

Werk

Titel: Analysis (Dirichletsche Reihen, Zetafunktion s. Algebra, Zahlentheorie; spezielle...

Jahr: 1934

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0007|log47

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

hang der Δ_n mit Funktionen von Schur, Pierce und Poulet wird untersucht, sowie der Fall eines symmetrischen $f(x)$. N. G. W. H. Beeger.

Rafaël, R. P. H. de: Trois propriétés asymptotiques des nombres saturés. Ann. Soc. Sci. Bruxelles A 53, 33–39 (1933).

Unter gesättigten Zahlen versteht der Verf. die kleinsten Zahlen mit maximaler Teilerzahl. Er untersucht Zahlen der Form $p^m q^n$, p und q Primzahlen. Ist $p^m q^n$ eine gesättigte Zahl und ist $p^m q^n > p^{m'} q^{n'}$, so muß $(m+1)(n+1) > (m'+1)(n'+1)$ sein. Die erste Ungleichheit liefert: $(m-m'):(n'-n) > \log q : \log p$, wenn $n' > n$ und sonst eine ähnliche. Wenn nun $\log q : \log p$ in einen Kettenbruch entwickelt wird, sind bekanntlich die Näherungsbrüche $\frac{m_k}{n_k}$ ungerader Ordnung kleiner und die anderen $\frac{m'_k}{n'_k}$ größer als $\log q : \log p$. Setzt man daher $m' = m + m_k$, $n' = n - n_k$ für $n' > n$ und sonst $m' = m - m'_k$, $n' = n + n'_k$, so genügt dies der ersten Ungleichheit. Die zweite gibt zwei Schranken für n . Die Berechnungen sind ausgeführt für $p = 2$, $q = 3$ und ergeben für $m \leq 1000000$ für n 227 Werte. Zwei andere asymptotische Eigenschaften werden besprochen. N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Heegaard, Poul: Über die Heawood'schen Kongruenzen. Norsk Mat. Forenings Skr., II. s. Nr 1/12, 47–54 (1933).

Verf. bespricht eine gewisse Anordnung der Unbekannten, die in den Heawood'schen Kongruenzen auftreten, welche eine klarere Übersicht über diese Kongruenzen ergibt. F. Bohnenblust (Princeton).

Ostrowski, Alexander: Mathematische Miscellen. XVIII.: Notiz über den Wertevorrat der Riemannschen ζ -Funktion am Rande des kritischen Streifens. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 43, 58–64 (1933).

Verf. beweist über die Werteverbreitung der Riemannschen Zetafunktion in der Nähe der Graden $\sigma = 1$ den folgenden Satz, der klassische Resultate von Bohr und Landau weiter verschärft: Zu jedem hinreichend großen D gibt es ein $T_0(D)$ und ein $\gamma(D)$, so daß es für $T \geq T_0$ im Intervall $(1, T)$ γT Punkte $k_1, k_2, \dots$ gibt, für die in jedem der getrennt liegenden Kreise um die Punkte $1 + i k_\mu$ mit den Radien $\frac{1}{D}$ jeder Wert w mit $\frac{1}{D} \leq w \leq D$ wenigstens an $2 \log D$ verschiedenen Stellen angenommen wird.

— Zum Beweise benutzt Verf. einen einfachen Kronecker-Weylschen Satz über Gleichverteilung mod 1 sowie einen seiner eigenen Beiträge zum Picard-Schottkyschen Ideenkreise. Hans Heilbronn (Göttingen).

Analysis.

Del Chiaro, A.: Osservazioni sul procedimento di arrotondamento di Schwarz. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 788–793 (1933).

In Ergänzung der in dies. Zbl. 6, 296 besprochenen Arbeit wird die Frage behandelt, wann in der dort abgeleiteten Ungleichung das Gleichheitszeichen steht. Rellich (Göttingen).

Aumann, G.: Eine Verallgemeinerung des Rolleschen Satzes auf komplexwertige Funktionen. Math. Z. 37, 578–581 (1933).

Einen in einer früheren Note (vgl. dies. Zbl. 3, 299) bewiesenen Satz verallgemeinernd zeigt der Verf.: Ist die komplexwertige Funktion $F(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ zweimal stetig differenzierbar und in keinem Teilintervall konstant, ist ferner $F(a) = 0$, $F(b) = 2\gamma \geq 0$ und $\mu = \max_{a \leq x \leq b} |\Im F(x)| > 0$, so gilt

$$\min_{a \leq x \leq b} \left| \frac{F'^2(x)}{F''(x)} \right| \leq \max \left(\mu, \frac{\gamma^2 + \mu^2}{2\mu} \right).$$

Der Beweis beruht auf einer Verallgemeinerung des im zitierten Referat genannten geometrischen Hilfssatzes. W. Fenchel (Kopenhagen).

Gallina, Gallo: Funzioni esponenziali d'ordine superiore. Ist. Lombardo, Rend., II. s. 66, 341–358 (1933).

Die Funktionen, deren Maclaurinsche Entwicklung jedes n -te Glied der Entwicklung von e^x mit verschiedenem Anfang enthält, werden höhere Exponentialfunktionen genannt. Sie sind bereits von Riccati (für $n = 3$) und allgemein von Wronski behandelt worden. Es wird $E_{n,k}(z) = \sum_{h=0}^{\infty} z^{nh+k}/(nh+k)!$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) gesetzt.

$E_{n,k}(z)$ läßt sich als Linearform aus Exponentialfunktionen darstellen, wie insbesondere im Fall $n = 2$ (Hyperbelfunktionen) bekannt. Durch Umkehrung ergeben sich Formeln, die der Eulerschen Formel aus der Lehre von den komplexen Zahlen entsprechen, ebenso lassen sich Formeln, die der von Moivre entsprechen, bilden. Die r -te Ableitung von $E_{n,k}(z)$ ist $E_{n,k-r}(z)$; hieraus folgen partikuläre Lösungen und auch die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y^{(n)} = y$. Die Wronskische Determinante von $E_{n,0}(z), E_{n,1}(z), \dots, E_{n,n-1}(z)$ (die auch als zyklische Determinante geschrieben werden kann) ist gleich 1. Es gelten ferner Additionstheoreme:

$$E_{n,k}(u+v) = \sum_{r=0}^k E_{n,r}(u) E_{n,k-r}(v) + \sum_{r=k+1}^{n-1} E_{n,r}(u) E_{n,n+k-r}(v),$$

daher auch Multiplikationstheoreme, ferner Umkehrungen, die den Formeln der Prosthaphäresis entsprechen. Zwischen den $E_{n,k}(z)$ bestehen $n - \varphi(n)$ algebraische Relationen; eine davon ist die Aussage über die Wronskische Determinante (s. oben); wenn n eine Primzahl ist, so ist sie die einzige. Es folgen Angaben über die Werteverteilung der $E_{n,k}$. Sie sind für $n > 2$ nicht periodisch. Für gerades n ist $E_{n,k}$ mit k gerade und ungerade. Die Werte von $E_{n,k}$ in der komplexen Ebene lassen sich bereits aus den Werten in einem Winkelfeld vom Winkel $2\pi/n$ mit dem Scheitel im Ursprung herleiten; es genügt sogar ein halb so großes Winkelfeld; dessen einer Schenkel in die reelle Achse fällt. Es folgen noch Angaben über die Nullstellen von $E_{n,k}$ und Produktentwicklungen dafür. Den Schluß macht ein Verzeichnis von 24 Abhandlungen über die Exponentialfunktionen höherer Ordnung. *L. Schrutka (Wien).*

Tchakaloff, L.: Sur un problème de minimum concernant une certaine classe de polynomes. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 572–575 (1933).

Ankündigung folgender Resultate: Es sei $\psi(x)$ für alle reellen x wachsend, und es mögen existieren $I_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu d\psi(x)$ für $\nu = 0, 1, 2, \dots, k$; $\psi(x)$ habe mindestens $n = [k/2] + 1$

Wachstumsstellen. Ferner seien $P_0 = c_0, P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ Polynome der Eigenschaft: 1. $P_\nu(x)$ hat den Grad ν . 2. Der Koeffizient von x^ν in $P_\nu(x)$ ist eine positive,

vorgegebene Zahl c_ν . 3. $\int_{-\infty}^{\infty} P_\mu(x) P_\nu(x) d\psi = 0$ für $\mu \neq \nu, \mu + \nu \leq k$. Polynome dieser

Art gibt es; sie sind eindeutig bestimmt bis auf $P_n(x)$, das nur bis auf das additive Glied $cP_{n-1}(x)$ bei willkürlichem reellen c bestimmt ist. Von den $P_\nu(x)$ gilt weiter: $P_\nu(x)$ hat lauter reelle einfache Nullstellen; dasselbe gilt bei beliebigen reellen c auch von $P_\nu(x) + cP_{\nu-1}(x)$; für $\nu \geq 2$ liegt zwischen zwei konsekutiven Nullstellen von $P_\nu + cP_{\nu-1}$ eine und nur eine Nullstelle von $P_{\nu-1}$. Weiter wird die Klasse C_k der

reellen Polynome $\varphi(x)$ vom Grad $\leq k$ betrachtet, für die $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) d\psi(x) = 0$ ist. Die

Menge E_k von reellen Zahlen heißt eine zu C_k gehörige minimale Menge, wenn zu jedem $\varphi(x)$ aus C_k mindestens ein ξ aus E_k gehört mit $\varphi(\xi) = 0$ und wenn keine echte Teilmenge von E_k dieselbe Eigenschaft hat. Alle minimalen Mengen E_k werden angegeben. Z. B. wenn $k > 3$ ungerade ist ($k = 2n - 1$), so ist die einzige minimale zu C_k gehörige Menge gegeben durch das offene Intervall $x_1 < x < x_n$, wo x_1, x_n die beiden äußersten Nullstellen von $P_n(x)$ sind. *Rellich (Göttingen).*

Joseph, A. W.: The sum and integral of the product of two functions. J. Inst. Actuar. 64, 329—349 (1933).

In Skand. Aktuarie Tidskr. 1927 erschien von Steffensen eine Abhandlung mit demselben Titel. Verf. bringt hier auf einem anderen Weg dieselben und andere Resultate betreffend die Entwicklung von $\sum_{n=0}^{n-1} u(x) \cdot v(x)$ resp. $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$. Große Ähnlichkeit besteht auch mit der Arbeit von Aitken (dies. Zbl. 6, 215; vgl. auch Stephan, dies. Zbl. 6, 124). Den originalen Gedankengang findet man bei Tschescheff (Collected Work I, 701—702), und das vollständige Literaturverzeichnis der Nachfolger findet man bei Aitken. Nachdem Verf. die exakte Entwicklung nach Orthogonalpolynomen, die mit $T_r(x, n)$ bezeichnet werden (r ist der Grad des Polynoms), gegeben hat, folgt die Untersuchung der Genauigkeit, die zu erwarten ist, wenn man bei irgendeinem Gliede die Entwicklung abbricht, und zum Schluß werden auch Formeln mit „Gewichten“ aufgestellt. *Burrau* (Kopenhagen).

Jackson, Dunham: Series of orthogonal polynomials. Ann. of Math., II. s. 34, 527—545 (1933).

Die Entwicklung einer willkürlichen Funktion $f(x)$ nach den Polynomen, welche im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ in bezug auf eine Gewichtsfunktion $\rho(x)$ orthogonal sind, wird mit elementaren Hilfsmitteln untersucht. Auf Grund einfacher Überlegungen (Benutzung der Christoffelschen Formel sowie der Konvergenz der „Fourierschen Konstanten“ gegen Null) beweist der Verf. das folgende Theorem: Es sei für ein festes x_0 aus $(-1, 1)$ die Folge der normierten Orthogonalpolynome beschränkt; ist die Funktion $f(x)$ mit Ausnahme von endlich vielen Sprungstellen stetig, hat sie ferner für $x = x_0$ eine rechtsseitige und eine linksseitige Ableitung, so konvergiert die Entwicklung für $x = x_0$ mit $f(x_0)$ als Summe. Es wird gezeigt, wie man eine ausgedehnte Klasse von derartigen beschränkten Polynomen gewinnt. Die Legendreschen Polynome sind für $-1 < x_0 < 1$, die Tschescheffschen Polynome $\cos n\vartheta$ ($\cos \vartheta = x$) für $-1 \leq x \leq 1$ von dieser Art. Es ist nicht schwer, die Voraussetzungen über $f(x)$ durch etwas allgemeinere zu ersetzen. Weiterhin wird der folgende Satz bewiesen, in dem die Beschränktheit der Polynome nicht gefordert wird: Es sei $\rho(x)$ summierbar und oberhalb einer positiven Schranke gelegen. Die Entwicklung konvergiert für $x = x_0$ und stellt $f(x_0)$ dar, wenn $f(x)$ im ganzen Intervall $(-1, 1)$ eine stetige Ableitung besitzt, wenn ferner in einer gewissen Umgebung von x_0 auch die zweite Ableitung existiert und diese für $x = x_0$ stetig ist. Auch diese Bedingungen lassen noch erhebliche Verallgemeinerungen zu. Der so erhaltene Vorrat an Konvergenztheoremen entspricht in mancher Beziehung der elementaren Theorie der Fourierschen Reihen.

