Werk

Titel: Mengenlehre und reelle Funktionen (s. a. Geometrie).

Ort: Berlin

Jahr: 1934

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0009|log66

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Gruppen bilden; diese heißen „transitive Bestandteile" von $G(x)$. Hat $G(x)$ zwei transitive Bestandteile der relativ primen Grade m und n, so besitzt es auch einen solchen, dessen Grad $>n$ und $>m$ und Teiler von $n\,m$ ist. Besonders eingehend wird der Fall untersucht, daß $G(x)$ einen regulären Bestandteil M besitzt; hier ergibt sich unter anderem: Ist M vom Grade $p\,q$ (p, q verschiedene Primzahlen), so besitzt $G(x)$ die Ordnung $p \cdot q$, und: Hat $G(x)$ höchstens vier transitive Bestandteile, so ist die Ordnung von $G(x)$ gleich dem Grad von M. *Magnus* (Frankfurt a. M.).

Coxeter, H. S. M.: On simple isomorphism between abstract groups. J. London Math. Soc. **9**, 211—212 (1934).

Notwendig und hinreichend für die Isomorphie von zwei Gruppen mit definierenden Relationen (1) $f(S) = 0$ und (2) $g(T) = 0$ ist das Bestehen von Relationen (3) $T = T(S)$ und (4) $S = S(T)$, so daß (1) und (3) aus (2) und (4) folgen und umgekehrt. An Beispielen wird gezeigt, daß die vier Teilbedingungen, in die man diese Bedingung analysieren kann, voneinander unabhängig sind. *van der Waerden* (Leipzig).

Coxeter, H. S. M.: Abstract groups of the form $V_1^k = V_j^3 = (V_i V_j)^2 = 1$. J. London Math. Soc. **9**, 213—219 (1934).

Die Gruppe mit Erzeugenden $V_1, \ldots, V_n$, die durch

$$V_1^k = V_j^3 = (V_i V_j)^2 = 1 \qquad (1 \leqq i < j \leqq n)$$

definiert wird, ist isomorph zur Gruppe mit Erzeugenden $S_1, \ldots, S_n$, die durch

$$\begin{cases} S_1^k = S_j^2 = (S_{j-1} S_j)^3 = 1 & (1 < j \leqq n) \\ (S_i S_j)^2 = 1 & (1 \leqq i < j - 1) \end{cases}$$

definiert wird. Die letztere Gruppe kann man darstellen als Gruppe von Drehungen des $\mathfrak{R}_{n+1}$ mit euklidischer oder minkowskischer Maßbestimmung, die ein reguläres Polytop $\{k, 3^{n-1}\}$ [vgl. Coxeter, Proc. Cambridge Philos. Soc. **27**, 201 vgl. dies. Zbl. **1**, 288 und **29**, 2 vgl. dies. Zbl. **6**, 125] in sich transformieren. Die Gruppe ist endlich für $k \leqq 4$, für $k = 5$, $n \leqq 3$ sowie für $n = 1$, aber in keinem anderen Fall. Für $k = 2$ ist sie isomorph zur symmetrischen $\mathfrak{S}_{n+1}$ und für $k = 3$ zur alternierenden $\mathfrak{A}_{n+2}$. *van der Waerden.*

Young, Alfred: On quantitative substitutional analysis. VIII. Proc. London Math. Soc., II. s. **37**, 441—495 (1934).

Die Abschnitte 1—7 bilden eine Fortsetzung der Arbeit Q. S. A. VI (vgl. dies. Zbl. **5**, 97). 1. Die „seminormalen" Matrixgestalten der Darstellungen der symmetrischen Gruppe, die mit Hilfe einer bestimmten Reihenfolge der „Tableaux" gewonnen wurden, können auch mit anderen Reihenfolgen gebildet werden und haben dann unter Umständen noch einfachere Eigenschaften. 2. Diejenigen Elemente des Gruppenrings, die bei Rechtsmultiplikation mit gewissen Substitutionen invariant bleiben oder das Vorzeichen wechseln, drücken sich in einfacher Weise durch die seminormalen Einheiten aus. 3. bis 4. Die seminormalen Einheiten der Permutationsgruppen von n Symbolen werden durch die von $n + m$ Symbolen ausgedrückt. 5. Es werden n-äre algebraische Formen gebildet, welche dieselben Substitutionseigenschaften haben (d. h. von denselben Operatoren annulliert werden) wie die seminormalen Einheiten. 6. Die Matrix Λ, die die reguläre Darstellung in die seminormal-ausreduzierte transformiert, wird aufgestellt. 7. Die Frobeniussche „doppelte Gruppenmatrix" $[x_{PQ^{-1}} + y_{Q^{-1}P}]$ wird ebenfalls ausreduziert. — Die Abschnitte 8 und 9 bilden eine Fortsetzung der Arbeit Q. S. A. VII (vgl. dies. Zbl. **8**, 49) und geben die Anwendung der seminormalen Einheiten auf die Invariantentheorie. *van der Waerden* (Leipzig).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Kamke, E.: Über die Begründung der Mengenlehre. Math. Z. **39**, 112—125 (1934).

