Werk

Titel: Analysis (Dirichletsche Reihen, Zetafunktion s. Algebra, Zahlentheorie; spezielle...

Jahr: 1934

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0007|log73

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Labocccetta, Letterio: Ancora sulla definizione delle funzioni nei punti corrispondenti a certi limiti singolari di esse. Boll. Un. Mat. Ital. **12**, 232—237 (1933).

Lijn, G. van der: Une définition descriptive de l'intégrale. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **19**, 395—400 (1933).

Maeda, Fumitomo: Repeated integrals in metric space. Tôhoku Math. J. **37**, 446 bis 453 (1933).

Let R_1 and R_2 be metric spaces, $\beta_1(A_1)$ and $\beta_2(A_2)$ completely additive, nonnegative functions of normal sets [a set A is normal with respect to β if for every $\varepsilon > 0$ there exists an open set O_ε containing A, such that $\beta(O_\varepsilon) - \beta(A) < \varepsilon$] which are uniformly monotone (see this Zbl. **6**, 403). Let R^* be the composite metric space (R_1, R_2). Then the product $\beta_1(E_1)\,\beta_2(E_2)$ gives rise by the usual greatest lower bound method to an upper "measure" and in turn a completely additive nonnegative function of normal sets $\beta^*(A^*)$, which is uniformly monotone on R^*. The extension of Fubini's theorem, that if $A^* = (A_1, A_2)$ and if $\int_{A^*} f\,d\beta^*$ exists, then $\int\int_{A_1 A_2} f(a_1, a_2)\,d\beta_1\,d\beta_2$ and $\int\int_{A_2 A_1} f(a_1 a_2)\,d\beta_2\,d\beta_1$ exist and are equal, is then demonstrated. *Hildebrandt.*

Fujiwara, Matsusaburô: On the integration and differentiation of an arbitrary order. Tôhoku Math. J. **37**, 110—121 (1933).

It is shown that the integral $I^\alpha f = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt/\Gamma(\alpha)$ is characterized by the properties: (a) $\int_0^x I^\alpha f = I^\alpha \int_0^x f$; (b) $d/dx\, I^\alpha f = I^{\alpha-1} f$ for $\alpha > 1$; (c) $I^\beta (I^\alpha f) = I^{\alpha+\beta} f$, for $\alpha, \beta > 0$, provided it be assumed that $I^\alpha f = \int_0^x \varphi(x,t,\alpha) f(t)\,dt$ and $\varphi(x,t,\alpha)/(x-t)^{\alpha-1}$ is analytic in x and t. By using this result the integral

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (\Gamma(s) x^s)^k ds$$

is shown to satisfy the differential equation $(x\,d/dx)^k f = (k/x)^k f$ and if $f(x)$ allows an asymptotic expansion then $f(x) \sim C\, x^\lambda\, e^{-k/x}$ with $C = (2\pi)^\lambda/\sqrt{k}$, and $\lambda = (k-1)/2$. *Hildebrandt* (Ann Arbor).

Wilton, J. R.: A note on Stirling's theorem. Math. Notes Nr 28, XII—XIII (1933).

Es wird gezeigt, wie nur aus der Integraldarstellung der Γ-Funktion und $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ die Stirlingsche Formel, sogar in der schärferen Form: $\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x}\, \Phi(x)$ mit $1 < \Phi(x) < 1 + 11/(72\,x)$, zu erhalten ist, und angedeutet, daß sogar die asymptotische Entwicklung von $\Phi(x)$ in analoger Weise leicht zu erhalten wäre. *Karamata* (Beograd).

Achyeser, N.: Über einige Funktionen, welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen. II. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr **3**, 309—344 (1933).

Es sei E die aus zwei Intervallen $(-1; a)$ und $(b; +1)$ bestehende Menge, wobei $a < b$ vorausgesetzt ist. Es sei weiter $P_n(x)$ dasjenige Polynom mit dem höchsten Gliede x^n, welche auf E am wenigsten von Null abweicht. Die Aufgabe des Verf. besteht in der Bestimmung des asymptotischen Verhaltens des Maximums m_n von $P_n(x)$ auf E. Diese Aufgabe ist vom Verf. vollständig gelöst. Es ergibt sich dabei, daß $m_n \sim K\tau^n$ ist, wobei τ den transfiniten Durchmesser der Menge E bezeichnet und K zwar von den arithmetischen Eigenschaften der Zahlen a, b und n abhängig, aber beschränkt ist. In dem einfachsten symmetrischen Falle $a = -b$ erhält man insbesondere

$$m_{2n} = 2\tau^{2n}, \qquad m_{2n-1} \sim 2\sqrt{\frac{1+b}{1-b}}\,\tau^{2n-1}.$$

Im letzten Kapitel betrachtet Verf. dieselbe Aufgabe bei der Einführung einer beliebigen polynomialen Belegung. *A. Kolmogoroff* (Moskau).

Achyeser, N.: Über einige Funktionen, welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen. III. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 4, 499—535 (1933).

Les trois derniers chapitres de ce travail [voir Bull. Acad. Sci. URSS **1932**, Nr 9 et **1933**, Nr 3; ce Zbl. **7**, 8 et le ref. préc.] contiennent: 1° une étude asymptotique, pour $n \to \infty$, de l'écart $m_n[s(x)]$ du polynome de Tchébycheff relatif au système de deux intervalles $(-1, \alpha)$ et $(\beta, 1)$ et au poids $s(x)$ quelconque, 2° généralisations des résultats de M. S. Bernstein concernant la meilleure approximation polynomiale des fonctions de la forme $f(x) = \frac{\lg^m(a-x)}{(a-x)^3}$ dans le cas de deux intervalles (on considère les hypothèses $\alpha < a < \beta$ et $|a| > 1$), 3° une étude détaillée de l'allure des polynomes de Tchébycheff en question: deux espèces de polynomes sont distinguées suivant qu'il existe un ou deux extréma dans l'intervalle (α, β), sans parler du cas où il n'en existe pas du tout. Les fonctions elliptiques interviennent toujours.

W. Gontcharoff (Moscou).

Lehmer, D. N.: On ternary continued fractions. Tôhoku Math. J. **37**, 436—445 (1933).

The author gives a brief summary of the results he and some of his pupils (Coleman, Daus) have obtained in their investigations, dealing, from the numbertheoretical point of view, with the ternary (and higher) continued fraction given by (Jacobi)

$$U_n = q_n U_{n-1} + p_n U_{n-2} + U_{n-3} \quad (U_n = A_n, B_n, C_n) \tag{1}$$

with initial values 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1 for A_n, B_n, C_n resp. The sets $\{A_n, B_n, C_n\}$ and $\{p_n, q_n\}$ are called resp. the convergent sets and partial quotient sets of a ternary continued fraction. The results here summarized are compared with those known for the ordinary ("binary") continued fractions $a_1 + \frac{b_2|}{|a_2} + \frac{b_3|}{|a_3} + \cdots$. 1° (1) yields a solution of the indeterminate equation $A_n X + B_n Y + C_n Z = 1$. 2° The purely periodic continued fraction

$$\overline{(p_1, q_1;\ p_2, q_2;\ \ldots;\ p_k, q_k)} \tag{2}$$

is associated with the characteristic cubic

$$\begin{vmatrix} A_{k-2} - \varrho & B_{k-2} & C_{k-2} \\ A_{k-1} & B_{k-1} - \varrho & C_{k-1} \\ A_k & B_k & C_k - \varrho \end{vmatrix} \equiv -\varrho^3 + M\varrho^2 - N\varrho + 1 = 0, \tag{3}$$

which remains unaltered by any cyclic permutation of the partial quotient pairs. (3) yields the recurrence formulae

$$U_n = MU_{n-k} - NU_{n-2k} + U_{n-3k} \quad (U_i = A_i, B_i, C_i) \tag{4}$$

from which $\lim \frac{U_{n+k}}{U_n}$, $\lim \frac{B_n}{A_n}$, $\lim \frac{C_n}{A_n}$ $(n \to \infty)$ are obtained, expressed in a simple manner in terms of the roots of (3) (subject to proper restrictions). 3° The ternary fraction representing the simple cubic irrationality $R^{1/3}$ is discussed, compared with the "binary" continued fraction for $R^{1/2}$. The author further discusses: 4° proper continued fractions, i. e. where $p_n \leqq q_n$, and the equivalent improper ones; 5° the effect on the irrationality involved of the inversion of the order of the partial quotients in (2); 6° the relation between the continued fraction $\{A_n, B_n, C_n\}$ and its reciprocal $\{A'_n, B'_n, C'_n\}$, i. e. where $A'_n = B_{n-2} C_{n-1} - C_{n-2} B_{n-1}$, etc. *Shohat.*

Paley †, R. E. A. C.: Note on a theorem of Kolmogoroff and Menchoff. Math. Z. **37**, 669—673 (1933).

An alternative proof of the following theorem of Menchoff and Kolmogoroff [Math. Z. **26**, 432—441 (1927)] is given: There exists an orthogonal system of functions

$\varphi_n(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ assuming only the values ± 1 and a sequence of real constants a_n, $\sum a_n^2 < \infty$, such that $\sum a_n \varphi_n(x)$ diverges everywhere. The new proof is simpler, although less elementary (in particular it uses some theorems on characters) than the original proof. *A. Zygmund* (Wilno).