Szegő (Königsberg, Pr.).

Watson, G. N.: Notes on generating functions of polynomials: I. Laguerre polynomials. J. London Math. Soc. 8, 189—192 (1933).

Bei der Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach normierten Orthogonalfunktionen $\varphi_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots; a \leq x \leq b$) spielen — im Zusammenhang mit der Abelschen Summierung — Reihen von der Form

$$K(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi_n(x) \varphi_n(y) \quad (|t| < 1)$$

eine Rolle. Für die verallgemeinerten Laguerreschen Polynome

$$\varphi_n(x) = \left\{ \frac{n! e^{-x} x^\alpha}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \right\}^{\frac{1}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) \quad (\alpha > -1, x > 0)$$

hat Hardy [J. London Math. Soc. 7, 138—139 (1932); dies. Zbl. 4, 253] mit Hilfe der Mellinschen Formel

$$K(x, y, t) = \frac{t^{-\frac{1}{2}\alpha}}{1-t} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x+y) \frac{1+t}{1-t} \right\} \cdot I_\alpha \left(\frac{2\sqrt{xyt}}{1-t} \right)$$

bewiesen; I_α bezeichnet hier die Besselsche Funktion mit imaginärem Argument.

Verf. gibt für dieses Resultat einen neuen, reihentheoretischen Beweis, welcher auf einer Saalschützchen Formel für verallgemeinerte hypergeometrische Funktionen beruht.

Szegö (Königsberg, Pr.).

Watson, G. N.: Notes on generating functions of polynomials. II. Hermite polynomials. J. London Math. Soc. 8, 194—199 (1933).

Die in dem vorangehenden Bericht formulierte Aufgabe wird hier für die Hermite'schen Funktionen

$$\varphi_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \quad (x \text{ reell})$$

behandelt. Es gilt in diesem Falle mit der dortigen Bezeichnung

$$K(x, y, t) = \{\pi(1-t^2)\}^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{4xyt - (x^2 + y^2)(1+t^2)}{2(1-t^2)} \right\}.$$

Verf. schreibt diese Formel Mehler (1866) zu und gibt dafür drei verschiedene Beweise: 1. Auf Grund der obigen Formel für Laguerresche Polynome (durch Kombination der Fälle $\alpha = \pm \frac{1}{2}$). 2. Auf Grund der oben benutzten Saalschützchen Formel. 3. Nach Hardy mittels der Integralformel

$$e^{-x^2} = \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2 + 2ixu) du,$$

aus der durch Differentiation eine entsprechende Integraldarstellung für $\varphi_n(x)$ hervorgeht.

Szegö (Königsberg, Pr.).

Hille, Einar: On the complex zeros of the associated Legendre functions. J. London Math. Soc. 8, 216—217 (1933).

Berichtigung zu: Hobson, E. W.: "The theory of spherical and ellipsoidal harmonics". (Vgl. dies. Zbl. 4, 210.)

Dhar, S. C., and N. G. Shabde: On the non-orthogonality of Legendre's functions. Bull. Calcutta Math. Soc. 24, 177—186 (1933).

If $2a$ is an integer and $m = a + ip$, $n = a + iq$; p and q being real numbers neither of which is zero when a is an integer, the function $P_n(z)$ is not orthogonal to $P_m(z)$ in the interval $(-1, 1)$. When $2a > -1$ and p, q are simply restricted to be real the function $Q_n(z)$ is not orthogonal to $Q_m(z)$ in the interval $(1, \infty)$. When r and s are integers, both even or both odd, the function $Q_r(z)$ is not orthogonal to $Q_s(z)$ in the interval $(0, 1)$. When in addition $r + s - 2k + 2$ is an even integer the function $P_r^{-k}(z)$ is orthogonal to $P_s^{-k}(z)$ in the interval $(0, 1)$. If $u + v + 1 > 0$ we have

$$\int_1^\infty Q_u^{-\frac{1}{2}}(z) Q_v^{-\frac{1}{2}}(z) dz \neq 0.$$

H. Bateman (Pasadena).

● **Szegö, Gabriel: Asymptotische Entwicklungen der Jacobischen Polynome.** (Schr. Königsberg. gel. Ges. Jg. 10, H. 3.) Halle a. S.: Max Niemeyer 1933. 78 S. u. 15 Fig. RM. 8.—

Der Grundgedanke der vom Verf. verwendeten Methode zur asymptotischen Entwicklung besteht hauptsächlich in der Heranziehung der Besselschen Funktionen. Diese Entwicklung besitzt gegenüber den klassischen asymptotischen Formeln und Entwicklungen (nach gewöhnlichen trigonometrischen Funktionen) den Vorteil, daß sie in jeder linksseitigen Umgebung von $x=1$, genauer in jedem Intervalle $-1+\varepsilon \leq x \leq +1$ (ε ist eine feste Zahl, $0 < \varepsilon < 2$) gleichmäßig gültig ist. — In der vorliegenden Arbeit wird dieses Programm für die Jacobischen (hypergeometrischen) Polynome $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ durchgeführt. Der Verf. beschränkt sich dabei auf das reelle Intervall $-1 \leq x \leq 1$. Im zweiten Abschnitt werden als Spezialfall die ultrasphärischen Polynome $P_n^{(\mu)}(x)$ betrachtet. Diese werden für μ reell $\neq 0, -1, -2, \dots$ definiert durch die erzeugende Reihe

$$(1 - 2xw + w^2)^{-\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\mu)}(x) w^n.$$

In den Fällen $\mu = 0, -1, -2, \dots$ bricht diese Entwicklung mit dem Gliede $n = -2\mu$ ab. Dann wird die erzeugende Funktion ersetzt durch

$$-(1 - 2xw + w^2)^{-\mu} \log(1 - 2xw + w^2).$$

Das Hauptergebnis des Verf. ist: Satz I. Für $0 < \theta < \pi$ gilt die folgende asymptotische Entwicklung:

$$P_n^{(\mu)}(\cos \theta) \sim \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\theta) \theta^{m-\mu+\frac{1}{2}} \frac{J_{\mu-m-\frac{1}{2}}[(n+\mu)\theta]}{(n+\mu)^{m-\mu+\frac{1}{2}}}. \quad (1)$$

Bricht man diese Reihe mit dem Gliede $m = p - 1$ ab, $p \geq 1$, so ist der gemachte Fehler

$$R_p = \begin{cases} \theta^{p-\mu} O(n^{\mu-p-1}), & \text{wenn } n\theta \geq c, \\ O(n^{2\mu-2p-1}), & \text{wenn } n\theta \leq c, \end{cases}$$

wobei c eine feste positive Zahl bezeichnet. Diese Abschätzung gilt gleichmäßig im Intervalle $0 < \theta \leq \pi - \varepsilon$, wenn ε eine feste Zahl ist, $0 < \varepsilon < \pi$. Hier ist:

$$f_m(\theta) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu-m)} 2^{m-\mu+\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right)^{-\mu} \varphi_m(\theta), \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

wo $\varphi_m(\theta)$ berechnet wird mittels:

$$\left(\frac{2 \cos t - 2 \cos \theta}{\theta^2 - t^2}\right)^{-\mu} = \left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right)^{-\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(\theta) (\theta^2 - t^2)^m; \quad \varphi_0(t) = 1.$$

Die Restabschätzung ist zwar für kleine Werte von θ genauer als in dem Falle der klassischen auf Stieltjes u. a. zurückgehende Entwicklung nach trigonometrischen Funktionen, wo $R_p = (\sin \theta)^{-p-\mu} O(n^{\mu-p-1})$ gleichmäßig im Intervalle $0 < \theta < \pi$, jedoch demgegenüber steht nach der Meinung des Ref. der nicht unerhebliche Nachteil, daß das Bildungsgesetz der Koeffizienten $\varphi_n(\theta)$ sehr verwickelt ist, während dagegen die Koeffizienten in der trigonometrischen Reihe besonders einfach sind, wodurch diese letztere Reihe ohne Beschwerde beliebig weit fortgesetzt werden kann. — Im dritten Abschnitt werden diese Ergebnisse ausgedehnt auf die allgemeinen Jacobischen Polynome $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Diese werden für beliebige reelle Werte von α und β definiert durch die Entwicklung

$$\frac{2^{\alpha+\beta} \Phi(w) \Psi(w)}{Q(w)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) w^n \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

wo

$$Q(w) = \sqrt{1 - 2wx + w^2}; \quad \Phi(w) = [1 - w + Q(w)]^{-\alpha}; \quad \Psi(w) = [1 + w + Q(w)]^{-\beta}.$$

Die ultrasphärischen Polynome bilden einen Spezialfall der Jacobischen Polynome. Es gilt nämlich, für $\mu = \alpha + \frac{1}{2}$:

$$P_n^{(\alpha, \alpha)}(x) = \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})} \frac{\Gamma(n + \mu + \frac{1}{2})}{\Gamma(n + 2\mu)} P_n^{(\mu)}(x).$$

Die asymptotische Entwicklung der Polynome $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ unterscheidet sich von der Entwicklung (1) in der Hauptsache dadurch, daß sie statt der Besselschen Funktionen gewisse Verallgemeinerungen $J_{\nu, m}(\xi)$ derselben enthält. Das Hauptergebnis ist: Satz II. Für $0 < \theta < \pi$ gilt die folgende asymptotische Entwicklung:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \sim \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{-\beta} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \sum_{m=0}^{\infty} \theta^m \left\{ \sum_{\nu=0}^m f_{m, \nu}(\theta) J_{\alpha+\nu, m}(n'\theta) \right\}$$

$$n' = n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}.$$

Bricht man diese Reihe mit dem Gliede $m = p - 1$ ab, $p \geq 1$, so ist der gemachte Fehler

$$R_p = \begin{cases} \theta^{p-\lambda_p-\alpha} O(n^{-\lambda_p}), & \text{wenn } n\theta \geq c, \\ O(n^{\alpha-p}), & \text{wenn } n\theta \leq c, \end{cases} \quad \lambda_p = \frac{1}{2} + \left[\frac{p+1}{2}\right].$$

c ist eine feste positive Zahl. Auch diese Abschätzung gilt gleichmäßig im Intervalle $0 < \theta \leq \pi - \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < \pi$).

