sind. Um die Differenzierbarkeit der Funktionen $f_{[y]+t}^{(jk)}$, $l_{[y]+t}^{(j)}$ nicht voraussetzen zu brauchen, führt er den Begriff der „Integralintensität" $M_{[y]+t}^{(jk)} = \int\limits_0^t \frac{d f_{[y]+t}^{(jk)}}{l_{[y]+t}^{(k)}}$ ein. $M_{[y]+t}^{(jk)}$ läßt sich bei Voraussetzung der Differenzierbarkeit auf die gewöhnliche Intensität $\mu_{[y]+t}^{(jk)}$ zurückführen. Für die Überlebensordnungen $l_{[y]+t}^{(j)}$ erhält er dann ein System von linearen Integralgleichungen, in denen Stieltjessche Integrale auftreten. Den Spezialfall ($n = 1$) hat der Verf. schon in früheren Arbeiten behandelt (vgl. dies. Zbl. 1, 345; 4, 301). — Auf Grund der oben konstruierten Tafel betrachtet er dann eine Versicherungsform, die alle möglichen Versicherungskombinationen als Spezialfälle enthält. Er leitet die Formel für die Reserve und die Prämie ab, wobei immer wieder die Stieltjesschen Integrale verwendet werden. Die allgemein abgeleiteten Ergebnisse spezialisiert er noch für die Invaliden- und Krankenversicherung.

Löer (Göttingen).

Loewy, Alfred: Die Integration eines linearen Differentialsystems und ihre finanztheoretische Bedeutung. Giorn. Mat. Finanz., II. s. 4, 57—66 (1934).

Die Integration eines linearen homogenen und unhomogenen Differentialsystems läßt sich mit Hilfe des Matrizenkalküls durch unendliche Reihen mit Koeffizienten, die durch iterierte Quadraturen bestimmt werden, ausführen. Diese Darstellung ist zinstheoretisch folgendermaßen deutbar: In n Kassen befinden sich ursprünglich den Anfangswerten der Integrale entsprechende Summen; diese werden auf Zinseszins an einen Schuldner so ausgeliehen, daß er den Betrag, den er jeweils der k-ten Kasse schuldet, kontinuierlich mit den Intensitäten, die durch die Koeffizienten des Differentialgleichungssystems gegeben sind, gleichzeitig an die n Kassen, nicht nur an eine derselben, zu verzinsen hat. Auch durch diese ausschließlich finanztechnische Betrachtungsweise gelangt man zu einer vollständigen Integration des Differentialsystems. *Autoreferat.*

Geometrie.

Dingler, Hugo: H. Helmholtz und die Grundlagen der Geometrie. Z. Physik **90**, 348—354 (1934).

Verf. vergleicht die von Helmholtz mit Hilfe des Begriffes der freien Beweglichkeit eines starren Körpers durchgeführte Begründung der Geometrie mit dem eigenen Vorgehen in seinem Buche „die Grundlagen der Geometrie", Stuttgart 1933. Verf. erhielt dort im Gegensatz zu Helmholtz nur die euklidische Geometrie, weil er neben den Voraussetzungen von Helmholtz noch eine weitere Eigenschaft der Translationen forderte, die den bekannten Zusammenhang zwischen Parallelismus und Streckenkongruenz herstellt. Diese Eigenschaft wird hier mit dem Begriff der „isometrischen Translation" in nicht ganz zwingender Weise umschrieben.

K. Reidemeister (Marburg a. L.).

● **Steinitz, Ernst: Vorlesungen über die Theorie der Polyeder unter Einschluß der Elemente der Topologie. Aus dem Nachlaß hrsg. u. erg. v. Hans Rademacher. (Die Grundlehren d. math. Wiss. in Einzeldarstell. mit besonderer Berücksichtigung d. Anwendungsgeb. Hrsg. v. R. Courant. Gemeinsam mit W. Blaschke, M. Born u. B. L. van der Waerden. Bd. 41.)** Berlin: Julius Springer 1934. VIII, 351 S. u. 190 Abb. RM. 27.—.

Die Grundlage dieses Buches bildet ein unvollendetes Manuskript von Steinitz, das zum großen Teil eigene Untersuchungen enthält, die — abgesehen von einer Skizze im Enzyklopädieartikel „Polyeder und Raumeinteilungen" — hier zum erstenmal publiziert werden. Vom Herausgeber sind die z. T. erheblichen Lücken namentlich im letzten Teil ausgefüllt worden, wozu als Anhaltspunkte neben dem erwähnten Artikel Vorlesungsnotizen von Steinitz gedient haben. Der Herausgeber hat ferner einige kleine erläuternde oder ergänzende Zusätze in den Steinitzschen Text eingefügt und die zahlreichen Figuren entworfen. Im ganzen ist so ein Buch entstanden, das sich durch ungewöhnlich klare und sorgfältige Darstellung und nicht zuletzt durch seinen weit über das Bekannte hinausreichenden Inhalt auszeichnet. —

