$g^{(m)}(x)$ étant une fonctions qui prend dans chaque intervalle $\left(a+k\frac{b-a}{m},\ a+(k+1)\frac{b-a}{m}\right)$ comme unique valeur la valeur moyenne de $g(x)$ dans cet intervalle. Il suffit pour que l'égalité ait lieu que l'une des fonctions $f(x)$, $g(x)$ soit bornée, ou que $|f(x)|^{\alpha}$, $|g(x)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ soient intégrables $(\alpha > 1)$. Ce problème a été rencontré par l'auteur dans des recherches sur le calcul des variations et le problème de Mayer. *E. Blanc* (Paris).

Analysis.

Mambriani, Antonio: Sulla derivazione di ordine superiore delle funzioni composte. I. Boll. Un. Mat. Ital. **13**, 217—222 (1934).

Bonferroni, C.: Sulla validità dei teoremi della media nel Calcolo integrale. Boll. Un. Mat. Ital. **13**, 225—229 (1934).

L'A. mostra che ipotesi diverse da quelle ordinariamente formulate consentono di applicare ad un integrale di Riemann i teoremi della media parziale e della media di Bonnet, e, ad un integrale di Stieltjes, il teorema della media. *Autoreferat.*

Potron: Sur l'intégrale de différentielle binome. Extrait de: J. École polytechn., II. s. **33**, 14 S. (1935).

Tschebyscheff hat bewiesen, daß das Integral eines binomischen Differentials außer in den drei bekannten (in den meisten Lehrbüchern behandelten) Fällen nicht durch elementare Funktionen ausgedrückt werden kann. Hierbei dient ein Satz von Liouville als Hilfsmittel, wonach das Integral einer algebraischen Funktion y, wenn es durch elementare Funktionen ausdrückbar ist, notwendig die Form

$$R_0(x, y) + \sum a_i \ln R_i(x, y)$$

haben muß, worin die a Konstante und die R rationale Funktionen sind. Der Verf. stellt den Beweis neu dar, um einerseits Einwänden, die bei Liouvilles Beweis gegen einige Einzelheiten erhoben werden könnten, auszuweichen, andererseits den Beweis von Tschebyscheff abzukürzen. — I. Beweis des Hilfssatzes von Liouville. Die algebraischen Funktionen können als Transzendente vom Rang 0 angesehen werden. Exponentialfunktionen und Logarithmen algebraischer Funktionen sind die elementaren Transzendenten vom Rang 1. Die allgemeinen Transzendenten vom Rang 1 sind die algebraischen Funktionen von x und einer Anzahl solcher elementarer Transzendenten vom Rang 1. Ferner sind die elementaren Transzendenten vom Rang k die Exponentialfunktionen und Logarithmen von Transzendenten vom Rang $k-1$, und die allgemeinen Transzendenten vom Rang k sind entsprechend aufgebaut. Der Rang der Ableitung einer Transzendenten vom Rang m ist nicht größer als m. Eine feinere Untersuchung zeigt, daß nur m oder $m-1$ als Rang in Betracht kommen kann. Hieraus folgt, daß das Integral einer algebraischen Funktion keinen höheren Rang als 1 haben kann und weiter der Satz von Liouville. — II. Der Beweis des Satzes von Tschebyscheff geht wie bei Tschebyscheff selbst von der Formulierung aus, daß das Integral des binomischen Differentials auf die Gestalt $\int x^{-p}(x+1)^{-q}\,dx$ gebracht werden kann, worin p und q zwischen 0 und 1 liegen. Setzt man $p = j/k$, $q = a/b$, $k - j = h$, so werden die obenerwähnten Fälle durch die Bedingungen $0 < h < k$, $0 < a < b$, $ak - bh \neq 0$ ausgeschlossen. Nun wird bewiesen, daß ein solches Integral nicht die Gestalt, wie sie der Satz von Liouville angibt, haben kann. *L. Schrutka* (Wien).

Soller, W.: Stokes's integral theorem: a direct consequence of integrating the conjugate differential dyadic. Math. Gaz. **18**, 268—270 (1934).

In this paper is given an outline of a derivation of Stokes' theorem based on the evident relation $d\boldsymbol{v} = \nabla\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s} + \mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s}$ where $\boldsymbol{v}$ is any vector and $\nabla\boldsymbol{v}$ is the dyadic obtained from it by space differentiation. The argument is not clear since the result of integrating $\nabla\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s}$ around a closed curve on a surface is written as $\nabla\oint\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s}$ and it is clear that $\oint v \cdot ds$ is not a function of position but merely a function of one of the parameters on the surface. *Murnaghan* (Baltimore).

Oniceseu, O.: Proprietà topologiche delle trasformazioni puntuali dello spazio. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **20**, 87—88 (1934).

Conditions (assez restrictives) suffisantes, afin qu'une transformation entre deux espaces réels (x, y, z), (X, Y, Z) — représentée par les formules:

$$X = f(x, y, z), \qquad Y = \varphi(x, y, z), \qquad Z = \psi(x, y, z),$$

avec des fonctions f, φ, ψ uniformes et régulières dans tout l'espace réel (x, y, z) — soit dépourvue de points lacunaires. *Beniamino Segre* (Bologna).

Kobayashi, Katsutarô: On some inequalities. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **16**, 341—344 (1934).

Izumi, Shin-ichi, Katsutarô Kobayashi and Tatsuo Takahashi: On some inequalities. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **16**, 345—351 (1934).

Die bekannte Jensensche Ungleichung besagt, daß $\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}}$ für nichtnegative a_ν als Funktion von p monoton wächst. Die beiden vorliegenden Arbeiten geben eine Anzahl von ähnlichen, aber komplizierteren, Sätzen, wobei unter anderem unter geeigneten Bedingungen die Monotonie von Funktionen wie $\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^p \Big/ \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{kp}\right)^{\frac{1}{p}}$, $\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^\lambda \Big/ \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{\log\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$ und $\theta^{-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \theta(\lambda, a_\nu) \Big/ \sum_{\nu=1}^{n} \theta(\varkappa\lambda, a_\nu); \lambda\right\}$, wo $\theta^{-1}(\eta; \lambda)$ die inverse Funktion von $\theta(\lambda, x)$ mit Bezug auf x bedeutet, bewiesen wird. Die Beweise beruhen alle auf Differentiation und Anwendung bekannter Ungleichungen zur Entscheidung des Vorzeichens der gefundenen Ableitungen. *B. Jessen* (Kopenhagen).

Bochner, S., and B. Jessen: Distribution functions and positive definite functions. Ann. of Math., II. s. **35**, 252—257 (1934).

Die Verff. bringen an die vom Ref. [Math. Z. **36**, 618—629 (1933); dies. Zbl. **6**, 162 und Amer. J. Math. **55**, 309—331 (1933); dies. Zbl. **7**, 157] und Haviland [Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **19**, 549—555 (1933); dies. Zbl. **7**, 20] verwendete Methode zur Behandlung asymptotischer Verteilungsfunktionen die Modifikation an, daß sie an Stelle des in der erstgenannten Arbeit benutzten Stetigkeitssatzes des Hamburgerschen Momentenproblems den Stetigkeitssatz der Fourier-Stieltjesschen Transformierten verwenden, die a. a. O. neben dem Momentenproblem benutzt worden sind. Für beschränkte Funktionen (also z. B. im Falle Bohrscher Fastperiodizität) und, allgemeiner, sobald die Momente existieren und zu einem bestimmten Momentenproblem gehören, sind die beiden Behandlungsweisen vollkommen identisch. Die Verff. behandeln aber auch den Fall Besicovitchscher Fastperiodizität. *Wintner*.

