l'ensemble parfait et discontinu de Cantor, ou bien fini. D. v. D.]; si U est fini, W est lui-même un groupe de Lie, s'il est homéomorphe avec l'ensemble de Cantor, W n'est pas localement connexe. — Tout revient à la démonstration d'un théorème auxiliaire qui exprime que chaque groupe compact est du type, nommé par le réf. „solénoidal". [Ce théorème auxiliaire est un approfondissement essentiel des théorèmes IV et VI, démontrés par le réf. (D. van Dantzig, Le groupe fondamental d'un groupe compact abstrait, C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 1156—1158 (1933); ce Zbl. **6**, 300); les autres s'ensuivent d'une manière pas trop difficile. D. v. D.] *D. van Dantzig* (Delft).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Sierpiński, W.: L'hypothèse du continu et la propriété de Baire. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 1716—1717 (1933).

If we admit that the power of the continuum is Aleph-one: (I) there is a set G on the axis of ordinates which fulfils the condition of Baire (for every perfect set P there is a sphere S containing in its interior points of P and such that one of the sets SPE, $SP - E$, is of the first category with respect to P) and such that the plane set composed of all the parallels to the axis of abscissas which pass through points of G does satisfy the condition of Baire; (II) there is a function $f(x)$ of a real variable which admits the property of Baire (is continuous on every perfect set P, neglecting a set of the first category relative to P) and whose geometric image is a plane set which does not satisfy the condition of Baire; (III) there is a real function $\varphi(x)$ with the property of Baire and a continuous function $\psi(x)$ such that $\varphi[\psi(x)]$ lacks that property; (IV) each linear set is a continuous and biunivocal image of a linear set which satisfies the condition of Baire. Detailed demonstrations are to be given elsewhere.

Chittenden (Iowa).

Sierpiński, W.: Sur l'équivalence de deux conséquences de l'hypothèse du continu. Studia Math. **4**, 15—20 (1933).

Dans une note antérieure [Mh. Math. Phys. **39**, 233—238 (1932); voir ce Zbl. **4**, 205] l'auteur a démontré le théorème suivant: Il existe une fonction $f(x)$ et une suite double de fonctions $\{f_n^m(x)\}$ telles que les limites $\lim\limits_n f_n^m(x)$ et $\lim\limits_m \lim\limits_n f_n^m(x) = f(x)$ existent pour tout x et que, quelles que soient la suite infinie croissante $\{m_k\}$ d'indices et la suite d'indices $\{n_k\}$, l'égalité $\lim\limits_k f_{n_k}^{m_k}(x) = f(x)$ ne se présente que pour une infinité au plus dénombrable de points. D'autre part, Banach et Kuratowski [Fundam. Math. **14**, 128—131 (1929)] ont prouvé que pour tout intervalle I il existe une double suite d'ensembles $\{A_n^m\}$, telle que: 1° $I = \sum\limits_n A_n^m$ pour tout m; 2° $A_p^m \cdot A_q^m = 0$ pour tout m et $p \neq q$; 3° le produit $\prod\limits_m (A_1^m + A_2^m + \dots + A_{n_m}^m)$ est au plus dénombrable pour toute suite $\{n_m\}$ d'indices. — La démonstration de chacun de ces théorèmes s'appuit sur l'hypothèse du continu. Dans la note présente l'auteur établit leur équivalence sans admettre cette hypothèse. *Saks* (Warszawa).

Sierpiński, W.: Sur une propriété des ensembles G_σ non dénombrables. (Solution d'un problème de M. Kuratowski.) Fundam. Math. **21**, 66—72 (1933).

Two sets of points E and H admit a generalized homeomorphism of the first class if there exists a function $f(x)$ defined on E of class $\leqq 1$ on E, and of distinct values in E, which transforms E into H and has an inverse of class $\leqq 1$ on H. It is shown that between any two non-enumerable linear sets of type G_δ there exists a generalized homeomorphism of the first class. *Chittenden* (Iowa).

Lusin, Nicolas: Sur les ensembles toujours de première catégorie. Fundam. Math. **21**, 114—126 (1933).