Der 1. Abschnitt „Historische Übersicht über die Entwicklung der Lehre von den Polyedern" beginnt mit einer Darstellung der Eulerschen, auf eine Morphologie der Polyeder abzielenden Untersuchungen. Für den Eulerschen Satz werden mehrere Beweise wiedergegeben. Dann wird gezeigt, wie sich an Hand der Frage nach seinem Gültigkeitsbereiche die Flächentopologie entwickelt, und diese — zunächst unter weitgehender Berufung auf die Anschauung — dargestellt. Es folgt Cauchys Satz über die Starrheit der konvexen Polyeder. Der metrische Teil des Beweises mit Ausfüllung einer bei Cauchy bestehenden Lücke wird an dieser Stelle gebracht, während der kombinatorisch-topologische seinen natürlichen Platz im 2. Abschnitt gefunden hat. Nach einer kritischen Darstellung von Legendreschen Untersuchungen über die Konstantenzahl eines Polyeders wird nun der Hauptgegenstand des Buches, das hier von Steinitz erstmalig gelöste Problem der kombinatorischen Kennzeichnung der konvexen Polyedertypen, herauspräpariert. Hierbei wird auch kurz auf die älteren, insbesondere von Cayley, Kirkman, Möbius, Eberhard herrührenden Untersuchungen eingegangen, die für Dreiecks- und Dreikantspolyeder (jedoch nicht für den allgemeinen Fall) zu abschließenden Ergebnissen geführt haben. — Gegenstand der Untersuchungen des 2. Abschnitts sind kombinatorische Schemata, die aus Elementen von dreierlei Art: Ecken, Kanten und Flächen bestehen. Ist in einem solchen System für je zwei verschiedenartige Elemente festgesetzt, ob sie „inzident" sind oder nicht, derart, daß eine Fläche und eine Ecke stets inzident sind, wenn es eine mit beiden inzidente Kante gibt, so heißt es ein geordneter Komplex. Hiernach ist klar, wann zwei geordnete Komplexe als isomorph oder vom gleichen Typus zu bezeichnen sind. Solche werden im folgenden nicht unterschieden. Ein geordneter Komplex ist zusammenhängend, wenn sich je zwei Elemente durch eine Kette von Elementen verbinden lassen, derart, daß je zwei benachbarte inzident sind. — Bei Untersuchungen der geordneten Komplexe spielen die als Kantenkomplexe bezeichneten Teilkomplexe ohne Flächen eine wesentliche Rolle. Über sie werden einige Sätze allgemeiner Art bewiesen, und es wird der Begriff des Polygons als endlicher zusammenhängender Kantenkomplex, bei dem jede Ecke mit genau zwei Kanten inzident ist, eingeführt. — Die zusammenhängenden geordneten Komplexe sind noch viel zu allgemein. Die zunächst vorzunehmenden Einschränkungen bezwecken im wesentlichen zu garantieren, daß 1. die Teilkomplexe, die durch Fortlassen der Elemente einer Art entstehen, noch zusammenhängend sind, und daß 2. die mit einer Fläche inzidenten Ecken und Kanten ein Polygon im obigen Sinne bilden. 1. ergibt sich aus der Forderung des „vollkommenen Zusammenhangs": Der geordnete Komplex soll von jeder Art wenigstens ein Element enthalten, und er selbst sowie jedes System der mit einer Ecke oder Fläche inzidenten Elemente soll zusammenhängend sein. 2. ist bei den „polyedrischen Komplexen" erfüllt, das sind geordnete Komplexe, bei denen jede Kante mit zwei Ecken und mit einer oder zwei Flächen inzident ist, bei denen ferner zu jedem inzidenten Paar (Ecke, Fläche), kurz Winkel genannt, genau zwei Kanten, die Schenkel, existieren, die mit beiden Elementen des Paares inzident sind. Die endlichen, vollkommen zusammenhängenden, polyedrischen Komplexe, kurz normalen Komplexe, können nun als kombinatorischer Ersatz der topologischen Flächen dienen. Sie zerfallen in orientierbare und nichtorientierbare. Es ist bei ihnen sinnvoll zwischen inneren und Randelementen zu unterscheiden. Der gesamte Rand besteht aus endlich vielen Polygonen. Wenn r deren Anzahl ist, ist die Eulersche Charakteristik $\leqq 2 - r$. Die normalen Komplexe der Charakteristik 2 sind geschlossen und orientierbar; sie heißen Eulersche Komplexe. Zum Aufbau der Flächentopologie ist nun noch ein die Homöomorphie ersetzender Äquivalenzbegriff einzuführen, was folgendermaßen geschieht: Zwei normale Komplexe heißen benachbart, wenn einer von ihnen aus dem anderen durch eine „Spaltung" hervorgeht. Eine Spaltung besteht entweder in der Zufügung einer Ecke auf einer Kante, wodurch die Kante in zwei zerlegt wird, oder einer Kante, die zwei mit einer Fläche inzidente Ecken verbindet, wodurch die Fläche zerlegt wird. Es ist klar, wie diese Prozesse rein kombinatorisch zu formulieren sind. Zwei normale Komplexe heißen nun äquivalent, wenn sie durch eine Kette von normalen Komplexen derart verbunden werden können, daß je zwei aufeinanderfolgende Komplexe benachbart sind. Im Sinne dieser Begriffsbildungen wird dann die Topologie der Flächen entwickelt und insbesondere der Hauptsatz bewiesen: Zwei normale Komplexe sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie in Ränderzahl, Charakteristik und in Orientierbarkeit bzw. Nichtorientierbarkeit übereinstimmen. — Die bisher betrachteten Schemata lassen im allgemeinen noch keine Realisierung als ebenflächige Gebilde im Raume zu, z. B. weil bei ihnen noch Zweiecke auftreten können. Dies wird durch die Forderung ausgeschlossen, daß jeder Winkel (vgl. oben) durch seine Schenkel eindeutig bestimmt sein soll. Aber auch diese nun als Polyeder bezeichneten Komplexe lassen sich noch nicht als konvexe Polyeder realisieren. Hierzu werden zwei weitere Einschränkungen gemacht, deren Notwendigkeit auf der Hand liegt: 1. Das Polyeder soll keine „übergreifenden Elemente" besitzen, d. h.: Sind zwei Ecken mit zwei Flächen inzident, so soll es eine Kante geben, die mit allen vier Elementen inzident ist. 2. Das Polyeder soll ein Eulersches, seine Charakteristik also 2 sein. Diesen Bedingungen genügende Polyeder werden K-Polyeder genannt; sie stellen, wie im 3. Abschnitt gezeigt wird, genau die als konvexe Polyeder realisierbaren Typen dar. Zur Vorbereitung der Beweise dafür werden noch einige kombinatorische Reduktionsoder besser Aufbauprozesse besprochen. Es handelt sich in der Hauptsache um die „regulären Spaltungsprozesse“, die aus den oben erwähnten Spaltungen in gewisser Weise zusammengesetzt sind. Sie führen ein K-Polyeder stets wieder in ein K-Polyeder über, was bei den obigen einfachen Prozessen offenbar nicht immer der Fall ist. Das Hauptresultat über die regulären Spaltungen lautet: Jedes K-Polyeder läßt sich durch reguläre Spaltungen aus dem Tetraeder erzeugen. In diesem Zusammenhang wird u. a. auch ein ähnlicher Aufbausatz von Kirkman bewiesen, bei dem man allerdings von sämtlichen Pyramiden ausgehen muß. — Der 3. Abschnitt bringt drei Beweise des „Fundamentalsatzes der konvexen Typen“, daß jedes K-Polyeder als konvexes Polyeder realisiert werden kann. Der erste Beweis beruht wesentlich auf dem genannten Hauptsatz über die regulären Spaltungen. Demnach genügt es, folgendes zu zeigen: Geht das K-Polyeder C_1 aus dem K-Polyeder C_0 durch eine reguläre Spaltung hervor und ist C_0 als konvexes Polyeder realisiert, so läßt sich auch C_1 konvex realisieren. Die reguläre Spaltung läßt sich an C_0 unmittelbar geometrisch durchführen. Nur bleiben dabei die beiden aus einer Fläche durch die Spaltung entstehenden Teilflächen in derselben Ebene. Es handelt sich also nur darum, dies durch passende kleine Abänderungen der Elemente zu beseitigen. Bei Dreikantspolyedern ist eine solche Variation leicht zu bewerkstelligen, bei beliebigen K-Polyedern stehen dem jedoch Schwierigkeiten entgegen, die durch Untersuchungen der Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von (analytisch formulierten) Inzidenzbedingungen, also Untersuchungen von Funktionaldeterminanten, überwunden werden. — Die beiden anderen Beweise verwenden keinerlei analytische Hilfsmittel; sie beruhen ausschließlich auf den Verknüpfungs- und Anordnungsaxiomen im Hilbertschen Sinne, und zwar der zweite für den euklidischen, der dritte für den projektiven Raum. Alle verwendeten Sätze, u. a. der Jordansche Satz für Polygone und Eulersche Polyeder, werden aus diesen Axiomen vollständig hergeleitet. Der zweite Beweis beruht ebenfalls auf dem obigen Satz über reguläre Spaltungen und verläuft dem ersten im wesentlichen parallel. Es werden (ohne Stetigkeitsaxiome!) in geeigneter Weise „Umgebungen“ von Punkten, Geraden und Ebenen und damit Variationen eines Polyeders definiert, die an die Stelle der analytischen Variationen des ersten Beweises treten. Anders verläuft der im projektiven Raum operierende dritte Beweis. Hier treten zunächst an Stelle der konvexen die projektiv-konvexen Polyeder, das sind, kurz gesagt, solche, die durch passende Kollineationen in konvexe Polyeder übergehen. Ferner liegen dem Beweis andere Abbauprozesse zugrunde, nämlich folgende: 1. Abschneiden einer dreikantigen Ecke (ω-Prozeß). 2. Fortlassen einer dreieckigen Fläche und passende Erweiterung der an sie anstoßenden Flächen, so daß im ganzen ein Tetraeder aufgesetzt wird (η-Prozeß). (Im euklidischen Raum ist dies nicht immer ausführbar, wohl aber im projektiven.) Einer dieser Prozesse kann stets angewendet werden, da dreikantige Ecken oder Dreiecke stets vorhanden sind, wie man leicht aus Eulerschen Relationen entnimmt. Es wird gezeigt, daß durch wiederholte Anwendung von ω- und η-Prozessen jedes K-Polyeder auf ein Tetraeder reduziert werden kann. (Die Hauptschwierigkeit, die durch einen eleganten Kunstgriff überwunden wird, ist hierbei, daß ein solcher ω- oder η-Prozeß nicht immer eine Verkleinerung der Kantenzahl mit sich bringt.) Indem man diesen Abbau in umgekehrter Reihenfolge durchläuft, kann man vom Tetraeder ausgehend durch einfache lineare Konstruktionen jeden K-Polyedertypus als projektiv-konvexes Polyeder realisieren. — Ein Hauptvorzug dieses Beweises ist, daß er — unter Heranziehung von Stetigkeitsaxiomen oder des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie — zur Herleitung einer Parameterdarstellung aller projektiv-konvexen Polyeder eines beliebigen Typus und damit zum Beweis des folgenden „Kontinuitätssatzes der konvexen Typen“ ausgebaut werden kann: Zwei projektiv-konvexe Polyeder von gleichem Typus lassen sich unter Aufrechterhaltung ihrer projektiven Konvexität und ihres Typus stetig ineinander überführen. Schließlich wird gezeigt, daß sich bei zwei euklidisch-konvexen Polyedern diese Überführung auch unter Erhaltung der euklidischen Konvexität durchführen läßt.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Kashikar, P. K.: The Archimedian solids. Math. Student 2, 60—65 (1934).

Satyanarayana, K.: Some results connected with triangles in perspective. Math. Student 2, 49—59 (1934).

Thébault, V.: Sur les points de contact du cercle des neuf points d'un triangle avec les cercles tangents aux trois côtés. (*57. sess., Chambéry, 24. VII.—4. VIII. 1933.*) Assoc. Franç. Avancement Sci. 54—57 (1933).

● **Juel, C.: Vorlesungen über projektive Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der v. Staudtschen Imaginärtheorie. (Die Grundlehren d. math. Wiss. in Einzeldarstell. mit besonderer Berücksichtigung d. Anwendungsgeb. Hrsg. v. R. Courant. Gemeinsam mit W. Blaschke, M. Born u. B. L. van der Waerden. Bd. 42.)** Berlin: Julius Springer 1934. XI, 287 S. u. 87 Fig. RM. 21.—.