Wintner, Aurel: On analytic convolutions of Bernoulli distributions. Amer. J. Math. **56**, 659—663 (1934).

Es sei $\sigma(x)$ eine Verteilungsfunktion [d. h. eine nicht abnehmende Funktion mit $\sigma(-\infty) = 0$, $\sigma(+\infty) = 1$] und $L(t; \sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\, d\sigma(x)$ ihre Fourier-Stieltjessche Transformierte. Wie leicht zu sehen, folgt aus $L(t; \sigma) = O(|t|^{-1/\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$ die Existenz aller Ableitungen von $\sigma(x)$ und aus $L(t; \sigma) = O(\exp(-A|t|))$, wo $A > 0$, die Regularität von $\sigma(x)$ in der Umgebung jeder Stelle x, während aus $L(t; \sigma) = O(\exp(-|t|^\gamma))$, wo $\gamma > 1$, folgt, daß $\sigma(x)$ eine ganze Funktion ist. Als symmetrische Bernoulli-Verteilung wird bezeichnet die Verteilungsfunktion $\tau(x; a) = 0$ für $x < -a$, $= \frac{1}{2}$ für $-a < x < a$, $= 1$ für $x > a$; es ist $L(t; \tau) = \cos(at)$. Ist $\{a_n\}$ eine Folge positiver Zahlen mit $\sum a_n^2 < +\infty$, dann konvergiert das Produkt $\cos(a_1 t)\cos(a_2 t)\ldots$ gleichmäßig in jedem beschränkten t-Intervall und ist demnach die Fourier-Stieltjessche Transformierte $L(t; \sigma)$ einer gewissen Verteilungsfunktion σ; dieses σ ist die

„Faltung" der Verteilungsfunktionen $\tau(x; a_n)$. Faltungen dieser Art sind mehrfach betrachtet worden, weil sie viele interessante Beispiele liefern. In dieser Note wird eine allgemeine Bedingung für die Folge $\{a_n\}$ aufgestellt, welche zu Abschätzungen für $L(t; \sigma)$ von der obigen Form führen. Sei $N(t)$ die Anzahl aller $a_n \geqq t^{-1}$; gilt dann $N(t) \sim t^\beta S(t)^{\pm 1}$, wo $\beta > 0$ und $S(t)$ langsam ist [d. h. $S(t)$ ist nicht abnehmend und $S(ct)/S(t) \to 1$ für jedes $c > 0$], so ist auf Grund eines Satzes von Pólya $L(t; \sigma) = O\big(\exp(-A t^\beta S(t)^{\pm 1})\big)$, wo $A > 0$, woraus folgt $L(t; \sigma) = O(\exp(-t^{\beta-\varepsilon}))$ für jedes $\varepsilon > 0$. Also existieren alle Ableitungen von $\sigma(x)$ für jedes $\beta (> 0)$, und $\sigma(x)$ ist eine ganze Funktion, falls $\beta > 1$. Interessante Beispiele sind $a_n = n^{-\alpha}$ und $a_n = 1/p_n$. *B. Jessen* (Kopenhagen).

Verblunsky, S.: Trigonometric integrals and harmonic functions. Proc. London Math. Soc., II. s. **38**, 1—48 (1934).

The author has previously investigated the relationship between trigonometric series and the Poisson integral (see Proc. London Math. Soc., II. s. **34**, 441—456, 457 bis 491; this Zbl. **6**, 53 and 256). He now extends this to trigonometric integrals. Let $A(x, t) = a(t)\cos xt + b(t)\sin xt$. The author assumes the existence of a function $F(t)$, satisfying certain restrictions, such that

$$\int_0^\infty e^{-\eta t} A(x, t)\, t^{-2}\, dt = -\frac{\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t)\, dt}{\eta^2 + (x-t)^2}, \qquad \eta > 0. \tag{1}$$

Put

$$\Delta^2 F(x, h) = F(x+h) - 2F(x) + F(x-h),$$

$$P(\eta, x) = \int_0^\infty e^{-\eta t} A(x, t)\, dt.$$

At a point where (1) tends to $F(x)$ as $\eta \to 0$, the following relations hold

$$\overline{\lim}\, \Delta^2 F(x, h)/h \geqq \pi \lim \eta\, P(\eta, x), \qquad \overline{\lim}\, \Delta^2 F(x, h)/h^2 \geqq \lim P(\eta, x),$$

and two other inequalities obtained by interchanging $\overline{\lim}$ and $\underline{\lim}$ and reversing the sense. If $[|a(t)| + |b(t)|]t^{-2} \subset L(1, \infty)$, if $\overline{\lim}\, P(\eta, x)$ and $\underline{\lim}\, P(\eta, x)$ are integrable over every finite interval and finite except in a denumerable set where $\eta P(\eta, x) \to 0$, then $\overline{\lim}\, P(\eta, x) = \underline{\lim}\, P(\eta, x)$ [$= f(x)$ say] almost everywhere, and

$$a(t) + i b(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ixt}\, dx \qquad (\mathrm{C}, 1) \tag{2}$$

for almost all $t > 0$. The conclusion is also valid under other assumptions except that (C, 1) may have to be replaced by (C, 2). If $P(\eta, x)$ is bounded, its limit exists almost everywhere, and (2) holds. The author derives a nec. and suff. cond. that $P(\eta, x)$ be bounded, further a representation of $P(\eta, x)$ by a Poisson-Stieltjes integral when it is positive with corresponding formulas for $a(t)$ and $b(t)$. *E. Hille.*

Reihen:

Ghika, Alexandre: Sur les séries de fonctions harmoniques. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 660—662 (1934).

Il s'agit des modalités du développement en séries de polynomes harmoniques $\varphi_n(Q)$, formant un système orthogonal et normal le long de C (frontière d'un domain simpl. connexe, D, dans l'espace à k dimensions) d'une fonction harmonique dans D. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Severini, C.: Sulle serie doppie di funzioni ortogonali e normali. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **19**, 845—848 (1934).

Severini, C.: Sulle serie doppie di funzioni ortogonali e normali. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **20**, 18—22 (1934).

Im Anschluß an die Note des Verf. über die Parsevalsche Gleichung [Atti Accad.

naz. Lincei, Rend., VI. s. **19**, 551—555 (1934); dies. Zbl. **9**, 342] wird bewiesen: I. Die Funktionensysteme $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ... und $\psi_0(y)$, $\psi_1(y)$, ... seien im Intervall (a, b) abgeschlossene normierte Orthogonalsysteme, die Funktion $f(x, y)$ sei im Bereich $a \leqq {x \atop y} \leqq b$ samt ihrem Quadrat integrierbar. Wenn dann die Reihe