A set E is said to be always of the first category if for every perfect set P the set PE is of the first category on P. (For the sake of brevity, the notation E will be used throughout this abstract to denote a set of this type which is non-enumerable.) Denoting by $(AZ)'$ the form of the Zermelo axiom of choice in which sets of the given family are disjoined, Lusin proposes the problem: give an example of a set E with the power of the continuum using only $(AZ)'$. He presents an example of a non-measurable set E which is dependent on the hypothesis of the continuum. According to Sierpiński a set H of points is rarified if every enumerable part D of H is contained in a set G_δ containing no other point of H. Then every rarified set is a set E. But there are sets E which are not rarified. Let G_α, $0 < \alpha < \Omega$, be a decreasing series of sets F_σ. If ξ_α is an arbitrary element of $G_\alpha - G_{\alpha+1}$, the set Ξ of all ξ_α is a set E. The letter closes with a discussion of the question: do sets E really exist? Lusin agrees with the naturalist view of Borel but defends transfinite investigations on the ground that they may lead to discoveries that would not be met otherwise. He points out difficulties latent in the theory of the positive integers, in particular the question of existence. *Chittenden* (Iowa).

Kuratowski, Casimir: Sur une famille d'ensembles singuliers. Fundam. Math. **21**, 127—128 (1933).

Consider the family of infinite sequences of positive integers as a metric space defined by identifying the sequence $s = [s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots]$ with the irrational number determined by the continued fraction $\frac{1|}{|s^{(1)}} + \frac{1|}{|s^{(2)}} + \cdots$. Let $s \prec t$ where, for n sufficiently large, $s^{(n)} < t^{(n)}$. From the axiom of Zermelo we may easily establish the existence of a non-enumerable scale, composed of sequences, well ordered according to the relation $s \prec t$. But every family E of this class has the property λ: every enumerable subset of E is a G_δ in E. It is shown that every set of power $\aleph_1$ is the biunivocal and continuous image of a space with the property λ. Under the "hypothesis of the continuum" this implies that "the property of Baire on every perfect set" is not invariant under biunivocal and continuous transformations. *Chittenden* (Iowa).

Besicovitch, A. S.: On tangents to general sets of points. Fundam. Math. **22**, 49 bis 53 (1934).

Beweis, daß die Menge der Punkte, in denen es eine Tangente an eine ebene Punktmenge E gibt, stets Summe von endlich oder abzählbar vielen Mengen endlichen linearen Maßes ist. Dabei werden zwei verschiedene Definitionen der Tangente zugrunde gelegt: Ist M ein (nicht notwendig zu E gehörender) Häufungspunkt von E, so heißt die Gerade MI nach der ersten Definition Tangente an E in M, wenn es zu jedem Geradenpaar MI' und MI'' eine positive Zahl r gibt derart, daß alle Punkte von E, die von M um weniger als r entfernt sind, in demjenigen Winkelraum (MI', MI'') liegen, der MI enthält. — Bei der zweiten Definition wird vorausgesetzt, daß E ein positives ν-dimensionales Maß im Sinne von Hausdorff [Math. Ann. **79** (1918)] hat $(1 \leqq \nu \leqq 2)$ und die untere Dichte von E im Punkte M positiv ist; dann ist MI Tangente in M, wenn für jedes Geradenpaar MI', MI'' die Teilmenge von E, die in dem MI enthaltenden Winkelraum (MI', MI'') liegt, in M die ν-dimensionale Dichte Eins hat. *Willy Feller* (Kopenhagen).

Gillis, J.: On the projection of irregular linearly measurable plane sets of points. Proc. Cambridge Philos. Soc. **30**, 47—54 (1934).

Beispiel einer ebenen linear meßbaren irregulären Punktmenge von der oberen Dichte 1 mit Projektionen vom positiven Maße auf einer Menge vom Maße 0 von Richtungen, die aber in jedem positiven Winkel von der Mächtigkeit des Kontinuums ist. Projektionen auf andere Richtungen sind nicht untersucht worden. Terminologie nach A. S. Besicovitch, Math. Ann. **98**, 422—464 (1928). *B. Knaster* (Warszawa).

Izumi, Shin-ichi: A new concept of integrals. Proc. Imp. Acad. Jap. **9**, 570—573 (1933).

The author gives an extension of the Perron-method of integration. He defines the major-functions as follows. $M(x)$ is a major-function of $f(x)$ in (a, b) if it satisfies the conditions: 1° $M(x)$ is (τ)-approximately continuous for $a \leqq x \leqq b (\tau > 1/2)$, 2° $M(a) = 0$, 3° the lower (τ)-approximate derivative, $\underset{\tau}{A\underline{D}}\, M(x)$, is $> -\infty$ in all points of (a, b) with the exception of an enumerable set, 4° $\underset{\tau}{A\underline{D}}\, M(x) \geqq f(x)$ for all x in (a, b). Minor functions are defined in a similar manner. $M(x)$ is (τ)-approximately continuous in (a, b) if for every x in (a, b) it is continuous at x on a set which has inferior (interior) density at $x \geqq \tau$. $\underset{\tau}{A}D_+ M(x)$ is the upper bound of all lower limits at x:

$$\liminf_{\xi (\varepsilon E) \to x} \frac{M(\xi) - M(x)}{\xi - x},$$

for which E is a set with inferior (interior) density on the right hand at $x \geqq \tau$. All major-functions used in the Burkill-extension of Perron-integration [cf. Math. Z. **34**, 270—278 (1931); this Zbl. **2**, 386—387] are also major-functions in the sense of Izumi; these are major-functions in a sense given by the Ref.: Fund. Math. **21**, 1—10 (1933); this Zbl. **8**, 109, only changing (l. c.) the condition "approximately cont." into "(τ)-approx. cont. ($\tau > 1/2$)". So every Burkill-integral is an Izumi-integral, every Izumi-integral is an integral after the (modified) definition of the Ref. *J. Ridder.*

Schwarz, Rudolf G.: Sur un procédé de mesure de la croissance des fonctions fondé sur un postulat jusqu'ici indémontré. J. École polytechn., II. s. cahier **31**, 141—145 (1933).

L'auteur considère seulement des fonctions à croissance bornée, c.-à-d. des fonctions $\{f(x)\}$, bien définies et uniformes pour x assez grand, continues et avec une dérivée comprise entre deux bornes positives. $f_1(x)$ et $f_2(x)$ appartiennent à une même classe F de fonctions équivalentes si leur rapport tend vers 1 pour x infini. Pour $\varliminf\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ et $\varlimsup\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = M$ l'intervalle d'oscillation $\Omega\,[f(x)]$ est l'intervalle fermé (m, M). Dans le groupe des équivalences la multiplication est définie ainsi: $F \cdot G$ est l'ensemble des fonctions équivalentes à $f[g(x)]$ où $f(x) \subset F$ et $g(x) \subset G$; F^{-1} sera la classe qui contient la fonction inverse de $f(x)$ où $f(x) \subset F$. Admettant sans démonstration le postulat: „pour toute classe $\mathcal{C} = F_1 F_2 \ldots F_n \cdot F_{k_1}^{-1} \ldots F_{k_n}^{-1}$, où $k_1 \ldots k_n$ est une permutation quelconque de $1, 2, \ldots, n$, l'intervalle $\Omega\,(\mathcal{C})$ contiendra toujours le nombre 1", l'auteur définit une mesure pour un ensemble étendu de classes telle que la mesure d'un produit de classes s'obtient comme produit des mesures des facteurs. *J. Ridder.*

Whitney, Hassler: Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 63—89 (1934).

The main result of this paper is the following important extension theorem („Erweiterungssatz") for real functions of several variables. Let m be a non-negative integer and $\{f_{k_1, k_2, \ldots, k_n}\}$ where $k_i \geqq 0$, $k_1 + k_2 + \cdots + k_n \leqq m$ a set of functions defined and continuous over a closed set A in the euclidean n-dimensional space E. Suppose that for any n-fold subscript $(k_1, \ldots, k_n)$ subject to the above condition

$$f_{k_1,\ldots,k_n}(y_1,\ldots,y_n) = \sum_{l_1,\ldots,l_n} 1/l_1! \ldots l_n! \cdot f_{k_1+l_1,\ldots,k_n+l_n}(x_1,\ldots,x_n) \cdot (y_1 - x_1)^{l_1} \ldots (y_n - x_n)^{l_n} + R(x_1,\ldots,x_n;\, y_1,\ldots,y_n),$$

where $(y_1, \ldots, y_n)$ and $(x_1, \ldots, x_n)$ are arbitrary points in A, the summation $\sum$ is extended to all values $l_1, \ldots, l_n$ such that $k_1 + l_1 + \cdots + k_n + l_n \leqq m$, and $R(x_1, \ldots, x_n;\, y_1, \ldots, y_n) = o(r^{l_1 + \cdots + l_n})$ uniformly as the points $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ vary in any bounded subset of A (r denotes the distance of these points). Then the function $f = f_{0,\ldots,0}$ may be extended to the whole space E so as (I) to be analytic in the open set $E - A$, and (II) to have all partial derivatives $\partial^{k_1 + \cdots + k_n} f / \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}$ for $k_1 + \cdots + k_n \leqq m$ defined and continuous in E and equal respectively to the functions $f_{k_1,\ldots,k_n}$ at points of A. In connection with this theorem and the methods developed for its