Das in der Hauptsache vom Standpunkte der synthetischen Geometrie aus geschriebene und daher mit einer Menge Figuren geschmückte Buch rekapituliert in seiner Einleitung die

Elemente der reellen synthetischen Geometrie, meist ohne auf Beweise einzugehen und diese durch Verweisungen auf das bekannte Buch von Enriques ersetzend. Im Vordergrunde des Interesses stehen Sätze über die Regelfläche 2. Ordnung und die lineare Linienkongruenz, die bei der folgenden Einführung der imaginären Elemente benötigt werden. Diese Einführung geschieht in der Ebene und im Raume nach der Methode von v. Staudt, also unter Verwendung von orientierten elliptischen Involutionen. In dem komplexerweiterten Kontinuum wird nun der Begriff der Kette erklärt, und es werden die Sätze über Lagebeziehungen von Ketten eines binären Gebietes auf der imaginären Geraden 2. Art bewiesen. Es folgt die Untersuchung der binären Projektivitäten und Antiprojektivitäten, die besonders hinsichtlich ihrer Doppelpunkte ausführlich behandelt werden. Gründliche Aufmerksamkeit verlangen natürlich die involutorischen Transformationen dieser Art. In die analytische Behandlung desselben Gegenstandes wird durch die Wurfrechnung eingeführt. Der Wurf, bisher nur ein Symbol für ein geordnetes Punktquadrupel wird mit einem Elemente w einer Menge identifiziert, in der Rechenregeln definiert werden, die erstens projektiv invariant sein und zweitens den Körperaxiomen genügen sollen. Nachdem auf diesem Wege Koordinaten eingeführt sind, werden mit ihrer Hilfe die Projektivitäten und Antiprojektivitäten analytisch behandelt, wobei gelegentlich der invariantentheoretische Standpunkt eingenommen wird. Eine besonders ausführliche Behandlung erfahren die Doppelketten, d. h. die sich selbst entsprechenden Ketten der Transformationen. Es folgt die Einführung homogener Koordinaten in der Ebene mit Hilfe von Doppelverhältnissen. — Bevor dann, in Fortsetzung des bisherigen Gedankenganges, die komplexe Geometrie der Ebene begründet wird, ist ein Kapitel über Aufgaben 3. und 4. Grades eingeschoben. Es handelt sich dabei um Schnittpunkte von zwei Kegelschnitten und die geometrische Lösung der Gleichung 3. Grades, die mit dem aus der Algebra bekannten Verfahren in Parallele gesetzt wird. — Der zweite Abschnitt bringt die projektive Geometrie im zweidimensionalen komplexen Gebiet und führt in die Elemente der komplexen Geometrie der Ebene ein, die der Verf. seinerzeit zusammen mit C. Segre begründet hat. Er beginnt mit einer synthetischen Einführung der Begriffe Kollineation und Antikollineation. Es folgt ein Kapitel über die zweidimensionale Kette. Dann bringt die algebraische Behandlung die Klassifikation der Projektivitäten und Antiprojektivitäten und die Theorie des Hyperkegelschnittes. Die Doppelketten der Transformationen werden synthetisch und analytisch bestimmt. — Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit der Einführung der Metrik. Aus drei Forderungen, welche an die „Bewegungen" einer metrischen Geometrie gestellt werden, leiten sich die drei Möglichkeiten: hyperbolische, elliptische und euklidische Geometrie ab. Nacheinander werden in den einzelnen Geometrien die Maßzahlen für Länge und Winkel eingeführt. In der hyperbolischen Geometrie werden die einfachsten elementargeometrischen Sätze und trigonometrischen Beziehungen bewiesen. Dann wird kurz der Unterschied zwischen elliptischer und hyperbolischer Geometrie herausgearbeitet. Ein großer Teil des anschließenden Kapitels über euklidische Geometrie ist der Theorie der Kreisverwandtschaften gewidmet, die selbständig und ohne Bezug auf das früher über die Geometrie der Ketten Gesagte entwickelt wird. — Der vierte Abschnitt führt in die synthetische Theorie der quadratischen Transformationen und Kurven 3. Ordnung ein. Ausgangspunkt ist die Untersuchung der Büschel von Kollineationen, Korrelationen und Kegelschnitte. Eine quadratische Transformation entsteht durch Schnitt zweier Korrelationen. Involutorische quadratische Transformationen. Dann wird zuerst die rationale und darauf die elliptische Kurve 3. Ordnung als Erzeugnis eines Kegelschnittbüschels und eines projektiven Geradenbüschels gewonnen. Beide werden hinsichtlich ihrer Wendepunktfigur und der Polarentheorie untersucht. Satz von Salmon, Theorie der konjugierten Punkte, Steinersche Polygone. Schließlich erscheint die Kurve als Jacobische Kurve eines Kegelschnittbündels. Kurve 3. Ordnung und quadratische Transformationen. Einige Bemerkungen über abhängige Punktepaare. — In der Literaturübersicht auf S. VII fehlen die einschlägigen Arbeiten von E. Study [vgl. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **43**, 215 (1934)] und die Lehrbücher von Coolidge und Cartan (vgl. dies. Zbl. **3**, 68). *Weiss.*

Rao, C. V. H.: The Φ-conic from a projective standpoint. J. Indian Math. Soc. **20**, 176—177 (1934).

Der Ort aller Geraden, die zwei Kegelschnitte in harmonischen Punktepaaren schneiden, ist bekanntlich eine Kurve 2. Klasse. Ein synthetischer Beweis für diesen Satz scheint zu fehlen. Der Verf. bringt einen Beweis dieser Art, wobei er allerdings als bewiesen voraussetzt, daß der Ort aller Geraden, die drei Kegelschnitte in Punktepaaren einer Involution schneiden, eine Kurve 3. Klasse ist. *E. A. Weiss* (Bonn).

Rao, S. Krishnamurthy: Collineations in n-space. J. Indian Math. Soc. **20**, 193—203 (1934).

Durch eine Kollineation im R_n werden Kollineationen in den Bildräumen der im R_n enthaltenen Mannigfaltigkeiten M^2_{n-1}, Geraden und allgemeiner, beliebigen Unterräumen R_r induziert. Der Verf. behandelt die Frage, wie die Charakteristik der induzierten Kollineationen von der Charakteristik der vorgegebenen Kollineation abhängt. Es gelingt ihm, die Frage für den Fall der quadratischen Mannigfaltigkeiten und der Geraden zu beantworten. Im Falle allgemeiner Unterräume gibt er nur zwei vorbereitende Sätze. *E. A. Weiss* (Bonn).

Barbilian, D.: Zur Bewegungstheorie der Septuoren. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **36,** 29—74 (1934).

Die Untersuchung beschäftigt sich mit der diskontinuierlichen Erzeugung einer allgemeinen Korrelation des R_3 mit Hilfe der Drehungsachsen eines von Tzitzéica angegebenen kinematischen Verfahrens. Projektive Systeme von sieben Geraden — hier Septuoren genannt — vermitteln die Verknüpfung. Die Arbeit von Blaschke über die Geometrie der Speere [Mh. Math. Phys. **21** (1910)] bildet für den Leser eine willkommene Grundlage für das Verständnis der Abhandlung, obwohl Zielsetzung und Ergebnisse in anderer Richtung liegen. *Haenzel* (Karlsruhe).

Krishnaswami Ayyangar, A. A.: Oriented circles. J. Indian Math. Soc. **20,** 204 bis 211 (1934).

Ausgehend von einer Parameterdarstellung der Punkte eines orientierten Kreises leitet der Verf. eine analytische Darstellung der Laguerreschen Inversion ab, mit deren Hilfe er eine einfache Ableitung der bekannten Eigenschaften dieser Transformation gibt. Es folgen Anwendungen: Drei orientierte Kreise werden in drei orientierte Kreise von gleichem Radius nur durch eine Inversion an einer Parallelen zur Verbindungslinie ihrer eigentlichen Ähnlichkeitspunkte transformiert. Anwendung auf die Apollonische Aufgabe. — Ist A ein Schnittpunkt zweier orientierter Kreise C_p und C_q, so wird mit A_{pq} der Winkel zwischen den orientierten Tangenten der beiden Kreise im Punkte A verstanden. Dual wird mit l_{pq} das gemeinsame Tangentialsegment der beiden Kreise bezeichnet. Die folgenden Sätze geben Beziehungen zwischen den Winkeln A_{pq} mehrerer Kreise einerseits und den Tangentialsegmenten mehrerer Kreise andererseits. Sie gehören paarweise als duale Sätze zusammen. Unter ihnen findet sich auch der Satz von Miquel. *E. A. Weiss* (Bonn).

Graf, Ulrich: Über Laguerresche Geometrie in Ebenen mit nichteuklidischer Maßbestimmung und den Zusammenhang mit Raumstrukturen der Relativitätstheorie. Tôhoku Math. J. **39,** 279—291 (1934).