Biggeri, Carlos: Mehrfache Dirichletsche Reihen und Integrale. Rev. Acad. Ci. exact. Madrid **29**, 311—326 (1933) [Spanisch].

Biggeri, Carlos: Über Dirichletsche Doppelreihen und Doppelintegrale. Rev. Acad. Ci. exact. Madrid **30**, 9—51 (1933) [Spanisch].

Verf. definiert als Dirichletsches Doppelintegral

$$f(z, w) = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(r, s)\, e^{-\lambda(r) z - \mu(s) w}\, dr\, ds\,,$$

wobei $\varphi(r, s)$ eine komplexe oder reellwertige Funktion der reellen Veränderlichen r, s ist, die zudem integrabel auf jedem Rechteck $(0,0)$ $(r,0)$ (r,s) $(0, s)$ angenommen wird; $\lambda(r)$ und $\mu(s)$ sind reell, positiv, wachsend, differenzierbar und streben für $r, s \to \infty$ nach ∞; $z = x + iy$, $w = u + iv$ sind unabhängige komplexe Veränderliche. Mit $\Phi(r, s)$ sei das Integral $\int_0^r \int_0^s$, also der „Abschnitt", an einer gewissen speziellen Stelle z_0, w_0, mit $g(r, s, z, w)$ der Abschnitt an einer allgemeinen Stelle bezeichnet. Ähnliche Definitionen und Sätze gelten für Dirichletsche Doppelreihen sowie mehrfache Integrale und Reihen; wir sprechen immer nur von Doppelintegralen. — In der ersten Arbeit werden einige allgemeine Sätze gegeben, namentlich in bezug auf das Konvergenzverhalten: Ist der Abschnitt $\Phi(r, s)$ bei z_0, w_0 beschränkt oder doch $= O(e^{\xi\lambda(r) + \xi\mu(s)})$ für ein $\xi > 0$, so konvergiert das Integral gleichmäßig in einem Doppelwinkelraum (der z- und w-Ebenen) mit Spitze in (z_0, w_0), von dem eine Nachbarschaft der Spitze fortgenommen ist. Unter Einschränkungen bei obiger Abschätzung ergibt sich ein besserer Bereich gleichmäßiger Konvergenz. Ein dritter Satz folgert aus Beschränktheit von Integrand und Abschnitt an einer speziellen Stelle z_0, w_0 die Beziehung $g(r, s; z, w)$: $yv \to 0$ für $(y, v) \to (\infty, \infty)$, also eine Aussage über das Wachstum des Abschnitts für beliebiges z, w in bezug auf die Imaginärteile der Veränderlichen. — In der 2. Arbeit wird zunächst unter Spezialisierung $\lambda(r) = r$, $\mu(s) = s$ dem Wachstum von $f(z, w)$ näheres Studium gewidmet und die Wachstumsordnung sowohl auf den Geraden $x = \alpha$, $u = \beta$ als auch auf den Halbebenen $x \geqq \alpha$, $u \geqq b$ erklärt. Unter Rückkehr zum allgemeinen Fall folgen dann Formeln zum Umkehrproblem, wo es sich darum handelt, bei gegebenem $f(z, w)$, $\lambda(r)$, $\mu(s)$ die erzeugende Funktion $\varphi(r, s)$ zu ermitteln. Weiter werden einige besondere Konvergenzfälle untersucht, die neben Annahmen wie $|\arg \varphi(r, s)| \leqq \tau < \frac{2}{\pi}$ (speziell $\tau = 0$: $\varphi =$ positiv reell) noch die Voraussetzung enthalten, $f(z, w)$ sei für reelle z, w als regulär analytisch bekannt: dann konvergiert das Integral für jedes beliebige z, w. Schließlich werden noch einige naheliegende Einschränkungen für die Lage von Nullstellen erwähnt. Eine Fortsetzung in verschiedenen Richtungen wird angekündigt. *Ullrich* (Marburg, Lahn).

● **Favard, J.: Leçons sur les fonctions presque-périodiques. Préface de Gaston Julia. (Cahiers scient. Fasc. 13.)** Paris: Gauthier-Villars 1933. VIII, 183 S. Frcs. 50.—.

Außer der ursprünglichen Bohrschen Theorie, die in der durch die Arbeiten von Bochner, Weyl, de la Vallee-Poussin ermöglichten sehr einfachen Form dargestellt ist, enthält das Buch noch die schönen Untersuchungen über Differentialgleichungen mit fastperiodischen Koeffizienten sowie über harmonische fastperiodische Funktionen, welche zum größten Teil vom Verf. herrühren. Diese auf die Anwendungen der Theorie gerichteten Untersuchungen wurden in den bisher erschienenen Büchern von Besicovitch und Bohr nicht behandelt. Unter den Verallgemeinerungen der Theorie sind die Stepanoffschen Funktionen ausführlich behandelt; man findet auch das Besicovitchsche Analogon des Riesz-Fischerschen Satzes. *Jessen.*

Reihen:

Szegö, G.: Über gewisse Potenzreihen mit lauter positiven Koeffizienten. Math. Z. **37**, 674—688 (1933).

Es wird die Vermutung von K. Friedrichs und H. Lewy bewiesen, daß die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von

$$\frac{1}{(1-\beta)(1-\gamma)+(1-\gamma)(1-\alpha)+(1-\alpha)(1-\beta)}$$

sämtlich positiv sind. Aus einer Formel von Weber folgt für $t>0$:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\omega_1(1-\alpha)-\omega_2(1-\beta)-\omega_3(1-\gamma)} J_0\left(2\sqrt{\omega_1 t}\right) J_0\left(2\sqrt{\omega_2 t}\right) J_0\left(2\sqrt{\omega_3 t}\right) d\omega_1\, d\omega_2\, d\omega_3 =$$
$$= \frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}\, e^{-t\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\beta}+\frac{1}{1-\gamma}\right)}.$$

Daß die fraglichen Koeffizienten nichtnegativ sind, ergibt sich hieraus leicht, wenn man die Gleichung über alle positiven t-Werte integriert und die Integrationsreihenfolge unter Beachtung einer Formel von Sonine vertauscht. Die Behauptung der Positivität erfordert eine etwas genauere Abschätzung. Der Satz wird mit ähnlichen Methoden noch verallgemeinert: Es sei $f(x)=\prod_1^n(x-\alpha_\nu)$; dann sind die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $1/\{f'(1)\}^{\nu+1}$ für $\nu\geqq -1/2$ nichtnegativ, und für $\nu>-1/2$, $n>4(\nu+1)/2\nu+1$ sogar positiv. — In einem (von der eigentlichen Arbeit unabhängigen) Anhang wird das sog. Gibbsche Phänomen bei Integralen vom Soninesschen Typus festgestellt. *Willy Feller* (Kopenhagen).

Kaluza, Th.: Elementarer Beweis einer Vermutung von K. Friedrichs und H. Lewy. Math. Z. **37**, 689—697 (1933).

Die im vorstehenden Referat erwähnte Vermutung wird in eleganter Weise elementar bewiesen; dabei ergibt sich für die fraglichen Koeffizienten eine explizite positive Darstellung sowie eine asymptotische Abschätzung. Es werden gewisse Polynome angegeben, die die Rolle von erzeugenden Funktionen spielen; unter ihren Koeffizienten kommen auch alle zu untersuchenden Potenzreihenkoeffizienten vor (wie sich aus einer Rekursionsformel ergibt). Der Satz wird nun dahin verallgemeinert, daß sogar alle Koeffizienten dieser Polynome wesentlich positiv sind. Dieser allgemeinere Satz wird durch Zurückführung auf einfachere Polynome bewiesen. Bei den hierzu vorgenommenen Umformungen ergeben sich einige merkwürdige Relationen, insbesondere für die Binomialkoeffizienten. *Willy Feller* (Kopenhagen).

Motzkin, Theodor: Bemerkung über Singularitäten gewisser mit Lücken behafteter Potenzreihen. Math. Ann. **109**, 95—100 (1933).

Soit $f(z)=\sum a_n z^n$. D'après un th. de Mandelbrojt si $a_{nq+k}=0$ (q, k fixes, $n=1, 2, \ldots$), chaque fois que la fonction $f(z)$ admet sur le cercle de convergence une singularité α, elle en admet une autre de la forme $\alpha e^{\frac{i2\pi p}{q}}$ (p entier). [Ann. École norm. **40** (1923).] M. Ostrowski a généralisé ce théorème en démontrant que si q est premier et si $a_{nq+k_i}=0$ ($k_1<k_2<\ldots<k_r<q$), alors tous les points $\alpha\varepsilon_i$ ($i=1, 2, \ldots, r$), où les ε_i sont différentes racines q-ièmes de l'unité, sont singuliers pour $f(z)$. [Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **35** (1926).] M. Motzkin donne une généralisation du th. de M. Ostrowski au cas où q n'est plus premier et où $r=2$ ou 3. *Mandelbrojt.*

Motzkin, Th.: Notiz zu einem Kriterium für die Konvergenz von Reihen mit reellen Gliedern. Comment. math. helv. **6**, 129—132 (1933).