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} A_{\mu\nu}\,\varphi_\mu(x)\,\psi_\nu(y) \quad \text{mit} \quad A_{\mu\nu} = \int_a^b\!\!\int_a^b f(x, y)\,\varphi_\mu(x)\,\psi_\nu(y)\,dx\,dy$$

horizontal, d. h. in der Anordnung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu\nu}\,\varphi_\mu(x)\,\psi_\nu(y)\right\}, \tag{*}$$

im Bereich $a \leqq {x \atop y} \leqq b$ konvergiert, so stimmen ihre Summenwerte fast überall mit $f(x, y)$ überein; die Konvergenz gegen die Summenwerte $f(x, y)$ ist wesentlich-gleichmäßig. — II. Die Systeme $\varphi_\mu(x)$ und $\psi_\nu(y)$ in I seien jetzt die Fourierschen Eigenfunktionen. Die Fouriersche Doppelreihe der Funktion $f(x, y)$ $\left(0 \leqq {x \atop y} \leqq 2\pi\right)$ in der Anordnung (*) sei im Punkte x_0, y_0 konvergent, und es sei

$$\lim_{x \to x_0} \int_0^{2\pi} |f(x, y) - f(x_0, y)|\,dy = 0.$$

Dann stimmt der Summenwert der Fourierschen Reihe mit der zweiten generalisierten Ableitung $\Phi''(y)$ der Funktion $\Phi(y) = \int_0^y d\tau \int_0^\tau f(x_0, \eta)\,d\eta$ im Punkte y_0 überein, und ist gleich $f(x_0, y_0)$, falls $\Phi''(y_0) = f(x_0, y_0)$, insbesondere also dann, wenn $f(x_0, y)$ stetig an der Stelle $y = y_0$ ist. *R. Schmidt* (Kiel).

Droste, J.: Eine einfache Theorie der Fourierschen Reihen. Mathematica (Leiden) **1**, 205—210; **2**, 97—106 (1933) [Holländisch].

Verf. gibt einen recht eleganten Konvergenzbeweis für die Fouriersche Reihe einer samt ihrer ersten Ableitung stückweisen stetigen und beschränkten Funktion. *E. Hille* (New Haven, Conn.).

Mandelbrojt, S.: Sur l'unicité des séries de Fourier. J. École polytechn., II. s. cahier **32**, 227—277 (1934).

This Bordin prize memoir takes up the following question. A function $f(t) \subset L$ is known to have a property (A) in a set E, subset of $(0, 2\pi)$. What conditions on the Fourier coefficients of $f(t)$ will induce (A) to hold almost everywhere? Only two special cases are considered; (A) is the property of being zero or of being quasi-analytic. In Ch. I $f(t) = 0$ in (α, β). If $\alpha < 0 < \beta$, and $f(t)$ has periodic derivatives of all orders, $\min(-\alpha, \beta)$ is determined by the infinitary behavior of the Fourier coefficients of $f(t)$. The author obtains a number of unicity theorems for Fourier series from theorems of Fabry and Pólya on singularities of Taylor's series. The following is the simplest: If $\beta - \alpha > 2\pi\,\delta$, if the Fourier series of $f(t)$ is lacunary with $f_n = 0$ for $n \neq n_j$, and if the maximum density of $\{n_j\}$ does not exceed δ, then $f(t) \backsim 0$. Chapters II and III are chiefly devoted to the relationship between the problem on hand and the theories of lacunary series and quasi-analytic functions. It is shown, for instance, that if a lacunary Fourier series vanishes in the mean with sufficient intensity near a point or with sufficient frequency, then $f(t) \backsim 0$. These results have already been announced to the Académie des Sciences, and we refer to the reviews in this Zbl. **8**, 152, 169 and 254 for further details. *E. Hille* (New Haven, Conn).

Mandelbrojt, S.: Sur un problème concernant les séries de Fourier. Bull. Soc. Math. France **62**, 143—150 (1934).

The author explains the intuitive reasoning lying behind some of the auxiliary theorems of the memoir in the preceding review. *E. Hille* (New Haven, Conn.).

Zygmund, Antoni: Some points in the theory of trigonometric and power series. Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 586—617 (1934).

A collection of seven independent notes on related topics. 1. On the character of the oscillation of the partial sums of Fourier series. If $s_n(x) \geqq -\varphi(x) \subset L$, then $f(x) = \frac{1}{2}[\overline{\lim} s_n(x) + \underline{\lim}\, s_n(x)]$ almost everywhere. 2. On the absolute convergence of Fourier series. For every α, $0 < \alpha < 1$, there exists a function of bounded variation satisfying a Lipschitz condition of order such that the series $\sum |f_n|^k$ diverges for $k = 2/(2+\alpha)$. — 3. On a theorem of Fejér and Riesz [Math. Z. **11**, 305—314 (1921)]. Let C be the circumference of the unit circle, D an arbitrary diameter. Then if $f(z) = u(z) + i\,v(z)$ is regular for $|z| \leqq 1$

$$\int_D |v(z)|^p\, |dz| \leqq A_p^p \int_C |u(z)|^p\, |dz|,$$

and a similar inequality with $v(z)$ replaced by $v(z)/z$. Here the constant A_p is uniformly bounded in $1 \leqq p \leqq p_0$, so the theorem is not a consequence of a well-known theorem of M. Riesz. 4. On a theorem on conjugate functions. Proof of a theorem of Kolmogoroff [Fundam. Math. **11**, 27—28 (1928)]. 5. On an extreme case in the theory of fractional integrals. $f \subset L^{1,k}$ if $|f|\,[\overset{+}{\log}|f|]^k \subset L$. If $f \subset L^{1,1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, and f_α is the Weyl fractional integral of order α of f, then $f_\alpha \subset L^\beta$, $\beta = 1/(1-\alpha)$, and

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^\beta\, dx\right]^{\frac{1}{\beta}} \leqq M \int_0^{2\pi} |f|\,[\overset{+}{\log}|f|]^{1-\alpha}\, dx + N.$$

6. Some theorems on Fourier constants. Sample: Let $\{\varphi_n(x)\}$ be a uniformly bounded set of orthonormal functions. If

$$\sum |c_n| \left[\log \frac{1}{|c_n|}\right]^{-\alpha} < \infty, \quad \alpha > 0,$$

then $\sum c_n\, \varphi_n(x)$ is the Fourier series of a function $f(x)$ such that $\exp\,[k\,|f|^{1/\alpha}] \subset L$ for every $k > 0$. 7. On a theorem of Paley and Wiener [Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 354—355 (1933); this Zbl. **6**, 257]. New proof. *E. Hille* (New Haven, Conn.).

Differentialgleichungen:

Toscano, Letterio: Sull'iterazione degli operatori xD e Dx. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **67**, 543—551 (1934).

The author investigates the iteration of the operators xD and $Dx\left(D \equiv \frac{d}{dx}\right)$ and in this way derives certain relations between Stirling's numbers $C_{i,j}$, $\lambda_{i,j}$ of first resp. second kind which enter into the developments

$$(xD)^m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{m,i}\, x^i D^i, \quad x^m D^m = \sum_{i=1}^{m} C_{m,i}\,(xD)^i, \quad (Dx)^m = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{m+1,i}\, x^{i-1} D^{i-1}. \quad (1)$$

By induction we find the following factorization formula for $(Dx)^m - (xD)^m$ (analogous to that for algebraic powers):

$$(Dx)^m - (xD)^m = [(Dx) - (xD)] \sum_{i=0}^{m-1} (Dx)^{m-i-1}\,(xD)^i,$$

also the following developments:

$$(Dx)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (xD)^i, \qquad (xD)^m = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} (Dx)^{m-i}. \qquad (2)$$

From (2), applied to special functions (like e^{x-1}), and making use of (1), we get, as stated above, various relations between $C_{i,j}$, $\lambda_{i,j}$. Thus, for ex., $C_{m,i}$ is expressed explicitly, in determinant form, in terms of the λ's, and (expressing $x^m D^m$ as a linear combination of $(Dx)^i$)

$$C_{m+1,r+1} = \binom{r}{r} C_{m,r} - \binom{r+1}{r} C_{m,r+1} \pm \cdots + (-1)^{m-r} \binom{m}{r} C_{m,m}.$$

Note the interesting formula

$$\sigma_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sigma_i \qquad (\sigma_i = \lambda_{i,1} + \lambda_{i,2} + \cdots + \lambda_{i,i}).$$

The author gives many valuable bibliographical references. *J. Shohat.*

Locher, L.: Zur Auflösung eines Systems von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Comment. math. helv. **7**, 47—62 (1934).