Die Funktionen $f_{m, \nu}(\theta)$ sind ziemlich verwickelt von θ, α, β abhängige Funktionen, von denen der Verf. die ersten 6 berechnet hat.

$$J_{\nu, m}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(0+)}^{(-\infty)} z^{-\nu-1} (z + z^{-1})^m \exp\left\{\frac{1}{2}\xi(z - z^{-1})\right\} dz \quad (\nu \text{ beliebig reell, } m \geq 0, \Re \xi > 0).$$

Die Funktionen $J_{\nu, m}$ können leicht als lineare Aggregate der Besselschen Funktionen dargestellt werden, z. B.:

$$J_{\nu, m}(\xi) = \sum_{h=0}^m \binom{m}{h} J_{m-2h+\nu}(\xi).$$

Der Verf. wendet seine Ergebnisse zur Verallgemeinerung einer von Bernstein [J. Math.

pures appl., IX. s. 9, 127—177 (1930)] behandelten Aufgabe an, nämlich das asymptotische Verhalten zu untersuchen von

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} (1-x)^{\lambda}(1+x)^{\mu} |P_n^{(\alpha, \beta)}(x)| \quad \lambda \text{ und } \mu \geq 0$$

für große Werte von n , und die entsprechende Aufgabe für Integrale. Im vierten Abschnitt wird die mechanische Quadratur auf Jacobischen Abszissen behandelt [d. h. eine beliebige im Intervalle $-1 \leq x \leq 1$ definierte Funktion wird durch das Lagrangesche Interpolationspolynom $(n-1)$ -ten Grades ersetzt, welches in den Nullstellen des n -ten Jacobischen Polynoms $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ mit $f(x)$ übereinstimmt]. Der Verf. bildet nun das Integral (Quadraturwert) $Q_n[f]$ des Interpolationspolynoms über das Intervall $-1, +1$ und beweist: Satz III. a) Ist $\max(\alpha, \beta) > \frac{1}{2}$, so existieren überall stetige Funktionen $f(x)$, für welche die Quadraturwerte $Q_n[f]$ divergieren, wenn $n \rightarrow \infty$. b) Ist $\max(\alpha, \beta) < \frac{1}{2}$, so konvergieren die Quadraturwerte $Q_n[f]$ für $n \rightarrow \infty$ gegen $\int_{-1}^{+1} f(x) dx$, wenn nur $f(x)$ eine beliebige, im Intervalle $-1, +1$ im

Riemannschen Sinne integrable Funktion bedeutet. — Diese Behauptung gilt auch im Falle $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ [der Verf. vermutet, daß sie auch gilt im Falle $\max(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}, \alpha \neq 0$; für diesen Fall versagt jedoch seine Schlußweise]. Für $\alpha = \beta = 0$ findet man die klassische Gaußsche mechanische Quadratur. — Im Anhang gibt der Verf. mit analogen Überlegungen wie im zweiten Abschnitte die nach den Besselschen Funktionen fortschreitende asymptotische Entwicklung der (Hobsonschen) zugeordneten Funktionen $P_n^*(\cos \theta)$ (siehe E. W. Hobson: Spherical and ellipsoidal harmonics, Camb. Univ. Press 1931). Er beweist als Gegenstück zu Satz I: Satz IV. Es gilt bei festem ν für $0 < \theta \leq \pi - \varepsilon$ die asymptotische Entwicklung

$$P_n^*(\cos \theta) \sim \sum_{m=0}^{\infty} f_m^*(\theta) \theta^m \frac{J_{m-\nu}[(n+\frac{1}{2})\theta]}{(n+\frac{1}{2})^{m-\nu}}.$$

Die Funktionen $f_m^*(\theta)$ sind von derselben Beschaffenheit wie die Funktionen $f_m(\theta)$ von Satz I und hängen mit diesen eng zusammen. Es ist dabei $\mu = \nu + \frac{1}{2}$ zu setzen. Die Restabschätzung lautet in der üblichen Bezeichnung:

$$R_p = \begin{cases} \theta^{\nu-\frac{1}{2}} O(n^{\nu-p-\frac{1}{2}}), & \text{wenn } n \geq c, \\ \theta^{2p-\nu} O(1), & \text{wenn } n \leq c. \end{cases}$$

S. C. van Veen (Dordrecht).

Jordan, Charles: Interpolation without printed differences, in the case of two or three independent variables. J. London Math. Soc. 8, 232—240 (1933).

In einer früheren Arbeit hat Verf. [Atti del Congresso Internazionale dei Matematici Bologna 4, 157—177 (1928)] eine Interpolationsformel angegeben, welche keine Differenzen der zu interpolierenden Funktion enthielt, sondern nur Funktionswerte selbst, in der Umgegend der zu interpolierenden Stelle, mit gewissen Zahl faktoren versehen, die in Tabellenform niedergelegt waren. Bei einer Interpolation vom dritten Grad lautete die Formel, wenn u zwischen den Tafelargumenten a und $a+h$ liegt:

$$f(u) = J_1 + C_1(x) \cdot [J_1 - J_2], \quad x = \frac{u-a}{h}, \quad (1)$$

wo I_v linear zwischen $f(a-\nu h+h)$ und $f(a+\nu h)$ interpoliert ist und

$$C_s(x) = (-1)^s \cdot \binom{x+s-1}{2s},$$

hier mit $s=1$, aus der Tabelle zu entnehmen ist. — Ausgehend von (1) entwickelt Verf. eine entsprechende Interpolationsformel für Funktionen von zwei Variablen $f(u, v)$. Bezeichnen $a, a+h; b, b+k$ die vier nächstbenachbarten Tafelargumente bei der zu interpolierenden Stelle, so wird

$$f(u, v) = S_{11} + C_1(x)[S_{11} - S_{21}] + C_1(y)[S_{11} - S_{12}] + C_1(x)C_1(y) \cdot [S_{11} + S_{22} - S_{12} - S_{21}] \quad (2)$$

$$x = \frac{u-a}{h}, \quad y = \frac{v-b}{k},$$

wo die $S_{\nu\mu}$ durch aufeinanderfolgende lineare Interpolation bezüglich u und v aus den Punktquadrupeln $(a+\nu h, b+\mu k)$, $(a+\nu h, b-\mu k+k)$, $(a-\nu h, b+\mu k)$, $(a-\nu h, b-\mu k+k)$ gewonnen sind. — Ein ausgeführtes Beispiel (f = unvollständige Gammafunktion) zeigt, wie die Rechnung, insbesondere bei Benutzung von

Rechenmaschinen, anzuordnen ist; sie ist nicht umfangreicher als die bei der Everettschen Formel unter Benutzung von Tafeldifferenzen erforderliche. — Verf. schreibt noch die Interpolationsformel an für den Fall, daß man die Funktion f durch ein Hyperboloid vom 9. Grad [statt vom 5. wie in (2)] ersetzt. Ferner ergibt sich ohne Mühe die Erweiterung der Interpolationsformel auf Funktionen von drei Variablen, sowie eine Interpolationsformel für die partiellen Ableitungen. *S. Gradstein.*

Sharma, J. L.: On expansions in Lamé's functions and their applications to the evaluation of certain definite integrals. Errata. Bull. Calcutta Math. Soc. 24, 219—221 (1933).

Vgl. dies. Zbl. 6, 313.

MacRobert, T. M.: Proofs of some formulae for the hypergeometric function. Philos. Mag., VII. s. 16, 440—449 (1933).

A set of 15 recurrence formulae is first listed, corrections being made to two of the formulae printed in Gauss' works. The recurrence formulae are then used to find Gauss' value for $F(a, b; c; 1)$ when $c - 1$ is not a negative integer and $c - a - b$ has a positive real part. — Kummer's method is used to establish the formulae for the analytical continuation of the hypergeometric function and is used also to prove the formula

$$Q_n^m(z) = \frac{\Gamma(m+n+1)\Gamma(m-n)}{2\Gamma(m+1)} \left\{ x^{\frac{1}{2}m} y^{-\frac{1}{2}m} F(-n, n+1; m+1; x) - e^{\mp n\pi i} x^{-\frac{1}{2}m} y^{\frac{1}{2}m} F(-n, n+1; m+1; -y) \right\}$$

for the associated Legendre function $Q_n^m(z)$, where $z = 2x - 1 = 1 + 2y$.

H. Bateman (Pasadena).

Differentialgleichungen:

Kameda, Toyojiro: On an integrable class of differential equations. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 15, 184—194 (1933).

With the aid of the elements of the theory of conjugate functions the author obtains an integrating factor of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \tan f(x, y)$, where $f(x, y)$ is harmonic.

I. S. Sokolnikoff (Madison, U. S. A.).

Bureau, Florent: Recherches sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre et du premier degré. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. s. 18, H. 1, 1—53 (1933).

Verf. untersucht die Riemannschen Flächen der durch eine Differentialgleichung

$$Xdx + Ydy = 0 \quad (X = ax + by + \dots, \quad Y = a'x + b'y + \dots)$$

definierten Funktionen $y(x)$ so weit, als die Werte von $y(x)$ und x in der Umgebung des Unbestimmtheitspunktes $x = y = 0$ liegen. Wenn das Verhältnis der Wurzeln λ_1, λ_2 der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ a' & b' - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

weder 0, noch ∞ , noch reell negativ, noch ganzzahlig oder ein echter Bruch ist, läßt sich nach Poincaré die Gleichung $Xdx + Ydy = 0$ durch eine eindeutige reguläre Transformation in die elementar integrierbare Gleichung

$$(ax + by)dx + (a'x + b'y)dy = 0$$

überführen. Verf. studiert eingehend die Riemannschen Flächen der Lösungen $y(x)$ dieser Gleichung und kommt nach einer tiefgehenden Analyse zu dem Schluß, daß die Riemannschen Flächen für die Lösungen der allgemeineren Gleichung $Xdx + Ydy = 0$ in der Nachbarschaft von $x = y = 0$ von derselben topologischen Beschaffenheit sind wie jene. Für den Fall, daß $\lambda_1: \lambda_2$ eine ganze Zahl ($\neq 0$) oder ein echter Bruch ist, benutzt Verf. die von Bendixson und Dulac angegebenen Normalformen des Integrals zum Studium der Riemannschen Flächen. *Kähler* (Hamburg).

Persidski, K. P.: Au sujet du problème de „stabilité“. Bull. Soc. phys.-math. Kazan 5, Nr 3, 56—62 (1931) [Russisch].

Naheliegende Verallgemeinerung eines Kriteriums von Liapounoff für die Nichtstabilität der Lösung $x_i = 0$ des Systems

$$\frac{dx_i}{dt} = Y_i(x_1, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad Y_i(0, \dots, 0, t) = 0;$$

wenn eine für $t > t_0$ beschränkte, in bezug auf die x_i positiv definite Funktion $V(x_1, \dots, x_n, t)$ von der Beschaffenheit existiert, daß

$$-VA(t) + \sum \frac{\partial V}{\partial x_k} Y_k + \frac{\partial V}{\partial t} > 0$$

ausfällt, und $\exp \int_{t_0}^t A dt$ für gewisse $t > t_0$ beliebig groß wird, ist die genannte Lösung nicht stabil. *W. Stepanoff* (Moskau).

Malkine, Y. G.: Problème de l'existence des fonctions de Liapounoff. II. Bull. Soc. phys.-math. Kazan 5, Nr 3, 63—84 (1931) [Russisch].

Ergänzungen und Anwendungen der Resultate eines früheren Artikels des Verf. (Bull. Soc. phys.-math. Kazan 4, 51—62; dieses Zbl. 2, 417, wo man auch die zugehörigen Definitionen findet). Im Falle von zwei Gleichungen,

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y), \quad X(0, 0) = Y(0, 0) = 0,$$

wird bewiesen: Ist die Lösung $x = 0, y = 0$ stabil, so existiert eine verallgemeinerte Liapounoffsche Funktion, welche auf den etwa vorhandenen Gleichgewichtslinien unstetig werden kann; gibt es keine Gleichgewichtslinien in der Umgebung von $(0, 0)$, so existiert auch eine eigentliche L. F. Ist die Lösung $x = 0, y = 0$ stabil, und existiert keine L. F. V mit definitem VV , so besitzen die Gleichungen entweder Gleichgewichtslinien oder ein Integral $V(x, y) = \text{konst.}$, V definit. Anwendung. Die Differentialgleichungen haben die Form: $\frac{dx}{dt} = X_m + X'$, $\frac{dy}{dt} = Y_m + Y'$ (A), die rechten Seiten holomorph, X_m und Y_m von m -ter Dimension, X' und Y' von der höheren; ist die Bewegung $\frac{dx}{dt} = X_m$, $\frac{dy}{dt} = Y_m$ (B) asymptotisch stabil, so gilt dasselbe auch für (A); Verallgemeinerung auf n Variable. Wenn dagegen die Lösung $(0, 0)$ von (B) stabil, aber nicht asymptotisch ist, kann die entsprechende Lösung von (A) bei einer geeigneten Wahl von X', Y' stabil sowie unstabil sein. *W. Stepanoff* (Moskau).

Rosenblatt, Alfred: Sur les théorèmes de M. Picard dans la théorie des équations différentielles du second ordre non linéaires. Bull. Soc. Math. Grèce 14, Nr 1, 7—15 (1933).