Es sei $a_n>0$ und $\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu-a_n)$ nach oben beschränkt. Zur Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ist $\underline{\lim}\, a_n=0$ notwendig und hinreichend. *Szegö* (Königsberg, Pr.).

Bernstein, Serge: Remarque à propos d'une note de M. R. Salem. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 213—214 (1933).

Answering a problem propounded by Salem [Is it possible to find an absolute constant C such that, given any finite system of non-negative numbers $r_1, r_2, \ldots, r_n$, there exist real numbers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ satisfying the inequality

$$\left|\sum_{p=1}^{n} r_p e^{i(px+\alpha_p)}\right| \leqq C \sqrt{\sum_{p=1}^{n} r_p^2}, \quad 0 \leqq x \leqq 2\pi?$$

See C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 1776 (1933).] Bernstein constructs the same "Gegenbeispiel" as was mentionned by the referee, this. Zbl. **7**, 112. *A. Zygmund* (Wilno).

Bosanquet, L. S., and M. L. Cartwright: Some Tauberian theorems. Math. Z. **37**, 416—423 (1933).

Two typical results of this paper are as follows. I. If $\sum_0^\infty a_n$ is bounded $(C \cdot \alpha)$, $\alpha \geqq -1$, and $f_\lambda(z) \to A$ as $z \to 1$ along $\arg(1-z) = \gamma$, $0 \leqq |\gamma| < \pi/2$ for some positive integer λ, then $\sum a_n$ is summable $(C \cdot \alpha + \delta)$ for every $\delta > 0$. Here

$$f(z) \equiv f_0(z) = \sum a_n z^n, \quad f_\lambda(z) \equiv (1-z)^{-1} \int_z^1 f_{\lambda-1}(u)\,du.$$

II. If a_n is real, $f(z) = O[\exp|(1-|z|)|^{-\pi/2\alpha}]$, $0 < \alpha < \pi/2$, as $z \to 1$ in $|z| < 1$, and $f(z) \to A$ as $z \to 1$ along $\arg(1-z) = \gamma$, where $0 \leqq |\gamma| < \alpha$, then $f(z) \to A$ when $z \to 1$ so that $|\arg(1-z)| \leqq \gamma$. Other results are obtained by introducing modified "one-sided" conditions upon a_n, and by requiring different asymptotic behaviour of $f(z)$ as $z \to 1$. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Moore, Charles N.: On criteria for Fourier constants of L integrable functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **19**, 846—848 (1933).

The following theorem is established. A series $\frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots$ converges for $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ and is the Fourier-Lebesgue series of its sum, provided that $1°\ a_n \to 0$, $2°\ \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\Delta^{k+1} a_n| < \infty$, for a $k > 0$, not necessarily integral $\left(\Delta^l a_n \text{ is defined as the sum of the series } a_n - l a_{n+1} + \frac{l(l-1)}{2} a_{n+2} - \ldots\right)$. *A. Zygmund.*

Mulholland, H. P.: Concerning the generalization of the Young-Hausdorff theorem and the Hardy-Littlewood theorems on Fourier constants. Proc. London Math. Soc., II. s. **35**, 257—293 (1933).

Die Arbeit hat die Verallgemeinerung der Ungleichungen von Young-Hausdorff und gewisser Ungleichungen von Hardy-Littlewood (Math. Ann. **97**, 159—209; Math. Z. **16**, 163—169; **25**, 321—347) über Fouriersche Koeffizienten zum Gegenstande; ähnliche Verallgemeinerungen entsprechender Sätze über Potenzreihenkoeffizienten gab Mulholland in einer früheren Note [Proc. London Math. Soc., II. s. **33**, 481—516 (1932); dies. Zbl. **4**, 251]. Die Verallgemeinerungen gehen in der Richtung, daß die in den genannten Ungleichungen auftretenden Potenzen durch allgemeinere Funktionen ersetzt werden. Als ein Ergebnis, daß durch Spezialisierung erhalten wird, sei herausgehoben: Für $p > 2$ und jedes reelle α folgt aus der Konvergenz von

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} [|c_n| \{1 + \overset{+}{\lg}(1/|c_n|)\}^\alpha]^q \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

die Existenz einer Funktion $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ derart, daß das Integral

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [|f(x)| \{1 + \overset{+}{\lg}|f(x)|\}^\alpha]^p\,dx$$

konvergiert. *R. Schmidt* (Kiel).

Verblunsky, S.: On the theory of trigonometric series. (IV.) Proc. London Math. Soc., II. s. **35**, 445—487 (1933).

This paper contains a large number of results concerning the existence of perfect sets of unicity associated with summable trigonometric series

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (*)$$

whose coefficients satisfy the condition (**) $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ when $n \to \infty$ not through all integer values but only through those belonging to some specified sequences S. A fundamental notion used in the paper is that of a set of type H with respect to an increasing sequence of numbers $\{\mu_p \uparrow \infty\}$, not necessarily integers. Let σ be a closed set in $(0,2\pi)$. Let σ_p be the set represented by $E(\mu_p x)$ when $x \subset \sigma$, where $E(x) = x - 2\pi[x/2\pi]$. The set σ is called to be of type H with respect to the sequence $\{\mu_p\}$ if $\sum_1^\infty \sigma_p$ is not everywhere dense in $(0,2\pi)$. The following theorem gives an idea of the general character of results contained in the paper. Let (*) be a differentiated Denjoy-Fourier series [so that a_n, $b_n = o(n^2)$]. Let σ be a closed set of type H with respect to a sequence $\{n_p \uparrow \infty\}$ of integers. Let S be any sequence of integers constructed as follows: take a fixed number $\delta > 0$ and form all aggregates of numbers $T_p = \{n_p, 2n_p, \ldots, [n_p\delta]\, n_p\}$, $p = 1, 2, \ldots$; let $T = \sum_1^\infty T_p$. Then S may be any sequence which is such that, being given any positive integer m, there must be an $n(m)$ such that $n \pm m$ belongs to S whenever $n \geqq n(m)$ belongs to T. If (*) is Poisson summable to zero in the set complementary to σ and if (**) is satisfied when $n \uparrow \infty$ in S, then all a_n and b_n vanish. The paper is closely related to the preceding paper III of the series [Proc. London Math. Soc., II. s. **34**, 526—560 (1932); see this Zbl. **6**, 256]. An important tool used by the author is the investigation of relations of the type

$$\lim_{p\to\infty} \int_0^{2\pi} e^{in_p x}\, d(ft) = 0, \qquad \lim_{p\to\infty} \int_0^{2\pi} t(n_p x)\, df = (2\pi)^{-1}\,[f(2\pi) - f(0)] \int_0^{2\pi} t(x)\, dx,$$

where $t(x)$ is a trigonometric series suitably restricted, and $\int_a^b g\, df$ is a generalized Stieltjes integral defined by $f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$, where f is finite almost everywhere and integrable, while g has a bounded derivative. A considerable number of auxiliary notions and lemmas make it impossible to go into further details here.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Vignaux, J. C.: Sur une généralisation de la sommation des séries divergeantes de M. Le-Roy. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **18**, 29—30 (1933).

A la série $\sum u_n$ l'auteur fait correspondre, comme somme, la quantité

$$s = \lim_{t\to 1-0} \sum_0^\infty \left(\frac{\Gamma(nt+1)}{n!}\right)^\delta u_n. \qquad (\delta > 0)$$

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Winn, C. E.: On strong summability for any positive order. Math. Z. **37**, 481—492 (1933).

Une série $\sum u_n$ est dite fortement sommable (C, δ) avec la somme s, bref sommable $[C, \delta]$ si l'on a

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n |\, s_k^{(\delta-1)} - s\,| \right\} = 0$$

$s_k^{(\gamma)}$ désignant les moyennes arithmétiques d'ordre γ des sommes partielles

$$s_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_k\,.$$

De même, $\sum u_n$ oscille $[C, \delta]$ si l'on n'a que

$$\sum_{k=0}^{n} | s_n^{(\delta-1)} | = O(n).$$

L'auteur prouve différentes propositions relatives à la sommabilité $[C, \delta]$ ainsi qu'aux séries oscillant $[C, \delta]$. Notons les suivantes: $[C, \delta]$ entraîne (C, δ), mais l'inverse n'a pas lieu en général. Néanmoins (C, δ) entraîne nécessairement $[C, \delta + 1]$ et cela avec la même somme. $[C, \varkappa]$ entraîne $[C, \varkappa + \varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$; la sommabilité $[C, \varkappa]$ jointe à la condition $n u_n = O(1)$ assure celle $[C, \varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$. La série-produit des deux séries sommables $[C, \alpha]$ et $[C, \beta]$ l'est aussi $[C, \alpha + \beta]$. Si l'une des deux séries-facteurs n'est sommable que simplement, (C, β) au lieu de $[C, \beta]$ p. ex., la série-produit est sommable $(C, \alpha + \beta)$. — La sommabilité absolue d'ordre 1, $| C, 1 |$, entraîne comme l'a prouvé M. Fekete, celle $[C, 1]$. L'auteur observe, sans preuves à l'appui, que $| C, \delta |$ entraîne $[C, \delta]$ quelque soit l'ordre δ et il suffit d'employer le théorème de Fekete $[C, 1] \succ | C, 1 |$ joint au résultat dû à Kogbetliantz et d'apres lequel

$$| C, \delta | \sim | C, \delta - 1 | \cdot | C, 1 | \sim | C, \delta |$$

pour donner la preuve du fait en question $[C, \delta] \succ | C, \delta |$. Il serait très intéressant de montrer sur un exemple que $[C, \delta]$ n'entraîne point $| C, \delta |$. *E. Kogbetliantz.*

Differentialgleichungen:

Minetti, Silvio: Sur la géométrie de l'holoespace des fonctions holomorphes dans un même domaine et sur ses liens avec la théorie des équations différentielles ordinaires. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 637—639 (1933).