Der Verf. macht zunächst Einwände gegen die axiomatische Mengenlehre, wie folgt: 1. Sie ist nicht als widerspruchsfrei erwiesen, und wegen des Auftretens von Antinomien in der naiven Mengenlehre und wegen des Fehlens eines konstruktiven Er-

zeugungsverfahrens sei dies ernstlicher als bei den natürlichen Zahlen; 2. weil sie nicht kategorisch ist, so lassen sich manche Fragen der Cantorschen Mengenlehre nicht beantworten; 3. für die Anwendungen brauche man die mengentheoretischen Begriffe gerade im Cantorschen Sinne; 4. sie sei nicht nötig, weil die Antinomien sich schon innerhalb der Cantorschen Mengenlehre vermeiden lassen, indem man sich auf Begriffsbildungen beschränke, die „der Mathematiker als sinnvoll anerkennen kann". Es ist natürlich eine Frage, was „sinnvoll" bedeutet, und der Verf. gibt zu, daß viele Sätze, insbesondere die Theorie der Ordnungszahlen, in Zweifel stehen. Auf diesem Cantorschen Boden stehend stellt der Verf. sich die Aufgabe, die Theorie der Ordnungszahlen zu retten. Dies tut er, indem er die Ordnungszahlen aus irgendeinem Ding, 0 genannt, genetisch erzeugt. Er gibt zwei Erzeugungsprinzipien an, wovon das erste genügt, um die Zahlen einer bestimmten Zahlklasse zu erzeugen, wenn nur die Anfangszahlen der Zahlklasse und aller niedrigeren definiert sind; das zweite Prinzip ermöglicht das Hinaufsteigen auf immer höhere Zahlklassen. Die zwei Prinzipien genügen aber nicht, um Zahlen von exorbitanter Größe zu erreichen. Man kann in dieser Weise die Theorie der Ordnungszahlen begründen, und die Burali-Fortische Antinomie kann nicht auftreten. *H. B. Curry* (State College).

● **Sierpiński, Wacław: Hypothèse du continu. (Monogr. mat. Tom 4.)** Warszawa-Lwów: Subwencji Funduszu Kultur. Narodowej 1934. V, 192 S. $ 3.50.

The monograph is written lucidly, presupposing little technical knowledge on the part of the reader. Attention is called to the unique significance of the hypotheses H, namely that $2^{\aleph_0} (= c) = \aleph_1$. The content consists mainly in the proof of propositions equivalent to H and in the derivation of consequences of H. The results are mostly of recent date, a large part published within the last few years; more are due to the author than to any other writer. A good many results are published here for the first time. Chap. I gives a number of propositions equivalent to H such as: The plane is the sum of $\aleph_0$ curves, "curve" meaning the set of points (x, y) satisfying $y = f(x)$ or $x = f(y)$, f a one-valued, real function; the set of real numbers is the sum of increasing denumerable sets; there exists in Hilbert space a non-denumerable set of points such that no non-denumerable subset of it is homeomorphic with a part of a euclidean space. Chap. II singles out a particular consequence C_1 of H, not equivalent to H, "d'une importance capitale", due to Lusin, and considers various consequences of C_1. C_1 is as follows: There exists a linear set N of cardinal c having in common with every (linear) perfect non-dense set no more than $\aleph_0$ points. E (linear) is said to have property L, if every non-dense, perfect set contains at most $\aleph_0$ points of E; property C, if for every infinite sequence of positive numbers $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots$, E is coverable by a sequence of intervals of length equal respectively to $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$. A Baire function is a function analytically representable; a function satisfying the Baire condition, one continuous on every perfect set P if sets of first category with respect to P are negligible; a set E (in a metric space) having the Baire property, one such that for every perfect set P, there is a sphere S containing in its interior points of P and such that at least one of the sets SPE and $SP - E$ is of first category with respect to P. Samples of results in Chap. II: Every Baire function transforms a set of property L into a set of property C; if E (linear) has property L, every Baire function on E is of class $\leqq 2$ (on E); if a linear non-denumerable set Q has property L, there is a function continuous on Q but uniformly continuous on no non-denumerable subset of Q; if Q has property L, there is an infinite sequence of continuous, uniformly bounded functions $f_1(x), f_2(x), \ldots$ such that for every infinite sequence of increasing indices $m_1, m_2, \ldots$, the sequence $f_{m_1}(x), f_{m_2}(x), \ldots$ converges at no more than $\aleph_0$ points of Q. Samples of consequences of C_1: There is a linear set of cardinal c every continuous image of which is of measure 0; there is a linear set of cardinal c such that every non-denumerable subset is of second category; there is a convergent infinite sequence of functions converging non uniformly on every non-denumerable set; the "generalized" problem of measure (non-negative) is solved negatively for sets of cardinal c. Connections of some of the consequences of C_1 are shown with the theorem of Egoroff on uniform convergence and with that of Fréchet on double sequences of measurable functions. There are various results on sets "always of first category", i. e., of first category on every (linear) perfect set; also on geometric images of functions, for ex.: There is a function satisfying the Baire condition whose geometric image hasn't the Baire property. Chap. III deals with the relation between category and measure, and is chiefly concerned with a kind of duality between sets of first category and sets of measure 0. This duality is deducible from the following proposition: There is a one-valued function $f(x)$ with one-valued inverse, defined for E, the set of all real numbers, such that $f(E) = E$; every set $S \subset E$ of first category is transformed into $f(S)$ of measure 0; and every set S of measure 0 is transformed by $f^{-1}(x)$ into $f^{-1}(S)$ of first category.