Given the equation $y'' = f(x, y, y')$, consider the problem of determining a solution which vanishes for $x = 0$ and which takes on a given value B for $x = b$. In his previous work on the problem, the author replaced the assumptions concerning $f(x, y, y')$, made by Picard in his classical investigations, by less restrictive ones. In the present paper the author improves his own previous results by showing that it is sufficient to assume that $f(x, y, y')$ satisfies an inequality of the type

$$|f(x, y_1, y'_1) - f(x, y_2, y'_2)| \leq \alpha |y_1 - y_2|/x^2(b - x^2) + \beta |y'_1 - y'_2|/x(b - x),$$

where α, β are positive constants. If the constants α, β, b, B satisfy proper restrictions, then the solution exists and is unique. The method of successive approximations is used to establish these results. An example is added which illustrates the role of the inequalities to which the constants of the problem have been subjected. *Tibor Radó*.

Trjitzinsky, W. J.: The general case of non-homogeneous linear differential equations. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 19, 687—690 (1933).

The author establishes the asymptotic character of solutions of the equation

$$L_n(y) = b(x), \quad \text{where } L_n(y) \equiv \sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(n-i)} \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad \text{with } a_0(x) \neq 0 \text{ and}$$

$a_n(x) \equiv 0$. The $a_i(x)$ and $b(x)$ for $|x| \geq p_0$ are representable by convergent series of the type

$$a_\mu x^{\frac{\mu}{p}} + a_{\mu-1} x^{\frac{\mu-1}{p}} + \dots + a_1 x^{\frac{1}{p}} + a_0 + a_{-1} x^{-\frac{1}{p}} + \dots,$$

where $p (\geq 1)$ is an integer. — The treatment is based on the results of an unpublished paper treating the corresponding homogeneous problem, which the author "has completely developed (with no restrictions on the roots of the characteristic equation) in a detailed paper to appear elsewhere". — The major part of the present paper is an abstract of the main results of the unpublished paper, which are embodied in the Fundamental Existence Theorem, and with its aid he formulates the Existence Theorem for the non-homogeneous case.

I. S. Sokolnikoff (Madison, U. S. A.).

Yosida, Kôsaku: A remark to a theorem due to Halphen. Jap. J. Math. 9, 231 bis 232 (1933).

In this paper the differential equation:

$$P_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_n(x) y = 0,$$

is subject to the following conditions: (1) the coefficients are polynomials, (2) the degree, p , of $P_0(x)$ is not less than that of any other coefficient, (3) the singular points, a_i ($i=1, 2, \dots, p$), which lie in the finite x -plane, are regular, (4) the quotient of any two solutions is single valued. The author then proves that the general solution of the differential equation is of the form

$$y(x) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x), \text{ where } y_i(x) = \prod_{j=1}^p (x - a_j)^{\nu_j} \{e^{\lambda_i x} R_i(x)\},$$

ν_j and λ_i being definite constants and $R_i(x)$ a rational function. Conversely, any function $y_i(x)$ will satisfy a linear differential equation of the type given, such that $\lim_{x \rightarrow \infty} P_i(x)/P_0(x)$ is finite, $i = 1, 2, \dots, n$.

Davis (Bloomington).

Vahlen, K. Th.: Über den Heaviside-Kalkül. Z. angew. Math. Mech. 13, 283—298 (1933).

Der Verf. löst die linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und mit verschiedenen Anfangsbedingungen durch eine symbolische Rechnung der Operatoren $f(D)$ (f rational, $D = \frac{d}{dx}$). Zu diesem Zwecke definiert er wie gewöhnlich die Grundoperatoren $(D+a)^n$, $(D+a)^{-n}$ (den letzten mit verschiedenen Bestimmungen gemäß den verschiedenen Anfangsbedingungen); durch diese Operatoren werden nun die allgemeineren Operatoren $f(D)$ erklärt.

L. Fantappiè (Bologna).

Kryloff, B. L.: Zu einer Arbeit von J. Lutz: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung usw. Bull. Soc. phys.-math. Kazan 5, Nr 3, 85—89 (1931).

Einwendungen gegen die Arbeit von Lutz (S.-B. Bayer. Akad. Wiss. M.-N. Klasse 1926, 231—277). Es handelt sich vornehmlich um Fehler, die dadurch entstanden sind, daß die Ausnahmefälle der korrelativen Zuordnungen (Lehre von den Elementarteilern) nicht genügend beachtet worden sind.

L. Schrutka (Wien).

Schauder, J.: Über das Dirichletsche Problem im Großen für nicht-lineare elliptische Differentialgleichungen. Math. Z. 37, 623—634 (1933).

S. Bernstein hat in einer berühmten Arbeit [Sur la généralisation du problème de Dirichlet. Math. Ann. 69 (1910)] die erste Randwertaufgabe für quasilineare elliptische Differentialgleichungen im Großen gelöst. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die verwickelten Beweisgänge von Bernstein zum Teil zu vereinfachen. — In der Hauptsache handelt es sich um den Satz: Falls im voraus bekannt ist, daß die „inhomogene“ Differentialgleichung vom elliptischen Typus

$$(*) \quad A(x, y, z, p, q) r + 2 B(x, y, z, p, q) s + C(x, y, z, p, q) t = \psi(x, y)$$

bei beliebigem $\psi(x, y)$ und beliebigen Randwerten $\varphi(s)$ höchstens eine

Lösung zuläßt, dann besitzt die entsprechende „homogene“ Differentialgleichung

$$(*) \quad A(x, y, z, p, q) r + 2 B(x, y, z, p, q) s + C(x, y, z, p, q) t = 0$$

für beliebiges (genügend reguläres) $\varphi(s)$ immer eine Lösung. Als x, y -Bereich [auf dessen Rand die Werte $\varphi(s)$ vorgegeben sind] wird der Bequemlichkeit halber ein Kreis gewählt; wesentlich wird nur gebraucht, daß das Gebiet im eigentlichen Sinne konvex ist. — Beweisgang: Neben den Randwerten $\varphi(s)$ wird die Schar der Randwerte $\lambda\varphi(s)$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ betrachtet. Zu $\lambda = 0$ gibt es eine Lösung von (*), nämlich $z \equiv 0$. Daher wegen der vorausgesetzten Eindeutigkeit von (*) auch für hinreichend kleine λ . Sei $\lambda_0 < 1$ eine Schwelle, derart, daß (*) für $\lambda\varphi(s)$ mit $\lambda < \lambda_0$ lösbar wäre, hingegen nicht mit $\lambda > \lambda_0$. Die Lösungen z_λ (mit $\lambda < \lambda_0$) sind nun samt allen ihren Ableitungen zweiter Ordnung, absolut genommen, unabhängig von λ ($0 \leq \lambda \leq 1$) beschränkt, und es genügen die zweiten Ableitungen einer Hölder-Bedingung mit von λ unabhängigen Koeffizienten. Also ist z_λ auch eine zweimal Hölderstetig differenzierbare Funktion und genügt (*), woraus die Lösbarkeit für geeignete $\lambda > \lambda_0$ folgt; es gibt keine „Schwelle“, die Randwertaufgabe ist auch für die Randwerte $\varphi(s)$ lösbar. Der schwierigste Teil des Beweises ist natürlich die Abschätzung der ersten und zweiten Ableitungen von z_λ (von S. Bernstein übernommen) sowie der Hölder-Konstanten der zweiten Ableitungen (nach Sätzen des Autors und E. Hopfs). Die dritten Ableitungen von $\varphi(s)$ müssen einer Hölder-Bedingung genügen. *Rellich* (Göttingen).

Muschelišvili, N.: Praktische Lösung der fundamentalen Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie in der Ebene für einige Berandungsformen. Z. angew. Math. Mech. 13, 264—282 (1933).

Der Verf. hat bereits in früheren Arbeiten, insbesondere Math. Ann. 107 (1932); dies. Zbl. 5, 358, eine Theorie der Randwertaufgaben für das Bipotential entwickelt, bei der unter Ausnützung einiger elementarer Eigenschaften des Cauchyschen Integrals jene Funktion benützt wird, die den vorgelegten Bereich auf das Innere bzw. das Äußere eines Kreises abbildet. Im Anschluß an diese Arbeiten werden hier spezielle Probleme der zweidimensionalen Elastizitätstheorie behandelt. Im allgemeinen erfordert die Erledigung des Problems noch die Auflösung einer Fredholmschen Integralgleichung, wenn aber die Abbildungsfunktion eine in der Ebene des Kreises rationale Funktion ist, so ergibt sich die Lösung unmittelbar. Dieses Lösungsverfahren wird an speziellen Beispielen erörtert, die die Kreisscheibe und den Außenraum einer Ellipse betreffen, und zwar sowohl für den Fall, daß die Kräfte als auch für den Fall, daß die Verschiebungen gegeben sind. Einige weitere Anwendungsbeispiele werden kurz angedeutet. *Funk.*

Gennusa, S.: Integrazione per quadrature dell'equazione differenziale $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + a \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y)$. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 903—908 (1933).

Durch eine (vom Ref. angegebene) Methode wird die partielle Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + a \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y)$$

mit den Cauchyschen Anfangsbedingungen

$$z(x_0, y) = \varphi_0(y), \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=x_0} = \varphi_1(y), \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{x=x_0} = \varphi_2(y)$$

aufgelöst. Die Lösung $z(x, y)$ wird mit drei Quadraturen durch die Formel

$$z(x, y) = \varphi_0(y) + (x - x_0) \varphi_1(y) + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \int_{x_0}^x e^{\frac{x-t}{\lambda}} dt \left\{ \int_{x_0}^t [\lambda^2 f(\tau, y + a\lambda^2(\tau - t)) + \lambda \varphi_2(y + a\lambda^2(\tau - t)) + \varphi_1(y + a\lambda^2(\tau - t))] d\tau + \varphi_0(y + a\lambda^2(x_0 - t)) \right\}$$

ausgedrückt, wo C_0 eine geschlossene Kurve bedeutet, die nur die singuläre Stelle $\lambda = 0$ einschließt.

L. Fantappiè (Bologna).

Coissard, Maurice: Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du troisième ordre, à deux variables indépendantes. Bull. Soc. Math. France **61**, 141—157 (1933).

The method for integrating pencils (faisceaux) of transformation symbols devised by Vessiot [Bull. Soc. Math. France **52**, 336—395 (1924)] is employed. Let E denote an equation which, in addition to having the properties mentioned in the title, is non-linear and has its three families of characteristics coincident. Any E has a non-complete pencil S of singular symbols of degree three. If S^1 , the derived pencil of S , is complete, E is called an equation $\mathcal{E}$. The author proves: (1) S has invariants only if S^1 is complete; (2) The integral surfaces of an $\mathcal{E}$ are generated by characteristic manifolds of Cauchy which depend on seven arbitrary constants and can be associated to give the surfaces without additional integration; (3) If an E is integrable by the method of Darboux, it is an $\mathcal{E}$.

J. M. Thomas (Durham).

Levi, Ugo: Intorno alle varietà a tre dimensioni che rappresentano un sistema di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali del 2° e del 3° ordine. Rend. Semin. mat. Univ. Padova **4**, 27—37 (1933).

Es werden solche V_3 in einem projektiven ebenen Raume untersucht, deren homogene Koordinaten als Integrale eines Systems von linearen partiellen Differentialgleichungen (in einer unbekannten Funktion dreier unabhängigen Parameter) dargestellt werden können. Mit h_s soll die Anzahl der linear unabhängigen Gleichungen der Ordnung s in dem obenerwähnten System bezeichnet werden. Der Autor befaßt sich mit den Fällen $h_2 = 3$, $h_3 = 6, 7$ ($h_2 = 3$ hat zur Folge $6 \leq h_3 < 10$). Ist $h_3 = 6$, so besteht die V_3 aus einem Projektionskegel einer Fläche, welcher kein System zweiter oder dritter Ordnung assoziiert werden kann. Der Fall $h_3 = 7$ bietet drei mögliche Typen von V_3 dar, von denen der vom Darboux (Leçons sur la théorie générale des surfaces, Bd. 4 n. 1093) behandelte der wichtigste ist. Die Beweisführung beruht (ähnlich wie bei Terracini (Reale Acc. delle Scienze di Torino, 1915—1916) auf dem Begriff der ebenen Kurve, welche mittels der Koeffizienten der betrachteten Differentialgleichung bestimmt ist.