Der Verf. sucht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jedes Integral der nichtlinearen Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ zugleich ein Integral einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist. Er bekommt sie mit Hilfe des Pascal-Vitalischen absoluten Differentialkalküls des Funktionenraumes. *Hlavatý.*

Jonesco, D. V.: Généralisation d'une équation de M. E. Goursat. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 666—668 (1933).

Verf. kündigt folgenden Satz an: Die lineare Integrodifferentialgleichung

$$x^n z^{(n)} + x^{n-1} p_1(x) z^{(n-1)} + \cdots + x p_{n-1}(x) z' + p_n(x) z = f(x) + \int_0^x N(x, s) z(s)\, ds \quad (1)$$

($p_i(x)$, $f(x)$, $N(x, s)$ holomorph für $| x | \leqq R$, $| s | \leqq R$) besitzt ein für $x = 0$ holomorphes Integral, wenn die char. Gl.

$$\varphi(r) = r(r-1)\ldots(r-n+1) + p_1(0) \cdot r \cdot (r-1)\ldots(r-n+2) + \cdots + p_n(0) = 0 \quad (2)$$

keine pos. ganzzahlige Wurzel besitzt. — Daraus folgt u. a. als Verallgemeinerung eines Satzes von Goursat: Die Gleichung

$$x^n z^{(n+m)} + x^{n-1} p_1(x) z^{n+m-1} + \cdots + x p_{n-1}(x) z^{(m+1)} + p_n(x) z^{(m)} + \cdots + p_{n+m}(x) z = \int_0^x N(x, s) z(s)\, ds$$

besitzt m linear unabhängige, für $x = 0$ holomorphe Integrale, falls die char. Gl. (2) dieselbe Bedingung wie oben erfüllt. — Für die homogene Gl. (1) ($f(x) = 0$) gelten analoge Sätze wie für lineare Differentialgleichungen vom Fuchsschen Typus.

Kähler (Königsberg Pr.).

Bochner, S.: Homogeneous systems of differential equations with almost periodic coefficients. J. London Math. Soc. **8**, 283—288 (1933).

Il s'agit des systèmes de la forme

$$\frac{dy_\mu(x)}{dx} = \sum_{\nu=1}^{m} a_{\mu\nu}(x)\, y_\nu(x) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

où les $a_{\mu\nu}$ sont des fonctions p. p. réelles. Une solution réelle, non identiquement nulle, du système: $\{y_\nu(x)\} = \eta(x) (\nu = 1, 2, \ldots, m)$, est dite p. p. s'il en est ainsi pour chacune des fonctions y_ν. Dans l'espace d'ordre m l'auteur considère la fermeture $R(\eta)$ de l'ensemble des points $\eta(x)$ et obtient le résultat suivant: Soit $\eta_1(x), \eta_2(x), \ldots, \eta_m(x)$ un ensemble de m solutions linéairement indépendantes du système donné, toutes les solutions du système sont p. p si: 1° tous les $R(\eta_\mu)$ sont bornés; 2° s'il n'y a pas de solution $\eta(x)$ du système telle que $R(\eta)$ soit un sous ensemble de l'un des $R(\eta_\mu)$, 3° si le Wronskien $\|\eta_\mu(x)\|$ reste en module supérieur à un nombre fixe. — Le module des solutions est alors égal au module des équations (c.-a.-d. le plus petit module de nombres contenant les exposants des $a_{\mu\nu}$). *J. Favard* (Grenoble).

Tricomi, F.: A proposito della mia nota: Integrazione di un'equazione differenziale presentatasi in „Elettroteenica". Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **18**, 26 bis 28 (1933).

Verf. vervollständigt einige Beweise und erklärt den Sinn einiger Behauptungen seiner im Titel erwähnten Note, die dem Ref. (dies. Zbl. **6**, 55) nicht zuverlässig schienen. Es ergibt sich folgendes: die fragliche Gleichung, die eine leichte Transformation in

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha\frac{dy}{dx} + \sin y + \beta = 0 \qquad (\alpha, \beta \text{ Konstanten})$$

überführt, läßt eine einzige Lösung $y(x)$ zu, die monoton ist und periodische Ableitung $y'(x)$ hat, sobald entweder $\beta > 1$, oder α eine gewisse Grenze α_0 nicht übertrifft; ist dagegen $\beta < 1$, $\alpha > \alpha_0$, so existiert keine derartige Lösung $y(x)$. Jedem $\beta < 1$ entspricht ein einziger Wert der Grenze α_0, für den vom Verf. eine obere und eine untere Abschätzung angegeben wurden. Bemerkenswerte Abschätzungen wurden auch für die Periode der Ableitung $y'(x)$ gefunden. Die Konvergenz gegen die gesuchte Lösung einer vom Verf. weiter angegebenen Methode von sukzessiven Annäherungen ist nur als „approximiert" anzunehmen. Nichtsdestoweniger ist die Methode zum „numerisch-praktischen" Zweck sehr gut geeignet, wie Verf. sagt, der außerdem die Idee eines Integraphen für die mechanische Integration der Gleichung ankündigt. *Cimmino.*

Gebelein, Hans: Zur praktischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen mittels schrittweiser Annäherung. Z. angew. Math. Mech. **13**, 385—386 (1933).

Die Arbeit skizziert den (trivialen) Beweis für die nicht durchaus neue Idee, eine Differentialgleichung $dx/dt = f(x, t)$ in der Weise durch sukzessive Approximation zu lösen, daß man bei jedem Schritt nicht eine reine Quadratur ausführt, sondern eine lineare Differentialgleichung löst. Es werden Beispiele angegeben, wo eine derartige Auflösung dem physikalischen Problem angemessen ist. *Rudolf Iglisch* (Aachen).

Gehlen, Walther: Wirkungsstärke intravenös verabreichter Arzneimittel als Zeitfunktion. Ein Beitrag zur mathematischen Behandlung pharmakologischer Probleme. Naunyn-Schmiedebergs Arch. **171**, 541—554 (1933).

Es handelt sich um die quantitative Behandlung der Wirkung von Konzentrationsgiften, die dem Organismus intravenös zugeführt werden. Verf. gewinnt aus theoretischen Überlegungen folgende Ansätze: Sei $w = f(t)$ die vom Erfolgsorgan zur Zeit t gebundene Giftmenge, $x = g(t)$ die zur Zeit t im Blut vorhandene Giftmenge. Dann gilt 1. für einmalige Giftzufuhr A) ohne gleichzeitige Entgiftung: $x' = \frac{dx}{dt} = -k(x - \lambda w)$, $w' = k(x - \lambda w)$, wo k bzw. λ Diffusions- bzw. Verteilungskonstante; B) mit Entgiftung: $x' = -k(x - \lambda w) - k'x$, $w' = k(x - \lambda w) - k'' w$, wo k' bzw. k'' Ausscheidungskonstante für Blut bzw. für Erfolgsorgan. 2. Für dauernde Giftzufuhr mit Entgiftung: $x' = v - k(x - \lambda w) - k_2 x$, $w' = k(x - \lambda w) - k_2 w$, wo v (konstant) Infusionsgeschwindigkeit, $k_2 = k' = k''$ (vgl. 1, B). — Im Falle 1, A bzw. 1, B für $k' = k''$ ist demgemäß w von der Form $\varphi = A(1 - \exp(-k_1 t))$, $k_1 = k(1 + \lambda)$ bzw. $\psi = \varphi \cdot \exp(-k_2 t)$; im Falle 2 von der Form $B(1 + C \cdot \exp(-k_2 t) + D\psi)$. Aus dieser Form der Lösung ergibt sich: Erstens das bereits empirisch bekannte Gesetz, demzufolge die optimale Infusionszeit nur von dem betr. Gift abhängt (bei gleichem Erfolgsorgan); zweitens das bisher noch nicht formulierte Gesetz, demzufolge der Zeitpunkt, zu welchem im Erfolgsorgan die maximale Giftmenge vorhanden ist, unabhängig von der Gabengröße, also nur abhängig von Gift und Erfolgsorgan ist. — Die weitgehende Übereinstimmung dieser rein theoretisch gefundenen Ergebnisse mit den Beobachtungen erscheint sehr bemerkenswert. *Haupt* (Erlangen).