Chap. IV gives additional consequences of H. A few samples: There is a real function $f(x)$ such that the plane is a sum of $\aleph_0$ sets each superposable with the set of points of $y = f(x)$; there is a planar set E such that every parallel to the y-axis meets E is a set of measure 0, and every parallel to the x-axis meets the complement of E in a set of measure 0; every linear set of positive exterior measure contains a non-denumerable infinity of non-overlapping subsets of positive exterior measure; every linear set of second category contains a non-denumerable infinity of non-overlapping subsets of second category; there is a real function discontinuous on every set of cardinal c; there is a decomposition of the interval $0 \leqq x \leqq 1$ into $2^{2^{\aleph_0}}$ sets of exterior measure 1 and of second category in every interval, such that no pair of the sets have more than $\aleph_0$ points in common. Chap. V deals with the inaccessible depths; Chap. VI, with questions of effective examples; and Chap. VII, with the generalization of H: If $m \geqq \aleph_0$, there is no cardinal between m and 2^m. The Supplement gives a method due to Lusin, capable of proving without H certain propositions heretofore proved with the aid of H, for example, that every linear set of second category in every subinterval of a given interval is the sum of 2 non-overlapping sets of the same nature. *Blumberg* (Columbus).

Sierpiński, Wacław: Sur une conséquence de l'hypothèse du continu. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. **16,** 175—176 (1934).

Proof of the theorem: If $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, there exists a non-denumerable, linear set E and a continuous function $f(x)$ on E such that f is uniformly continuous on no non-denumerable subset of E. *Blumberg* (Columbus).

Sierpiński, W.: Un théorème topologique équivalent à l'hypothèse du continu. Fundam. Math. **23,** 190—192 (1934).

Verf. beweist die Äquivalenz der Kontinuumshypothese mit folgender Aussage: Es existiert in der Ebene ein unabzählbares System abzählbarer Mengen, so daß keine Summe unabzählbar vieler von ihnen einer linearen Menge homöomorph ist.
Nöbeling (Erlangen).

Sierpiński, W.: Sur une propriété des familles d'ensembles dénombrables. C. R. Soc. Sci. Varsovie **26,** 56—58 (1934).

Proof of the theorem: If F is a family of sets A, each at most denumerable, and if every element of S, the sum of all the A's of F, is contained in at most $\aleph_0$ A's, then S is the sum of $\aleph_0$ sets each having at most one element in common with every A.
Blumberg (Columbus).

Lindenbaum, Adolf: Sur la théorie de l'ordre multiple. Wiadom. mat. **37,** 1—34 u. franz. Zusammenfassung 34—35 (1934) [Polnisch].

Ein direktes Produkt von n geordneten Mengen μ oder eine Teilmenge P eines solchen nennt Verf. eine reine n-fach geordnete Menge (in Erweiterung eines Begriffs von Cantor, Ges. Abh. 420—439) und entwickelt die Hauptbegriffe dieser lange vernachlässigten Theorie (S. 12—23). Sind die μ wohlgeordnet und ist n endlich, so enthält P, dessen Mächtigkeit $m \geqq \aleph_0$ sei, eine monotone Teilmenge Q der Mächtigkeit m (S. 23—34); monoton bedeutet, daß für $x \prec Q$, $y \prec Q$ in jedem μ $x \leqq y$ oder in jedem μ $y \leqq x$ ist. — Eine historische Einleitung (S. 1—12) geht voran, zurückgreifend bis zu Leibnizens ordre des situations. — NB.: S. 22, Zeile 16 sollte $q < p$ stehen. *Th. Motzkin* (Jerusalem).

Kurepa, Georges: Tableaux ramifiés d'ensembles. C. R. Acad. Sci., Paris **199,** 112—114 (1934).