Die ebene Laguerregeometrie behandelt die Transformationsgruppe der gerichteten Geraden — Speeren — der Ebene, die — gerichtete — Kreise in Kreise überführen und die „Tangentialdistanz“ zweier Kurven mit gemeinsamer Tangente invariant lassen. Diese Gruppe ist vermöge der zyklographischen Abbildung isomorph zu der Gruppe der Lorenzschen Bogenelemente einer zweidimensionalen Welt. — Analog kann man nun eine nichteuklidische Laguerregeometrie definieren, indem man bei der Definition von Kreis und Tangentialdistanz ausgeht von einer nichteuklidischen Maßbestimmung der Ebene. Die zyklographische Abbildung läßt sich auf diesen Fall übertragen und man kommt statt zu einer räumlichen Geometrie mit reellem absoluten Kegelschnitt — eben der Lorentzgeometrie —, zu einer pseudoelliptischen oder pseudo-hyperbolischen Raumgeometrie, wobei der Zusatz pseudo bedeutet, daß die Winkelmessung hyperbolisch ist. Hat das in der Ebene zugrunde gelegte absolute Gebilde die Gleichung $x^2 + y^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}$, wo $\varepsilon^2 = 0, -1, +1$ die Euklidische, elliptische, hyperbolische Geometrie bedeutet, so führt die zyklographische Abbildung auf das Gebilde $x^2 + y^2 - z^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}$. Die zyklographische Abbildung bildet jeden Speer ab auf eine der beiden hindurchgehenden Tangentialebenen der Fläche, die Gruppe der automorphen Transformationen der Fläche liefert die entsprechende Laguerregruppe. Im Euklidischen Fall ist diese durch Hinzunahme der Ähnlichkeiten 7-gliedrig, sonst 6-gliedrig. Die elliptische Laguerregeometrie ist gleichwertig mit der zum de Sitterschen Weltbild gehörigen Geometrie der Ebene. *G. Bol.*

Hoffmann, Sigmund: Der Eulersche Dreiecksatz in der Cayley-Kleinschen Geometrie und Verallgemeinerungen desselben. Freiburg i. Br.: Diss. 1933. 22 S.

Algebraische Geometrie:

Calvi, Margherita: Sistemi lineari di cubiche piane i cui punti base sono di flesso. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. **72**, 71—75 (1934).

L'a. démontre qu'il n'y a d'autres systèmes linéaires de cubiques planes (irréductibles) dont tous les points base sont des points d'inflexion, hormis les suivants, et les systèmes linéaires moins amples contenus dans un de ceux-ci et ne possédant aucun point base ultérieur: 1. Systèmes linéaires ∞^6 ayant un point base d'inflexion à tangente fixe. 2. Systèmes linéaires ∞^5 ayant un point base d'inflexion à tangente variable (ce point admet, par rapport à toutes les cubiques du système linéaire, une droite polaire armonique fixe). 3. Systèmes linéaires ∞^3 ayant deux points base d'inflexion à tangentes fixes. 4. Réseaux avec trois points base d'inflexion alignés, tous à tangentes variables (le birapport formé par deux quelconques de ces points et par les points où la droite qui les contient coupe les relatives polaires armoniques, est égal à quatre). 5. Réseaux avec trois points base d'inflexion alignés, dont un à tangente variable et deux à tangentes fixes. 6. Faisceaux syzygétiques. (Il faut naturellement ajouter: 7. Le système linéaire ∞^9 formé par toutes les cubiques du plan.) *Beniamino Segre* (Bologna).

Ramamurti, B.: A covariant specification of the simplex inscribed in a rational norm curve in a space of odd dimensions and circumscribed to a quadric inpolar to the curve. J. Indian Math. Soc. **20**, 189—192 (1934).

Taking a norm curve R_{2^n-1} (rational curve of order R_{2^n-1}) in S_{2^n-1}, a set of 4^{n-2} points on it, given parametrically by the binary (4^{n-2})-ic a_t^{4n-2}, determines uniquely a quadric envelope Q, touching the osculating hyperplanes at these points and inpolar to R_{2^n-1}. There is, in general, a unique simplex T inscribed in R_{2^n-1} and circumscribed to Q. The vertices of the simplex are given parametrically by the binary $2n$-ic

$$b_t^{2n} = (a_1 a_2)^4 \dots (a_1 a_n)^4 \dots (a_{n-1} a_n)^4 a_{1t}^2 \dots a_{nt}^2,$$

where

$$a_{1t}^{4n-2} = \dots = a_{nt}^{4n-2} = a_t^{4n-2}.$$

van der Waerden (Leipzig).

Martinetti, Vittorio: Problemi grafici sulle quartiche gobbe di 1ª specie e sulle quadriche, individuate rispettivamente da otto e nove punti generici. Atti Accad. Peloritana Messina **35**, 15—17 (1934).

Calapso, R.: Quadrica per nove punti. Atti Accad. Peloritana Messina **35**, 19—22 (1934).

Zwei Konstruktionen einer Quadrik aus 9 Punkten P_i. — Die erste betrachtet die Raumkurve 4. Ordnung 1. Art durch 8 gegebene Punkte und sucht ihren übrigen Schnittpunkt mit einer Ebene durch 2 der 8 Punkte; zwei Anwendungen dieser Konstruktion geben die Schnittkurve der betrachteten Quadrik mit der Ebene $P_1 P_2 P_3$. — Die zweite benutzt eine Hirstsche Inversion, die die Quadrik in eine Ebene verwandelt. — Beide bedienen sich auch der Methoden der darstellenden Geometrie.

E. G. Togliatti (Genova).

Godeaux, Lucien: Remarques sur une surface de genres un contenant une involution de genres zéro et de bigenre un. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **20**, 615—621 (1934).

On sait (Enriques, Un'osservazione relativa alle superficie di bigenre uno. Rend. R. Acc. Bologna **1907**, 40) qu'une surface S de genres zéro et de bigenre un est toujours l'image d'une involution d'ordre deux appartenant à une surface Σ de genres un birationnellement équivalente à une quadrique double. L'auteur montre comment Σ peut être transformée en une quadrique double, il établit l'existence de dix-huit faisceaux de courbes elliptiques sur Σ et en déduit qu'il peut exister sur une surface S des courbes elliptiques isolées se rencontrant en deux points. *P. Dubreil* (Nancy).

Babbage, D. W.: Multiple canonical surfaces. Proc. Cambridge Philos. Soc. **30,** 297—308 (1934).

If the canonical system $|K|$ of an algebraic surface F is irreducible, of dimension $\geqq 3$, and is composed of an involution of order two, the surface F is mapped by $|K|$ upon a doubly covered surface f. It is proved, apparently under the assumption that $|2K|$ is simple, that the surface f must have geometric genus $p_g = 0$. The proof of this interesting theorem can be considerably simplified, by eliminating a good deal of the projective considerations used by the author. Examples of doubly covered canonical surfaces are given, in which f is either a ruled surface or the sextic surface of Enriques. A few remarks are added, concerning triply covered canonical surfaces. *O. Zariski* (Baltimore).

Du Val, P.: On the ambiguity in the specification of a two sheeted surface by its branch curve. Proc. Cambridge Philos. Soc. **30,** 309—314 (1934).

Given an algebraic surface F and an algebraic curve C on F, it is proved that a necessary and sufficient condition that there exist doubly covered surfaces with C as a branch curve, is that there shall exist on F at least one linear system $|\frac{1}{2}C|$. If this condition is satisfied, then the number of birationally distinct doubly covered surfaces F, possesing C as a branch curve, is $2^{2q+\delta}$, where q is the irregularity of F and where δ is the order of the group of torsion mod 2 of F. These results are not new. They are special cases ($m = 2$) of more general theorems, concerning m-fold cyclic surfaces, which have been proved by Comessatti ("Sulle superficie multiple cicliche", Rend. Semin. mat. Univ. Padova **1930,** Nr 1—2). *O. Zariski* (Baltimore).

● **Godeaux, Lucien: Les transformations birationnelles de l'espace.** Mém. Sci. math. Fasc. **67,** 64 S. (1934).

A review of the theory of space Cremona transformations and of the geometry of the space from the point of view of these transformations. The author observes the lack of general results in this theory and points out, when the occasion arises, unsolved problems in which this theory abounds. Proofs are given when dealing with fundamental and introductory topics, or with topics in which general results are available and have been obtained by not too cumbersome methods, while otherwise the exposition is of necessity formal. Chapter I deals with linear systems of surfaces. Chapter II is devoted to the classification and properties of the fundamental elements of a space Cremona transformation, including some general results (Montesano) for regular transformations. In Chapter III singularities of surfaces and of space curves are treated. A detailed account is given of the use of quadratic transformations in the theory of singularities of surfaces, as developed by C. Segre. Chapter IV deals with properties of geometric configurations in space, which are invariant under Cremona transformations. The topics treated include the adjoint systems of linear systems of surfaces, the reduction of linear systems to a normal type, etc. The entire Chapter V is devoted to the investigations of Enriques and Fano on continuous, finite, algebraic groups of Cremona transformations. *O. Zariski* (Baltimore).