Bouligand, Georges: Sur quelques cas singuliers du problème de Dirichlet. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **19**, 301—317 (1933).

Die Koeffizienten der Gleichung

$$P \cdot \Delta u + Q \cdot u_x + R \cdot u_y + Su = 0$$

seien Polynome. Für $x > 0$ sei $S \leqq 0$, $P > 0$; ferner sei $P(0, y) = 0$. Es wird die erste Randwertaufgabe betrachtet für ein Gebiet, dessen Begrenzung aus einem Intervall der y-Achse und zwei einfachen Kurvenbögen besteht, die dessen Endpunkte im Inneren der Halbebene $x > 0$ verbinden. Wegen $P(0, y) = 0$ muß das Problem keine Lösung haben. Es wird bewiesen, daß unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen über die Koeffizienten eine Lösung im bekannten verallgemeinerten Sinne existiert (man setzt die Randwerte in das Innere fort, löst die Randwertaufgabe für eine passende Folge von Gebieten, die von innen her das gegebene approximieren und betrachtet die Grenzfunktion der Lösungen). — Weiter wird gezeigt, wie man durch das Vergleichen von Lösungen zuweilen deren Verhalten am Rande feststellen kann. *W. Feller.*

Capoulade, Jean: Sur le problème de Dirichlet pour certaines équations aux dérivées partielles du type elliptique à coefficients singuliers. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **2**, 68 bis 70 (1933).

Reduktion der einschränkenden Voraussetzungen über die Koeffizienten, von denen im vorangehenden Referat die Rede war. *Willy Feller* (Kopenhagen).

Bertolini, C.: Studio di una equazione alle derivate parziali del terz'ordine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **18**, 97—102 (1933).

Kurzer Bericht über die Anwendung eines Fubinischen Gedankenganges auf die partielle Differentialgleichung 3. Ordnung

$$f_{xyz} + af_{xy} + bf_{yz} + cf_{zx} + \alpha f_z + \beta f_x + \gamma f_y + \delta f = \varphi$$

($a, b, \ldots$ stetige Funktionen von x, y, z) mit den Anfangsbedingungen

$$f(0, y, z) = f(x, 0, z) = f(x, y, 0) = 0.$$

Man bildet eine Differenzengleichung, die durch Grenzübergang in die Differentialgleichung übergeht. Wenn man aber zunächst die Differenzengleichung (mit Berücksichtigung der Anfangsbedingungen) in passender Weise umformt, so wird sie von dem Grenzübergang in eine Volterrasche Integralgleichung übergeführt. Man kann nachträglich bestätigen, daß diese Integralgleichung und die ursprüngliche Gleichung (mit Anfangsbedingungen) äquivalent sind. *G. Cimmino* (Napoli).

Hadamard, M.: Propriétés d'une équation linéaire aux dérivées partielles du quatrième ordre. Tôhoku Math. J. **37**, 133—150 (1933).

Die Gleichung $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$ ist weder (total) elliptisch noch (total) hyperbolisch. Durch welche Daten können ihre Lösungen eindeutig bestimmt werden, derart, daß stetige Änderung der Daten eine stetige Änderung der Lösung hervorruft, und ohne daß die Daten als analytisch vorausgesetzt werden? Eine Antwort ist diese: auf zwei anliegenden Seiten eines Rechtecks, dessen Seiten die Form $x + y = \text{konst.}$ und $x - y = \text{konst.}$ haben, gebe man u; auf allen Seiten die Normalableitung von u; so daß gewisse Ableitungen, die sich in den Ecken auf verschiedene Weise berechnen lassen, einen wohlbestimmten Wert zeigen. — Für den Fall des Einheitskreises ist die Lage komplizierter und wird auf ein gewisses Randwertproblem für Potentialfunktionen zurückgeführt. — Schließlich führt der Fall einer geschlossenen dreiteiligen Kurve, von der zwei Teile charakteristische Geraden sind, auf eine gewisse singuläre Integralgleichung. — Die Vorgabe von u und Δu an Stelle von u und Normalableitung gestattet eine einfache Festlegung der Lösung, wie im letzten Abschnitt bemerkt wird.

Hans Lewy (Providence).

Howland, R. C. J., and A. C. Stevenson: Bi-harmonic analysis in a perforated strip. Philos. Trans. Roy. Soc. London A **232**, 155—222 (1933).

Im Anschluß an zwei frühere Veröffentlichungen [R. C. J. Howland, Proc. Roy.

Soc. London A **124**, 89 (1929); Philos. Trans. Roy. Soc. London A **229**, 49 (1930)] hatte R. C. J. Howland auf dem Stockholmer Internationalen Kongreß für Technische Mechanik [Verhandl. **2**, 74 (1931); vgl. dies. Zbl. **2**, 66 (1931)] einen vorläufigen Bericht über weitere Untersuchungen erstattet, die sich auf die Theorie der Spannungen in einem unbegrenzt langen Streifen mit parallelen Rändern und mit einem kreisrunden Loch in der Mitte beziehen. Die vorliegende umfangreiche Abhandlung enthält jetzt eine ausführliche Wiedergabe aller mathematischen Details der Lösung des zugehörigen Randwertproblems der biharmonischen Differentialgleichung; die dabei vorkommenden Funktionen werden diskutiert und tabuliert, desgleichen die numerischen Werte aller erforderlichen Koeffizienten in Tabellen zusammengestellt. Als Fundamentallösungen, mit deren Benutzung sich weitere Lösungen in beliebiger Anzahl aufbauen lassen, werden neben dem bereits früher behandelten Fall eines gleichförmigen Zuges im ungestörten Streifen diejenigen besonders berücksichtigt, die einerseits dem Fall eines reinen Biegungsmoments von festem Betrag, andererseits dem Fall einer festen Scherkraft nebst einem dem Abstand vom Ursprungsquerschnitt proportionalen Biegungsmoment im nichtdurchlochten Streifen zugeordnet sind. *Harry Schmidt* (Köthen).

Strutt, M. J. O.: Eigenschwingungen einer Kegelschale. Ann. Physik, V. F. **17**, 729—735 (1933).

Eine Kegelschale ist durch zwei Breitenkreise begrenzt. Der eine ist starr gelagert, der andere kräftefrei. Durch geometrische Betrachtungen werden die Differentialgleichungen für die dehnungslose Verformung der Schale gewonnen. Ihre Lösung wird benutzt, um nach der Methode von Rayleigh (Sc. Papers **1**, 551) die Eigenschwingungen zu berechnen. Der Grenzfall des Zylinders wird diskutiert, während der Fall, daß der kräftefreie Rand zur Kegelspitze entartet, der Theorie nicht zugänglich ist, da eine Kegelschale, die sich von der Spitze bis zu einem gestützten Rand erstreckt, keine dehnungslosen Formänderungen haben kann. *Flügge* (Göttingen).

Bateman, H.: Logarithmic solutions of Bianchi's equation. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **19**, 852—854 (1933).

Vorgelegt sei die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^n V}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = V$. Setzt man $l_1 = \log x_1$, $l_2 = \log x_2, \dots$, $l_n = \log x_n$ und $z = l_1 + l_2 + \cdots + l_n$, so wird $V = F(z)$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung, wenn $F(z)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung $\frac{d^n F}{dz^n} = e^z F$ genügt. Es sei $F = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{z^s}{s!} U_s(z)$ die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung, wobei $U_s(z)$ gewisse von Sibirani [Ann. Math. (3) **28**, 1—34 (1918)] eingeführte Funktionen bedeuten. Dann werden Lösungen V von $\frac{\partial^n V}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = V$ in der Form $V = \sum_{s=0}^{n-1} H_s U_s(z)$ angegeben, wo H_s ein homogenes Polynom s-ten Grades in $l_1, l_2, \dots, l_n$ bedeutet. *Rellich* (Göttingen).

Funktionentheorie:

Stein, P.: On a theorem of M. Riesz. J. London Math. Soc. **8**, 242—247 (1933).

Für das wichtige Theorem von M. Riesz [Math. Z. **27**, 218—244 (1928)]

$$M_p\{f\} \leqq A(p)\, M_p\{\Re f\},$$

wobei $f(z)$ eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion, M_p den Mittelwert p-ter Ordnung von f bzw. $\Re f$ auf dem Kreise $|z| = r$, $r < 1$, $p > 1$ und $A(p)$ eine nur von p abhängige Konstante bezeichnet, liefert der Verf. einen neuen, geistreichen Beweis, der auf dem klassischen Greenschen Theorem beruht. Seine Schlußweise ergibt

$$A(p) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-\frac{1}{p}} & \text{für} \quad 1 < p \leqq 2, \\ 2^{-\frac{1}{2}} p & \text{für} \quad p \geqq 2. \end{cases}$$

Die gleiche Methode kann nach einer Bemerkung von Littlewood zum Beweis der Zygmundschen Ungleichung [Fundam. Math. **13**, 284—303 (1929)]

$$M_1\{f\} \leqq A \int_0^{2\pi} |u| \overset{+}{\log} |u| \, d\theta, \qquad u = \Re f,$$

benutzt werden. *Szegö* (Königsberg i. Pr.).

