpha$, die den Bedingungen $a_{n_1} = r_1, a_{n_2} = r_2, \ldots, a_{n_k} = r_k$ genügen; $\mathfrak{M}E$ bedeutet das Maß der Menge $E$.

Hilfssatz 1. $$\frac{\mathfrak{M}E\binom{n_1, \ldots, n_k, n_{k+1}}{r_1, \ldots, r_k, r_{k+1}}}{\mathfrak{M}E\binom{n_1, \ldots, n_k}{r_1, \ldots, r_k}} < \frac{C}{r_{k+1}^2}$$

($C$ ist eine Konstante, $n_1, \ldots, n_{k+1}$ voneinander verschieden) — Verallgemeinerung eines Borelschen Satzes.

Hilfssatz 2. $$\left|\frac{\mathfrak{M}E\binom{n_1, \ldots, n_t, n_{t+1}}{r_1, \ldots, r_t, r}}{\mathfrak{M}E\binom{n_1, \ldots, n_t}{r_1, \ldots, r_t}} - \frac{\lg\left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)}{\lg 2}\right| < Be^{-\beta\sqrt{n_{t+1} - n_t}}$$