ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK
UND IHRE GRENZGEBIETE
7. Band, Heft 5 S. 193—240

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

Parry: Zum Lewisschen Aussagenkalkül. Erg. math. Kolloqu. H. **4,** 15—16 (1933).

This paper concerns the propostional algebra proposed by C. I. Lewis (see his Survey of Symbolic Logic, Univ. Calif. press 1918, Chapter V). This algebra is characterized by the presence of a symbol expressing „impossibility". The present author gives a method of determining the deducibility from Lewis's postulates of any formula, expressible in that symbolism, and such that no symbol of impossibility operates on the whole of a constituent expression containing another such symbol. If a postulate due to Becker be adopted also, then this solves completely the Entscheidungsproblem for the resulting algebra. *Curry* (State College).

Gödel: Über Unabhängigkeitsbeweise im Aussagenkalkül. Erg. math. Kolloqu. H. **4,** 9—10 (1933).

The author gives four propositions A, B, C, D from the algebra of propositions, such that the independence of D from A, B, C can be established by means of an infinite model (logical matrix), but not by means of a finite one. *H. B. Curry.*

Gödel, Kurt: Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls. Erg. math. Kolloqu. H. **4,** 39—40 (1933).

The author exhibits a system $\mathfrak{S}$ together with a scheme for defining in $\mathfrak{S}$ the primitive ideas the Heyting algebra of propositions, such that a necessary condition that a formula be deducible in the latter algebra is that its translation be deducible in $\mathfrak{S}$. This condition, the author states, is also probably sufficient; in particular the translation of the law of excluded middle is not proveable in $\mathfrak{S}$. The system consists of ordinary propostional algebra together with three postulates and a rule concerning a symbol B, where $B\,p$ means "p ist beweisbar"; the resulting algebra is equivalent to the system obtained by adding a postulate of Beckers to the Lewis system of strict implication. *Curry* (State College).

Gödel: Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie. Erg. math. Kolloqu. H. **4,** 34—38 (1933).

Let A represent the classical algebra of propositions; B the intuitionistic algebra as given by Heyting (S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1930,** 42—56). Let C be the set of postulates for arithmetic proposed by Herbrand (J. reine angew. Math. **166**; this Zbl. **3,** 49). Let A^* be the system obtained by adjoining C to the classical logical calculus (i. e. A plus the theory of apparent variables); similarly let B^* be obtained by adjoining C to the Heyting logic (e. c., pp. 42—71). Then it is of course true, when we identify the corresponding primitive constants of A and B (or A^* and B^*), that every true formula of B (or B^*) becomes a true formula of A (or A^*). The author shows, conversely, that it is possible to interpret the primitive entries of A (or A^*) in terms of those of B (or B^*) in such a way that every true formula of the former becomes, when interpreted, also true in the latter. Since A^* and B^* are typical formulations of arithmetic from the classical and intuitionistic points of view respectively, it follows that the intuitionistic arithmetic is not, formally considered, more restricted than the classical; and if the intuitionistic arithmetic is consistent, so also is the classical. *Curry.*

Skolem, Th.: Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems. Norsk Mat. Forenings Skr., II. s. Nr **1/12,** 73—82 (1933).

Man betrachte diejenigen Ausdrücke, die sich aufbauen aus: 1. Variablen $x, y, \ldots$, deren Wertbereich die natürlichen Zahlen sind, 2. $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation),

3. $>$ und $=$, 4. den Operationen des Aussagenkalküls, 5. den Quantifikatoren, bezogen auf Zahlvariable. (Kompliziertere Funktionen, wie z. B. x^y, $x!$, lassen sich durch $+$, $\cdot$ und die angeführten logischen Begriffe definieren.) Verf. beweist, daß es ein System N^* von Dingen mit zwei darin definierten Operationen $+$, $\cdot$ und mit zwei Relationen $>$, $=$ gibt, welches mit dem System N der natürlichen Zahlen nicht isomorph ist, für welches aber trotzdem alle mittels der eingangs erwähnten Symbole ausdrückbaren Sätze gelten, die für das System N gelten. Daraus folgt, daß es kein, nur die eingangs erwähnten Begriffe verwendendes (und daher überhaupt kein, bloß zahlentheoretische Begriffe verwendendes) Axiomensystem gibt, welches die Struktur der Zahlenreihe eindeutig festlegt, ein Resultat, das sich auch unschwer aus den Untersuchungen des Ref. in Mh. Math. Phys. **38**, 174 (vgl. dies. Zbl. **2**, 1) ergibt. Das vom Verf. konstruierte System N^* besteht aus den mittels der eingangs erwähnten Begriffe definierbaren Funktionen $f_i(x)$, zwischen denen eine $>$-Relation dadurch festgelegt wird, daß zunächst eine Funktion $g(x)$ bestimmt wird, derart daß für jedes Paar f_i, f_k entweder $f_i[g(x)] > f_k[g(x)]$ oder $f_i[g(x)] = f_k[g(x)]$ oder $f_i[g(x)] < f_k[g(x)]$ für fast alle x gilt. Die Operationen $+$, $\cdot$ für die f_i werden in der gewöhnlichen Weise definiert. Mit Hilfe anderer als der eingangs erwähnten Begriffe kann man natürlich Sätze bilden, die für N^*, aber nicht für N gelten, wofür einige Beispiele angeführt werden. *K. Gödel.*