Sei T ein System nichtleerer Mengen. Wenn für je zwei Mengen M und M' von T entweder $M \cdot M' = 0$ oder $M' \subset M$ (bzw. $M \subset M'$) gilt, heißt T ramifié. Enthält jedes System $T' \subseteq T$ ein Teilsystem $R_0 T'$ paarweise fremder Mengen derart, daß jede Menge von T' in einer Menge von $R_0 T'$ enthalten ist, so heißt T ein tableau ramifié. Für jede Ordinalzahl α wird $R_\alpha T$ induktiv definiert durch die Formel $R_\alpha T = R_0(T - \sum_{\xi < \alpha} R_\xi T)$. Das System aller Mengen von $\sum_\alpha R_\alpha T$ mit Mächtigkeiten > 1 wird mit ψT bezeichnet. Mit $\psi_d T$ wird bezeichnet das System aller Mengen M von ψT und aller Mengen $M' - M''$, wobei $M'' \subset M'$ und $M' \in \psi T$ und $M'' \in \psi T$ ist. Verf. beweist folgenden Satz: Ist T ein tableau ramifié und ψT unendlich, so

enthält $\psi_d T$ ein System ψ' paarweise fremder Mengen, das dieselbe Mächtigkeit hat wie ψT. Unter gewissen Bedingungen kann man sogar $\psi' \subset \psi T$ wählen. *Nöbeling* (Erlangen).

Malchair, Henri: Quelques nouvelles considérations relatives aux suites et séries transfinies. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **3**, 133—140 (1934).

Considérant une suite transfinie du type $\beta \leqq \Omega : f_1(x) \ldots f_\xi(x) \ldots [\xi < \beta]$ comme uniformément convergente dans (a, b) vers $f(x)$ lorsque pour tout ε positif il existe un nombre ordinal $\mu_\varepsilon < \beta$ avec $|f(x) - f_\xi(x)| < \varepsilon$ pour $\mu_\varepsilon < \xi < \beta$ indépendant de x dans (a, b), on a que pour toute suite transfinie du type Ω uniformément convergente dans (a, b) les termes sont égaux à partir d'un certain indice. L'auteur définit aussi des séries transfinies du type $\beta \leqq \Omega$ uniformément convergentes dans (a, b) et des séries transfinies absolument convergentes et peut alors prouver: 1° que la limite d'une série transfinie du type $\beta \leqq \Omega$ unif. conv. dans (a, b) de fonctions de classe $\leqq \alpha$ est de classe $\leqq \alpha$; 2° qu'une série transfinie du type $\beta \leqq \Omega$ absolument conv. dans (a, b) est également convergente dans (a, b). On ne peut pas généraliser pour les séries transfinies le théorème connu sur les séries alternées. *J. Ridder.*

● **Lusin, N.: Sur les suites stationnaires. (Actualités scient. et industr. Nr. 149. Exposés math. publiés à la mémoire de Jacques Herbrand. V.)** Paris: Hermann & Cie. 1934. 19 S. Frcs. 5.—.

A transfinite sequence of sets $E_0, E_1, \ldots E_\beta, \ldots (\beta < \Omega)$, where Ω is the first of Cantors third class of ordinals, is said to be stationary if all the sets are identical for $\beta \geqq$ some fixed γ. The author points out that no example has ever been constructed of non-stationary transfinite sequences of B-measurable sets of finite class, reproves the theorem of Baire that a decreasing sequence of closed sets is stationary, extends this result to F_σ's, and raises the question, pointing out its importance and difficulty, whether an increasing sequence of sets E_β $(\beta < \Omega)$, each an F_σ, and such that if β is a limit ordinal E_β is the sum of the E_γ's for $\gamma \leqq \beta$, is necessarily stationary. *Blumberg* (Columbus).

Lusin, N. N.: Über stationäre Folgen. Trav. Inst. phys.-math. Stekloff **5**, 125—147 (1934) [Russisch].

Szpilrajn, Edward: Remarques sur les fonctions complètement additives d'ensemble et sur les ensembles jouissant de la propriété de Baire. Fundam. Math. **22**, 303—311 (1934).

There is proved the following generalization, to completely additive functions, of the theorem that a straight line is decomparable into z sets, one of measure zero and the other of the first category: If Z is a metric, separable space, and $\mu(E)$ is a non-negative, completely additive function of Borel subsets of Z which is zero for subsets consisting of a single point, there exists a decomposition $Z = H + K$, where K is an F_σ of the first category, H a G_δ, and $\mu(H) = 0$. New proofs of the following theorem of Banach and Kuratowski: If $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, every set Z of cardinal c satisfies the condition that, except for the function identically zero, there is no real, completely additive set function, defined for the subsets of Z, which is zero for the subsets consisting of a single point. New proofs of results of Poprougénko and Saks concerning uniform continuity of completely additive functions. *Blumberg* (Columbus).

Fischer, Helmut Joachim: Aufbau, Abbildung und Erweiterung der Borelschen Mengen und die Fortsetzung der Baireschen Funktionen. Heidelberg: Diss. 1933. 107 S.