Denjoy, Arnaud: Sur une extension de la formule de Jensen. Mathematica **7**, 129—135 (1933).

Es werden Funktionen F, Φ zugrunde gelegt, deren logarithmische Ableitungen auf einem abgeschlossenen Bereich mit Rand C regulär analytisch sind, mit Ausnahme von höchstens je endlich vielen inneren Bereichpunkten. Dann kann eine explizite Darstellung des Integrals (erstreckt über einen vollen Umlauf um C im positiven Sinne, von einer Stelle ξ angefangen)

$$J(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi C \xi} \log F(z) \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} dt$$

aus dem Verhalten der Funktionen F und Φ bzw. ihrer logarithmischen Ableitungen an den singulären Stellen im Bereichinneren gewonnen werden; sie hängt außerdem noch vom Anfangspunkt ξ des Umlaufs ab, der ja i. A. auf einer Überlagerungsfläche zu verstehen sein wird, wo er sich nicht schließt. *Ullrich* (Marburg, Lahn).

König, Karl: Einige Koeffizientenprobleme aus der Funktionentheorie. Tôhoku Math. J. **37**, 374—379 (1933).

Nach Feststellung einiger bekannter Eigenschaften des Schwarzschen Differentialausdrucks beweist der Verf. mit Hilfe des Flächensatzes: Ist $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ in $|z| < 1$ schlicht, so ist, falls die Relation $\frac{a_3}{3} = \left(\frac{a_2}{2}\right)^2$ besteht, $|a_3| \leqq 3$ und falls $a_2 = 0$ ist, $|a_3| \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}$. Die erste Schranke ist scharf, die zweite unscharf. Mit denselben Hilfsmitteln hätte er ebenso leicht zeigen können, daß im zweiten Fall $|a_3| \leqq 1$ ist und dies die genaue Schranke ist. *K. Löwner* (Prag).

Kobori, Akira: Über die Schlichtheit der Potenzreihen mit beschränktem Realteil. Tôhoku Math. J. **37**, 368—373 (1933).

Der Verf. berechnet die bekannte Schlichtheitschranke einer im Einheitskreis beschränkten Funktion und bringt das Resultat auf verschiedene Formen. *Löwner.*

Braitzew, I. R.: Über die Singularitäten der durch eine Dirichletsche Reihe bestimmten analytischen Funktion. Math. Ann. **109**, 83—94 (1933).

Dans une série de travaux antérieurs (Rec. math. Soc. math. Moscou **26**, Ann. Inst. Polyt. Varsovie, 1908—1909, 1913, 1914—1915) l'auteur a développé une méthode pour la détermination des points singuliers des fonctions définies par des séries de Taylor. Récemment il a étendu cette méthode aux fonctions de la forme $\varphi(z) = \int_0^\infty f(t) z^t \, dt$ (v. ce Zbl. **6**, 64). Le présent Mémoire a pour but l'extension de la même méthode aux fonctions définies par des séries de Dirichlet. — Le résultat principal (qui donne l'énoncé de la méthode) et la démonstration de ce résultat sont essentiellement semblables aux parties correspondantes du Mémoire que nous venons de citer (Zbl. **6**, 64); par suite nous n'entrerons pas ici dans des détails. Il faut dire toutefois que la rédaction du présent Mémoire a une forme beaucoup plus rigoureuse et plus succinte que celle du Mémoire précédent. — Dans un dernier paragraphe l'auteur indique brièvement quelques théorèmes généraux que l'on peut démontrer en appliquant les résultats exposés au début du Mémoire. Une partie de ces théorèmes généraux a été toutefois déjà démontrée (par d'autres voies) par Carlson, Landau, Ostrowski, Szász dans des Mémoires de 1921, 1922 et 1928, dont l'auteur n'a eu connaissance qu'après la rédaction du présent Mémoire. *Vlad. Bernstein* (Milano).

Wolibner, Witold: Sur les ensembles des valeurs des fonctions analytiques, partout déterminées, aux singularités punctiformes, qu'elles admettent sur leurs ensembles singuliers. C. R. Soc. Sci. Varsovie **25**, 56—62 (1933).

Proof of the following two theorems: 1) An everywhere defined, bounded, one-valued, analytic function, with punctiform singularities — i. e., such as are enclosable in a finite number of non-overlapping polygons, of arbitrarily small diameter, lying in the domain of regularity of the function — takes on all its values on its set of singularities. 2) Let $f(x)$ be a bounded, one-valued, analytic function, defined on a punctiform subset P of its set S of singularities, where P is both open and closed on S; then the set of values of f on P contains interior points or is punctiform according to whether f takes on some value, at an infinite number of regular points, in every vicinity of P, or not.

Blumberg (Columbus).

Hiong, K. L.: Sur les fonctions méromorphes dans le cercle-unité. C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 1764—1767 (1933).

Verf. kündigt eine Reihe interessanter Ergebnisse über die Wertverteilung meromorpher Funktionen im Einheitskreise an. Er kann Fortschritte erzielen bei der Erfassung von Funktionen unendlicher Ordnung, auf dem Gebiete der multiplikativen Darstellung bei positivem Geschlecht und bei unendlicher Ordnung; schließlich kann er auch einen Satz von Valiron über Borel-Punkte auf dem Rande des Einheitskreises auf unendliche Ordnung übertragen (vgl. dies. Zbl. **3**, 405/6).

Ullrich (Marburg, Lahn).

Winn, C. E.: Sur le nombre de zéros d'une classe de fonctions analytiques dans un secteur. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 14—16 (1933).

Ist $f(z)$ ganz und vom Normaltypus der Ordnung 1, so kann die Nullstellenanzahl durch $O(r)$ abgeschätzt werden. Das gilt auch schon, wenn $f(z)$ nur in einem um die reelle Achse symmetrisch gelegenen Winkelraum von einer Breite $\leqq \pi$ die obigen Voraussetzungen erfüllt, wozu freilich noch nach Angabe des Verf. hinzugefügt werden muß, daß $f(z)$ auf der reellen Achse nicht zu rasch gegen Null strebt. Verallgemeinerungen liegen auf der Hand. *Ullrich* (Marburg, Lahn).

Calugaréano, Georges: Sur le théorème de M. Borel dans le cas des fonctions méromorphes d'ordre infini. Mathematica **7**, 61—69 (1933).

Identisch mit der in diesem Zbl. **7**, 168, ref. Arbeit.

Valiron, Georges: Remarques sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes. Rend. Circ. mat. Palermo **57**, 71—86 (1933).

Die verschiedenen Definitionen von Ausnahmewerten (AW) einer meromorphen Funktion werden vergleichend untersucht. Dem Picardschen AW, der höchstens endlich oft angenommen wird, treten Verschärfungen nach 3 Richtungen gegenüber, alle mit dem Ziel, Werte, die unendlich oft, im Vergleich mit anderen aber selten angenommen werden, zu kennzeichnen. Dies geschieht stets durch Vergleich der Anzahlfunktion $N(r, z)$ mit einer für die meromorphe Funktion typischen Größe, der Charakteristik $T(r, f)$; als Vergleichsgrund dienen Wachstumsordnung, -typus und -klasse (Borel, Lindelöf, G. Valiron), Konvergenzuntersuchung eines gewissen Integrals (Calugaréano, vgl. dies. Zbl. **7**, 168) und schließlich $\overline{\lim}$ und $\underline{\lim}$ des Quotienten $N:T$ für $r \to \infty$ (Nevanlinna, Valiron). Wir bezeichnen entsprechend die verschiedenen Typen der AW durch Anfangsbuchstaben (z. B. NAW, CAW). — Das Vorhandensein zweier BAW bedingt regelmäßiges Wachstum von $T(r, f)$, so daß jene AW auch AW im Sinne N und C sind; diese Aussage kann erweitert werden, setzt aber wesentlich zwei starke AW voraus. Umgekehrt werden Funktionen konstruiert mit einem BAW, der weder im Sinne von N noch dem von C ein AW ist. In die Definition eines CAW geht noch eine wachsende Funktion $C(x)$ ein; es bleibt offen, ob es BAW gibt, die für kein $C(x)$ auch CAW sind; doch können Funktionenpaare mit je einem BAW gegeben werden, derart, daß für jedes $C(x)$ mindestens einer dieser Werte Normalwert und nicht Ausnahmewert ist. *Ullrich* (Marburg, Lahn).

Valiron, Georges: Sur une classe de fonctions entières admettant deux directions de Borel d'ordre ϱ divergent. C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 1458—1460 (1933).