Todd, J. A.: Some group-theoretic considerations in algebraic geometry. Ann. of Math., II. s. **35,** 702—704 (1934).

It is shown that the various types of equivalence, which occur in the theory of algebraic surfaces or varieties (linear and algebraic equivalence of V_{r-1}'s on a V_r; equivalence, in the sense of Severi, of V_k's on a V_r), admit a common group-theoretic formulation. In each case, the entities (effective or virtual) on V_r, which are being operated upon by addition and subtraction, form an abelian group $\mathfrak{G}$, and the various types of equivalence correspond to a particular choice of an invariant subgroup of $\mathfrak{G}$, whose elements are considered as being equivalent to zero. *O. Zariski* (Baltimore).

Segre, Beniamino: Nuovi contributi alla geometria sulle varietà algebriche. Mem. Accad. Ital. **5,** 479—576 (1934).

Die Begriffe der Äquivalenzscharen von Punktgruppen und der Äquivalenzsysteme von algebraischen Kurven auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit, die in den letzten Jahren von F. Severi eingeführt und die von der italienischen geometrischen Schule schon viel angewendet worden sind, finden hier zahlreiche Anwendungen in der Geometrie auf einer algebraischen V_3 (mit normalen Singularitäten). Kap. I gibt zunächst einige Verallgemeinerungen bekannter einfacher Begriffe (wie z. B. die kanonische Linearschar auf einer zerfallenden oder virtuellen Kurve; die Definition der Gruppe (CS) der Schnittpunkte einer Kurve C und einer Fläche S im Falle, daß S virtuell ist oder einen Teil von C enthält; die Definition der charakteristischen Schar $(C^2)_S$ einer Kurve C auf einer Fläche S im Falle, daß F virtuell ist oder C nicht enthält usw.) und geht dann zur Behandlung verschiedener Fragen über Gruppen von Schnittpunkten von Kurven und Flächen einer V_3, insbesondere zur Bestimmung der Äquivalenz einer Kurve C einer V_3, die auf drei Flächen S, T, U der V_3, mit gegebenen Multiplizitäten s, t, u gleichzeitig liegt; es folgt eine Konstruktion der kanonischen Linearschar auf einer solchen Kurve C. Kap. II betrachtet verschiedene Äquivalenzscharen von Punktgruppen und Äquivalenzsysteme von Kurven einer V_3, die mit einem gegebenen Äquivalenzsystem $|C|$ von Kurven oder mit einem gegebenen Linearsystem $|S|$ von Flächen der V_3 kovariant verbunden sind. So bilden z. B. die kanonischen Punktgruppen der Kurven von $|C|$ oder der Flächen von $|S|$ solche Äquivalenzscharen von Punktgruppen. Besondere Wichtigkeit haben das Jacobische Kurvensystem $|J_S|$ und die Jacobische Punktgruppenschar $|\delta_S|$ von $|S|$; sie werden bzw. von den Jacobischen Kurven oder Punktgruppen aller Netze oder aller Büschel von $|S|$ definiert; sie führen zu zwei neuen invarianten Bildungen der V_3, eine Äquivalenzschar $|\zeta|$ und ein Äquivalenzsystem $|Y|$. Anwendungen zur Bestimmung der invarianten Äquivalenzscharen einer Fläche der Form $c_1S_1 + c_2S_2$, die auf V_3 liegt, und auf die Bestimmung der mehrfachen Punkte, die zwei Flächen der V_3, die eine Berührungskurve haben, auf dieser Kurve besitzen. Kap. III, IV, V enthalten eine Menge Anwendungen, die die Bestimmung und die Untersuchung der wichtigsten kovarianten Bildungen gegebener Linearsysteme von Flächen einer V_3 betreffen. So die Jacobische Kurve eines Flächennetzes und die Berührungskurve von zwei Flächennetzen; die Jacobische Fläche und 4 kovariante Kurven eines ∞^3 Linearflächensystems; einige kovariante Gebilde eines ∞^4 Linearflächensystems; die Berührungsmannigfaltigkeiten von 2, 3, 4 Flächenbüscheln usw. Alle kovarianten Gebilde, die hier betrachtet werden, lassen sich mit den invarianten und kovarianten Bildungen des II. Kap. ausdrücken; sie werden oft mit verschiedenen Verfahren erhalten; fast immer wird auch die abzählende Übersetzung der geometrisch-funktionellen Gleichungen angegeben. Kap. VI enthält Anwendungen insbesondere auf die V_3 eines Raumes S_4, die als einzige Singularität die Schnittfläche von zwei V_3 als Doppelfläche enthalten. — Über einzelne Ergebnisse ist es nicht möglich, ausführlicher zu referieren; so z. B. findet Verf., daß die Invarianten I, Ω_0 einer algebraischen V_3 (mit normalen Singularitäten) immer gerade ganze Zahlen sind. Auch erhält er einige Eigenschaften des arithmetischen Geschlechtes P_a einer V_3, die als Definitionen von P_a dienen könnten; eine von diesen Eigenschaften ist eine Folge der bekannten Formel von F. Severi: $2P_a = \Omega_2 - \Omega_1 + \Omega_0 + 4$ und könnte, wenn direkt gefunden, einen neuen Beweis jener Formel liefern; das wird im Kap. VI, für die dort betrachteten V_3, ausgeführt. *E. G. Togliatti* (Genova).

Differentialgeometrie:

Hedlund, Gustav A.: On the metrical transitivity of the geodesics on a surface of constant negative curvature. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **20**, 136—140 (1934).

Der Verlauf der geodätischen Linien auf geschlossenen zweiseitigen Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes ist wiederholt studiert worden. Man betrachte den mit der Fläche verbundenen Phasenraum Ω, Phase = (Punkt, Richtung). Durch jeden Phasenpunkt geht genau eine Integralkurve, entsprechend der geodätischen Linie. Die gleichförmige Bewegung längs der geodätischen Linien kann als stationäre Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit in Ω aufgefaßt werden. Die Inkompressibilität entspricht der Existenz eines invarianten Volumelementes in Ω. Eine derartige Strömung kann folgende Eigenschaften haben. 1. Quasiergodizität. Mindestens eine Stromlinie liegt überall dicht in Ω. 2. Fast alle Stromlinien (im Sinne des invarianten Maßes) liegen überall dicht in Ω. 3. Metrische Transitivität. Jede bei der Strömung invariante und meßbare Funktion in Ω ist fast überall in Ω konstant. — (3) zieht (2), und (2) zieht (1) nach sich. (3) ist deshalb wichtig, weil diese Eigenschaft notwendig und hinreichend für das strikt ergodische Verhalten der Strömung ist, d. h. dafür, daß die mittlere Verweilzeit eines mitgeführten Punktes in einem beliebigen Teil von Ω im allgemeinen gleich dem invarianten Maß dieses Teiles ist (dividiert durch das Maß von Ω). — (1) wurde im besagten Falle von Koebe, Löbell und J. Nielsen bewiesen, (2) von Myrberg und Hedlund. Es bedeutet einen wichtigen Fortschritt, daß dem Verf. der Beweis von (3) gelungen ist. — Zum Beweise sei nur folgendes angeführt. Die Fläche kann bekanntlich so auf das Innere des Einheitskreises E abgebildet werden, daß jedem Flächenpunkt unendlich viele Punkte von E entsprechen. Diese Punkte in E gehen alle auseinander durch eine Fuchssche Gruppe linearer Transformationen T mit E als Grenzkreis hervor. Der Flächenmetrik entspricht dabei die hyperbolische Maßbestimmung im Innern von E mit E als Fundamentalkreis. (3) kann dann so umgeformt werden: Jede meßbare Funktion $f(\zeta_1, \zeta_2)$ zweier Punkte ζ_1, ζ_2 auf E, die für alle Transformationen T der Fuchsschen Gruppe der Gleichung $f(T(\zeta_1), T(\zeta_2)) = f(\zeta_1, \zeta_2)$ genügt, ist fast überall konstant. — Beim Beweise dieser Tatsache bedient sich der Verf. der von Nielsen herrührenden Darstellung der Randpunkte des Einheitskreises durch unendliche Folgen von Elementen T der Gruppe.

E. Hopf (Watertown).

Wernick, Max: Über Minimalflächen im Großen. Schr. math. Semin. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin **2**, 35—64 (1934).