S sei ein metrischer Raum, W ein separabler Raum. Ist jedem Punkt x einer Teilmenge $R \subset S$ ein Punkt $f(x)$ aus W zugeordnet, so ist auf R die Funktion $f(x)$ mit dem Werteraum W definiert. Die Baireschen Funktionen der verschiedenen Klassen auf R werden nach dem Vorgange von Lebesgue mittels der Borelschen Mengen der verschiedenen Ordnungen definiert und die bekannten Sätze darüber von neuem bewiesen; u. a. der Satz von Alexis [Fundam. Math. **15**, Satz III (1930)], daß für jede

Teilmenge R von S jede Funktion, die auf R von der Klasse α ist, zu einer Funktion der Klasse $\alpha+1$ in S fortgesetzt werden kann, und folgender Satz von Hausdorff: Ist R eine Menge $D_{\alpha+1}$, d. h. Durchschnitt abzählbar vieler Borelscher Mengen der Ordnung α, so kann jede auf R definierte Funktion der Klasse α zu einer Funktion α-ter Klasse in S fortgesetzt werden. (Hierbei brauchen für die fortgesetzte Funktion nur Werte aus irgendeinem in sich kompakten, W enthaltenden Raum benutzt zu werden.) Darüber hinaus wird bewiesen, daß letzteres nicht mehr stimmt, wenn R von der Ordnung $\alpha+1$, aber Vereinigungsmenge von abzählbar vielen Borelschen Mengen der Ordnung α ist. — Ferner werden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß eine einzelne auf R definierte Funktion ohne Erhöhung der Klasse fortgesetzt werden kann. *H. Busemann* (Kopenhagen).

Sierpiński, Wacław: Sur les fonctions jouissant de la propriété de Baire de fonctions continues. Ann. of Math., II. s. **35**, 278—283 (1934).

Proof of the theorem: If $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, there exists a real function not having the Baire property which is a Baire function of a continuous function. *Blumberg.*

Lindenbaum, Adolphe: Sur les superpositions des fonctions représentables analytiquement. Fundam. Math. **23**, 15—37 (1934).

This paper contains a series of important theorems concerning superpositions (compositions) of Baire's functions. The author denotes by $\mathfrak{B}_\alpha$ the Baire classes of functions, by $\mathfrak{L}_\alpha$ and $\mathfrak{A}_\alpha$ the Young classes and by $\mathfrak{S}_\alpha$ the Sierpiński classes; i. e. $\mathfrak{C}=\mathfrak{B}_0=\mathfrak{A}_0=\mathfrak{L}_0=\mathfrak{S}_0$ is the set of all continuous functions, $\mathfrak{B}_\alpha(\Omega>\alpha>0)$ that of functions $f(x)=\lim_n f_n(x)$ where $f_n(x)$ belong to classes $\mathfrak{B}_\xi$ with indices $\xi<\alpha$, $\mathfrak{A}_\alpha[\mathfrak{L}_\alpha]$ the set of functions which are limits of non-increasing [non-decreasing] sequences of functions belonging to classes $\mathfrak{L}_\xi[\mathfrak{A}_\xi]$ for $\xi<\alpha$, and finally $\mathfrak{S}_\alpha$ is the set of functions which are sums of absolutely converging series of functions belonging to classes $\mathfrak{S}_\xi$ for $\xi<\alpha$. Given two arbitrary sets of functions $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ the set of all functions of the form $h[g(t)]$ where $h(t)\in\mathfrak{M}$ and $g(t)\in\mathfrak{N}$ is denoted by $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$. With these notations the author establishes the following fundamental relations: $\mathfrak{L}_\alpha\times\mathfrak{L}_\beta=\mathfrak{L}_{\beta+\alpha}$, $\mathfrak{A}_\alpha\times\mathfrak{A}_\beta=\mathfrak{A}_{\beta+\alpha}$, $\mathfrak{B}_\alpha\times\mathfrak{B}_\beta=\mathfrak{B}_{\beta+\alpha}$ and $\mathfrak{S}_\alpha\times\mathfrak{S}_\beta=\mathfrak{S}_{\beta+\alpha}$. From many other results of the paper we shall point out the following one: There exists a sequence $\{\Phi_n(t)\}$ of functions of class 1 of Baire such that any function $f(t)$ of class $\alpha+\omega$ is the limit of a converging sequence $\{\Psi_n(t)\}$ where $\Psi_n(t)=\Phi_n[\Psi_{n-1}(t)]$ for $n\geqq 1$ and $\Psi_0(t)$ is a function of class α, depending on $f(t)$. An analogous theorem is established with respect to the Young classification of functions. *Saks.*

Inaba, Mituo: Über die nach x partiell stetige Funktion $f(x, y)$. I. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **16**, 201—203 (1934).