In this paper the author discusses the problem of a system of ordinary linear differential equations and derives anew the Heaviside Expansion Theorem. He emphasizes the importance of the initial conditions and his discussion is applicable to the case where the characteristic determinant has multiple roots. No new results are obtained, the object of the paper being a simple, mathematically valid, derivation of the Heaviside Expansion Theorem. The author seems unaware of a paper with the same object by the present referee [Bull. Amer. Math. Soc. **33**, 81—89 (1927)].

Murnaghan (Baltimore).

Drach, Jules: Sur l'intégration logique des équations de la dynamique, à deux variables: Forces centrales. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 749—752 (1934).

Verf. beschäftigt sich mit der Frage, wann eine Differentialgleichung der Form $y'' = h \cdot F(x, y)$ für alle Werte des Parameters h auf Quadraturen zurückführbar ist, und zeigt hier an einigen Beispielen, wie dann das intermediäre Integral von y' und von h abhängt. *Willy Feller* (Stockholm).

Zaremba, S. K.: Sur l'allure des caractéristiques de l'équation différentielle $Y(x, y)\,dx - X(x, y)\,dy = 0$ au voisinage d'un point singulier isolé. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A Nr **5/7**, 197—207 (1934).

(A) Die reellen Funktionen $f(x, y)$, $g(x, y)$ seien in einer Umgebung des Punktes 0,0 stetig, und dieser Punkt sei ein isolierter singulärer Punkt des Systems

$$x'(t) = f(x, y), \qquad y'(t) = g(x, y). \tag{1}$$

Im ersten Teil skizziert Verf. unter Benutzung eines Brouwerschen Hilfssatzes einen direkten Beweis für folgenden Satz, der implizit in allgemeinen Untersuchungen Brouwers über stetige Vektorverteilungen enthalten ist und unter der Voraussetzung, daß durch jeden Punkt nur eine Charakteristik geht, schon früher von Bendixson bewiesen ist: Wenn das System (1) unter der Voraussetzung (A) in einer Umgebung der singulären Stelle keine geschlossene Charakteristik aufweist, gibt es mindestens eine Charakteristik, die in die singuläre Stelle einmündet. — Der zweite Teil enthält folgenden Satz: Ist die Voraussetzung (A) erfüllt, vermitteln ferner die Funktionen $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ in einer Umgebung der singulären Stelle eine eineindeutige Abbildung mit Orientierungsänderung und sind die Kurven $f^2 + g^2 = c$ konvex, so ist der singuläre Punkt ein Sattelpunkt im verallgemeinerten Sinne. *Kamke.*

Tzortzes, A.: Über die Integration einer Klasse Mongescher Gleichungen und über die Beudonschen Charakteristiken verschiedener Ordnung einer partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung mit n unabhängigen Veränderlichen. Bull. Soc. Math. Grèce **15**, Nr 2, 17—35 (1934) [Griechisch].

Das vorliegende Heft enthält nur die Einleitung und den ersten Teil der in der Überschrift genannten Untersuchungen. Zu jedem System Mongescher Gleichungen

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1};\, dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n+1}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{1}$$

wo die f_i homogene Funktionen der $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n+1}$ sind, gehört ein System von $n - 1$ partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1};\, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{2}$$

wobei $p_j = \dfrac{\partial x_j}{\partial x_{n+1}}$ für $j = 1, 2, \ldots, n$. Es heißt nach Goursat das zum System (1) assoziierte System. Wenn das System (2) in Involution ist und ein von zwei unabhängigen Parametern abhängendes vollständiges Integral des Systems (2) bekannt ist, so läßt sich nach Goursat [Bull. Soc. Math. France **33**, 201 (1905)] die allgemeine

Lösung des Systems (1) sofort angeben. Das legt die Frage nahe: Gegeben seien nur $k < n - 1$ Mongesche Gleichungen der Gestalt (1), es sollen $n - k - 1$ weitere in der Weise hinzubestimmt werden, daß das zugehörige assoziierte System in Involution ist. Diese Frage war bisher nur in dem besonderen Falle behandelt worden, daß erstens $k = 1$ ist und daß zweitens außer den $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n+1}$ nur eine einzige der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ in der linken Seite der gegebenen Gleichung (1) auftritt; vgl. Zervos, Mém. Sci. math. **53**, 19—20 (1932). Verf. behandelt jetzt das gestellte Problem ebenfalls für $k = 1$, aber ohne die zweite einschränkende Annahme. Zum Schluß zeigt Verf., daß die von ihm behandelten Mongeschen Gleichungen im allgemeinen nicht in die Klasse der kürzlich von Goursat [Ann. Scuola norm. super. Pisa (2) **1** (1932); dies. Zbl. **3**, 208] behandelten explizit integrablen Mongeschen Gleichungen fällt. — S. auch die Note des Verf. in C. R. Acad. Sci., Paris **189**, 561 (1929). (Vgl. auch Zervos, dies. Zbl. **4**, 8.) *Bessel-Hagen* (Bonn).

Brillouin, Marcel: Équations aux dérivées partielles du 2e ordre. Domaines à connexion multiple. Fonctions sphériques non antipodes. Ann. Inst. H. Poincaré **4**, 173—206 (1933).

This paper consists of 4 chapters. In I the author considers the problem of constructing a series which will yield, formally, the solution of the first boundary value problem for the equation

$$L(V) \equiv aV_{xx} + bV_{xy} + cV_{yy} + a_1V_x + b_1V_y + c_1V + a_2 = 0$$

in the case of a domain R, containing the origin O, such that each ray issuing from O pierces its boundary B in one and only one point. The coefficients $a, \ldots, a_2$ are functions of x, y whose properties are unspecified. Let r, α be the polar coordinates of the variable point. Let B be given by $r = f(\alpha)$, and the boundary values, by $h(\alpha)$. Then (in general) numbers $a_k^{(j)}$ can be so chosen that, for $r = f(\alpha)$, the functions

$$\Phi_k(r, \alpha) = \sum_{j=0}^{k} a_k^{(j)} U_j(r, \alpha), \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

where

$$U_{2k-1} = r^k \sin k\alpha, \qquad U_{2k} = r^k \cos k\alpha, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

are normal orthogonal on $0 \leqq \alpha \leqq 2\pi$. In the case of the Dirichlet problem the suggested solution is then

$$V_0 \equiv \sum_{k=0}^{\infty} B_k \Phi_k(r, \alpha), \quad \text{where} \quad B_k = \int_0^{2\pi} h(\alpha)\, \Phi_k(f, \alpha)\, d\alpha.$$

It is plain that V_0 satisfies Laplace's equation formally; no attempt is made to prove more than this. In the case of the general equation $L(V) = 0$, the suggested solution is

$$V_1 = V_0 + \sum_{k=0}^{\infty} C_k F_k(r, \alpha), \qquad C_k = -\iint_R L(V_0)\, F_k\, dR,$$

where the F_k are certain functions normal orthogonal over R, which vanish on B. This solution seems to be in error formally. In II the same problem is considered for an annular region. In III regions of higher connectivity are studied. This involves a qualitative discussion of "electrostatic coordinates". In IV the author considers some examples of surface spherical harmonics of order 0 and some recurrence and integral formulas for such harmonics of order n, not necessarily integral. The examples are chiefly in connection with the problem: Are there surface spherical harmonics having poles at assigned points? The following example is cited. Let $P_1, P_2, \ldots, P_k$, $2 \leqq k$ be arbitrary points on a sphere S about O as center. Let P be a variable point on S; and let $\varphi_k = \sphericalangle POP_k$. Then, provided $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = 0$,

$$\sum_{j=1}^{k} m_j \log(1 - \cos\varphi_k)$$

is a surface spherical harmonic of order 0. This function obviously has poles at the points $P_1, \ldots, P_k$. *Gergen* (Rochester).