Das Verhalten einer Minimalfläche in einem Gebiet G heiße algebraisch, wenn es dort zu jedem Flächenpunkt eine räumliche Umgebung gibt, in der die Fläche mit der Nullstellenmenge einer in G konvergierenden Potenzreihe zusammenfällt. Σ sei ein Minimalflächenstück, das von einem Polygon Π begrenzt wird, welches auch unendlich viele, sich aber im Endlichen nicht häufende Geradenstücke enthalten darf. Σ sei über Π hinaus analytisch fortsetzbar. Es wird danach gefragt, wann sich die durch unbegrenzte Fortsetzung entstehende Fläche im ganzen reellen Endlichen des Raumes algebraisch verhält. Durch eine Klassifikation der Fortsetzungsgruppen werden sechs verschiedene Geradensysteme gefunden, auf denen Π liegen muß, es sei denn, daß die Fläche eine gemeine Schraubenfläche ist. Ferner muß sich natürlich das (abgeschlossene) Flächenstück Σ selbst algebraisch verhalten. Bei beschränktem Σ sind diese Bedingungen auch hinreichend, nicht aber bei unbeschränktem. *Feller.*

Franklin, Philip: Regions of positive and negative curvature on closed surfaces. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **13**, 253—260 (1934).

1. Beispiele zweiseitiger singularitätenfreier geschlossener Flächen vom Geschlecht $\geqq 1$ im dreidimensionalen Raum, auf denen die Punkte nichtnegativer Gaußscher Krümmung einen der abgeschlossenen Kreisscheibe homöomorphen Bereich bilden. 2. Beispiel einer dem Torus homöomorphen Fläche, bei der die Punkte nichtpositiver Gaußscher Krümmung einen solchen Bereich bilden (die durch Fig. 4 angedeutete Übertragung der Konstruktion auf Flächen höheren Geschlechts ist fehlerhaft; der Bereich der Punkte nichtpositiver Gaußscher Krümmung hat in dieser Figur zwei getrennte Randkurven). 3. Einfacher Beweisansatz folgenden Satzes: Ein singularitätenfreier Bogen der parabolischen Kurve, der keinen Flachpunkt und keinen solchen Punkt enthält, in dem ein Normalschnitt der Fläche einen Wendepunkt hat, ist Krümmungslinie. Nach Ansicht des Ref. läßt sich aus der Singularitätenfreiheit des Bogens und Formel (7) nicht ohne weiteres $c = d = 0$ ausschließen; das Glied $o(R)$ könnte z. B. die Gestalt $x(x^2 + y^2)$ haben. Vielleicht läßt sich der Ansatz trotzdem ausgestalten. 3. Einige Bemerkungen über die topologischen Indizes von Nabelpunkten. 5. Angabe singularitätenfreier Modelle aller geschlossenen einseitigen Flächen; je nachdem die Eulersche Charakteristik gerade oder ungerade ist, hat man von der Kleinschen

oder der Boyschen Fläche auszugehen und Henkel anzubringen. 6. Es wird angegeben, daß auf der Boyschen Fläche der Bereich der Punkte nichtnegativer Gaußscher Krümmung dem Möbiusschen Bande homöomorph ist. *Cohn-Vossen* (Prag).

Carrus, Sauveur: Sur les trajectoires des méridiennes d'une surface de révolution. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 404—405 (1934).

Integrallose Darstellung aller Rotationsflächen mit ihren Trajektorien, die mit den Meridiankurven den festen Winkel α bilden. Sei $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, $z = \varphi(r)$ mit willkürlichem $\varphi(r)$ die allgemeine Rotationsfläche. Es zeigt sich: man kann $\varphi(r)$ mit Hilfe einer Funktion $v(t)$ in Parameterform darstellen in der Form

$$\varphi = v''\operatorname{sh}t + 2v'\operatorname{ch}t, \qquad r^2 = [v''\operatorname{sh}^2 t + 2v'\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t - v]^2 - [v''\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t + v'(1+\operatorname{ch}^2 t)]^2,$$

so daß durch

$$\operatorname{th}[(\vartheta - \vartheta_0)\operatorname{cotg}\alpha] = \frac{v''\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t + v'(1+\operatorname{ch}^2 t)}{v''\operatorname{sh}^2 t + v'\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t - v}$$

die Parameterdarstellung aller Trajektorien geliefert wird: $\vartheta = \vartheta(t)$, $r = r(t)$. *Rellich* (Göttingen).

Jonas, Hans: Ausdehnung der Bianchi-Transformation B_k auf gewisse zweifach-unendliche Systeme kongruenter einschaliger Hyperboloide und damit verbundene Normalenkongruenzen. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. **17**, 264—301 (1934).

$H(a_1, a_2)$ sei eine zweiparametrige Schar kongruenter einschaliger Hyperboloide mit den beiden Regelscharen (g_i) $(i = 1, 2)$ auf jedem H. Die Schar $H(a_1, a_2)$ soll die folgende Eigenschaft E haben: Variiert nur a_i, so soll bei diesem Bewegungsvorgang jeder Punkt von H sich senkrecht zur ihn tragenden Geraden aus (g_i) bewegen; die Scharparameter sind also den beiden Regelscharen eindeutig zugeordnet. Die Eigenschaft E kommt auf die Integration von 6 in den Ableitungen linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung heraus; die unbekannten Funktionen sind die Komponenten der beiden Rotationsvektoren, die in der seit Darboux üblichen Weise für den durch die Schar bestimmten 2-parametrigen Bewegungsvorgang definiert sind. Ein Spezialfall von E entsteht, wenn $H(a_1, a_2)$ die Hyperboloide sind, die eine zu H isometrische Fläche $F(a_1, a_2)$ in der durch die Isometrie vermittelten Korrespondenz berühren. Dann sind a_i die Parameter der Asymptotenlinien von F. — Verf. entwickelt nun eine Reihe hauptsächlich liniengeometrischer zum Teil recht komplizierter Eigenschaften des allgemeinen Systems H, die im erwähnten Spezialfall Eigenschaften von Bianchi-Transformationen sind, aber gerade im allgemeinen Fall viel interessanter und reichhaltiger sind als bei der Spezialisierung. Andeutungen müssen hier genügen. 1. $M(a_1, a_2)$ sei der mit $H(a_1, a_2)$ starr verbundene Mittelpunkt der Hyperboloide. Dann gibt es (trivialerweise) in (g_i) genau zwei Geraden g_i, $\bar{g}_i$, die zum Vektor $\frac{\partial M}{\partial a_i}$ orthogonal sind. Übrigens sind diese Geraden nicht starr mit H verbunden, sondern variieren in ihren Regelscharen. Nun wird bewiesen: Jede dieser 4 Geraden $(i = 1, 2!)$ beschreibt eine Normalenkongruenz G_i bzw. $\bar{G}_i$. Jede dieser 4 Kongruenzen wird aber außer durch $H(a_1, a_2)$ noch durch 3 weitere Systeme zu H kongruenter Hyperboloide von der Systemeigenschaft E erzeugt! Also besteht eine Art Dualität: Auf jedem Hyperboloid liegen 4 Kongruenzstrahlen, durch jeden Strahl gehen 4 Hyperboloide. Iteriert man, so erhält man ein unendliches System von Hyperboloiden und Strahlen von der Struktur eines unendlichen Schachbretts, wo die Felder die Hyperboloide, die Ecken die Strahlen vorstellen. — Im Spezialfall von E degeneriert das Schachbrett in zwei Flächen und zwei Strahlen. 2. Mit H sei ein zu H konfokales Hyperboloid H_k starr verbunden. Die Mannigfaltigkeit H_k hat natürlich nicht die Eigenschaft E. Aber man kann durch Integration einer Riccatischen Gleichung den von einer Regelschar $(g_{k,i})$ von H_k beschriebenen Geradenkomplex in ∞^1 Normalenkongruenzen $G_{k,i}$ aufspalten, die sämtlich gemäß 1. durch Systeme von zu H (nicht zu H_k!) kongruenten Hyperboloiden erzeugt werden. Der Übergang von den Kongruenzen G zu den Kongruenzen G_k entspricht im Spezialfall von E einer Bianchitransformation und hat auch im allgemeinen Fall zahlreiche Eigenschaften mit jener Transformation gemein. — Nach Ansicht des Ref. wäre es interessant, die Ergebnisse der Arbeit mit den Methoden der Liniengeometrie zu reproduzieren. Ferner liegt die Frage nahe, ob die Korrespondenz zwischen Graden und Hyperboloiden etwas mit Lies Geraden-Kugel-Transformation zu tun hat. *Cohn-Vossen* (Prag).

Behari, Ram: Equilateral osculating quadrics of ruled surfaces. J. Indian Math. Soc. **20,** 212—221 (1934).