Inaba, Mituo: Über die nach x partiell stetige Funktion $f(x, y)$. II. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **16**, 225—226 (1934).

x durchlaufe den Raum R_1 der reellen Zahlen, y einen „beliebigen" Raum R_2 (es lassen sich leicht Bedingungen für R_2 angeben, unter denen die Behauptungen sinnvoll werden); $f(x, y)$ sei eine auf $R_1\times R_2$ definierte, nach x partiell stetige Funktion. Dann gilt 1.: Ist $f(x, y)$ bei jedem festen x in y höchstens von der α-ten Baireschen Klasse, so ist $f(x, y)$ in bezug auf beide Variable höchstens von der Klasse $\alpha+1$. 2. Ist $f(x, y)$ für jedes feste x in y von irgendeiner Baireschen Klasse, so ist $f(x, y)$ als Funktion beider Variabler von einer gewissen Baireschen Klasse. *H. Busemann.*

Ursell, H. D.: On the total variation of $\{f(t+\tau)-f(t)\}$. Proc. London Math. Soc., II. s. **37**, 402—415 (1934).

The principal results are: 1) If $f(t)$ is a measurable function defined in the interval $(0, 1)$, and if for every τ, $f(t+\tau)-f(t)$ is of bounded variation in the interval $(0, 1-\tau)$ in which it is defined, there $f(t)$ is itself of bounded variation. 2. If $f_1(t)$ and $f_2(t)$, defined in $(0, 1)$, are measurable, the total variation of $f_1(t+\tau)-f_2(t)$ in the interval in which it is defined, is measurable. It is shown that for the converse of the theorem,

that if $f(t)$ is absolutely continuous, $f(t+\tau) - f(t)$ goes to zero with τ, it is sufficient to assume that $f(t)$ is measurable. Analogous questions for a rational variable.

Blumberg (Columbus).

Adams, C. R., and J. A. Clarkson: On convergence in variation. Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 413—417 (1934).

A sequence of functions of bounded variation $f_n(x)$ is said to converge in variation to f_0 ($f_n \to v \to f_0$) if $f_n \to f_0$ for every x and $T_a^b f_n \to T_a^b f_0$, where $T_a^b f$ is the total variation of f on (a, b). It is shown that if $f_n \to v \to f_0$, then $T_a^x f_n \to T_a^x f_0$, for every x, and that if f_0 is continuous then both $f_n(x) \to f_0(x)$ and $T_a^x f_n \to T_a^x f_0$ uniformly on (a, b), extending a theorem on the convergence of monotonic functions of Buchanan and Hildebrandt [Ann. of Math. **9**, 123—126 (1908)]. Further if $f_n \to v \to f_0$ then $f_n \to f_0$ uniformly if and only if $T_a^x f_n \to T_a^x f_0$ uniformly. For the reciprocals $1/f_n \to v \to 1/f_0$ if $f_n \to v \to f_0$, $|f_n| > \alpha > 0$ and do not change sign on the interval. Convergence in variation is not however invariant under addition and multiplication even when the convergences are to continuous functions. *Hildebrandt* (Ann Arbor).

Khintchine, A.: Eine arithmetische Eigenschaft der summierbaren Funktionen. Rec. math. Moscou **41**, 11—13 (1934).

Beweis des Satzes: $f(x)$ sei L-integrierbar und habe die Periode 1; η sei eine beliebige Irrationalzahl; dann gilt für fast alle x

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x + k\eta) = \int_0^1 f(\alpha)\, d\alpha .$$

Man kann diesen Satz als neue Integraldefinition verwenden, die mindestens so umfassend ist wie die Lebesguesche. *Willy Feller* (Stockholm).

Jessen, B.: On the approximation of Lebesgue integrals by Riemann sums. Ann. of Math., II. s. **35**, 248—251 (1934).

The author investigates the expression $f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$ where $f(x)$ is a periodic function with period 1. It is obvious that this expression tends uniformly to the integral of $f(x)$ over [0,1] in the case when $f(x)$ is integrable in the Riemann sense. On the other hand, as it was proved in a slightly more general form by Denjoy, $f_n(x)$ tends "in measure" to $\int_0^1 f\,dx$ whenever $f(x)$ is integrable in the Lebesgue sense; thus, in that case there always exists a sequence $\{n_k\}$ depending in general on $f(x)$ such that almost everywhere $f_{n_k}(x) \to \int_0^1 f\,dx$. The very interesting result of Jessen consists in showing that the latter relation holds almost everywhere for any periodic function $f(x)$ integrable (L) whenever the sequence $\{n_k\}$ is so chosen that n_k is a divisor of n_{k+1} (e. g. if $n_k = 2^k$). *Saks* (Warszawa).

Wendelin, Hermann: Über die R-Integrierbarkeit von zusammengesetzten Funktionen und eine Verallgemeinerung eines Satzes von H. B. Fine. Anz. Akad. Wiss., Wien Nr **17**, 198—201 (1934).