Sei $f(z)$ ganz, vom Normaltypus der Ordnung 1 und habe im Winkelraume $|\arg z| < \pi/2\varrho$ die Nullstellen $r_n e^{i\omega_n}$; dann kann aus der Konvergenz des Integrals

$$\int_1^{\infty} \frac{\log^+ |f(re^{i\varphi})|}{r^{\varrho+1}}\, dr$$

auf den Randstrahlen des Winkelraums $\varphi = \pm \pi/2\varrho$ die Konvergenz der Reihe

$$\sum \frac{\cos \varrho \omega_n}{r_n^{\varrho}}$$

erschlossen werden. Darin liegt eine bemerkenswerte Übertragung eines klassischen Satzes der Wertverteilungslehre (vgl. z. B. Nevanlinna, Theorème de Picard-Borel, S. 30ff. Paris 1929) von Vollumgebungen der wesentlichen Singularität auf Teilumgebungen. Der Satz läßt sich übrigens noch weiter führen. — Ferner wird eine Reihe von Beispielen ganzer Funktionen konstruiert, welche genau 2 Borelsche Divergenzrichtungen zur Ordnung ϱ haben (vgl. dies. Zbl. **3**, 263). *Ullrich* (Marburg).

Ritt, J. F.: Integral functions obtained by compounding polynomials. Bull. Amer. Math. Soc. **39**, 627—632 (1933).

Es sei eine Folge von Polynomen $P_n(z) = z + Q_{n2} z^2 + \cdots + Q_{n,m} z^m$ von beschränkten Graden ($\leqq m$) vorgelegt. Diese Polynome mögen auf zwei Arten ineinander geschachtelt werden: Man setze $P_1 = Q_1 = R_1$ und dann

$$Q_{n+1} = Q_n(P_{n+1}) \quad \text{oder} \quad R_{n+1} = P_{n+1}(R_n).$$

Es werden hinreichende Bedingungen dafür gesucht, daß die Folgen Q_n und R_n auf jedem endlichen Bereich der Ebene gleichmäßig, also gegen eine ganze Funktion, konvergieren. Für die Folge Q_n kann dies z. B. behauptet werden, wenn alle $|a_{nk}|$ kleiner bleiben als die Glieder c_n einer konvergenten Reihe mit positiven Gliedern. Für die Konvergenz der Folge R_n ist hinreichend, daß $|a_{nk}| \leqq c_n$ ist, wobei nun $\overline{\lim}\, \sqrt[m^n]{c_n} < 1$ gefordert wird. Für die Zweige der Umkehrfunktionen von so erzeugten ganzen Transzendenten bestehen übrigens einfache algebraische Beziehungen (vgl. dies. Zbl. **5**, 301, Marty). *Ullrich* (Marburg, Lahn).

Bureau, Florent: Sur les valeurs lacunaires des fonctions entières de genre fini. (*56. sess., Bruxelles, 25. VII. 1932.*) Assoc. Franç. Avancement Sci. 29—31 (1932).

Verf. berichtet über die Beziehungen zwischen den Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung einer ganzen Funktion endlichen Geschlechts p und einem allfälligen endlichen Picardschen Ausnahmewert, welche neuerdings von ihm und Calugaréano untersucht wurden. Die Sätze beider Verff. lassen in den Ausnahmewerten Nullstellen gewisser Determinanten erkennen, die aus den Entwicklungskoeffizienten der Potenzreihe und einer Unbestimmten t aufgebaut sind; während aber Bureaus Determinanten Polynome in t höchstens vom Grade p sind, haben die von Calugaréano mindestens diesen Grad; in einem Spezialfall stimmen beide überein, allgemein sind C.'s Determinanten Linearkombinationen der B.-schen. *Ullrich* (Marburg, Lahn).

Leemans, J.: Sur les fonctions elliptiques. Intégration des fonctions rationnelles de $sn\,x$, $cn\,x$, $dn\,x$. Mathesis **47**, 154—160 (1933).

Myrberg, P. J.: Sur une représentation nouvelle des fonctions automorphes. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 730—732 (1933).

Es handelt sich um eine Methode zur Darstellung der automorphen Funktionen derjenigen Grenzkreisgruppen vom Geschlecht 2, deren Riemannsche Flächen sich in die des Gebildes $y^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)(x - e_4)(x - e_5)$ transformieren lassen. Eine solche Grenzkreisgruppe ist Untergruppe des Index 2 innerhalb einer der Grenzkreisgruppen Γ_0 vom Geschlecht 0, wie sie in einer früheren

Arbeit des Verf. [Acta math. **59**, 329 (1932); dies. Zbl. **5**, 296] zu ähnlichen Zwecken untersucht wurden. Verf. betrachtet die Änderungen des Integrals

$$u(z) = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}$$

bei Ausübung der Substitutionen von Γ_0 auf die uniformisierende Variable z und insbesondere die Untergruppe Γ_u derjenigen Substitutionen S von Γ_0, bei deren Ausübung sich $u(z)$ nicht ändert. Γ_u ist eine Grenzkreisgruppe des Geschlechtes 0 von einem der auch früher untersuchten Typen, und so erhält Verf. die folgende Darstellung:

$$\frac{u(z)-u(a)}{u(z)-u(b)} : \frac{u(z_0)-u(a)}{u(z_0)-u(b)} = \prod_{\Gamma_u} \left\{ \frac{S(z)-a}{S(z)-b} : \frac{S(z_0)-a}{S(z_0)-b} \right\}.$$

Aus dieser Darstellung ergibt sich eine Produktentwicklung für $x - x_0 = \wp(u) - \wp(u_0)$, wenn man die rechte Seite durch ϑ-Funktionen, diese durch unendliche Produkte darstellt und in deren Faktoren die Produktentwicklung für das obige Doppelverhältnis einträgt. Im dabei entstehenden unendlichen Produkt wird — allerdings in bestimmter Reihenfolge — über die sämtlichen Substitutionen von Γ_0 summiert. — Zur Darstellung von y kann ähnlich vorgegangen werden, und so erhält man explizite Darstellungen von x und y durch die uniformisierende Variable. *Petersson* (Hamburg).

Cartan, Henri: Détermination des points exceptionnels d'un système de p fonctions analytiques de n variables complexes. Bull. Sci. math., II. s. **57**, 334—344 (1933).

Die Transformation

$$w_i = f_i(z_1, \ldots, z_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

mit $f_i(z_1, \ldots, z_n)$ analytisch in einem Punkte O (etwa mit den Koordinaten

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0)$$

bildet eine geeignete Umgebung von O eineindeutig auf eine ein- oder mehrblättrige Umgebung des Bildpunktes von O über dem $w_1, \ldots, w_n$-Raume ab; es sei denn, daß die Gleichungen

$$f_i(z_1, \ldots, z_n) = f_i(0, \ldots, 0) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

unendlich viele Lösungen in der Nachbarschaft von O aufweisen. Tritt dieses aber ein — und dafür ist im Falle $n > 1$ nicht erforderlich, daß die Funktionaldeterminante identisch verschwindet —, so sprechen wir von einem Ausnahmepunkte O. Verf. gibt nun eine Methode an, die gestattet, die Gesamtheit aller Ausnahmepunkte, die in genügender Nachbarschaft von O liegen, systematisch aufzufinden. Diese Gesamtheit der Ausnahmepunkte bildet — abgesehen von zwei trivialen Ausnahmen — immer ein oder mehrere (aber endlich viele) analytische irreduzible Mannigfaltigkeiten (gegebenenfalls von verschiedenen Dimensionen). — Alle Untersuchungen des Verf. beziehen sich zugleich auf den allgemeineren Fall: $w_i = f_i(z_1, \ldots, z_n)$ $(i = 1, \ldots, p)$, $p \geqq n$. *Behnke* (Münster i. W.).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Paley †, R. E. A. C., N. Wiener and A. Zygmund: Notes on random functions. Math. Z. **37**, 647—668 (1933).

Es sei α eine zufällige Variable mit gleichmäßiger Verteilung auf dem Intervall (0; 1) und $\chi(\alpha, t)$ eine beliebige Funktion; jedem speziellen Wert von α entspricht also eine bestimmte Funktion $f(t) = \chi(\alpha, t)$; man sagt in diesem Falle, daß $f(t)$ eine zufällige Funktion ist. Nach dieser Methode hat N. Wiener [vgl. Acta math. **55**, 117—258 (1930)] diejenigen zufälligen Funktionen eingeführt, welche ihm eine mathematische Theorie der Brownschen Bewegung zu entwickeln gestatteten [vgl. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **2**, 131—174 (1923)]. Zu diesem Zwecke wählt Wiener eine ganz spezielle Funktion $\chi(\alpha, t)$, so daß bei einer beliebigen Funktion $F(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ die Gleichung

$$\int_0^1 F\{\chi(\alpha, t_1), \chi(\alpha, t_2) - \chi(\alpha, t_1), \ldots, \chi(\alpha, t_n) - \chi(\alpha, t_{n-1})\}\, d\alpha =$$

$$= \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_1^n (t_k - t_{k-1})^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} du_n \exp\left[-\sum_1^n \frac{u_k^2}{t_k - t_{k-1}} \right] F(u_1, \ldots, u_n)$$

erfüllt ist. Dann kann man voraussetzen, daß $x = f(t) = \chi(\alpha, t)$ die Lage eines Brownschen Teilchens im Zeitmomente t bei einer eindimensionalen Brownschen Bewegung ist, wenigstens wenn man von der Trägheitskraft des Teilchens absieht. Es wird jetzt bewiesen, daß für fast alle α gleichmäßig in t