Malmheden, H. W.: Eine neue Lösung des Dirichletschen Problems für sphärische Bereiche. Fysiogr. Sällsk. Lund Förh. **4**, Nr 17, 1—5 (1934).

The solution of the Dirichlet problem for the interval $A_1 < x < A_2$ is equal at each point x of the interval to the number $\{k_2 f(A_1) + k_1 f(A_2)\}/(k_1 + k_2)$, where $k_1 = x - A_1$, $k_2 = A_2 - x$, obtained by linear interpolation between the assigned boundary values $f(A_1)$ and $f(A_2)$. Extending this idea of linear interpolation to n-space, $n = 2, 3, \ldots$, and averaging the possible interpolated values, the author solves, very simply and without recourse to Poisson's integral, the Dirichlet problem for the interior T of an n-dimensional sphere t. Let $f(A)$ be continuous on t. Let P be any point of T. Let ω be a solid angle subtended by a hemisphere of a sphere about P as center. Corresponding to each point A_1 of t, let A_2 be the second point of intersection of the line through A_1 and P with t. Let $k_1 = A_1 P$, $k_2 = A_2 P$; and let

$$U(P) = \frac{1}{\operatorname{meas}\omega}\int\limits_{\omega} \frac{k_2 f(A_1) + k_1 f(A_2)}{k_1 + k_2}\, d\omega\,, \tag{1}$$

where A_1 is a point common to t and the element of integration $d\omega$. Then $U(P)$, defined as f on t, solves the Dirichlet problem for T with boundary values f. Incidentally, the integral in (1) can readily be reduced to Poisson's integral. The author obtains analogous results for the region exterior to t by linear extrapolation. *Gergen* (Rochester).

Müller, Max: Über die Gradienten der Greenschen Funktion. Math. Z. **39**, 265 bis 268 (1934).

Es sei $G(x, y; \xi, \eta)$ die in einem einfach zusammenhängenden Bereiche für den Punkt ξ, η gebildete Greensche Funktion des Ausdrucks $\Delta u = 0$. Es werden Integrale der Gradienten von G: $\iint \sqrt{G_x^2 + G_y^2}\, dx\, dy$ bzw. $\iint \sqrt{G_\xi^2 + G_\eta^2}\, dx\, dy$ betrachtet, genommen über einen Bereich $\mathfrak{B}(c_1, c_2)$ zwischen zwei Niveaukurven $G = c_1$, $G = c_2$ mit dem Flächeninhalt F. Ausgehend von der Relation $G = -\log|f(z)|$, wobei $f(z)$ die analytische Funktion ist, die den gegebenen Bereich auf den Einheitskreis und den Punkt ξ, η in den Nullpunkt abbildet, erhält der Verf. Abschätzungen dieser Integrale:

$$\iint \sqrt{G_x^2 + G_y^2}\, dx\, dy \leqq 2\sqrt{\pi F}$$

$$\iint \sqrt{G_\xi^2 + G_\eta^2}\, dx\, dy \leqq \tfrac{4}{3}\,|f'(x + iy)|\, F\,.$$

Die erste Ungleichung stellt eine Verschärfung eines Resultates von G. C. Evans [Bull. Amer. Math. Soc. **38** (1932); dies. Zbl. **6**, 165] dar, die zweite eine Ergänzung zu früheren Untersuchungen des Verf. *Lüneburg* (Leiden).

Rosenblatt, Alfred: Sur l'application de la méthode des approximations successives de M. Picard à l'étude des équations du second ordre elliptiques et non linéaires à trois variables indépendantes. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 921—923 (1934).

Rosenblatt, A.: Sur les équations biharmoniques non linéaires à deux variables indépendantes. Bull. Sci. math., II. s. **58**, 248—264 (1934).

Um die Konvergenz der Methode der sukzessiven Approximationen für die Gleichung $\Delta\Delta u = F(x, y, u, u_x, \ldots, u_{yy})$ in einem Gebiete D, mit den Randbedingungen $u = \frac{du}{dn} = 0$, unter passenden (für diese Art von Problemen sonst sehr allgemeinen) Voraussetzungen zu beweisen, bildet Verf. das Gebiet D auf eine Kreisscheibe konform ab, womit das Problem mittels mehrerer Abschätzungen auf den bereits untersuchten Fall, daß D ein Kreis ist, zurückgeführt wird. *G. Cimmino* (Napoli).

Lamb, H.: The propagation of waves of expansion in a tube. Proc. London Math. Soc., II. s. **37**, 547—555 (1934).

The velocity potential for a concentrated line-source along the axis of z, of strength M per unit length and midway between the planes $y = \pm b$, is given by the equation

$$4b\Phi = M\{(ik)^{-1}\exp ik(ct - x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^{-1}\cos(n\pi\eta)\exp(ikct - \mu_n x)\},$$

where $b\eta = y$ and $b^2 \mu_n^2 = n^2 \pi^2 - k^2 b^2$. To discuss the case of a transient line-source the author takes $\pi M = Q\, c\, dk \cdot e^{-kc\tau}$ where τ is very small and integrates the expression for Φ from $k = 0$ to $k = \infty$. The first term in the series gives a progressive wave for which the potential, multiplied by $4\pi b$, is $Q\, c$ times the angle whose tangent is $(ct - x)/c\tau$. The other terms give integrals which, when $\tau = 0$, can be discussed very prettily by means of contour integration, the contours being similar to those used by Poincaré for a related integral. The physical predictions are easily verified and the final result is expressed in the form of a Schlömilch series whose sum was found by G. N. Watson. It can be interpreted physically by means of reflexions at the parallel walls and the known law for the effect in free space of a transient cylindrical wave. *H. Bateman* (Pasadena).

Green, George: Sources of various kinds near a plane boundary separating two different media. Philos. Mag., VII. s. **18**, 625—640 (1934).

Es werden Probleme der Wärmeleitungs- und der Schwingungsgleichung behandelt, die entstehen, wenn in der Nähe einer Trennungsebene zwischen zwei verschiedenen Medien Quellen verteilt sind und die von den Quellen ausgehenden Wellenzüge an der Ebene reflektiert und gebrochen werden. Es werden ebene, linienförmig verteilte und punktförmige Quellen behandelt. Methodisch schließt sich die Arbeit an eine Reihe früherer Arbeiten des Verf. (vgl. dies. Zbl. 2, 365) an. *E. Rothe* (Breslau).

Pastori, Maria: Equilibrio di lastre e membrane elastiche. Rend. Circ. mat. Palermo **58**, 1—48 (1934).