Der Autor beweist in einfacher Weise: Wenn die $u_j(x)$ in (a, b) R-integrierbar sind ($j = 1, \ldots, r$) und wenn $F(v_1, v_2, \ldots v_r)$ für $|v_j| < A$ definiert ist, wobei A = obere Grenze aller $|u_j(x)|$-Werte, während sich für je zwei r-Tupel $v_1', \ldots, v_r'$; $v_1'', \ldots, v_r''$ (mit $|v_j'|, |v_j''| < A$) schreiben läßt

$$F(v_1', \ldots, v_r') - F(v_1'', \ldots, v_r'') = \sum_{(j)} B_j (v_j' - v_j'')$$

mit $|B_j| < M$ ($j = 1, \ldots r$; M fest), dann ist auch $F(v_1, \ldots, v_r)$ mit $v_j = u_j(x)$ in (a, b) R-integrierbar. Außerdem läßt sich das Integral von F als Grenzwert von verallgemeinerten Riemann-Summen darstellen. *J. Ridder* (Groningen).

Kestelman, H.: An integral for functions of bounded variation. J. London Math. Soc. **9**, 174—178 (1934).

As a generalization of a result of Banach the following theorem is established: if a function $f(x)$ has the finite total variation v in $[a, b]$ and if $N(y)$ is the number of times that $f(x)$ assumes the value y for x in $[a, b]$ then $v = S + \int_{-\infty}^{+\infty} N(y)\, dy$ where S denotes the sum of all the saltuses of $f(x)$. This relation was proved by Banach [Fundam. Math. **7**, 225—236 (1925)] in the case when $f(x)$ is continuous and when, therefore, $S = 0$ [see also Vitali, Fundam. Math. **8**, 175—188 (1926)]. *Saks* (Warszawa).

Young, L. C.: Limits of Stieltjes integrals. J. London Math. Soc. **9**, 119—126 (1934).

Es werden Beschränktheits- und Stetigkeitseigenschaften des Riemann-Stieltjesschen (R. S.) Integrales $\int_a^b f(x)\, dg(x)$ untersucht. Es sei $f(x)$ stetig und $g_n(x)$ von beschränkter Variation $V(g_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Der zunächst bewiesene Satz, daß notwendig $V(g_n) < K$ (K von n unabhängig) damit $\int_a^b f\, dg_n$ für jedes stetige f eine beschränkte Folge bilde, ist ein Spezialfall eines Satzes von Lebesgue und Hahn über lineare Operationen [H. Hahn, Mh. Math. Phys. **32**, 6 (1922)]. Ferner wird ein Konvergenzsatz von Helly [S.-B. Akad. Wiss. Wien **121** (1912)] folgendermaßen verallgemeinert: Die $f_n(x)$ konvergieren gleichmäßig gegen ein stetiges $f(x)$, und die $g_n(x)$ $(V(g_n) < K)$ konvergieren in einer überall dichten Punktmenge, welche a und b enthält gegen $g(x)$, welches man in ganz (a, b) mit $V(g) < \infty$ vervollständige. Dann ist $\lim \int_a^b f_n dg_n = \int_a^b f dg$, falls alle diese Integrale existieren. Falls darüber hinaus die $g_n(x)$ monoton sind und man von $f(x)$ nur die R. S. Integrierbarkeit nach $g(x)$ voraussetzt, so konvergieren die oberen und unteren R. S. Integrale von $\int_a^b f_n\, dg_n$ gegen $\int_a^b f dg$. Ein weiterer Satz über Lebesgue-Stieltjes' (L. S.) Integrale verallgemeinert den fundamentalen Lebesgueschen Satz über den Grenzübergang unter dem Integralzeichen: Es seien f_n und g_n B-meßbar und $f_n \to f$, $g_n \to g$; ferner gebe es Majoranten f^* und g^* so, daß $|f_n| \leqq f^*$ und $|g_n(x'') - g_n(x')| \leqq g^*(x'') - g^*(x')$ falls $a \leqq x' < x'' \leqq b$, und endlich $\int_a^b f^*\, dg^* < \infty$. Dann gilt $\int_a^b f_n\, dg_n \to \int_a^b f dg$. Als Anwendungen dieser Sätze gibt der Verf. neue Beweise für die Hauptresultate einer früheren variationstheoretischen Arbeit (dies. Zbl. **7**, 213) und für einen Satz über die Einführung einer neuen Variablen in R. S. Integralen. *I. J. Schoenberg* (Princeton).

Petrowsky, I.: Sur l'unicité de la fonction primitive par rapport à une fonction continue arbitraire. Rec. math. Moscou **41**, 48—58 (1934).