Hlavatý (Praha).

Tonolo, Angelo: Integrazione dell'equazione delle onde sferiche smorzate e forzate. Rend. Semin. mat. Univ. Padova **4**, 52—66 (1933).

Es sei $U(x, y, z, t)$ eine beliebige Lösung von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - kU = 0$$

und S ein x, y, z -Raumstück mit der Begrenzungsfläche σ . Dann wird $U(x, y, z, t)$ dargestellt durch die Werte, die U und U_t in S zur Zeit $t = 0$ annehmen und durch die Werte von U und seiner Normalableitung zur Zeit t auf der Begrenzungsfläche σ . In der üblichen Weise gehen in diese Darstellung die Besselschen Funktionen ein.

Rellich (Göttingen).

Basch, Alfred: Zur Geometrie des Laplaceschen Feldes. Anz. Akad. Wiss., Wien Nr **18**, 195—198 (1933).

Vorläufige Mitteilung. Die Niveaufächenschar eines skalaren Größensfeldes $v(r)$ ist geeignet, bei entsprechender Skalierung Niveaufächenschar eines Laplaceschen Feldes zu sein, wenn sich das Verhältnis $V^2 v: (Vv)^2$ auf einer Niveaufäche nicht ändert. Daraus ergibt sich die Differentialgleichung sämtlicher Laplacescher Niveaufächenscharen $\left(V \frac{V^2 v}{(Vv)^2}\right) \times Vv = 0$. Geometrische Deutung. Bei ebenen Laplaceschen Feldern ergeben sich drei verschiedene Kreuzungstypen bei irgend zwei Kurven der Ebene; hieraus entspringt eine Einteilung der Laplaceschen Felder in drei Arten.

L. Schrutka (Wien).

Opatowski, Isacco: Sulle linee di forza dei potenziali Newtoniani simmetrici. Atti Accad. Sci. Torino **68**, 135—146 (1933).

Bedeutung ϱ_1 und ϱ_2 thermometrische Parameter eines achsensymmetrischen Koordinatensystems, so wird das Newtonsche achsensymmetrische Potential häufig

unter der Form einer Produktreihe: $V = \sum_c X_c(\varrho_1) \cdot Y_c(\varrho_2)$ angegeben, wobei die Funktionen $X_c(\varrho_1)$ und $Y_c(\varrho_2)$ den folgenden Gleichungen genügen:

$$\frac{d^2 X_c}{d\varrho_1^2} = c\alpha^2 X_c, \quad \frac{d^2 Y_c}{d\varrho_2^2} = -c\beta^2 Y_c,$$

wo c eine willkürliche Konstante, α und β zwei von dem Koordinatensystem allein abhängige Funktionen von ϱ_1 und ϱ_2 sind. Es wird gezeigt, daß die dem Potential V zugehörigen Kraftlinien durch die Gleichung

$$\sum_c \frac{1}{c} \frac{dX_c}{d\varrho_1} \frac{dY_c}{d\varrho_2} = \text{konst.}$$

dargestellt sind. Die Konvergenz der die Kraftlinien darstellenden Reihe wird erörtert. Endlich werden einige konkrete Beispiele behandelt. *G. Cimmino (Napoli).*

Differenzgleichungen:

Kimball, B. F.: The application of Bernoulli polynomials of negative order to differencing. *Amer. J. Math.* 55, 399—416 (1933).

The author first derives a series expansion (1) for $\Delta^n f(x)$ in terms of Bernoulli polynomials of negative order $B_s^{-n}(x, w)$ [as defined by Nörlund, *Differenzenrechnung* 1924]. He then expresses $B_{2m}^{-n}(-n/2, 1)$ as a linear combination of the binomial coefficients $\binom{n}{s}$ ($s = 1, 2, \dots, m$), obtains an upper bound for this function of m and n , and hence finds the asymptotic value of $g(n) = \sum_{m=1}^{\infty} [B_{2m}^{-n}(-n/2, 1)/(n/2)^{2m}]$.

Applications are made to the convergence of series (1) in a particular case, and to the determination of the asymptotic form (as $n \rightarrow \infty$) of $\Delta_1^n f(x)$ when $f(x)$ is x^{n+q} , $x^{n-q} \log x$, and $\log x$. *C. R. Adams (Providence).*

Milne-Thomson, L. M.: The exact difference equation of the first order. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 29, 373—381 (1933).

The author determines necessary and sufficient conditions for exactness of the difference equation of first order (not necessarily linear)

$$M(x, u) + N(x, u, \Delta u) \Delta u = 0, \quad (1)$$

where $u = u(x)$ and $\Delta u = u(x+1) - u(x)$; he also gives an expression for the primitive of an exact equation (1). The question of existence of a multiplier analogous to Euler's integrating factor for a differential equation is examined, and it is shown that the result obtained includes the known fact that for a linear equation any solution of the homogeneous adjoint equation is such a multiplier. *C. R. Adams (Providence).*

Trjitzinsky, W. J.: Analytic theory of linear q -difference equations. *Acta math.* 61, 1—38 (1933).

The equation considered is essentially

$$y(q^n x) + a_1(x) y(q^{n-1} x) + \dots + a_n(x) y(x) = 0, \quad (1)$$

in which the coefficients $a_i(x)$ are analytic for $|x| < \varrho$, $a_n(x) \not\equiv 0$, and q is a constant of modulus > 1 . The author assumes that not all the $a_i(0)$ vanish (no actual restriction). Under all circumstances the existence of n linearly independent formal series solutions of (1) is known, each series involving a certain rational number μ_j ($j = 1, 2, \dots, n$). It is also known that that series or those series for which μ_j is least converge in the vicinity of $x = 0$, and that the remaining formal series may converge or diverge. The important problem of determining whether there always exists a full set of n linearly independent analytic solutions of (1), of which those associated with values of j other than that or those for which μ_j is least have some asymptotic relationship to the corresponding formal solutions, has previously been left open. The present paper gives a solution of this problem by transforming the equation (1) into a difference equation by means of the substitution $x = \exp(t \log q)$

and applying the methods, with suitable modifications, employed by Birkhoff and Trjitzinsky in their recent study of singular difference equations [Acta math. **60**, 1—89 (1933); this Zbl. **6**, 168—169]. — Several of the author's statements concerning the work of previous writers on q -difference equations are inadequate or unprecise; in particular Grévy is not mentioned and Carmichael is credited with certain results which he did not obtain but which are a consequence of the much earlier work of Grévy.

C. R. Adams (Providence).

Li, Ta: Die Ordnungszahlen linearer Differenzen-Gleichungssysteme. Acta math. **61**, 81—104 (1933).

A system of difference equations of the form

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^n f_{\nu\mu}(t) x_\mu(t) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

is here considered, where t runs over the integers $0, 1, 2, \dots$ while the coefficients $f_{\nu\mu}(t)$ and the solutions $x_\nu(t)$ may take any complex values and where the $|f_{\nu\mu}(t)|$ are bounded. Assured then are the existence and uniqueness of the solutions $x_\nu(t)$ for $t = 0, 1, \dots$ when arbitrarily preassigned initial values $x_\nu(0)$ are taken. Then γ ,

$$\gamma = \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{\nu=1}^n |x_\nu(t)| \right\}^{1/t} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{ \max_{\nu=1}^n |x_\nu(t)| \right\}^{1/t},$$

is always finite and is a measure of the order of magnitude of the integrals. When the coefficients are constants, with $f_{\nu\mu}(t) = a_{\nu\mu}$, then γ is equal to the absolute value of a root of the characteristic equation

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

This holds also in the more general case when $\lim_{t \rightarrow \infty} f_{\nu\mu}(t) = a_{\nu\mu}$. No more than n values of γ are possible; when their multiplicities are appropriately counted the number of values of γ is precisely n . The properties of these numbers γ are investigated.

R. D. Carmichael (Urbana).

Variationsrechnung:

● **Bolza, Oskar: Vorlesungen über Variationsrechnung. Umgearb. u. stark verm. dtsch. Ausg. d. „Lectures on the calculus of variations“ desselb. Verf.** Leipzig: K. F. Koehlers Antiquar. 1933. IX, 705 S. RM. 20.—.

Morse, Marston: The calculus of variations in the large. (Zürich, Sitzg. v. 5.—12. IX. 1932.) Verh. internat. Math.-Kongr. **1**, 173—188 (1932).

Während der letzten Jahre hat der Verf. eine topologische Theorie entwickelt, welche zuerst die stationären Punkte der Funktionen von mehreren Veränderlichen und nachher die Extremalen der Variationsaufgaben behandelte. Die Hauptfragen waren dabei: 1. Klassifikation der stationären Punkte einer Funktion von mehreren Veränderlichen bzw. der Extremalen einer Variationsaufgabe (Einführung der sog. „typischen Zahlen“) und 2. die Aufstellung der Beziehungen zwischen den topologischen Eigenschaften des Definitionsbereichs einer Funktion bzw. Funktionals und den typischen Zahlen der zugehörigen stationären Punkte (Extremalen). Bei den Variationsaufgaben sind die Verhältnisse wesentlich komplizierter als im Fall der Funktionen endlich vieler Variablen. Die Hauptergebnisse weisen aber eine weitgehende Analogie auf. — Im vorliegenden Bericht behandelt der Verf. denjenigen Teil seiner Untersuchungen, der sich mit dem komplizierteren Fall der Variationsaufgaben befaßt. Es werden nacheinander: 1. die Definitionsgebiete eines Funktionals topologisch charakterisiert; 2. die typischen Zahlen der kritischen Extremalmengen definiert; 3. die Beziehungen zwischen den typischen Zahlen der kritischen Extremalmengen und der topologischen Charakterisierung des Definitionsbereichs, die für den Fall von Funk-

tionen endlich vieler Variablen schon früher vom Verf. hergeleitet waren, auf den Fall von Variationsaufgaben verallgemeinert. — Es sei noch bemerkt, daß der Verf. diejenigen Charakteristiken der Variationsaufgaben betrachtet, die mit der Bettischen Gruppe des zugehörigen Definitionsbereichs im Zusammenhang stehen. *Schnirelmann*.

Irrgang, Robert: Ein singuläres bewegungsinvariantes Variationsproblem. *Math. Z.* 37, 381—401 (1933).

Let κ and τ denote curvature and torsion respectively of a curve as functions of the arc-length. The author investigates the variation problem $\int_{s_0}^s f(\kappa, \tau) ds = \text{extremum}$ (the special case when f is independent of τ was completely discussed by Radon). Introduce the coordinates x, y, z of the curve and the components $t_1, t_2, t_3, m_1, m_2, m_3, b_1, b_2, b_3$ of the unit tangent, principal normal and binormal vectors as auxiliary functions. Write the equations $x' = t_1, y' = t_2, z' = t_3$ and the nine equations comprised in the Frenet formulas. Then the proposed variation problem appears as a problem of Lagrange, involving fourteen functions related by twelve differential equations. The author develops the equations of Lagrange, the condition of Jacobi and the condition of Weierstrass in a compact and elegant form. He finds that the extremals depend only upon ten parameters instead of the expected twelve. In the last part of the paper, several interesting and instructive examples are discussed, including the case $f = (\pi^2 \tau)^{1/6}$ in which the integral $\int f(\kappa, \tau) ds$ is equal to the affine length.

Tibor Radó (Columbus, Ohio).

Young, L. C.: On approximation by polygons in the calculus of variations. *Proc. Roy. Soc. London A* 141, 325—341 (1933).

The method developed in this paper depends upon a generalization of the notion of a curve and upon a corresponding generalization of curvilinear integration. The author gives a discussion of these notions both on account of their own interest and also with regard to applications in Calculus of variations. The results include certain theorems, in a very general form, concerned with the semi-continuity of the integrals of one-dimensional variation problems.

Tibor Radó (Columbus, Ohio).

Graves, Lawrence M.: A transformation of the problem of Lagrange in the calculus of variations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 35, 675—682 (1933).