Die Differentialgleichungen des Gleichgewichts und die Randbedingungen für die nichtisotropen elastischen Schalen und Platten werden mit Hilfe der Methoden des absoluten Differentialkalküls entwickelt. In der Einleitung sind die nötigen Formeln und Begriffe für Tensoren entwickelt, welche in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit V_3 enthalten, aber nur in den Punkten einer darin eingebetteten V_2 gegeben sind. *A. Lurje* (Leningrad).

Spezielle Funktionen:

Mayr, Karl: Über die Iteration von linearen Funktionaloperationen. S.-B. Akad. Wiss. Wien **143**, 197—212 (1934).

Das Prinzip der Erzeugung von Funktionen (insbesondere Polynomen) durch Iteration linearer Funktionaloperationen, die auf einfache Grundfunktionen angewandt werden, gibt dem Verf. einen neuen und sehr einfachen Zugang zu Klassen von Polynomen, die Fuchsschen Differentialgleichungen 3. Ordnung genügen und als sinngemäße Verallgemeinerungen der Jacobischen und Laguerreschen Polynome anzusprechen sind. Der Verf. iteriert in dieser Arbeit allgemeine Funktionaloperationen der Gestalt

$$A\{f\} = x^a\{\alpha f + \beta x f' + \gamma x^2 f''\},$$

wobei $f(x) = e^x x^\sigma$ bez. $= \frac{x^\sigma}{(1+x)^\alpha}$ angenommen wird. Der Vorteil seiner Methode, die er früher ausführlich auseinandersetzte (dies. Zbl. 5, 162) und zum Studium der Besselschen Funktionen verwandte, besteht darin, daß sich Aussagen über Orthogonalitätseigenschaften, Nullstellen u. dgl. oft unmittelbar aus der Natur der iterierten Operation ergeben. Iterationen in bezug auf Funktionen von mehreren Veränderlichen führen den Verf. u. a. dazu, den Beweis einer Vermutung von K. Friedrichs und H. Lewy über Potenzreihen mit lauter positiven Koeffizienten in Evidenz zu setzen (vgl. dies. Zbl. 7, 344 [Szegö und Kaluza]). *v. Koppenfels* (Hannover).

Walther, A.: Besselsche Funktionen. Z. Ver. Deutsch. Ing. **78**, 1297—1299 (1934).

Venkatachaliengar, K.: On the reducibility of the general elliptic integral into logarithms. J. Indian Math. Soc., N. s. **1**, 59—65 (1934).

Verf. ist bestrebt, hinreichende Bedingungen für die in der Überschrift genannte Reduzibilität eines elliptischen Integrals zu gewinnen, die auf die transzendenten Größen η, ω usw. keinen Bezug nehmen. Die von ihm gewonnenen hinreichenden

Bedingungen erscheinen freilich zum Teil zunächst als Bedingungen in den transzendenten Größen; Verf. gibt aber einen Weg an, sie in algebraische Bedingungen umzusetzen. Leider ist es Ref. nicht gelungen, festzustellen, was eigentlich das Gesamtsystem der Bedingungen des Verf. ist. *Bessel-Hagen* (Bonn).

Gheorghiu, Gh. Th.: Sur les fonctions métasphériques. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 768—769 (1934).

The author considers the function

$$a_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_p}(ix_1, ix_2, \dots ix_p; \lambda) =$$

$$= \frac{2^{p\lambda} i^{p\lambda - N}}{\Gamma(-\lambda)} \int_0^\infty e^{-uX} u^{-\lambda-1} C_{\nu_1}(uX_1)\, C_{\nu_2}(uX_2) \dots C_{\nu_p}(uX_p)\, du$$

where $N = \sum_{i=1}^{p} \nu_i$, $X_k = x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_{k+1} \dots x_p$, and $C_\nu(u)$ is a cylinder function. With the notation of a previous paper (this Zbl. **9**, 311) it is shown that, when the ν are not integers, the function can be expressed linearly in terms of the functions $A_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_p}(x_1, x_2, \dots x_p; \lambda)$ previously considered. The particular case when there is only one variable x, and ν is a positive integer, is discussed. *W. N. Bailey.*

Chowdhury, Amalchandra: Reduction of some hyperelliptic integrals of genus (Geschlecht) five to elliptic integrals. Bull. Calcutta Math. Soc. **25**, 159—166 (1934).

Verf. zeigt, wie spezielle hyperelliptische Integrale vom Geschlecht 5 durch geeignete Substitutionen der Integrationsvariablen auf elliptische Integrale reduziert werden können. Es handelt sich um $\int \frac{x^a\,dx}{\sqrt{l x^{12} + m x^6 + n}}$ mit $0 \leqq a \leqq 5$, a ganz, wo l, m, n die Vorzeichenkombinationen $\pm \mp \pm$ oder $\pm 0 \pm$ aufweisen, ferner um das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^{12} - 1}}$. *Petersson* (Hamburg).

Variationsrechnung:

Damköhler, Wilhelm: Über indefinite Variationsprobleme. Math. Ann. **110**, 230 bis 283 (1934).

The principal result of this paper is the theorem: Let B be a region of the xy-plane enclosed by a Jordan curve, and let

$$J(C) = \int_C g(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt$$

be an integral in parametric form which is to be minimized. Let m denote the lower bound of the ratio $J(C)/L(C)$ in the class of all closed rectifiable curves C in the region B, where $L(C)$ is the length of C. Then for every $\varepsilon > 0$ there is a polynomial $\Phi(x, y)$ such that

$$g(x, y, \cos\theta, \sin\theta) + \Phi_x(x, y)\cos\theta + \Phi_y(x, y)\sin\theta \geqq m - \varepsilon$$

for (x, y) in B and for all θ. When $m > 0$ this implies that the minimum problem may be replaced by an equivalent one which is positive definite. *Graves* (Chicago).

Schwarz, Josefa v.: Das Delaunaysche Problem der Variationsrechnung in kanonischen Koordinaten. Math. Ann. **110**, 357—389 (1934).

The Delaunay problem of determining the curves of maximum and minimum length in the class of curves in space having curvature $= 1$ and satisfying given boundary conditions is reduced to a Lagrange problem by the introduction of additional variables. A Hamilton function is introduced and the extremals of the problem are determined by integration of the canonical equations. The so-called "Weierstrassian extremals" are shown to belong to the class 0 of Caratheodory if they are normal, and to the class 1 if abnormal. Circle arcs are shown to belong to the class 2. Extremizing arcs on which the second derivatives of the coordinates have one or more ordinary discontinuities (called "gestückelte Extremalen") are shown to be always made up of circle arcs. These may be of class 0, 1, or 2. The class of admissible curves is extended to include all those having curvature $\leqq 1$, and this problem is treated in the same fashion as the preceding by the introduction of an additional variable. The extremals are the same as before, except that straight lines may now be extremals and "die gestückelten Extremalen" may be made up of straight lines and circles. When the tangent at one end point is variable, all the extremals satisfying the transversality conditions are made up of straight lines and circles. The case when both end tangents are variable is still simpler. Finally, the author transforms the problem (following Schwarz) into an isoperimetric problem by use of the spherical indicatrix of the tangents of the curve, and it is shown that no new extremizing curves are found when the class of admissible curves is enlarged to include all curves such that on every sub-arc the ratio of the angle between the tangents at the end points to the length of the sub-arc is $\leqq 1$. *Graves* (Chicago).

McShane, Edward James: Existence theorems for ordinary problems of the calculus of variations. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **3**, 287—315 (1934).