Verf. leitet die Bedingung ab, damit die quadratische Fläche, welche eine Regelfläche in den Punkten einer gegebenen Erzeugenden oskuliert, gleichseitig sei, und gibt einige Anwendungen. So findet er z. B. den Satz: Wenn die oskulierende quadratische Fläche einer Regelfläche, deren Erzeugende einer festen Ebene parallel sind, immer ein gleichseitiges Paraboloid ist, so ist die Regelfläche ein gerades Konoid. Weiter gibt er einen neuen Ausdruck für die Laguerresche Funktion $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{2}{\tau\gamma}$ einer Flächenkurve, worin R, τ, γ die Strahlen der normalen Krümmung, der geodätischen Torsion und der geodätischen Krümmung der Kurve sind. Das identische Verschwinden dieser Funktion für eine Flächenkurve ist die Bedingung, damit die oskulierende quadratische Fläche der Regelfläche, welche von den Normalen der gegebenen Fläche in den Punkten der Flächenkurve gebildet wird, immer gleichseitig sei. Schließlich gibt Verf. noch vier Sätze über gleichseitige oskulierende quadratische Flächen. Der erste dieser Sätze ist der folgende: Wenn für eine Regelfläche R mit gleichseitigen oskulierenden quadratischen Flächen die Regelfläche, welche von den Normalen in den Punkten einer orthogonalen Trajektorie der Erzeugenden gebildet wird, auch gleichseitige oskulierende quadratische Flächen hat, so ist die orthogonale Trajektorie eine Kurve konstanter Krümmung. *G. Schaake* (Groningen).

Delgleize, A.: Sur les surfaces isothermiques et les surfaces de Guichard. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **20,** 707—722 (1934).

Dans une Note récente [ce Zbl. **8,** 412 (1934)] l'auteur a établi une transformation T qui généralise la transformation T_m des surfaces isothermiques et s'applique à un couple particulier des surfaces (Σ), (Σ') en transformation R (de Ribaucour). Les surfaces transformées T sont deux surfaces de Guichard associées (S), (S'). En appliquant à la surface (S) une transformation R l'auteur montre que, les constantes de la transformation bien choisies, le couple (S), (S_1) obtenu admet une transformation T qui le transmet en couple (Σ), (Σ_1). D'où suit que les surfaces désignées au titre sont les seules qui admettent la transformation T. On peut représenter les S surfaces (Σ), (Σ'), (S) ... par les sommets d'un parallèlépipède dont les arêtes symbolisent les relations T, R et G (associeés de Guichard) qui relient chaque surface avec trois surfaces voisines. *S. Finikoff* (Moscou).

Efimoff, N.: Über diejenige Punktabbildung zweier Flächen, welche ihre Isometrie charakterisiert. Rec. math. Moscou **41,** 60—72 u. dtsch. Zusammenfassung 72 (1934) [Russisch].

The paper is concerned with the existence of a representation of one surface upon another in which a geodesic net on one surface corresponds to a geodesic net on the other, the lengths of these geodesics being preserved. Such a correspondence is called a "geodesic fitting" (Bekleidung). The results of this paper may be summarised as follows: if the net is one of Tchebishev the surfaces are developable. If the surfaces are not those of Liouville then they are isometric. If one Liouville surface has the metric $ds^2 = (U - V)(U\,du^2 - V\,dv^2)$ (U a function of u alone; V a function of v alone) then the other has the metric $ds^2 = (U - V)[(U + C)\,du - (V + C)\,dv^2]$ (C a constant). If the surfaces are also of constant curvature, the curvatures must be equal and the surfaces are isometric. Finally if two Liouville surfaces each having more than one Liouville isothermal admit a geodesic fitting, they are also isometric and the corresponding nets in general coincide upon application. The latter need not happen only in case of surfaces applicable to a surface of revolution. *Knebelman.*

Sauer, Robert: Spannungszustände und projektive Transformationen. Z. angew. Math. Mech. **14,** 193—198 (1934).

Bekanntlich läßt sich der „Drehriß“ der infinitesimalen Flächenverbiegung ohne weiteres auch zum Studium von Spannungszuständen in einer Flächenhaut heranziehen. Verf. überträgt die Ergebnisse seiner in diesem Zbl. **8**, 323, referierten differentialgeometrischen Arbeit auf die Spannungstheorie. Insbesondere wird die Tatsache herangezogen, daß die Ansätze eine gewisse projektive Invarianz besitzen. Die Darstellung ist auch für Nicht-Differentialgeometer leicht lesbar. Der Inhalt geht über das erwähnte insofern hinaus, als auch räumliche Spannungsfelder und das Verhalten der zugehörigen Gleichgewichtsbedingungen bei projektiven Transformationen behandelt werden. *Cohn-Vossen* (Prag).

Môri, Yasuo: Sur le faisceau canonique. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **16,** 265—267 (1934).

La conique canonique de Koenigs relative à un point P d'une surface F, a en P un contact du second ordre avec F et avec la quadrique de Lie relative à P [cfr. Môri, Proc. Imp. Acad. Jap. **10**, 311 (1934); ce Zbl. **9**, 270]; elle coupe donc ultérieurement la quadrique de Lie dans un point, qui est joint à P moyennant une droite du faisceau canonique. Ici l'a. démontre la proposition suivante, dont il fait aussi quelques applications: le birapport formé par la droite susdite, la normale projective de Fubini, la tangente canonique et l'axe de Čech, est égal à la courbure totale, K, en P de la forme normale de Fubini, φ_2, relative à F. *Segre.*

Rozet, O.: Remarques sur les suites de Laplace de période quatre. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **20,** 698—706 (1934).

L'a. a démontré que, afin qu'une congruence de droites (g) non W de l'espace ordinaire appartienne à une suite de Laplace de période quatre, il est nécessaire et suffisant qu'on ait une grille sur l'hyperquadrique de Klein de l'espace S_5, en correspondance aux développables de (g) [cfr. O. Rozet, Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **1**, 90 (1932); voir ce Zbl. **4**, 253; pour la théorie générale des grilles, voir B. Segre, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse 1 (1928)]. Ici l'a. fait d'abord quelques remarques se rapportant à ce théorème; après il prouve qu'une suite de Laplace de période quatre, dont les deux nappes focales soient en même temps des quadriques, est nécessairement une congruence W; enfin il expose des considérations se rattachant à un exemple donné par G. Ttzitzéica (Géométrie différentielle projective des réseaux. Paris: Gauthier-Villars 1924, 185—186), concernant une suite de Laplace de période quatre circonscrite à deux quadriques de notre espace. *Beniamino Segre* (Bologna).

Tschech, Ernst: Über Krümmungskreise im Riemannschen Raum. Graz: Diss. 1934. 22 Bl.

Finzi, B.: Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **19,** 578—584 (1934).

In this paper the concept of stress function (associated with the names of Airy, Maxwell, Morera) is extended to the case of media whose metric is not Euclidean but of constant curvature. The problem is to find a symmetric tensor Φ^{rs} satisfying the equations $\varphi^{r\alpha}{}_{,\alpha} = 0$. In the case of two dimensions the solution is $\varphi^{rs} = \varepsilon^{r\alpha}\varepsilon^{s\beta}\chi_{,\alpha\beta} + \varkappa\chi g^{rs}$ where ε^{rs} is Ricci's alternating tensor, g^{rs} is the metrical tensor, $\varkappa$ is the constant of curvature and χ is an arbitrary scalar. In the case of three dimensions the solution is $\varphi^{rs} = \varepsilon^{r\alpha\beta}\varepsilon^{s\gamma\delta}\chi_{\beta\delta,\alpha\gamma} + \varkappa(\chi^{\alpha}_{\alpha} g^{rs} - \chi^{rs})$ where χ^{rs} is an arbitrary symmetric tensor of order two. *Murnaghan* (Baltimore).

Finzi, B.: Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **19,** 620—623 (1934).

This is a continuation of a paper bearing the same title (see the prec. ref.). The principal result is that in flat space of four dimensions the general solution of the tensor equations $\varphi^{r\alpha}{}_{,\alpha} = 0$; $\varphi^{rs} = \varphi^{sr}$ is furnished by $\varphi^{rs} = \varepsilon^{r\lambda\sigma\tau}\varepsilon^{s\mu\alpha\beta}\chi_{\sigma\alpha\tau\beta,\lambda\mu}$ where ε is the Ricci alternating tensor and χ_{pqlm} is symmetric in the pairs of indices pq and lm. An application is made to the dynamics of a material medium, and a generalization of Maxwell's stress functions is derived. A brief discussion of the extension of the theory to spaces of constant (non-zero) curvature is given. *Murnaghan.*

Finzi, Bruno: Su di una forma delle equazioni indefinite dei sistemi flessibili elastici. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **67**, 261—269 (1934).