Le problème transformé s'énonce ainsi: Rendre minimum l'intégrale

$$I = \int_{x_1}^{x_2} g[s, y_1(s), \dots, y_n(s), z_1(s), \dots, z_r(s)] ds$$

dans l'ensemble des courbes

$$y_i = y_i(x), \quad z_r = z_r(x), \quad (i = 1, 2, \dots, n; r = 1, 2, \dots, r)$$

telles que

$$y_i(x) = y_{i1} + \int_{x_1}^x \psi_i(x, s, y_1(s), \dots, y_n(s), z_1(s), \dots, z_r(s)) ds,$$

$$y_j(x_2) = y_{j2}; \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, p \leq n)$$

les fonctions g, ψ_i et les valeurs x_1, x_2, y_{i1}, y_{i2} étant données. L'auteur établit une règle analogue à celle des multiplicateurs de Lagrange et une condition analogue à celle de Weierstrass, puis retourne, par la transformation inverse, au problème de Lagrange ordinaire.

Adolphe Szücs (Budapest).

Funktionentheorie:

Estermann, Theodor: Über die totale Variation einer stetigen Funktion und den Cauchy'schen Integralsatz. *Math. Z.* 37, 556—560 (1933).

Il s'agit une fois de plus du théorème de Cauchy pour un contour rectifiable et une fonction régulière à l'intérieur de ce contour et continue sur le contour. Des démonstrations ont été données par E. Kamke (ce Zbl. 4, 247) et dans un cas particulier

par A. Denjoy (ce Zbl. 6, 62). La démonstration actuelle offre ceci d'intéressant qu'elle est le complément naturel de celle donnée par M. E. Goursat dans le cas où le contour satisfait à des conditions légèrement plus restrictives. La partie essentielle de la démonstration est un lemme qui établit l'existence d'un quadrillage de côté arbitrairement petit, chacune des droites de ce quadrillage ne coupant le contour qu'en un nombre fini de points. *E. Blanc (Poitiers).*

Kok, F. de: Sur quelques propriétés d'une fonction à partie réelle positive. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 476—478 (1933).

Wenn $f(x + iy)$ für $x > 0$ regulär ist und einen positiven reellen Teil hat, so gilt

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z - ti} + \frac{1}{1 + ti} \right) d\varphi(t) + \lambda z + \mu,$$

wo φ eine monotone Funktion von t ist. Es wird gezeigt: I. In jedem Punkt der imaginären Achse existiert für $z \rightarrow \alpha i$, $|\arg(z - \alpha i)| \leq k < \frac{\pi}{2}$ der Grenzwert

$$\lim (z - \alpha i) f(z) = \mu,$$

und zwar ist $\mu =$ oder > 0 , je nachdem α eine Stetigkeits- oder Unstetigkeitsstelle von $\varphi(t)$ ist. — Dieser Satz folgt übrigens aus einem älteren, entsprechenden Satz über Funktionen mit positivem reellen Teil im Einheitskreise (C. R. Acad. Sci., Paris 188, 1027—1029). — II. In jedem Randpunkt, wo $\varphi'(t)$ endlich ist, was für fast alle t zutrifft, ist $f(z) = O\left(\log \frac{1}{x}\right)$. *R. Nevanlinna (Helsinki).*

Strohhäcker, Erich: Beitrag zur Theorie der schlichten Funktionen. Math. Z. 37, 356—380 (1933).

Es sei $f(z) = z + \dots$ regulär im Kreise $|z| < 1$ und bilde diesen schlicht auf ein konvexes Gebiet ab. Im ersten Teil der Arbeit werden die Ungleichungen

$$\Re \frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}, \quad \Re z \frac{f'(z)}{f(z)} > \frac{1}{2} \quad (|z| < 1)$$

bewiesen, ferner der Ort von $f'(z_0)$ für die genannte Klasse bestimmt, $|z_0| < 1$. Diese Resultate sind, wie der Verf. angibt, von A. Marx schon früher (vgl. dies. Zbl. 5, 109) auf andere Weise bewiesen worden. Im zweiten Teil wird ein Satz des Ref. über beliebige schlichte Abbildungen für die oben definierten konvexen wie folgt verschärft: Zwei Randpunkte, welche auf derselben den Nullpunkt enthaltenden Geraden liegen, können zu 0 nicht beide näher als $\pi/4$ liegen. *Szegő (Königsberg, Pr.).*

Ozaki, Shigeo: Remarks on some coefficients of a Schlicht function. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A 1, 283—287 (1933).

In einer Arbeit des Ref. [Math. Ann. 100, 192 (1928)] ist eine elementare, auf dem Bieberbachschen Flächensatz beruhende Abschätzungsmethode der Koeffizienten einer schlichten Potenzreihe $z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$, $|z| < 1$, benutzt worden, die von Grandjot herrührt. Verf. beweist in der vorliegenden Arbeit mittels dieser Methode:

$$|a_3| < 3\frac{1}{3}, \quad |a_4| < 4,546 \dots, \quad |a_5| < 6,701 \dots$$

Die erste Ungleichung ist auch von K. König (vgl. dies. Zbl. 1, 214) auf elementarem Wege bewiesen worden. Sie ist freilich schlechter als die (beste) Löwnersche Abschätzung $|a_3| \leq 3$. *Szegő (Königsberg, Pr.).*

Grötzsch, Herbert: Die Werte des Doppelverhältnisses bei schlichter konformer Abbildung. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 14/15, 501—515 (1933).

Der schlichte Bereich B der z -Ebene, in dem vier Punkte z_1, z_2, z_3, z_4 ausgezeichnet seien, werde allen möglichen schlichten Abbildungen $w = f(z)$ unterworfen. Gefragt wird nach dem genauen Wertebereich des Doppelverhältnisses

$$\lambda = (f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)).$$

Antwort: Unter den Werten $\omega(\lambda)$, die durch Einsetzen von λ in die elliptische Modulfunktion entstehen, kann jedesmal einer derart ausgezeichnet werden, daß stetige

Abhängigkeit von $f(z)$ zustande kommt. Diese Werte erfüllen dann eine abgeschlossene Kreisscheibe, die nur bei den starren Bereichen zu einem Punkt ausartet. Der Beweis stützt sich im wesentlichen auf die vom Verf. ausgebildete Flächenstreifenmethode. *K. Löwner (Prag).*

Sugawara, Masao: On the so-called Kronecker's dream in youngdays. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 15, 99—107 (1933).

Verf. untersucht zunächst die Teilungsgleichung der $\wp$ -Funktion, d. h. das Polynom

$$\prod_{\substack{a_1, a_2 \bmod m \\ (a_1, a_2, m) = 1}}^* \left(x - \wp \left(\frac{a_1 w_1 + a_2 w_2}{m}; w_1, w_2 \right) \right),$$

wo $m > 1$ eine natürliche Zahl ist und $\prod^*$ bedeutet, daß von zwei Paaren a_1, a_2 und $-a_1, -a_2 \bmod m$ nur ein Exemplar auftritt. Der zweithöchste Koeffizient dieses Polynoms ist Null, während der dritte und vierte die Gestalt $a g_2(w_1, w_2)$ bzw. $b g_3(w_1, w_2)$ mit konstanten a und b hat. Durch Heranziehung der Heckschen Fourierentwicklung der $\wp$ -Teilwerte gelingt es zu zeigen, daß a und b negative rationale Zahlen sind (vgl. auch Fricke, Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen, II, Teubner 1922, S. 247); beim Beweise werden nur die konstanten Glieder der Fourierentwicklung benutzt. Hieraus folgt durch Übergang zur Weberschen τ -Funktion, daß die Teilwerte $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ dieser Funktion die absolute Invariante $j(w_1, w_2)$ rational mit rationalen Koeffizienten darstellen. — Es sei nun Ω ein imaginär-quadratischer Zahlkörper, der von den Körpern $R(\sqrt{-1})$ und $R(\sqrt{-3})$ verschieden ist. Dann sind die singulären Werte der $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ die Strahlklasseninvarianten aller und nur der ganzen Ideale $\mathfrak{m}$ aus Ω , deren kleinstes positives ganzrationales Vielfaches m ist (Hasse, Neue Begründung der komplexen Multiplikation, J. reine angew. Math. 157, 115). Bezeichnet K_1^* eine Strahlklasse mod m , K die gegebene absolute Idealklasse, so folgt nunmehr aus dem Verschiebungssatz der Klassenkörpertheorie (vgl. etwa die Ausarbeitung der Vorlesung von H. Hasse über Klassenkörpertheorie, § 11):

$$\Omega(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \Omega(j(K), \tau(K_1^*))$$

und ferner die Tatsache, daß jeder Strahlklassenkörper mod eines der oben genannten $\mathfrak{m}$ Unterkörper dieses Körpers $\Omega(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ ist. Man erhält also sämtliche relativ Abelschen Oberkörper von Ω in den Teilkörpern der Körper, die aus Ω durch Adjunktion der sämtlichen Strahlklasseninvarianten mod m entstehen, wenn m alle natürlichen Zahlen durchläuft. Die weitergehende Behauptung des Verf., daß man zum gleichen Zwecke mit nur einer einzigen geeignet gewählten Strahlklasseninvariante auskommt, ist ungenügend und teilweise fehlerhaft begründet; es hat den Anschein, daß sich auf dem vom Verf. eingeschlagenen Wege ein strenger Beweis dieser Tatsache nicht ohne weiteres erbringen läßt. *Petersson (Hamburg).*

Bieberbach, Ludwig: Beispiel zweier ganzer Funktionen zweier komplexer Variablen, welche eine schlichte volumtreue Abbildung des R_4 auf einen Teil seiner selbst vermitteln. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 14/15, 476—479 (1933).

Fatou a indiqué l'existence des couples de fonctions méromorphes (et même entières) de deux variables complexes qui ne s'approchent pas aussi près que l'on veut de tout couple de valeurs [voir C. R. Acad. Sci., Paris 175, 862—865 et 1030—1033 (1922)]. — L'auteur indique des couples de fonctions entières independantes qui donnent une représentation univalente (conservant, d'ailleurs, le volume) et ne s'approchant pas arbitrairement de tout couple de valeurs. — D'ailleurs déjà les couples de Fatou sont tels qu'une certaine univalence est observée. L'auteur démontre en effet, que tout couple de Fatou est tel, qu'il n'existe certainement pas deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) (de R_4) dont les voisinages soient représentés sur le voisinage du même point (ξ, η) . — Pour avoir son exemple l'auteur s'arrange de sorte que les fonctions du couple soient entières, et que leur Jacobien ne s'annule pas. *Mandelbrojt.*