Curry, H. B.: Apparent variables from the standpoint of combinatory logic. Ann. of Math., II. s. **34**, 381—404 (1933).

In Revision seines bisherigen Standpunktes führt der Verf. in die von ihm entwickelte kombinatorische Logik (Amer. J. Math. **52**, dies Zbl. **1**, 261, auch **4**, 387) Variable ein, und zwar werden die beiden den Russell-Whiteheadschen Symbolen $\hat{x}$, (x) entsprechenden Variablentypen —$[x]$, (x) — definiert. Die wichtigsten Regeln ihrer Anwendung werden formal hergeleitet, insbesondere das vom Verf. in Ann. of Math. **32** (dies. Zbl. **1**, 261) unformal bewiesene Substitutionsprinzip (dessen sonst übliche Formulierung nicht den Curryschen Anforderungen an Strenge genügt) und die den Zusammenhang zwischen der Operation (x) und der Implikation betreffenden Regeln. Bei der Herleitung der letzteren werden außer den Definitionen der Operationen $[x]$, (x) auch 2 Axiome mit Variablen (x) herangezogen. *Arnold Schmidt.*

Whitney, Hassler: Characteristic functions and the algebra of logic. Ann. of Math., II. s. **34**, 405—414 (1933).

Einige grundlegende Beziehungen aus der Algebra der Logik werden in der Sprache der „charakteristischen Funktionen" [$A(x) = 1$, wenn $x \in \mathfrak{A}$, sonst $A(x) = 0$] entwickelt. *Arnold Schmidt* (Göttingen).

Pannekoek, A.: Das Wesen des Naturgesetzes. Erkenntnis **3**, 389—400 (1933).

Der Verf. untersucht die Bedeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes für die Theorie der Naturgesetzlichkeit; er setzt sich dabei insbesondere mit der Auffassung von H. Reichenbach auseinander, daß im Rahmen der gegenwärtigen Physik sämtliche Naturgesetze als Wahrscheinlichkeitsgesetze anzusehen seien. — Pannekoek geht von dem Hinweis aus, daß Naturgesetze wie das Newtonsche Gravitationsgesetz eine bestimmte physikalische Größe als eindeutige Funktion gewisser anderer physikalischer Größen darstellen; er spricht im Hinblick auf diese formale Eigentümlichkeit von der „unbedingten Gültigkeit" des Gesetzes und sieht sich so vor die Frage gestellt, wie man an Hand empirischer Daten mit ihrer unvermeidlichen Unschärfe zu solchen streng gültigen Gesetzen gelangen könne. Er erblickt die Lösung in dem Gedanken, die Naturgesetze bezögen sich nicht auf reale empirische Gegebenheiten, sondern auf die abstrakten Begriffe, „die unsere Verstandestätigkeit als deren geistige Zusammenfassung gebildet hat", die nur geistige Existenz besitzen und denen kein reales Objekt entspricht. — Aus diesem Grundgedanken ergibt sich für den Verf., daß das Eintreten eines konkreten Ereignisses, das auf Grund gewisser Naturgesetze vorausberechnet wurde, keineswegs sicher sei: im konkreten Einzelfalle seien stets noch Umstände realisiert, von denen bei der Bildung der abstrakten Begriffe in den zugrunde gelegten Naturgesetzen abgesehen worden sei. Freilich seien diese unberücksichtigten Faktoren ebenfalls gewissen Naturgesetzen unterworfen, und je mehr derartige Gesetze man berücksichtige, desto genauere Voraussagen werden man machen können: „Wir haben also mit einer konvergenten Reihe zu tun, in der jedes Glied ein nach einem bestimmten Gesetz wirkender Einfluß ist." Diese Annahme (die Reichenbach angesichts der Ergebnisse der neueren Physik als nicht mehr haltbar bezeichnet hat) wird nicht