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \{f(t+\varepsilon) - f(t)\}/\varepsilon^{\lambda} = 0$$

gilt, wenn nur $\lambda < \frac{1}{2}$ ist. Daraus folgt insbesondere, daß $f(t)$ mit der Wahrscheinlichkeit Eins stetig ist; die letzte Tatsache wurde von Wiener schon früher bewiesen. Ist dagegen $\lambda > \frac{1}{2}$, so ist fast sicher, daß

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} |f(t+\varepsilon) - f(t)|/\varepsilon^{\lambda} = +\infty$$

ist. Der Fall $\lambda = \frac{1}{2}$ bleibt bei Verf. unentschieden, die Lösung folgt aber auch in diesem Falle aus den feineren Untersuchungen von Khintchine [vgl. Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ergebnisse der Mathematik **2**, Heft 4 (1933), letztes Kapitel]. — Viel allgemeinere zufällige Funktionen $\varphi(x)$ erhält man in der Form

$$\varphi(x) = \int K(x, t)\, df(t),$$

wobei $f(t)$ die Wienersche zufällige Funktion ist. Wählt man jetzt ein vollständiges normiertes System von orthogonalen Funktionen $b_n(t)$ und setzt

$$K(x, t) = \sum a_n(x)\, b_n(t),$$

so erhält man

$$\varphi(x) = \sum \int b_n(t)\, df(t)\, a_n(x) = c_n a_n(x)$$

wobei die zufälligen Größen c_n gegenseitig unabhängig sind und dem Gaußschen Verteilungsgesetz unterliegen. Man sieht also, daß Wienersche zufällige Funktionen $\varphi(x)$ auch durch Reihen mit zufälligen Koeffizienten bestimmt werden können; solche Reihen wurden in einigen früheren Arbeiten von Paley und Zygmund untersucht. Verff. übertragen jetzt mehrere Resultate von Paley und Zygmund auf Wienersche zufällige Funktionen. *A. Kolmogoroff.*

Jouravsky, A.: Sur le théorème limite du calcul des probabilités. Trav. Inst. phys.-math. Stekloff **4**, 9—36 (1933) [Russisch].

Die Abhandlung enthält einen Beweis des Ljapounoffschen Grenzwertsatzes für den ein- und mehrdimensionalen Fall. Der Ansatz ist dem Ljapounoffschen sehr nahe; durch eine Abänderung des Diskontinuitätsfaktors wird jedoch die Beweisführung wesentlich erleichtert und insbesondere die Einführung einer Hilfsvariablen vermieden. Die Voraussetzungen sind die üblichen Ljapounoffschen; es wird auch eine Abschätzung des Restgliedes angegeben. *A. Khintchine* (Moskau).

De Finetti, B.: Classi di numeri aleatori equivalenti. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **18**, 107—110 (1933).

Als eine natürliche Verallgemeinerung des Begriffes der äquivalenten zufälligen Erscheinungen [vgl. B. de Finetti, Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio. Mem. Accad. naz. Lincei **4**, 86—133 (1930)] betrachtet Verf. die äquivalenten zufälligen Größen. Eine Menge von zufälligen Größen bildet eine Klasse von äquivalenten zufälligen Größen, wenn das n-dimensionale Verteilungsgesetz von irgendwelchen n Größen aus dieser Menge nur von n abhängig ist. Nach einigen elementaren Bemerkungen verspricht Verf. in einer weiteren Note mehrere interessante Eigenschaften von äquivalenten zufälligen Größen zu beweisen. *A. Kolmogoroff* (Moskau).

Bendersky, L.: Sur la fonction de probabilité relative au théorème de Laplace et les grandeurs qui s'y rattachent. Bull. Sci. math., II. s. **57**, 236—272 u. 282—312 (1933).

Untersuchungen über einen angenäherten Ausdruck der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe von unabhängigen zufälligen Größen. *Bruno de Finetti.*

Lurquin, Constant: Sur la généralisation du problème de Pascal. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **19**, 149—162 (1933).

Considérations élémentaires concernant le problème connu posé par le chevalier de Méré et résolu par Pascal. *A. Khintchine* (Moskau).

Marshall, J. B.: The probability distribution of a bridge hand. Math. Notes Nr **28**, XVI—XVIII (1933).

Huhn, R. von: Secondary curves as a measure of the lag or phase difference between two primary curves. J. Amer. Statist. Assoc. **28**, 312—327 (1933).

In this paper the author develops a graphical method for measuring the log between two time series curves by making use of their ogives. *Craig* (Ann Arbor).

Merzrath, E.: Anpassung von Flächen an zweidimensionale Kollektivgegenstände und ihre Auswertung für die Korrelationstheorie. Metron **11**, Nr 2, 103—136 (1933).

The author concerns himself with frequency distributions in two variables, the correlation surfaces for which may be represented by one of the two functions:

$$P_x(x, y)\, e^{-\frac{1}{2}(x^2/\sigma_x^2+y^2/\sigma_y^2)} \quad \text{and} \quad P_x(x, y)\, e^{-\frac{x^2+y^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}}$$

in which $P_n(x, y)$ is an nth degree polynomial in x and y. He points out a sense in which the graduation of frequency distributions by such functions by the method of moments gives a least squares best fit, and gives relations for determining the parameters for these two functions in terms of moments. He shows that for these functions the independence of x and y implies that $P_n(x, y)$ is the product of a polynomial in x by one in y. He shows how to determine a measure of correlation depending on the volume between the regression lines introduced by Hagström (Skand. Aktuarie Tidskr. **1930**, 193) in these two cases. Next he discusses the determination of the "correlation direction", which he defines as the direction of the line through the origin along which the frequency under the correlation surface is a maximum. Finally he considers the volume under the surface contained between a pair of parallel lines each 1/2 unit distant from the origin and shows for the second of his two functions how to determine the direction of the lines for which this volume is a maximum. Then the volumes between pairs of lines drawn in this direction at different distances apart but equidistant from the origin furnish a measure of the "band-correlation". There is an illustrative numerical example. *Craig* (Ann Arbor).

Wilson, Edwin B., and Ruth R. Puffer: Least squares and laws of population growth. Proc. Amer. Acad. Arts Sci. **68**, 285—382 (1933).

The fitness of the Malthusian law $P = Ce^{nt}$ and of the logistic of Verhulst to be regarded as laws of population growth is discussed at length. Methods of fitting these curves to data are reviewed and the use of the least squares method in the case of the logistic is very thoroughly discussed. The results in many numerical examples are given. The authors have fitted the logistic to actual populations "even more clearly than has been done by others", but their conclusions as to the advisability of using it for extrapolation are mainly negative. *Cecil C. Craig* (Ann Arbor, Michigan).

Koeppler, Hans: Zur begründenden Darstellung des ferneren Risikos verwickelter Versicherungsformen. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. H. **28**, 51—76 (1933).

Ein Versicherter mit dem Eintrittsalter x scheide bei Eintreffen eines Ereignisses erster Art aus, welches mit den Wahrscheinlichkeiten ${}_{\nu-1|}p_x^{(1)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ im ν-ten Versicherungsjahr eintreten kann und die Auszahlung von $S_\nu^{(1)}$ zur Folge hat, oder bei Eintreffen eines Ereignisses zweiter Art, welchem die Wahrscheinlichkeiten ${}_{\nu-1|}p_x^{(2)}$ und die Versicherungszahlungen $S_\nu^{(2)}$ entsprechen, oder schließlich bei Nichteintreffen dieser Ereignisse während der ganzen n-jährigen Versicherungsdauer, was mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \sum_{(\nu)} {}_{\nu-1|}p_x^{(1)} - \sum_{(\nu)} {}_{\nu-1|}p_x^{(2)}$ zu erwarten ist und die Zahlung von $S_n^{(3)}$ nach sich zieht. Der Versicherte entrichte bis zur Fälligkeit einer Versicherungszahlung die dem Äquivalenzprinzip entsprechende jährliche Nettoprämie. — Ein Bestand von s so definierten Versicherungen sei bereits seit t Jahren in Kraft und es seien die rechnungsmäßigen Reserven V_λ, $\lambda = 1, 2, \ldots, s$, vorhanden. Das fernere mittlere Risikoquadrat betrage für die λ-te Versicherung M_λ^2. $P(\mathfrak{R})$ sei die Wahrscheinlichkeit, daß die auf die Gegenwart diskontierte Differenz aller künftigen Ausgaben und Einnahmen gerade $\mathfrak{R}$ beträgt. Es wird mit Hilfe der Methode der erzeugenden Funktionen sehr einfach gezeigt, daß $\sum_{(\mathfrak{R})} P(\mathfrak{R}) \cdot \mathfrak{R} = \sum_{(\lambda)} V_\lambda$ und

$$\sum_{(\mathfrak{R})} P(\mathfrak{R})\, \mathfrak{R}^2 = (\sum_{(\lambda)} V_\lambda)^2 + \sum_{(\lambda)} M_\lambda^2$$

gilt. Die Anlage der Überlegungen gestattet die Tschebyscheffsche Ungleichung leicht anzuwenden und die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung $|\mathfrak{R} - \sum_{(\lambda)} V_\lambda| \leqq h$ durch h