This paper discusses, by the methods of tensor analysis, the equations of equilibrium of a two or three dimensional elastic medium in space of constant curvature (body forces being assumed absent). In the two dimensional case the stress tensor is furnished by the formulae $\varphi^{ns} = \varepsilon^{n\alpha}\varepsilon^{s\beta}\chi_{,\alpha\beta} + k\chi g^{ns}$ where ε^{ns} is the Ricci alternating tensor, g^{ns} is the metrical tensor, χ is the Airy stress function and k is the curvature constant. The stress function satisfies (provided the medium is homogeneous and isotropic) the equation $\Delta_4\chi + k(3-\sigma)\Delta_2\chi + 2k^2(1-\sigma)\chi = 0$ where σ is Poisson's ratio. For the three dimensional case the stress tensor is furnished in terms of a symmetric tensor χ_{ns} by means of the formulae:

$$\varphi^{ns} = \varepsilon^{n\alpha\lambda}\varepsilon^{s\beta\mu}\chi_{\lambda\mu,\alpha\beta} + k(\chi^{\alpha}_{\alpha}g^{ns} - \chi^{ns}).$$

It satisfies the equations

$$\Phi^{\alpha}_{\alpha}{}^{,ns} + (1+\sigma)\Delta_2\Phi^{ns} + 2k\left\{\frac{1-\sigma-\sigma^2}{1-\sigma}\Phi^{\alpha}_{\alpha}g^{ns} - (1+\sigma)\Phi^{ns}\right\} = 0.$$

Murnaghan (Baltimore).

Kosambi, D. D.: The problem of differential invariants. J. Indian Math. Soc. **20**, 185—188 (1934).

In "Parallelism and path-spaces" (see Math. Z. **37**, 608—618; this Zbl. **7**, 230) the author has shown how a geometry can be associated with the differential equations $\ddot{x}^i + \alpha^i(x, \dot{x}, t) = 0$. In this paper two procedures are given for obtaining the differential invariants of such a space. By the first method (of the author) they are obtained by means of the equations of variation. The second procedure is of E. Cartan. The space of $(2n+1)$ dimensions $x, \dot{x}, t$ is considered. (E. Cartan, Math. Z. **37**, 619—622; this Zbl. **7**, 231.) By this method three invariant differential processes for vectors, corresponding with $\partial/\partial x^i$, $\partial/\partial\dot{x}^i$ and $\partial/\partial t$, and a complet set of differential invariants are obtained. *J. Haantjes* (Delft).

Vranceanu, G.: Étude des espaces non holonomes. J. Math. pures appl., IX. s. **13**, 113—174 (1934).

Diese Arbeit kann als eine Fortsetzung der Arbeit „Studio geometrico dei sistemi anolonomi, prima parte“ [Ann. Mat. pura appl., IV. s. **6**, 9—43 (1928—1929)] betrachtet werden. Es werden hier nicht nur einige neue Resultate mitgeteilt, sondern auch die seitdem erschienenen Abhandlungen von Schouten, Synge und Horák, sowie eine Arbeit von Hadamard [Mém. Soc. Sci. Bordeaux, IV. s. **5** (1895)] besprochen. Die Fundamentalformeln werden neu bewiesen, wodurch diese Arbeit auch unabhängig studiert werden kann. In den wichtigsten neuen Ergebnissen nennen wir das Studium der Abbildung einer non-holonomen Mannigfaltigkeit V_n^m auf sich selbst, wo im besonderen der Fall von konstanten Rotationskoeffizienten behandelt wird. Dann werden diese Mannigfaltigkeiten nach dem Beispiel von Killing und Bianchi auf ihre Invarianz bei einer kontinuierlichen Transformationsgruppe untersucht, wobei die V_3^2 vollständig klassifiziert werden. Dabei werden die V_3^2 konstanter Krümmung mit vierparametriger Transformationsgruppe speziell betrachtet. *Struik* (Haarlem).

Peterson, T. S.: The analogue of Weyl's conformal curvature tensor in a Michal functional geometry. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **13**, 55—62 (1934).

Two functional metric spaces are said to be conformal if and only if a functional $\lambda[y(s)]$ exists such that $\bar{g}_{\alpha\beta}[y(s)] = \lambda[y(s)]\,g_{\alpha\beta}[y(s)]$ and $\bar{g}_\alpha = \lambda g_\alpha$. The author derives the expressions for the four functional tensors which are independent of $\lambda[y(s)]$. The first of these $\mathfrak{B}^i_{\alpha\beta\gamma}$ is the analogue of Weyl's conformal curvature tensor. The expressions for these tensors become meaningless in case the interval of integration is either one or two but in these two cases the elimination of $\lambda\,[y(s)]$ is easily performed. The vanishing of these four tensors is a necessary condition for the conformality of the space to a Euclidean function space but the sufficiency of this condition has not as yet been established. *M. S. Knebelman* (Princeton).

Ancochea, G.: Invarianten eines Dreiergespinstes. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. **9**, 54—63 (1934) [Spanisch].

Vgl. T 27, G. Bol und G. Howe, Invarianten von Differentiatorgespinsten [Abh. Math. Semin. Hamburg. Univ. 8, 194 (1930)], wo auch die Invariantentheorie des Dreigespinstes behandelt wird für den Fall, daß die drei Hauptinvarianten von Null verschieden sind, also keine zwei der Kurvenscharen Flächen aufspannen. Verf. diskutiert die daselbst nicht behandelten Fälle, wo also Flächen aufgespannt werden, und zwar mit Hilfe von dem Cartanschen Kalkül, und gibt an, wann das Gewebe in jedem Fall eine Gruppe gestattet. *G. Bol* (Hamburg).

Walberer, Paul: Topologische Fragen der Differentialgeometrie. LV. Orthogonale Kurvengewebe in Euklidischen Räumen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **10,** 169—179 (1934).

Zu drei Kurvenscharen im dreidimensionalen Raum läßt sich leicht die allgemeinste Riemannsche Metrik angeben, in bezug auf welche die drei Scharen orthogonal sind. Sind nämlich die drei Scharen Bahnkurven der Operatoren $\Delta_i = q_i^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, und ist $q_i^\mu\, q_{k|\mu|} = \delta_i^k$, so leistet die zum Tensor $g_{\nu\mu} = \sum_k \lambda_k q_k \,|_\nu q_k|_\mu$ gehörige Metrik, wo λ_k drei beliebige Funktionen sind, das Verlangte, und damit sind auch alle Lösungen der Aufgabe erschöpft. Verf. fragt, ob es hierunter auch Euklidische Maßbestimmungen gibt, und zeigt, daß dies immer der Fall ist und daß die möglichen Lösungen von 6 Funktionen von zwei Veränderlichen (und vier von einer Veränderlichen) abhängen. Zum Beweis bezieht man sich auf das von den Operatoren festgelegte (nicht holonome) Bezugssystem, und drückt die Komponenten der Krümmungsgröße in diesem System aus durch die „Klammerkoeffizienten" der Operatoren, Nullsetzen der Krümmungsgröße gibt dann Differentialgleichungen für die Funktionen λ_k, es zeigt sich, daß diese ein Cauchy-Kowalewskisches System bilden. (LIV. vgl. dies. Zbl. **9**, 327.) *G. Bol.*

Blaschke, Wilhelm, und Paul Walberer: Topologische Fragen der Differentialgeometrie. LVI. Die Kurven-3-Gewebe höchsten Ranges im R_3. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **10,** 180—200 (1934).

Vgl. T 48, W. Blaschke, Über Gewebe von Kurven im R_3, dies. Zbl. **7**, 78. Es werden sämtliche 3-Gewebe des höchsten Ranges 5 angegeben. Das Ergebnis lautet: Man nehme im projektiven Raum von vier Dimensionen eine Hyperfläche dritter Ordnung. Darauf liegt eine zweigliedrige Schar reeller gerader Linien, die zu je dreien in einer Ebene liegen. Solcher Ebenen gibt es eine dreigliedrige Schar. Wir bilden durch zentrale Projektion diese Geraden und Ebenen ab auf den dreidimensionalen Raum und gehen hier zu der dualen Figur über. Diese bildet dann bis auf topologische Abbildungen das allgemeinste 3-Gewebe vom Rang 5. Bei der Wahl der Hyperfläche sind gewisse Sonderfälle auszuschließen und gewisse Realitätsannahmen zu machen. — Der Beweis wird geführt mit Hilfe der Methode von T 50 (dies. Zbl. **7**, 78), also durch Deutung der in den 5 vorhandenen Relationen vorkommenden Funktionen im projektiven 4-dimensionalen Raum, wo dann die erwähnte Hyperfläche nachweisbar ist. Umgekehrt werden bei vorgegebener Hyperfläche die Relationen explizit angegeben. *G. Bol* (Hamburg).

Blaschke, W.: Hexagonal 4-webs of surfaces in 3-space. J. Indian Math. Soc. **20,** 182—184 (1934).

A 4-web of surfaces in 3-space is called hexagonal if each surface of the web is intersected by those of the three sheaves it does not belong to in a 3-web of curves