(For part I, see Zbl. **9**, 23). The author obtains a number of existence theorems which complete the theory of the non-parametric problem in important respects. For example: If

$$I(y) = \int F(x, y, y')\,dx$$

is positive quasi-regular and

$$\lim_{x'=0} x' F(x, y, y'/x') = \infty \tag{1}$$

and if K_a is a bounded complete class of absolutely continuous functions, then $I(y)$ has a minimum on K_a. In succeeding theorems, exceptional curves on which the condition (1) fails to hold are permitted, and extensions to unbounded classes K_a are considered. In other theorems, the condition (1) is replaced by other more complicated assumptions. In particular, one theorem includes the case when the integrand F has the form $F = \Phi(y)\sqrt{1 + y'^2}$, and in this theorem it is shown that the minimizing functions satisfy a Lipschitz condition. In several cases theorems with weaker hypotheses are given for problems in the plane. *Graves* (Chicago).

McShane, E. J.: On the analytic nature of surfaces of least area. Ann. of Math., II. s. **35**, 456—475 (1934).

Consider a surface S with equations $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, these functions being continuous in a Jordan region B. Suppose the above equations carry the boundary of B in a one-to-one way into a Jordan curve C. Suppose that the area, in the Lebesgue sense, of S is a minimum with respect to all similar surfaces bounded by the same curve C. The purpose of the present paper is to find further restrictions on S which imply that S is a minimal surface in the sense of differential geometry. Let B_0 be a subregion of the region B in which the equations of S are considered. Suppose that the coordinate functions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ are all three constant on the boundary of B_0, but are not all three constant in B_0. Then the portion of S, corresponding to B_0, is called an excrescence defined by B_0. If $\bar{x}(u, v)$, $\bar{y}(u, v)$, $\bar{z}(u, v)$ are the functions which are equal in B_0 to the constant values of $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ on the boundary of B_0 and which are equal to $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ otherwise, then the surface with equations $x = \bar{x}(u, v)$, $y = \bar{y}(u, v)$, $z = \bar{z}(u, v)$ is said to result from S by removal of the excrescence defined by B_0. It is then shown that all excrescences of S can be removed, and that there results in this manner a surface S^* which is bounded by the same Jordan curve as S, and whose area is also a minimum (it is presupposed that the areas of all surfaces considered are finite). Finally, S^* is free of excrescences. There follows then that S^* is a saddle surface. Roughly speaking, this means that no subregion of S^* is bounded by a plane curve, unless the subregion is a plane region (otherwise, the area of S^* could be made smaller by replacing a certain subregion by a plane region). But, if a saddle surface is bounded by a Jordan curve and has a minimum area with respect to that curve, then the surface is a minimal surface in the sense of differential geometry, as proved by McShane [Parametrizations of saddle surfaces.

Trans Amer. Math. Soc. **35**, 716—733 (1933); this. Zbl. **7**, 119]. Summing up: If a surface S, bounded by a Jordan curve, has a minimum area, then the surface S^* resulting by removal of all excrescences is a minimal surface. In particular, since a Jordan surface (one-to-one and continuous image of $u^2 + v^2 \leqq 1$) is clearly free of excrescences, there follows: If a Jordan surface has a (finite) minimum area, then the surface is a minimal surface in the sense of differential geometry. The paper contains a number of further results and remarks of interest and importance, which restrictions of space do not permit to discuss here. *Tibor Radó* (Columbus, Ohio).

Manià, Basilio: Sopra una classe particolare di integrali doppi del calcolo delle variazioni. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **13**, 91—104 (1934).

The author proves the existence of an absolute minimum for double integrals of the form
$$I = \int\int F(x, y, z, \partial z/\partial x)\, dx\, dy.$$
Such integrals are excluded in the existence theorems for double integrals previously given by Tonelli (see Zbl. **6**, 118). Besides certain restrictive assumptions on the $x\,y$-region over which the admissible surfaces are defined, and on the boundary values, it is assumed that for each y the simple integral
$$I(y) = \int F(x, y, z, \partial z/\partial x)\, dx$$
has an absolute minimum value given by an extremal $\Gamma(y)$. That the extremals $\Gamma(y)$ generate an admissible surface for the integral I is shown by using a theorem on the differentiability of solutions of ordinary second order differential equations with respect to the values they take at the two ends of an interval and with respect to a parameter. This theorem is a modification of results due to Picard and to Lichtenstein. By combination with the well-known existence theorems and other results of Tonelli for simple integrals, other existence theorems for double integrals into which simple integrals do not enter explicitly are readily obtained. A simpler theorem on the existence of a "minimum in the small" is also given. It is noted that integrals such as
$$\int\int F(x, y, z, a\,\partial z/\partial x + b\,\partial z/\partial y)\, dx\, dy$$
may be transformed to the form given above. An example is given to show the necessity of restrictions on the shape of the xy-region. *Graves* (Chicago).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Blume, Johannes: Zur axiomatischen Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Münster i. W.: Diss. 1934. 27 S.

Es wird der (bekanntlich a priori aussichtlose) Versuch durchgeführt, die Häufigkeitsdefinition der Wahrscheinlichkeit auf der Betrachtung endlicher Wiederholungsreihen aufzubauen. Die Wahrscheinlichkeiten sollen durch die entsprechenden Häufigkeiten näherungsweise festgelegt sein. Die vier Grundoperationen sowie der Wortlaut und Beweis der Fundamentalsätze werden aus der v. Misesschen Theorie wörtlich übernommen. Da aber über den Grad der Annäherung keine bestimmten Festsetzungen getroffen werden (und aus elementaren Gründen auch nicht getroffen werden können), wird die ganze Theorie unhaltbar. *A. Khintchine* (Moskau).

Bower, O. K.: Note concerning two problems in geometrical probability. Amer. Math. Monthly **41**, 506—510 (1934).

Wilson, Edwin B.: Boole's Challenge problem. J. Amer. Statist. Assoc. **29**, 301 bis 304 (1934).

A solution of this classical problem (see J. M. Keynes, Treatise on Probability, pp. 186—189) is given by quite elementary methods. An inequality governing the solution in addition to those of Keynes is given and there is a short numerical discussion. Three typographical errors, in particular c_1c_2 for $c_1 + c_2$ on p. 303, may prove bothersome to some readers. *C. C. Craig* (Ann Arbor, Michigan).

Mirimanoff, D.: Sur un théorème de Cournot. Enseignement Math. **32**, 151—154 (1933).

Mirimanoff, D.: Sur un théorème de Cournot. II. Enseignement Math. **32**, 297 bis 303 (1933).

In dem Lehrbuch von Cournot wurden bezüglich der Wahrscheinlichkeiten

$$P(m, s) = \binom{m}{s} p^m q^{s-m} \qquad (q = 1 - p)$$

dafür, daß bei s unabhängigen Versuchen mit konstanter Wahrscheinlichkeit p sich m günstige Resultate ergeben, folgende Aussagen gemacht: Betrachtet man den Quotienten $\frac{P(m', s')}{P(m, s)}$ für $s' > s$ und für alle diejenigen (zwischen 0 und s liegenden) m, für die $m' = m\frac{s'}{s}$ ganzzahlig ausfällt, so ist dieser Quotient erstens stets kleiner als 1 und nimmt zweitens bei festem s und s' ab, wenn m/s (nach oben oder unten) sich von p entfernt. — Von den vorliegenden beiden Noten des Verf. ist die erste einem elementaren, auf einem eleganten arithmetischen Hilfssatz beruhenden Beweis der ersten Aussage gewidmet, während die zweite auf Grund der Eulerschen Summenformel die zweite Aussage beweist. *Bruno de Finetti* (Trieste).