$f(x)$, continue sur le segment $(0, 1)$, admet sur $(0, 1)$ une dérivée à droite par rapport à la fonction continue $\varphi(x)$ si en tout point du segment la limite:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)}$$

existe; dans la définition de cette limite on considère toutes les valeurs de $h > 0$ n'annulant pas simultanément le numérateur et le dénominateur, tandis qu'en chaque point x pour lequel on a $f(x+h) = f(x)$ et $\varphi(x+h) = \varphi(x)$ pour toutes les valeurs positives de h suffisamment petites, la dérivée à droite est supposée comme existante et égale à zéro. On a le théorème fondamental: „Une fonction continue $f(x)$ est déterminée à une constante additive près par la connaissance de sa dérivée à droite p. r. à

une fonction continue $\varphi(x)$, si cette dérivée existe et est finie, sauf peut-être aux points d'un ensemble dénombrable du segment considéré." En admettant que le théorème soit faux, l'auteur construit deux autres fonctions continues f_1, φ_1 dont la première n'est pas constante et la seconde est à variation bornée, la dérivée de f_1 p. r. à φ_1 étant nulle partout; ceci contredit cependant à un théorème de Lebesgue (cf. Lebesgue, Leçons sur l'intégration, Deuxième Ed. 1928, Chap. XI). *J. Ridder* (Groningen).

Severi, Francesco: Sulla differenziabilità totale delle funzioni di più variabili reali. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **13**, 1—35 (1934).

This paper contains a set of elementary results concerning the differentiability of functions of two, or more, variables. Beside the differential in the ordinary sense of Stolz the author introduces the notion of a hyperdifferential of a function. The expression $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ is said to be a hyperdifferential of a function $f(x, y)$ at a point (x, y) if $[f(x'', y'') - f(x', y') - \alpha\Delta x - \beta\Delta y]/r$ tends to 0 as (x', y'), (x'', y'') tend simultaneously to (x, y), while $\Delta x = x'' - x'$, $\Delta y = y'' - y'$ and $r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$. In order that a function $f(x, y)$ should be hyperdifferentiable in every point of an open region R it is necessary and sufficient that $f(x, y)$ should have partial differential coefficients $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ continuous everywhere in R. The hyperdifferentiability of a function at a point corresponds to the property of a point of a surface to be a simple one; namely, roughly saying, a point P_0 of a surface is called simple if there exists a plan π through P_0 such that the straight line PQ tends to π as P and Q denote points of π and tend to P_0. Hence, the preceding theorem may be given the following geometrical form: if all points of a Jordan surface π are simple then π everywhere has a tangent plan varying in a continuous manner. From other results of the paper the following theorem will be mentioned: Let at any point (x, y) there exist both limits

$$\alpha(x, y) = \lim \frac{f(x', y') - f(x, y')}{x' - x}, \qquad \beta(x, y) = \lim \frac{f(x', y') - f(x', y)}{y' - y}$$

as the point (x', y') tends to (x, y) along any straight segment passing through (x, y); suppose, farther, that the expressions $\alpha(x, y)$ and $\beta(x, y)$ are bounded in an open region R. Then $f(x, y)$ is differentiable (in the Stolz sense) everywhere in R. *Saks* (Warszawa).

Jarník, Vojtěch: Remarque sur les nombres dérivés. Fundam. Math. **23**, 1—8 (1934).

Mazurkiewicz, Stefan: Sur les nombres dérivés. Fundam. Math. **23**, 9—10 (1934).

It is known that for any continuous function $f(t)$ in [0,1] the set $\mathcal{E}(f)$ of points where $\bar{f}^+(t) < +\infty$, is a non-enumerable one. Jarník gives a direct and elementary proof of this statement, and investigates the set $\mathcal{E}(f)$ for more general classes of functions. It is shown that for functions belonging to the space of all bounded functions, or to that of functions of class α ($\alpha > 0$) of Baire, $\mathcal{E}(f)$ is "as a rule" at most enumerable, however non-empty, set. More precisely: Let D be an arbitrary space of bounded functions subject to the following conditions: (I) if $f(t)$ and $g(t)$ belong to D so does $f + g$, (II) if A is a closed and at most enumerable set of points in [0,1], then any function constant on A and vanishing elsewhere belongs to D. The norm $\|f\|$ in D is to be understood as the upper bound of $|f(t)|$ over [0,1]. Then, for any f in D, except, perhaps, for functions belonging to a set of the 1st category in D, the set $\mathcal{E}(f)$ is at most enumerable and everywhere dense in [0,1]. — The existence of functions of class $\alpha > 0$ of Baire with $\mathcal{E}(f) = 0$ is fairly obvious for $\alpha > 1$. The same problem for $\alpha = 1$ is more difficult and is affirmatively solved by Mazurkiewicz: namely, a bounded function $f(t)$ is constructed so as to be everywhere continuous on the right and to have the right-side upper derivate equal everywhere to $+\infty$. As it follows from Jarník's theorem the set of such functions is of the 1st category in the space of functions of class $\leqq 1$ of Baire. *Saks.*