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

● Kolmogoroff, A.: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Erg. d. Math. u. ihrer Grenzgeb. Hrsg. v. d. Schriftleitung d. Zbl. f. Math. Bd. 2, H. 3.) Berlin: Julius Springer 1933. IV, 62 S. RM. 7.50.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung wird in größter Allgemeinheit lückenlos axiomatisch aufgebaut und erstmalig ganz systematisch und sehr naturgemäß in die abstrakte Maßtheorie eingeordnet. Das Axiomensystem ist wohl das denkbar einfachste. Zugrunde gelegt wird eine Menge E der „elementaren Ereignisse“, während die „zufälligen Ereignisse“ natürlich Teilmengen von E sind. Axiomatisiert wird der Begriff des zufälligen Ereignisses und seiner Wahrscheinlichkeit: E ist vorgegeben; ein System $\mathfrak{F}$ von Teilmengen von E (die Elemente von $\mathfrak{F}$ sind die zufälligen Ereignisse) heißt Wahrscheinlichkeitsfeld, wenn folgende Axiome erfüllt sind: I. $\mathfrak{F}$ ist ein Mengenkörper. II. $\mathfrak{F}$ enthält E . III. Jeder Menge A aus $\mathfrak{F}$ ist eine nichtnegative reelle Zahl $P(A)$ — die Wahrscheinlichkeit — zugeordnet. IV. $P(E) = 1$. V. Wenn A und B fremd sind („unvereinbare Ereignisse“), so gilt $P(A) + P(B) = P(A + B)$. VI. Für eine monoton abnehmende Folge $\{A_n\}$ von Mengen aus $\mathfrak{F}$ mit leerem Durchschnitt gilt $\lim(A_n) = 0$. Die Wahrscheinlichkeit ist also eine additive Mengenfunktion auf einem Mengenkörper. Wie die zahlenmäßige Zuordnung der Wahrscheinlichkeiten geschieht, ist nicht Angelegenheit der Axiomatik. Das Axiom VI folgt für endliche Wahrscheinlichkeitsfelder aus den übrigen; da in der Praxis immer nur endliche Felder vorliegen, kann es zu keiner Kollision mit der Beobachtung „zufälliger Prozesse“ führen. Darüber hinaus ist dieses Axiom allerdings nicht zwingend, wenn auch mehr als plausibel. Seine große Bedeutung liegt darin, daß es gestattet, den Bereich $\mathfrak{F}$ der mit Wahrscheinlichkeiten bewerteten Mengen wesentlich zu erweitern. Auf dem kleinsten Borelschen Mengenkörper über $\mathfrak{F}$ gibt es nämlich genau eine den Axiomen I—VI genügende Mengenfunktion, die für die Mengen von $\mathfrak{F}$ mit der gegebenen Funktion $P(A)$ übereinstimmt, und man kann somit gleich diesen Borelschen Körper der Betrachtung zugrunde legen. Mathematisch kommt also das Axiomensystem auf die Theorie der absolut additiven Mengenfunktionen, d. h. auf die abstrakte Maßtheorie hinaus, und die Eigenart der Wahrscheinlichkeitsrechnung innerhalb dieser Theorie ergibt sich dann durch weitere Spezialisierungen (etwa durch Einführung der Unabhängigkeit). Die Abrundung und Einfachheit der Theorie ist somit wesentlich dem Axiom VI zu verdanken. (Verf. legt der Betrachtung die Borelsche Maßtheorie zugrunde; es sei dazu bemerkt, daß man ebenso auch die Lebesguesche Theorie benutzen kann, wenn man noch definiert, daß jede Teilmenge einer Menge mit der Wahrscheinlichkeit Null ebenfalls die Wahrscheinlichkeit Null besitzt.) — Das erste Kapitel bringt die Theorie der endlichen Felder: bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit, Satz von Bayes. Das zweite Kapitel ist dem Axiom VI gewidmet. Das dritte bringt in größter Allgemeinheit die „zufälligen Größen“ — es sind das die in bezug auf $P(A)$ meßbaren Funktionen. Bemerkenswert ist hier die große Allgemeinheit: es werden Wahrscheinlichkeiten auch in unendlich dimensionalen Räumen beliebiger Mächtigkeit behandelt. Das vierte Kapitel behandelt die mathematischen Erwartungen als abstrakte Lebesguesche Integrale und die Tschebyscheffsche Ungleichung, das fünfte die bedingten Wahrscheinlichkeiten und Erwartungen. Im letzten Kapitel wird der Begriff der Unabhängigkeit entwickelt, und als Anwendung das Gesetz der großen Zahlen. Als Anhang ein Satz über Fälle, in denen die Wahrscheinlichkeiten nur Null oder Eins sein können, wobei das Beispiel der Konvergenz einer Reihe unabhängiger zufälliger Größen ein Spezialfall ist. — Die Darstellung ist sehr präzise, aber etwas knapp, und wendet sich an Leser, denen die Materie nicht fremd ist. Die Maßtheorie wird vorausgesetzt.

Willy Feller (Kiel).

● Khintchine, A.: Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Erg. d. Math. u. ihrer Grenzgeb. Hrsg. v. d. Schriftleitung d. Zbl. f. Math. Bd. 2, H. 4.) Berlin: Julius Springer 1933. IV, 77 S. RM. 9.60.

Die asymptotische Wahrscheinlichkeitsrechnung besteht — wie in der Vorrede des Büchleins ausgeführt wird — aus einer Reihe von ziemlich isoliert dastehenden Sätzen, die durch keinen allgemeinen Standpunkt verbunden sind. Erst in neueren Arbeiten wurden vielversprechende Ansätze zur Vereinheitlichung gewonnen, die aber noch längst nicht das Ganze umfassen. So schien es wenig bedeutungsvoll, in enzyklopädischer Vollständigkeit die einzelnen Grenzwertsätze aufzureihen, und Verf. stellte sich daher die Aufgabe, nur diejenigen Teile des Gesamtgebietes darzustellen, bei denen eine innere Einheitlichkeit erkennbar ist und die einigermaßen die Hoffnung rechtfertigen, daß sie dem ganzen Gebiete das Gepräge geben werden. Demnach wurden nicht nur einige wichtige Sätze geopfert, sondern Verf. verzichtete auch auf die größte mögliche Allgemeinheit, um den eigentlichen Gedankengang nicht durch zuviel Rechnungen zu verdunkeln. Dieser Verzicht trägt viel zur Abrundung und Lesbarkeit des Werkes bei, und die Einheitlichkeit auch der Methoden bei den verschiedenen behandelten Gegenständen ist überraschend groß. Allgemein ist noch zu erwähnen, daß die Darstellung (auch der bereits „klassischen“ Sätze) vielfach neu ist und außer auf den Verf. vor allem auf Kolmogoroff und eine noch nicht erschienene Arbeit von Petrowsky zurückgeht. Das

Buch ist übrigens nicht als eine erste Einführung in das Gebiet gedacht. — Im ersten Kapitel wird der Laplace-Ljapounoffsche Grenzwertsatz entwickelt und seine zentrale Bedeutung hervorgehoben. Die Beweismethode enthält bereits den Grundgedanken der späteren Beweise. Die Formulierung der Bedingungen ist der Lindebergschen verwandt. Bezeichnet $\Phi(x)$ die Gauss-Laplacesche Funktion, so genügt $\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{z}}\right)$ der Gleichung $2\Phi_z = \Phi_{xx}$. Für diese Gleichung wird eine obere (bzw. untere) Funktion nach Perron eingeführt: $V(x, z) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{z}}\right) + \varepsilon$.

Die Verteilungsfunktion für die Summe der k ersten zufälligen Veränderlichen genügt einer rekursorischen Gleichung, während $V(x, z + b_k)$ (b_k die zweiten Momente) der entsprechenden Ungleichung genügt. Auf diese Weise ergibt sich durch Rekursion die gesuchte Abschätzung für die Verteilungsfunktion. Dieser Beweis funktioniert auch in mehr Dimensionen. Der Laplacesche Satz wird nun als Lösung des einfachsten linearen Diffusionsprozesses mit schrittweiser Änderung aufgefaßt. Es liegt dann nahe, den Änderungsprozeß als stetig voranzusetzen: man hat damit den einfachsten stochastischen Prozeß, und die Wahrscheinlichkeitsverteilung wird wieder durch das Laplacesche Gesetz geregelt, das nunmehr ein eigentliches Verteilungsgesetz ist und nicht mehr nur eine Grenzfunktion von solchen. — Im zweiten Kapitel wird der Poissonsche Grenzwertsatz und seine Verallgemeinerung bewiesen und der Zusammenhang mit dem allgemeinen unstetigen stochastischen Prozeß erörtert. Der Kolmogoroffsche Satz über die allgemeine Form des homogenen stochastischen Prozesses (dies. Zbl. 4, 408) wird nicht ausgeführt. Das dritte Kapitel ist den Diffusions- oder Irrfahrtproblemen in größter Allgemeinheit gewidmet. Die Verteilungsfunktion nähert sich der Lösung einer Randwertaufgabe einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, und die Methode ist eine Verallgemeinerung der im ersten Kapitel angewandten, wie ja der ganze Problemkreis eine Verallgemeinerung des dort behandelten ist. (Der von Petrowsky herrührende Hauptsatz dieses Kapitels ist in dieser Allgemeinheit neu.) Im vierten Kapitel wird das Problem noch weiter verallgemeinert, indem vorausgesetzt wird, daß die (zweidimensionale) Irrfahrt in bezug auf eine Koordinate immer in einer bestimmten Richtung vor sich geht. Dieses Problem bedarf einer neuen Behandlung, weil sich der Typus der erwähnten Differentialgleichung ändert. Ähnlich wird eine Verallgemeinerung des Laplace-Ljapounoffschen Satzes (dies. Zbl. 3, 357, Kolmogoroff) behandelt. Im letzten Kapitel wird der Satz vom iterierten Logarithmus behandelt, sowie die entsprechende Abschätzung für den stetigen stochastischen Prozeß. *Willy Feller*.

Dörge, Karl: Eine Axiomatisierung der von Misesschen Wahrscheinlichkeitstheorie.

Jber. Deutsch. Math.-Verein. 43, 39–47 (1933).

Abdruck eines Vortrages, der die Grundgedanken der in der Math. Z. 32 veröffentlichten Axiomatisierung der v. Misesschen Wahrscheinlichkeitsrechnung durch den Verf. zusammenstellt und mit einer kurzen Stellungnahme zur Theorie von E. Tornier schließt. *R. Iglisch* (Aachen).

Wintner, Aurel: On the stable distribution laws. Amer. J. Math. 55, 335–339 (1933).

Eine vom Parameter p abhängende Klasse von Verteilungsfunktionen $\sigma(x/p)$ wird stabil genannt, wenn die Summe von zwei gegenseitig unabhängigen zufälligen Variablen, deren jede einem Verteilungsgesetz der gegebenen Klasse unterliegt, dieselbe Eigenschaft besitzt. Es wird bewiesen, daß nur zwei in diesem Sinne stabile Klassen mit endlichen Streuungen existieren, nämlich erstens die Gaußschen Verteilungen und zweitens die triviale Verteilung $\sigma(x) = 0, \frac{1}{2}, 1$ für $x <, =, > 0$, die für sich allein eine Klasse bildet und die Verf. als Diracsche Verteilung bezeichnet. Das Neue ist dabei, daß a priori keinerlei Stetigkeitsvoraussetzungen gemacht werden. Zum Schluß wird gezeigt, daß die Gleichverteilung im Intervall $(0, 1)$ als Limes einer modulo 1 reduzierten Gaußschen Verteilung aufgefaßt werden kann, unter der Annahme, daß die Streuung unendlich groß wird. *A. Khintchine* (Moskau).

Pankraz, Otomar: Zur Grundgleichung für den zeitlichen Zerfall der statistischen Kollektivs. Aktuár. Vědy 4, 32–59 (1933).

Sei eine Gesamtheit (Kollektiv) von Individuen zu untersuchen, deren jedes durch n Merkmale charakterisiert ist, von denen es zu jeder Zeit t ein einziges verlieren (=Ausscheiden aus der Gesamtheit) bzw. wiedergewinnen (=Wiedereintritt in die Gesamtheit) kann. Es sei $l(t, \tau)$ ($0 \leq \tau \leq t \leq 1$) die Anzahl derjenigen Individuen, die im Augenblick t zu der Gesamtheit gehören und außerdem bis zur Zeit t insgesamt eine Zeitspanne τ der Gesamtheit angehört haben. $l(0, 0) = l_0(0) = \text{Anfangszahl der In-}$

dividuen in der Gesamtheit. Es sei $\eta_i(t, \tau)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Individuum, das insgesamt die Zeit τ in der Gesamtheit verbracht hatte, zur Zeit t infolge Verlusts des Merkmals i ausscheidet. $\varrho_i(t, \xi)$ sei die Wahrscheinlichkeit, daß ein Individuum, das zum letzten Male zur Zeit $\xi < t$ durch Verlust des Merkmals i ausgeschieden ist, dieses Merkmal i zur Zeit t wiedererwirbt. $p_i(t, \zeta)$ sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Individuum, das zur Zeit $\zeta < t$ das Merkmal i verloren hat, bis zur Zeit t hin ununterbrochen ohne dieses Merkmal ist. — Eine Gesamtheit heißt abgeschlossen, wenn als Individuen nur solche betrachtet werden, die zur Zeit $t = 0$ der Gesamtheit angehörten [$l(t, 0) \equiv 0$ für $0 < t \leq 1$]; sonst heißt die Gesamtheit offen. Hängt $l(t, \tau)$ von der Variablen τ nicht ab, so heißt das Kollektiv eindimensional, sonst zweidimensional. Für das eindimensionale Problem bei abgeschlossenen Kollektivs wird für die Anzahl $l(t)$ die Schoenbaumsche Integrodifferentialgleichung abgeleitet:

$$\frac{dl(t)}{dt} = -l(t) \cdot \sum_1^n \eta_i(t) + \int_0^t \sum_1^n p_i(t, \zeta) \varrho_i(t, \zeta) \eta_i(\zeta) l(\zeta) d\zeta.$$

An deren Stelle tritt im allgemeinen Fall des offenen zweidimensionalen Kollektivs die partielle Integrodifferentialgleichung:

$$\frac{dl(t, \tau)}{dt} + \frac{\partial l(t, \tau)}{\partial \tau} = -l(t, \tau) \cdot \sum_1^n \eta_i(t, \tau) + \int_\tau^t \sum_1^n \eta_i(t, \tau) p_i(t, \zeta) \varrho_i(t, \zeta) l(\zeta, \tau) d\zeta.$$

Letztere Gleichung wird in zwei Weisen durch sukzessive Approximation gelöst mit der Anfangsbedingung: $l(t, 0) = l_0(t)$. Die auftretenden Funktionen werden dabei im wesentlichen als glatt vorausgesetzt. Ob die erhaltenen Lösungen identisch oder überhaupt die einzigen sind, wird nicht untersucht. *R. Iglisch* (Aachen).