Lévy, Paul: Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires enchaînées. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 627—629 (1934).

Verf. betrachtet eine Folge abhängiger zufälliger Größen u_n, für welche die bedingten Wahrscheinlichkeiten $E_{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}}(u_n)$ immer gleich Null sind. Einige Resultate über die Gültigkeit des Gaussschen Grenzwertsatzes in diesem Falle und die Wahrscheinlichkeit der Konvergenz der Reihe $\sum u_n$ werden ohne Beweise mitgeteilt. *A. Kolmogoroff* (Moskau).

Lévy, Paul: Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **3**, 337—366 (1934).

Le mémoire présent contient des démonstrations complètes des certains résultats énoncés par l'auteur dans trois notes [C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 786—788, 1203—1205, 1661—1662 (1934); ce Zbl. **8**, 367, **9**, 27 et 73]. Pour éviter toute confusion possible, nous répétons ici ce qui est maintenant démontré. On considère des fonctions aléatoires $x(t)$ nulles pour $t = 0$ et définies dans l'intervalle $(0, T)$. La supposition essentielle est que l'accroissement Δx correspendant à l'intervalle $(t, t + \Delta t)$ est indépendant des valeurs de l'x pour $t' \leqq t$. On démontre dans ce cas que $x(t)$ est une somme d'une fonction $z(t)$ indépendante de l'hasard et d'une fonction aléatoire $y(t)$ n'ayant, avec la probabilité un, qu' un ensemble dénombrable des points de discontinuité, tous ces points étant au surplus de la première espèce. On démontre aussi que $y(t)$ peut être représentée comme la somme $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$ de trois termes indépendants, $y_1(t)$ correspondant aux discontinuités fixes de $y(t)$, $y_2(t)$ étant continu et gaussien et $y_2(t)$ correspondant aux discontinuités mobiles de $y(t)$. Le terme $y_3(t)$ est complètement défini par la fonction des sauts $N(h, t)$. On obtient en effet pour la fonction caractéristique $E(e^{izy_t}) = \Phi(z, t)$ l'expression suivante:

$$\log \Phi(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{izu} - 1 - iz \frac{u}{1 + u^2} \right] d_u N(u, t).$$

Ce résultat fondamental est considéré par l'auteur comme une extension d'une formule de Kolmogoroff. Le cas spécial des lois stables est étudié dans le § 9. *A. Kolmogoroff* (Moskau).

Fréchet, M.: Sur l'équation fonctionnelle de S. Chapman et sur les problèmes des probabilités en chaîne. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **20**, 95—99 (1934).

Suivant Kolmogoroff (Math. Ann. **104**, 415; ce Zbl. **1**, 149) une fonction qui satisfait à l'équation fonctionnelle E (considérée d'abord par S. Chapman sous une forme différente) vérifie en même temps une équation aux dérivées partielles du type parabolique pourvu qu'elle satisfasse aux certaines conditions complémentaires. Si ces conditions ne sont pas satisfaites, une solution de E peut vérifier une autre équation aux dérivées partielles. L'auteur donne d'abord une solution formelle de E sous la forme

$$f(M, s, P, t) = \sum_{i=1}^{i=+\infty} A_i(M, s)\, B_i(P, t)$$

où M et P sont deux points dans une région V de l'espace à ν dimensions et où les fonctions A_i et B_i forment un système biorthonormé sur V. Il donne ensuite la solution particulière suivante de E [où $\nu = 1$ et où V est l'intervalle $(0, \pi)$]

$$f(x, s;\, y, t) = \frac{1}{\pi}\left\{1 + 2 \sum_{n=1}^{n=+\infty} \left[\frac{a(s)}{a(t)}\right]^n \cos nx \cos ny\right\} \tag{1}$$

$a x'$ étant une fonction positive croissante, et il remarque que (1) ne rentre pas dans la classe des solutions qui satisfont aux éq. aux dér. part. paraboliques. J'ai donné (C. R. Acad. Sci. URSS **1934**, 395; ce Zbl. **9**, 263) une solution simple de E qui se déduit de (1) en posant $a(s) = s$. Cette solution simple est une fonction harmonique d'un point dont t et y sont les coordonnées polaires. Supposons que, dans la formule (1), $a(s)$ soit une fonction deux fois dérivable; la fonction (1) vérifiera alors l'équation $\Delta u = 0$ écrite en coordonnées polaires t, y où il faut introduire $a(t)$ au lieu de t ce qui donne

$$\frac{\partial^2 f}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\left(\frac{a'}{a} - \frac{a''}{a'}\right) + \frac{a'^2}{a^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

a' et a'' étant les dérivées de $a = a(t)$. *B. Hostinský* (Brno).

Fisher, R. A.: Probability likelihood and quantity of information in the logic of uncertain inference. Proc. Roy. Soc. London A **146**, 1—8 (1934).

Jeffreys hat [Proc. Roy. Soc. London A **138** (1932); dies. Zbl. **5**, 368] eine Methode entwickelt, wie man in gewissen Fällen die Verteilung des Präzisionsmaßes a priori bestimmen kann. Gegen die Fishersche Kritik [Proc. Roy. Soc. London A **139** (1933); dies. Zbl. **6**, 174] hat Jeffreys eingewandt, daß Fisher das Grundprinzip falsch verstanden habe (vgl. dies. Zbl. **7**, 71). F. zeigt nun an einem Beispiel, daß die andere denkbare Interpretation zu einem falschen Satz führt, und hält nach wie vor die Jeffreyssche Arbeit für hinfällig. — Anschließend eine Erwiderung auf die polemischen Bemerkungen von Jeffreys über den Wahrscheinlichkeitsbegriff; während F. die Wahrscheinlichkeiten aus relativen Häufigkeiten ableitet, definiert sie Jeffreys subjektiv und von den zufälligen augenblicklichen Kenntnissen abhängig. *Willy Feller* (Stockholm).

Bartlett, M. S.: The vector representation of a sample. Proc. Cambridge Philos. Soc. **30**, 327—340 (1934).

The author considers in a given universe of n dimensions a variable vector S analyzed first into $S = U + V$, where U is in a given included space of p ($\leqq n$) dimensions, V being the residual component, and then into $S = X + Y + V$, where X is the component of U in a given subspace of q ($\leqq p$) dimensions. The components may be taken to form an orthogonal set, so that $S^2 = X^2 + Y^2 + V^2$, a square such as S^2 denoting $|SS'|$. The effect of the component X is to be eliminated. This generalizes the interpretation by R. A. Fisher, Biometrika **10**, 507—521 (1915), of a sample with n observations as being a vector in an n-space. The normal law as here interpreted is the unique law for which chance components are equally likely in all directions. As a test of the significance of Y is proposed the criterion, $1 - \Lambda$, where $\Lambda = V^2/(Y+V)^2$. Statistical illustrations are given indicating the value of a criterion of this sort. References include those to related papers of J. O. Irwin (this Zbl. **2**, 200), S. S. Wilks (this Zbl. **6**, 23) and of the author (this Zbl. **9**, 121). *Albert A. Bennett.*

Thomson, Godfrey H.: The orthogonal matrix transforming Spearman's two-factor equations into Thomson's sampling equations in the theory of ability. Nature **134**, 700 (1934).