Mises, R. v.: Über Zahlenfolgen, die ein kollektiv-ähnliches Verhalten zeigen. *Math. Ann.* 108, 757—772 (1933).

In verblüffend einfacher und einheitlicher Weise gewinnt Verf. eine Reihe von Beispielen für Zahlenfolgen, die entweder keine oder eine in bestimmter Weise beschränkte Regellosigkeit (im Sinne der bekannten Theorie des Verf.) aufweisen. Ausgangspunkt ist der einfache Hilfssatz: Besitzt in einer Folge F das Zeichen A an den Stellen $n = n_1, n_2, n_3, \dots$ die relativen Häufigkeiten $p_1, p_2, p_3, \dots$ und gilt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} p_\nu = p, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{n_\nu - n_{\nu-1}}{n_{\nu-1}} = 0, \quad n_\nu \rightarrow \infty,$$

so besitzt A die Grenzhäufigkeit p . — Es werden Folgen mit vorgegebenen arithmetischen und geometrischen (auch mehrdimensionalen) Verteilungen angegeben sowie Folgen, die die Stellung des Bernoullischen Gesetzes beleuchten, z. B. Zahlenfolgen, bei denen trotz Existenz der Grenzwerte der relativen Häufigkeiten das B. G. nicht gilt, und solche Folgen, die genau das vom B. G. geforderte Verhalten zeigen. *Iglisch*.

Cantelli, F. P.: Considerazioni sulla legge uniforme dei grandi numeri e sulla generalizzazione di un fondamentale teorema del sig. Paul Lévy. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 4, 327—350 (1933).

Es sei $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ eine Folge aleatorischer, unabhängiger Größen mit den Erwartungswerten $E(X_i) = 0$; ferner sei: $Y_n = X_1 + \dots + X_n$ und $A_i = E(Y_i^2)$. Der Verf. beweist, daß unter gewissen Bedingungen die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens für unendlich viele i der Ungleichung

$$|Y_i| > \sqrt{2A_i} \sqrt{\log \log A_i} + c \log \log \log A_i$$

den Wert 0 bzw. 1 habe, falls $c > 3/2$ bzw. $c \leq 1/2$ ist. — Es handelt sich also um eine Erweiterung des von P. Lévy [Bull. Sci. math. (2) 55 (1931); dies Zbl. 2, 43] für den Bernoullischen Fall bewiesenen Theorems analog der von Kolmogoroff gegebenen Erweiterung hinsichtlich des Theorems von Khintchine, welches in dem Theorem von Lévy eine Verschärfung (durch das Hinzufügen des Gliedes $\log \log \log$) gefunden hat. — Der Beweis gelingt dem Verf., indem er durch eine genaue Analyse zeigt, daß die von P. Lévy verwendeten 5 Hilfssätze auch unter allgemeineren Voraussetzungen

gültig sind; insbesondere ist die Erweiterung des Hilfssatzes IV durch Heranziehung eines Ergebnisses von Liapounoff bemerkenswert. *Bruno de Finetti* (Trieste).

Cámara, S.: Stochastische Beziehungen zwischen zufälligen Eigenschaften. *Rev. mat. hisp.-amer.*, II. s. 8, 58–77 (1933) [Spanisch].

Mit Benützung der in der englischen Statistik üblichen Bezeichnung für die Maße der statistischen Massen wird die Wahrscheinlichkeit einer durch die Eigenschaft b gekennzeichneten Teilmasse p_b definiert; für die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit zweier Eigenschaften b, d wird die Bezeichnung p_{bd} herangezogen. Für die Wahrscheinlichkeit des Auftretens mindestens eines Merkmales von zweien $p_{(b+d)}$ gilt das „Theorem der totalen Wahrscheinlichkeiten“: $p_{(b+d)} = p_b + p_d - p_{bd}$. — Als „gebundene Wahrscheinlichkeit“ p_b^d einer Eigenschaft b an eine andere d wird die Wahrscheinlichkeit verstanden, daß ein Element von der Eigenschaft d auch die Eigenschaft b besitze. Als „Theorem der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit“ wird der Satz

$$p_{bd} = p_b p_b^d = p_d \cdot p_d^b$$

bezeichnet. Das Verhältnis der stochastischen Abhängigkeit k wird durch

$$k = \frac{p_{bd}}{p_b p_d} = \frac{p_b^d}{p_d} = \frac{p_d^b}{p_b}$$

definiert. Unabhängige Eigenschaften sind durch $k = 1$ charakterisiert. Unverträgliche Eigenschaften kennzeichnet $k = 0$. Stochastische Attraktion besteht im Falle $k > 1$, stochastische Repulsion im Falle $k < 1$. Die Untersuchung der Veränderung von k bei ungeändertem Umfang der Gesamtmasse und ungeändertem (b) und (a), aber veränderlichem (b, d) führt zur Einführung der Begriffe „teilweise stramme Beziehung“ von d auf b , „vollständige stramme Beziehung“ der Eigenschaften b und d . Im Anschluß an diese Ausführungen werden noch andere Maße des stochastischen Zusammenhanges in Vorschlag gebracht und theoretisch, sowie an konkreten Beispielen, untersucht. *F. Knoll* (Wien).

Kolmogoroff, A., und M. Leontowitsch: Zur Berechnung der mittleren Brownschen Fläche. *Physik. Z. Sowjetunion* 4, 1–13 (1933).

Das Ziel der Abhandlung ist, die erwartungsmäßige Größe F der Fläche zu berechnen, welche die Projektion eines kugelförmigen in Brownscher Bewegung begriffenen Teilchens auf eine Ebene während einer gegebenen Zeitstrecke t beschreibt, wobei die etwaigen mehrmals beschriebenen Flächenteile nur einmal gezählt werden sollen. Man sieht leicht ein, daß der gesuchte Erwartungswert sich in der Form $E(F) = \iint W(x, y; t) dx dy$ darstellen läßt, wo $W(x, y; t)$ die Wahrscheinlichkeit dafür bedeutet, daß die obenerwähnte Projektion, deren Mittelpunkt sich zur Zeit $t = 0$ in $(0, 0)$ befindet, im Laufe der Zeitstrecke t mindestens einmal den Punkt (x, y) bedeckt (der Halbmesser des Teilchens wird dabei zur Längeneinheit gewählt). Es wird gezeigt, daß $W(x, y; t)$ einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt, welche in Polarkoordinaten die Form

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r}$$

mit den Randbedingungen $W(1, t) = 1$, $W(\infty, t) = 0$, $W(r, 0) = 0$ für $r > 1$ annimmt, wenn die Zeiteinheit so gewählt wird, daß der Diffusionskoeffizient den Wert 1 erhält. Für $E(F)$ finden die Verff. auf Grund dieser Randwertaufgabe einen Integralausdruck mittels Hankelscher Funktionen, dessen asymptotische Abschätzung für große t

$$E(F) \sim \frac{4\pi t}{\ln \frac{\pi t}{\gamma^2}}, \quad \gamma = e^C, \quad C = \text{Eulersche Konstante}$$

ergibt. Es werden auch genauere Näherungsformeln für $E(F)$ angegeben.

Zwei sinnstörende Druckfehler mögen noch berichtet werden: auf S. 3 Formel (13) ist $[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^{3/2}$ statt $[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]$ zu lesen; auf S. 3, Zeile 2 von unten muß $\frac{P(x, y; t + \tau) - P(x, y; t)}{\tau}$ statt $\frac{P(x, y; t + \tau)}{\tau}$ stehen. *A. Khintchine* (Moskau).

Okaya, Tokiharu: Sur les fonctions complémentaires des fonctions caractéristiques de l'intégrale de probabilité et la distribution de la température dans un corps homogène. Jap. J. Physics 8, 115—149 (1933).

Betrachtungen über Funktionen, die analog den in der vorhergegangenen Studie des Verf. „Sur des applications des fonctions caractéristiques de l'intégrale de probabilité“ [Ibid. 8, 59—83 (1933); dies. Zbl. 6, 264] untersuchten konstruiert sind; Anwendung derselben auf das im Titel bezeichnete Problem. *Bruno de Finetti*.

Khintchine, A.: Über die mittlere Dauer des Stillstandes von Maschinen. Rec. math. Moscou 40, Nr 2, 119—122 (1933) [Russisch].

In der vorliegenden Arbeit wird folgende Frage gelöst. — Eine bestimmte Anzahl von Maschinen wird der Beobachtung eines Arbeiters anvertraut. Jede Maschine kommt von Zeit zu Zeit zum Stillstande und muß mehr oder weniger remontiert werden. Die Momente der Stillstände sind zufallsmäßig in der Zeit verteilt, und die Dauer der Reparatur kann verschieden ausfallen. Gesucht wird die mittlere Wartezeit, d. h. die mittlere Größe der Zeitdauer von dem Moment des Stillstandes an bis zum Beginn der Reparatur. *Autoreferat*.

O'Toole, A. L.: A method of determining the constants in the bimodal fourth degree exponential function. Ann. math. Statist. 4, 79—93 (1933).

The frequency function in question is at once reduced to the form

$$y = k e^{-a^2(x^2 + px^2 + qx)}. \quad a \neq 0$$

Then three special types are considered: In Type I, $p = q = 0$, in Type II, $q = 0$, $p = -2b$, $b > 0$; in Type III, $p = 0$. The general case is called Type IV. — In a present paper the author develops a practical method of determining the numerical values of parameters for Type IV. The solution involves moment coefficients of order as high as 8. The numerical value of the integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2(x^2 + px^2 + qx)} dx$$

has to be found by mechanical quadrature. The author applied the method to an actual bimodal distribution. *H. L. Rietz*.

Steffensen, J. F.: On the definition of the central factorial. J. Inst. Actuar. 64, 165—168 (1933).

In der Abhandlung von Aitken (Proc. Roy. Soc. Edinburgh 53, 54; dies. Zbl. 6, 215) wird die Bezeichnung „mean central factorial“ vorgeschlagen anstatt die Steffensensche „central factorial“. Verf. entwickelt hier, wie die ganze Natur der Interpolationsrechnung nach seiner Ansicht die von ihm gewählte Bezeichnung notwendig macht. *Burrau* (Kopenhagen).

Galvani, L.: Punti di contatto e scambi di concetti tra la statistica e la matematica. Giorn. Ist. Ital. Attuari 4, 402—414 (1933).

Galvani, Luigi: Sulla determinazione del centro di gravità e del centro mediano di una popolazione, con applicazioni alla popolazione italiana censita il 1° dicembre 1921. Metron 11, Nr 1, 17—47 (1933).

Roy, René: La demande dans ses rapports avec la répartition des revenus. Econometrica 1, 265—273 (1933).

Aus dem Paretoschen Einkommenverteilungsgesetz werden Folgerungen über den Verlauf von Nachfragekurven gezogen. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Tedeschi, B.: Riserva matematica, corso dei titoli e reddito effettivo dei capitali. Giorn. Ist. Ital. Attuari 4, 425—444 (1933).

Mazzoni, P.: Un metodo di caricamento industriale dei premi. Giorn. Ist. Ital. Attuari 4, 369—401 (1933).

Si dimostra la possibilità di costruire un sistema di tariffe, stabilendo dei caricamenti industriali dei premi con criteri razionali, tenendo conto degli scarti atten-